地缘政治过程的博弈论模型。第一部分。

O.A. Malafeyev，圣彼得堡国立大学 o.malafeev@spbu.ru

N.D.Redinskikh圣彼得堡国立大学redinskich@yandex.ru

V. F. Bogachev 区域经济研究所 俄罗斯科学院 vic-bogachev@mail.ru

关键词： 地缘政治、N-M 解、双人零和博弈、偏好、双矩阵博弈

摘要：本文研究地缘政治行为体在军事装备生产与销售中的相互作用。第2节将军事装备的生产视为双人零和博弈。在此类博弈中，博弈者的策略由行为体的信息状态决定。本文求得地缘政治行为体的最优策略。第3节讨论冲突过程，并确定每个地缘政治行为体的最优策略。

第1节 偏好

我们考虑购买军事技术（A1、A2型航空装备，M1、M2型海军装备）的主体。购买军事装备的主体分属不同群体，各群体会确立军事装备的采购偏好顺序。

表1。

群体编号	军事装备的偏好顺序 采购
1-st	A1，A2，M1，M2
2-d	A2，M1，A1，M2
3-th	M1，A1，M2，A2
4-th	A1，M2，A2，M1

我们还假设，编号为1、2、3、4的群体分别占购买军事装备的主体总数的5%、15%、35%、45%，且具有给定的偏好顺序。选择其他偏好顺序的主体未列于表1中。

让我们根据表1所示的优先级构建偏好逻辑排序，并选出最佳军事技术类型。按照相对多数规则对最佳军事技术进行投票时，A1以45%的得票率胜出，竞争者M1则获得35%的选票。比较潜艇与武装直升机时，A2获得的票数更多：65%对35%。接下来，M2以85%对15%的得票率战胜A2。最后，在比较M2和A1时，A1也胜出。所有投票信息均列于表2中。

根据相对多数规则投票选出最佳军事技术时，A1以45%的得票率胜出，核潜艇则获得35%的选票。在与M1的比较中，A2获得的票数更多：65%比35%。接下来，A1以85%比15%的得票率胜过A2。因此，A1在与M2的比较中胜出。所有投票信息见表2。

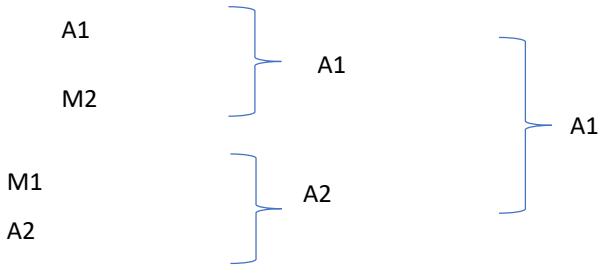
表2。

	A1	M1	A2	M2
A1		45%	80%	95%
M1	55%		35%	50%
A2	20%	65%		15%
M2	5%	50%	85%	

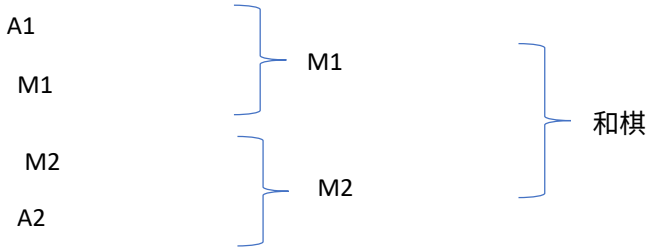
给定的投票方法会导致矛盾，无法得出任何结果。

我们来考虑另一种投票方法——奥林匹克体系。我们将军事装备划分为具有不同特征的子组。

利用表2，我们将军事技术划分为彼此没有共同特征的子组。我们考虑以下方案：

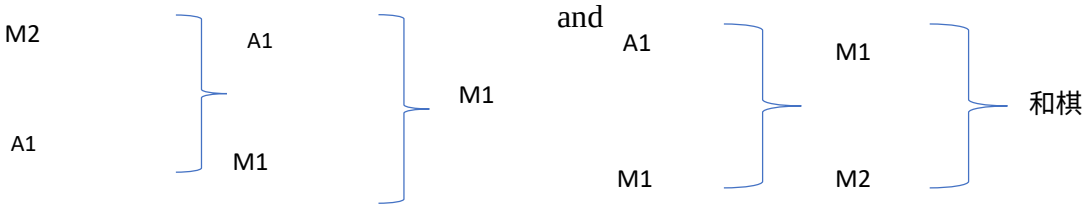


我们按照军事力量将军事技术组合成子组，则方案如下：



我们按照活动领域将军事技术组合起来。A1在航空装备中胜出，而海军装备之间则是和棋。接着，我们依次比较A1与M1和M2。

在这种比较中，某一类技术的迭代次数多于另一类，但这不会以任何方式影响结果。不过，结果取决于比较顺序：



让我们利用表2来定义最佳方法。我们不妨类比足球队之间比赛的常规积分榜。这里与真实比赛不同，胜者是根据所得分数客观确定的。所得分数与特定的比赛规则毫无关系。百分比就是对阵比赛中获得的分数。分数最高者获胜。于是分数分配如下：第1名——A1，220分；第2至第3名——M1和A1，各得140分；第4名——A2，100分。我们将弱势方从表中剔除。重新计算后，结果如下：A1获得

140分，位居第一；M1以105分位居第二，M2以55分位居第三。同样地，我们把最后一名“划掉”。在“决赛”中，M1和A1相遇，M1获胜，这与前几轮的结果相矛盾。通过对各种方法的比较可以看出，所介绍的方法未必能得出最终结果。让我们探讨“最佳”的概念，并作出一些修改、制定规则，这样就有可能判断哪种方法是最优的。

我们来介绍以下性质：

1. 内部稳定性是指一种军事装备相对于另一种军事装备不占优势的性质。也就是说，做出最优选择后，“较好与最好之间的对立”已不复存在。2. 外部稳定性是指，对于每一种不属于最优集合的军事装备，都能在最优集合中找到占优势的装备。

具有内部稳定性和外部稳定性这两种性质的最优集合通常称为诺伊曼—摩根斯腾解，或称 N-M 解。在本例中，N-M 解是在海军装备之间进行选择。该选择中，内部稳定性体现为两者各占 50%；外部稳定性则体现为战斗机由核潜艇应对，而 A2 则由 M2 应对。不存在其他 N-M 解，因为没有同时具备外部稳定性和内部稳定性的装备对。

第2节。零和博弈

假设两个地缘政治行为体计划生产军事装备。第一地缘政治行为体计划生产航空装备，第二地缘政治行为体计划只生产海军装备。此外，每个行为体只能生产一种类型的军事装备，这限制了各地缘政治行为体的利润。第一地缘政治行为体可以生产 A1 或 A2，第二地缘政治行为体可以生产 M1 或 M2。

第一地缘政治行为体可以生产A1型或A2型军事技术，第二地缘政治行为体可以生产M1型或M2型军事技术。所有四种类型军事装备的成本和市场价格均相同。假设同时生产两种类型的军事技术在经济上并不切实际。

假设生产的军事装备不会出口到地缘政治行为体所在地以外。根据专家预测，各类型军事技术均可售出一千件。两名行为体根据表2，在生产情况下分配军事技术的需求。

我们将行为体生产军事技术的过程表示为具有固定总收益的双人零和博弈。该博弈的博弈者是地缘政治行为体。博弈者的策略取决于各行为体掌握的信息。假设第二地缘政治行为体知道第一地缘政治行为体将生产哪种军事技术。当第一地缘政治行为体得知第二地缘政治行为体的意图时，就无法改变所生产军事装备的类型。

下面来描述这些假设中的策略。第一地缘政治行为体不了解第二地缘政治行为体的意图。它可以采取两种策略之一：选择 A1 或 A2。在这种情况下，第二地缘政治行为体处于两种信息状态之一：

1）知道第一地缘政治行为体选择了 A1
2）知道第一地缘政治行为体选择了 A2

因此，对于第二方的每种信息状态，都有两种策略：

1）针对生产 A1 或 A2 而生产 M1；2）针对生产 A1 而生产 M1，并针对生产 A2 而生产 M2；3 1 4 1 2 1 1，）针对生产 A 或 A 而生产 M ）针对生产 A 而生产 M，并针对生产 A2 而生产 M2

5) 针对生产 A1 而生产 M2，并针对生产 A2 而生产 M1；6) 针对生产 A1 而生产 M2，针对生产 A2－M2

我们将表中的8种不同情形列出。

表3

策略 of 第二方 / 第一方的策略	A1 – M1 A2 – M1	A1 – M1 A2 – M2	A1 – M2 A2 – M1	A1 – M2 A2 – M2
A1	A1 – M1 45:55	A1 – M1 45:55	A1 – M2 95:5	A1—M2 95:5
A2	A2 – M1 65:35	A2—M2 15:85	A2—M1 65:35	A2 –M2 15:85

我们将表3改写为矩阵形式，只注明第一个数值（因为第一地缘政治行为体售出的装备百分比决定了第二方售出的百分比，两者相加为100%）

$$\begin{pmatrix} 45 & 45 & 95 & 95 \\ 65 & 15 & 65 & 15 \end{pmatrix} \quad (1)$$

第一地缘政治行为体的策略对应矩阵的行，第二地缘政治行为体的策略对应矩阵的列。

我们来求收益矩阵为（1）的矩阵博弈中博弈者的最优策略。如果第一地缘政治行为体选择矩阵中的某一行时关注的是其保证收益，那么它会假设第二地缘政治行为体选择该行中元素最小的那一列。

我们先引入两个定义：

1. 将一行中各元素的最小值里最大的那个称为最大最小值。相应地，将玩家的策略称为最大最小策略。

2. 将一列中各元素的最大值里最小的那个称为最小最大值，相应地，将策略称为最小最大策略。

这些定义的引入原因很容易解释。第一地缘政治行为体选择自己能够获得的最大收益是有利的。然而，第一地缘政治行为体应当明白，其收益受到限制，因此应选择一种策略，使第二地缘政治行为体施加限制所造成的损失最小。也就是说，应在各行的最小值中选择最大的策略。对第二地缘政治行为体也可以作类似处理。

在这种情况下，第一地缘政治行为体选择包含元素45的第一行，而第二地缘政治行为体选择包含元素45的第二列。

第一地缘政治行为体的最大最小策略具有以下稳定性：该行为体偏离最大最小策略，并不能增加其保证收益。因此，第一地缘政治行为体没有理由偏离最大最小策略。第二地缘政治行为体偏离最小最大策略，也无法减少其可能遭受的损失。

在所考察的博弈中，由选择矩阵的第一行和第二列所形成的局面，使任何参与者都不愿偏离。因此，形成的局面是一个均衡。由此可见，要使零和博弈存在均衡，收益矩阵中的最大最小值与最小最大值相等是必要且充分的。

因此，第一地缘政治行为体的最优策略是生产A1型军事技术，第二地缘政治行为体的最优策略是生产M1型军事技术。

第3节 无信息冲突过程。混合策略。

我们来考察第2节中的问题。针对第2节中的问题条件，我们引入以下假设：两个地缘政治行为体都不知道对方生产军事技术的意图，并且各有两种选择：第一地缘政治行为体可以生产A1型或A2型航空装备。第二地缘政治行为体可以生产M1型或M2型海军装备。这些选择就是地缘政治行为体的策略。

由此得到的博弈是矩阵博弈。这个博弈有 2x2=4 个局势，其收益矩阵形式如下：

$$\begin{array}{c} \\ A1 \\ A2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} M1 & M2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 45 & 95 \\ 65 & 15 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (2)$$

第一地缘政治行为体选择矩阵的行，第二地缘政治行为体选择矩阵的列。矩阵 (2) 是矩阵 (1) 的一部分。前一个博弈的均衡局势在矩阵 (2) 中不存在，因为矩阵 (1) 的第二整列在矩阵 (2) 中被省略了。矩阵 (2) 中也不存在另一个均衡局势，而且最大最小值不同于最小最大值。最大最小最优性原则无法以这种形式实现，因为它在第2节的博弈中正是以这种形式实现的。

在这样的博弈中，第一地缘政治行为体可以获得超过 45 的收益。在这种情况下，第二地缘政治行为体有意削弱第一地缘政治行为体的能力。在所考虑的局势中，这并非不可能实现。

让我们通过在策略选择中引入随机性，扩展博弈者（地缘政治行为体）的策略集合。这里所说的随机性，是指博弈者能够预先计算某些概率并据此作出决策。

为简化起见，假设该概率事件只发生一次。

例如，用随机变量表示第一地缘政治行为体的收益。如果它以概率 p 选择第一行，那么以概率 1-p 选择第二行。第二地缘政治行为体选择第一列。由矩阵 (2) 可知，该收益以概率 p 取值 45，以概率 1-p 取值 65。

为简单起见，假设这种依赖关系是线性的，则第一地缘政治行为体的期望收益为：

$$45p+65(1—p). \qquad (3)$$

类似地，如果第一地缘政治行为体采取上述做法，而第二地缘政治行为体选择矩阵 (2) 的第二列，那么第一地缘政治行为体的期望收益为：

$$95p+15(1—p). \qquad (4)$$

假设第一地缘政治行为体的行为与之前完全相同，而第二地缘政治行为体决定在选择中引入随机性。它以概率 q 选择第一列，以概率 1-q 选择第二列。假设无论第一地缘政治行为体选择其第一种策略还是第二种策略，概率 q 都不变。两个地缘政治行为体的选择相互独立。由此可知，第一地缘政治行为体的期望收益为：

$$[45p+65(1—p)]\, q + [95p+15\,(1—p)]\,(1—q),$$

or

$$15+80p+50q—100pq \qquad (5)$$

现在我们来考察由第一和第二地缘政治行为体参与的新博弈。第一方的策略是以概率 p 选择第一行，$0 \le p \le 1$。第一行为体的策略在于

选择一个非负数 p，且 p 不大于 1，该数表示选择矩阵第一行的概率。第二地缘政治行为体的策略是以概率 q 选择第一列。表达式 (5) 描述了在选择概率 p 和 q 后所形成情形下的收益函数值。

这种随机的、概率性的行为体策略称为混合策略。注意，对于 p=1 或 p=0，第一地缘政治行为体的策略是确定地选择矩阵的第一行或第二行。因此，所有旧策略都包含在新的混合策略之中。这类策略称为纯策略。

类似地，我们引入第二地缘政治行为体的混合策略，其中也包含其纯策略。地缘政治行为体的混合策略由一对数 (t, 1-t) 表示，即以概率 t 选择第一个纯策略，以概率 1—t 选择第二个纯策略。

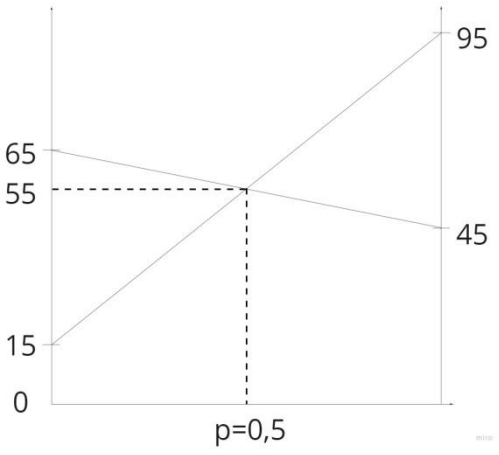
下面来考察表达式 (5) 的最小最大值。我们来求第一地缘政治行为体的最小收益的最大值。将 (5) 写成如下形式:

15+80p+(50—100p)q. (6)

对于 $p \le \frac{1}{2}$，(6) 中 q 的系数非负，因此第二地缘政治行为体会选择 q 的最小值，即 0，以降低第一地缘政治行为体的收益。此时，第一地缘政治行为体的收益等于 15+80p。为了使该表达式最大化，第一地缘政治行为体应在此区域内取允许的最大 p，即 1 2。此时其收益为 $15 + 80 * \frac{1}{2} = 55$。

对于 $p \ge \frac{1}{2}$，式（6）中 q 的系数不是正数，因此第二地缘政治行为体选择 q=1 更有利。第一地缘政治行为体的收益等于 65—20p，并且第一地缘政治行为体选择 p 中最小的值，即 $p \ge \frac{1}{2}$，也就是数字 1 2 本身，同时获得 55 的期望收益。在这两种情况下，行为体的最大收益相等，因为在此处最大值均在同一个 p=$\frac{1}{2}$ 值处取得。

让我们在图上展示上述推理。



最大最小值为 55，此时第一地缘政治行为体采用混合策略（$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$）

现在让我们求最小最大值。将式（5）变换如下:

15+50q+(80—100q)p,

在 $q \le 0.8$ 的情况下，最大值在 p=1 处取得，并且等于:

15+50q+80—100q=95—50q,

如果 $q \ge 0.8$，则最大值在 p=0 处取得，并且等于 15+50q。

因此，对第二地缘政治行为体而言，宜采取 q = 0.8（即混合策略（8 10，2 10），其最小最大值等于 18+50*0,8 =55。

因此，第一地缘政治行为体的混合策略（$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$）和第二地缘政治行为体的混合策略（8 10，2 10）都是各自的最优策略。55 是博弈值。

因此，第一地缘政治行为体的最优策略是以 0.5 的概率生产航空装备。第二地缘政治行为体的最优策略是以 0.8 的概率采用 M1 型生产技术，并以 0.2 的概率生产 M2。第一方的预期成功率为 55%，第二方的成功率为 45%。

需要指出的是，如果掌握第一地缘政治行为体的计划信息，第二地缘政治行为体可以生产所选类型的 60% 的装备，而不是 45%。

参考文献

1. Zenkevich N.A., Petrosyan L.A., YAng D.V.K. 管理中的动态博弈及其应用。— 圣彼得堡：2009年。— 415页。2. Petrosyan L.A., Tomskij G.V. 动态博弈及其应用 — 列宁格勒：1982年 — 252页。3. Petrosyan L.A., Murzov N.V. 力学博弈论问题 // 立陶宛数学文集 — 1966年 — 第VI卷，第3期 — 第423-433页。4. Petrosyan L.A., Zenkevich N.A. 稳定合作原则 // 数学博弈论及其应用 — 2009年 — 第1卷，第1期 — 第106-123页。5. Petrosyan L.A., Kuzyutin D.V. 扩展式博弈：最优性与稳定性 — 圣彼得堡：2000年。— 292页。6. Irina Zaitseva, Oleg Malafeyev, Yuliya Marenchuk, Dmitry Kolesov and Svetlana Bogdanova 运输目标中劳动力资源分配的竞争机制 // 《物理学杂志：会议系列》— 2018年 — 第 1172 卷 — https://doi.org/10.1088/1742- 6596/1172/1/012089。7. Neverova E.G., Malafeyef O.A. 反腐败机构与腐败团伙之间的交互模型 // AIP会议论文集 — 2015年 — 第450012页。8. Malafeyev O., Awasthi A., Zaitseva I., Rezenkov D., Bogdanova S. 银行运行动态模型 // AIP会议论文集 — 2018年 — 第020042页。9. Kolokoltsov V.N., Malafeyev O.A., 理解博弈论：竞争与合作多主体系统分析导论 — 世界科技出版公司：2010年 — 286页。10. Zaitseva I., Malafeev O., Strekopytov S., Bondarenko G., Lovyannikov D. 基于劳动力资源最终成果的区域经济发展数学模型 // AIP会议论文集 — 2018年 — 第020011页。11. Malafeyev O.A., Nemnyugin S.A., Ivaniukovich G.A. 社会经济动态随机模型 // V.I. Zubov纪念“稳定性与控制过程”国际会议论文集（SCP）— 2015年 — 第483-485页。12. Malafeev O.A., Redinskih N.D., Gerchiu A.L. 腐败分子网络布局优化模型 // 载于：《节能建筑的建造与运营（考虑腐败因素的理论与实践）》（被动房）。— 博罗维奇：2015年。— 第128-140页。13. Malafeev O.A., Koroleva O.A., Vasil'ev YU.G. 腐败拍卖师参与的第一价格拍卖中的折中解 // 载于：《节能建筑的建造与运营（考虑腐败因素的理论与实践）》（被动房）。— 博罗维奇：2015年。— 第119-127页。14. Malafeev O.A., Koroleva O.A., Neverova E.G. 存在腐败可能性的第一价格拍卖模型 // 腐败系统与过程建模导论。— 斯塔夫罗波尔：2016年。— 第96-102页。15. Drozdov G.D., Malafeev O.A. 保险过程多主体交互建模，专著。— 圣彼得堡：圣彼得堡国立服务与经济大学，2010年。— 179页。16. Malafeyev O., Saifullina D., Ivaniukovich G., Marakhov V., Zaytseva I. 含腐败因素的运输问题多主体交互模型 // AIP会议论文集 — 2017年 — 第170015页。17. Malafeyev O., Farvazov K., Zenovich O., Zaitseva I., Kostyukov K., Svechinskaya T. 电站投资建设项目实施的地缘政治模型 // AIP会议论文集 — 2018年 — 第020066页。

18. Malafeev O.A., Nemnyugin S.A. 社会经济动态随机模型 // 载于：《稳定性与控制过程》。第三届国际会议论文集—2015年—第433-434页。19. Zaitseva I., Poddubnaya N., Malafeyev O., Vanina A., Novikova E. 求解社会经济系统中的动态指派问题 //《物理学杂志：会议系列》—2019年—第012092页。20. Malafeyev O., Zaitseva I., Pavlov I., Shulga A., Sychev S. Badin G. 企业生命周期模型：内部和外部因素的影响 // AIP会议论文集—2020年—第420027页。21. Malafeyev O.A., Rylow D., Pichugin Y.A., Zaitseva I. 腐败代理人检测的统计方法 // AIP会议论文集—2018年—第100014页。22. Malafeyev O.A., Rylow D., Zaitseva I., Ermakova A., Shlaev D. 带备选项淘汰的多阶段投票模型 // AIP会议论文集—2018年—第100012页。23. Malafeyev O.A., Redinskikh N.D., Nemnyugin S. A., Kolesin I.D., Zaitseva I.V. 设备预防性维修计划的优化问题 // AIP会议论文集—2018年—第100013页。24. Kolesin I., Malafeyev O., Andreeva M., Ivanukovich G. 腐败：考虑官员的心理拟态 // AIP会议论文集—2017年—第170014页。25. Malafeyev O., Rylow D., Novozhilova L., Zaitseva I., Popova M., Zelenkovskii P. 分散物料干燥过程的博弈论模型 // AIP 会议论文集 —2017 年 — 第 020063 页。26. Malafeyev O., Lakhina J., Redinskikh N., Smirnova T., Smirnov N., Zaitseva I. 生产设施选址的数学模型 //《物理学杂志：会议系列》—2019年—第012090页。27. Zaitseva I., Ermakova A., Shlaev D., Malafeyev O., Strekopytov S. 劳动力培训的博弈论模型 //《理论与应用信息技术杂志》—2018年—第96卷第4期—第978-983页。28. Malafeev O.A., Ahmadyshina A.R., Demidova D.A. 考虑腐败因素的房地产服务市场招标模型 // 载于：《节能建筑的建造与运营（理论与实践：考虑腐败因素）》（被动房）—2015年—第161-168页。29. Malafeev O.A., Redinskih N.D. 腐败影响下企业发展效率的随机评估与预测 // 载于：《稳定性与控制过程》。第三届国际会议论文集—2015年—第437-438页。30. Titarenko M.L., Ivashov L.G., Kefeli I.F., Malafeev O.A. 等。《从东亚到北非的欧亚不稳定弧与地区安全问题》，合著专著—圣彼得堡：NP-Print工作室—2013年—576页。31. Malafeev O.A. 依赖运动动态博弈中ε-均衡局势的存在性 //《苏联计算数学与数理物理》—1974年—第14卷第1期—第88-99页。32. Malafeev O.A., Kolesin I.D., Kolokol'cov V.N. 等。腐败系统与过程建模导论，合著专著，第1卷。—斯塔夫罗波尔：“Tesera”出版社—2016年—224页。33. Malafeyev O., Kupinskaya A., Awasthi A., Kambekar K.S. 中国和印度市场中的随机游走与市场效率 //《统计、优化与信息计算》—2019年—第7卷第1期—第1-25页。34. N. N. Vorob'ev 博弈论。—莫斯科：Znanie出版社，1976年。—64页。35. 2. N. N. Vorob'ev 博弈论的现状 //《数学科学进展》。—1970年。—第25:2(152)期。—第81–140页

.

36. N. N. Vorob'ev 合作博弈 // 《概率论及其应用》。—1967年。—第12:2期。—第289–30页。37. N. N. Vorob'ev 强否定命题的构造演算 // 苏联科学院数学研究所论文集72。—1964年：第195–227页。38. N. N. Vorob'ev 关于随机转移族 // 《概率论及其应用》。—1964年—第9:1期—第53-71页。39. N. N. Vorob'ev 矩阵极值代数 // 苏联科学院通报—1963年—第52:1期—第24–27页。40. N. N. Vorob'ev 相容测度族及其延拓 // 《概率论及其应用》。—1962年 169 41 7 2 153 - 第 : – 页 – 。41. N. N. Vorob'ev 独立性与马尔可夫性的解析刻画 // 《概率论及其应用》。—1961年—第6:4期—第422–426页。42. N. N. Vorob'ev 合作博弈中的稳定局势 // 苏联科学院通报—1960年—第131:3期—第493–49页。43. N. N. Vorob'ev 博弈论。经济控制论学家讲义。列宁格勒，1974年，160页。44. N. N. Vorob'ev, 《有限非合作博弈》, 《数学科学进展》, 14:4(88)（1959年）, 第21–56页。45. Zaitseva I., Dolgopolova A., Zhukova V., Malafeyev O., Vorokhobina Y. 经济系统模型中劳动力均衡的数值计算方法 // AIP会议论文集—2019年—第450060页。46. Malafeev O.A. 以测度为系数的非合作n人博弈中纳什均衡的存在性 // 应用数学与计算科学通讯—1995年—第5卷第4期—第689-701页。47. Malafeev O.A., Redinskih N.D., Smirnova T.E. 含腐败的项目投资网络模型 // 《控制过程与稳定性》—2015年—第2卷第1期—第659-664页。48. Kirjanen A.I., Malafeyev O.A., Redinskikh N.D. 合作互动中的产业发展：滞后过程的均衡与稳定性 // 《统计、优化与信息计算》—2017年—第5卷第4期—第341-347页。49. Troeva M.S., Malafeev O.A. 多参与者经济扩散冲突模型中的均衡 // 载于：《动力学、优化与控制》。丛书《力学与控制过程问题》 —2004 年 — 第 146-153页。50. Pichugin Yu.A., Malafeev O.A. 企业破产风险评估 // 载于：《动力系统：稳定性、控制与优化》。报告摘要—2013年—第204-206页。51. Malafeev O.A., Redinskih N.D., Alferov G.V., Smirnova T.E. 第一价格拍卖模型中的腐败 // 载于：《海洋与航空航天系统控制》（UMAS-2014）—2014年—第141-146页。52. Kefeli I.F., Malafeev O.A. 关于多主体交互的全球地缘政治过程数学模型 // 《地缘政治与安全》—2013年—第2期（22）—第44-57页。53. Kolokoltsov V.N., Malafeyev O.A. 腐败与博弈防御：一种平均场博弈方法 // 国际博弈论杂志—2018年—第47卷第3期—第977-999页。54. Malafeyev O.A., Redinskikh N.D. 外部介质作用下物质体状态变更控制问题的妥协解 // AIP 会议论文集 —2018 年 — 第 080017 页。55. Malafeyev O.A., Rylow D., Kolpak E.P., Nemnyugin S.A., Awasthi A. 腐败动态模型 // AIP会议论文集—2017年—第170013页。56. Zaitseva I., Ermakova A., Shlaev D., Malafeyev O., Kolesin I. 考虑投资项目延期的劳动力重新分配建模 // IEEE电力、控制、信号与仪器工程国际会议—2017年—第68-70页。

57. Malafeyev O., Onishenko V., Zubov A., Bondarenko L., Orlov V., Petrova V., Kirjanen A., Zaitseva I. 交通网络中的最优选址问题作为投资项目：一种数值方法 // AIP会议论文集 – 2019年 - 第450058页。58. Vlasov M.A., Glebov V.V., Malafeyev O.A., Novichkov D.N. 漂移空间中电子束的实验研究 //《苏联通信技术与电子学杂志》– 1986年 - 第31卷，第3期 - 第145页。59. Malafeev O.A. 关于具有相关运动的动态博弈 //《苏联科学院通报》– 1973年 - 第213卷，第4期 - 第783-786页。60. Malafeev O.A., Redinskih N.D., Alferov G.V. 含腐败成分的拍卖模型 //《彼尔姆大学学报》。系列：数学、力学、信息学 – 2015年 - 第1期（28）- 第30-34页。61. Malafeev O.A. 多参与者冲突控制过程，物理与数学科学博士学位论文摘要 / A. A. ZHdanov列宁格勒国立大学。列宁格勒 – 1987年 - 44页。62. Ivanyukovich G.A., Malafeyev O.A., Zaitseva I.V., Kovshov A.M., Zakharov V.V., Zakharova N.I. 关于辐射测量与地质测试之间回归方程参数的评估 // JOP会议系列：创新技术的计量支持 - 2020年 - 第32079页。63. Malafeev O.A. 具有独立运动的双人非合作微分博弈中均衡局势的存在性 //《列宁格勒大学学报》。系列1：数学、力学、天文学 – 1980年 - 第4期 - 第12-16页。64. Malafeev O.A. 竞争动态一般模型中的随机均衡 // 收录于：竞争与不确定条件下社会经济动态的数学建模与预测 - 2004年 - 第143-154页。65. Malafeev O.A., Eremin D.S. 经济的竞争性线性模型 // 收录于：《控制过程与稳定性》– 2008年 - 第425-435页。66. Malafeyev O.A., Redinskikh N.D. 地缘政治行为体发展战略的质量评估 // CNSA 2017 7973986 67 2017 10 1109 2017 会议录 – - http://dx.doi.org/ . /CNSA. . . Ivashov L.G., Kefeli I.F., Malafeev O.A. 全球北极博弈及其参与者 // 地缘政治与安全 - 2014年 - 第1期（25）- 第34-49页。67. Kolokoltsov V.N., Malafeev O.A. 腐败的均值场博弈模型 // arxiv.org https://arxiv.org/abs/1507 03240 68 . . Zaitseva I.V., Malafeyev O.A., Zakharov V.V., Zakharova N.I., Orlova A.Yu. 按投资区域动态分配劳动力资源 //《物理学杂志：会议系列》。– 2020年 - 第012073页。70. Malafeev O.A. 多参与者非合作微分博弈中均衡局势的存在性 //《列宁格勒大学学报》。系列1：数学、力学、天文学。– 1982年 - 第13期 - 第40-46页。71. Malafeev O.A., Petrosyan L.A. 有障碍平面上的简单追逃博弈 //《受控系统》– 1971年 - 第9期 - 第31-42页。72. Malafeyev O., Galtsov M., Zaitseva I., Sakhnyuk P., Zakharov V., Kron R. QIUK平台上交易算法的分析 // 论文集 - 2020年第二届控制系统、数学建模、自动化与能效国际会议 – 2020年 - 第305-311页。73. Malafeev O.A. N人稳定非合作博弈 //《列宁格勒大学学报》。系列1：数学、力学、天文学。– 1978年 - 第4期 - 第55-58页。74. Malafeev O.A., CHernyh K.S. 竞争环境中企业生命周期的预测模型 // 收录于：竞争与不确定条件下社会经济动态的数学建模与预测。– 2004年 - 第239-255页。

75. Drozdov G.D., Malafeev O.A. 海关业务建模 – 圣彼得堡：SPbGUSE出版社 – 2013年 - 255 页。76. Pichugin YU.A., Malafeev O.A., Alferov G.V. 机器人操纵机构设计问题中的参数评估 // 收录于：《稳定性与控制过程》。第三届国际会议论文集 – 2015年 - 第141-142页。77. Malafeev O.A., Zajceva I.V., Komarov A.A., SHvedkova T.YU. 商业组织与反腐败部门之间的腐败互动模型 // 收录于：《应用于腐败系统与过程建模的线性代数》– 2016 年 - 第 342-351 页。78. Malafeev O.A., Strekopytova O.S. 腐败官员与客户互动的博弈论模型：心理学方面 // 收录于：《腐败系统与过程建模导论》。Malafeev O.A.等著。O. A. Malafeev博士、教授主编的合著专著 – 2016年。第134-151页。79. Zaitseva I.V., Malafeyev O.A., Zakharov V.V., Smirnova T.E., Novozhilova L.M. 网络流控制数学模型 // IOP会议系列：材料科学与工程 – 2020年 - 第012036页。80. Malafeev O.A., Petrosyan L.A. 多参与者微分多准则博弈 // 《列宁格勒大学学报》。系列1：数学、力学、天文学 – 1989年 - 第3期 - 第27-31页。81. Malafeev O.A., Kefeli I.F. 国防安全保障中的若干问题 // 地缘政治与安全 – 2013年 - 第3期（23）- 第84-92页。82. Malafeev O.A., Redinskih N.D. 腐败混合网络动力学的随机分析 // 收录于：《非线性控制系统的稳定性与振荡》（皮亚特尼茨基会议）– 2016年 - 第249-251页。83. Malafeev O.A., Farvazov K.M. 国家和市政采购系统中腐败活动指标的统计分析 // 收录于：《腐败系统与过程建模导论》– 2016年 - 第209-217页。84. Malafeev O.A., Zajceva I.V., Zenovich O.S., Rumyancev N.N., Grigor'eva K.V., Ermakova A.N., Rezen'kov D.N., SHlaev D.V. 腐败组织与反腐败机构互动时的资源分配模型 // 收录于：《腐败系统与过程建模导论》– 2016年 - 第102-106页。85. Malafeyev O., Parfenov A., Smirnova T., Zubov A., Bondarenko L., Ugegov N., Strekopytova M., Strekopytov S., Zaitseva I. 生产者间合作的博弈论模型 // 收录于：AIP会议论文集 – 2019年 - 第450059页。86. Neverova E.G., Malafeev O.A., Alferov G.V. 反腐败措施的非线性管理模型 // 收录于：《稳定性与控制过程》。第三届国际会议论文集 – 2015年 - 第445-446页。87. Malafeev O.A., Marahov V.G. 二十一世纪金融与经济组成部分领域公民社会源泉与驱动力的演化机制 // 收录于：《马克思与俄罗斯哲学的未来》。Busov S.V., Dudnik S.I.等著 - 2016年。第112-135页。88. Malafeev O.A., Borodina T.S., Kvasnoj M.A., Novozhilova L.M., Smirnov I.A. 关于竞争对腐败环境影响的博弈论问题 // 收录于：《腐败系统与过程建模导论》– 2016年 - 第88-96页。89. Malafeev O.A., Zajceva I.V., Koroleva O.A., Strekopytova O.S. 与可能腐败的官员委托人签订合同的模型 // 收录于：《腐败系统与过程建模导论》– 2016年 - 第114-124页。

90. Malafeev O.A., Sajfullina D.A. 腐败因素影响下交通问题中的多主体交互 // 收录于：《腐败系统与过程建模导论》– 2016年 – 第218-224页。91. Malafeev O.A., Neverova E.G., Smirnova T.E., Miroshnichenko A.N. 国家管理系统中腐败因素识别过程的数学模型 // 收录于：《腐败系统与过程建模导论》– 2016年 – 第152-179页。92. Malafeev O.A., Koroleva O.A., Neverova E.G. 可能存在腐败的第一价格拍卖模型 // 收录于：《腐败系统与过程建模导论》– 2016年 – 第96-102页。93. Malafeev O.A., Neverova E.G., Petrov A.N. 通过反腐败部门检查识别腐败事件的过程模型 // 收录于：《腐败系统与过程建模导论》– 2016年 – 第106-114页。94. Malafeev O.A., Parfenov A.P. 腐败网络中主体之间多主体交互的动态模型 // 收录于：《腐败系统与过程建模导论》– 2016年 – 第55-63页。95. Malafeev O.A., Andreeva M.A., Gus'kova YU.YU., Mal'ceva A.S. 不同信息条件下移动目标的搜索 // 收录于：《腐败系统与过程建模导论》– 2016年 – 第63-88页。96. Zajceva I.V., Popova M.V., Malafeev O.A. 考虑条件变化的企业间劳动力资源最优分配问题的提出 // 收录于：《区域创新经济与工业政策（EKOPROM-2016）》– 2016年 – 第439-443页。97. Malafeev O.A., Novozhilova L.M., Redinskih N.D., Rylov D.S., Gus'kova YU.YU. 腐败收益分配的博弈论模型 // 收录于：《腐败系统与过程建模导论》– 2016年 – 第125-134页。98. Malafeev O.A., Salimov V.A., SHarlaj A.S. 存在腐败因素时银行评估客户信用状况的算法 //《彼尔姆大学学报》。系列：数学、力学、信息学 – 2015年 – 第1期（28）– 第35-38页。99. Kefeli I.F., Malafeev O.A. 合作博弈理论视角下欧亚经济联盟、上海合作组织和金砖国家利益融合的问题 //《地缘政治与安全》– 2015年 – 第 3 期（ 31 ） – 第 33-41 页。100. Kefeli I.F., Malafeev O.A., Marahov V.G. 等。二十一世纪社会变革的哲学策略 – 圣彼得堡：圣彼得堡国立大学出版社 – 2014年 – 144页。101. Malafeev O.A., Andreeva M.A., Alferov G.V. 平面N扇区区域中的搜索与拦截博弈论模型 //《控制过程与稳定性》– 2015年 – 第2卷，第1期 – 第652-658页。102. Zajceva I.V., Malafeev O.A. 运用数学方法研究腐败过程与系统 //《机械制造、教育与经济中的创新技术》– 2017 年 – 第 3 卷，第 1-1 期（ 3 ） – 第 7-13 页。103. Kolchedancev L.M., Legalov I.N., Bad'in G.M., Malafeev O.A., Aleksandrov E.E., Gerchiu A.L., Vasil'ev YU.G. 节能建筑的建造与运营（考虑腐败因素的理论与实践）（被动房）– 博罗维奇：圣彼得堡建筑工业科技协会 – 2015 年 – 170 页。104. Malafeev O.A., Novozhilova L.M., Kvasnoj M.A., Legalov I.N. 考虑腐败因素，在节能建筑生产中应用网络分析方法 // 收录于：《节能建筑的建造与运营（考虑腐败因素的理论与实践）（被动房）》– 2015年 – 第146-161页。

105. Malafeyev O., Awasthi A., Zaitseva I., Rezenkov D., Bogdanova S. 银行运行动态模型 // AIP会议论文集。国际电气、电子、材料与应用科学会议 – 2018年 – 第020042页。106. Malafeev O.A. 腐败系统与过程建模文献综述，第一部分 // 收录于：《腐败系统与过程建模导论》– 2016年 – 第9-17页。107. Asaul A.N., Lyulin P.B., Malafeev O.A. 组织作为生命系统的交互数学建模 // 赫梅利尼茨基国立大学学报：经济科学 – 2013年 – 第6-2期（206）– 第215-220页。108. Awasthi A., Malafeev O.A. 印度股票市场是否有效——孟买证券交易所指数的综合研究 // arxiv.org - https://arxiv.org/abs/1510 03704 109 . . Malafeev O.A., Demidova D.A. 联邦反腐败部门中的腐败企业交互过程建模 // 收录于：《腐败系统与过程建模导论》– 2016年 – 第140-152页。110. Malafeev O.A., Chernyh K.S. 公司的发展数学建模 // 《俄罗斯经济复兴》– 2005年 – 第2期 – 第23页。111. Kulakov F.M., Alferov G.V., Malafeev O.A. 操纵机器人执行系统的运动学分析 // 力学与控制问题：非线性动力系统 – 2014年 – 第46期 – 第31-38页。112. Kulakov F.M., Alferov G.V., Malafeev O.A. 操纵机器人执行系统的动力学分析 // 力学与控制问题：非线性动力系统 – 2014年 – 第46期 – 第39-46页。113. Zajceva I.V., Malafeev O.A., Stepkin A.V., CHernousov M.V., Kosoblik E.V. 经济系统中发展周期性的建模 // 《科学展望》– 2020年 – 第10期（133）– 第173-176页。114. Bure V.M., Malafeev O.A. 金融冲突的若干博弈论模型 // Nova数学、博弈论与代数期刊。– 1996年 – 第6卷，第1期 – 第7-14页。115. Malafeev O.A., Redinskih N.D., Parfenov A.P., Smirnova T.E. 第一价格拍卖模型中的腐败 // 收录于：《创新发展的制度与机制：世界经验与俄罗斯实践》– 2014年 – 第250-253页。116. Marahov V.G., Malafeev O.A. 哲学家与数学家的对话：“关于二十一世纪社会变革数学建模的哲学层面” // 收录于：《认识哲学与生命创造。论文集》– 2014年 – 第 279-292 页。