arXiv:2304.07578v1 [math.ST] 15 Apr 2023

多元正则变差下边际预期损失的推断

S. A. Padoan、S. Rizzelli 和 M. Schiavone

2023年4月18日

摘要

边际预期损失无疑是最受欢迎的系统性风险度量之一。研究其极端行为对于防范严重的全球金融市场下行风险尤为重要。在此背景下，统计推断结果依赖于二元极值方法，而忽略了构成市场的大量金融机构之间的极端依赖。为将其纳入考量，我们提出了一种基于多元正则变差理论的推断程序。我们推导出极端边际预期损失的近似公式，并据此得到一个估计量及其偏差校正版本。随后，我们证明了它们具有渐近正态性，从而可以进一步推导置信区间。模拟结果表明，新估计量的表现显著优于现有估计量，且置信区间非常准确。对金融收益的应用展示了所提出推断程序的实用性。统计结果还扩展到一般的 β-混合情形，从而适用于带有重尾创新项的常用时间序列模型。

1 引言

在当今互联互通的世界中，系统性风险度量对于评估全球金融体系的风险至关重要。一个简单的相干风险度量示例是系统的预期损失（ES），即在发生系统性亏损事件的条件下，基于金融市场收益计算的预期损失（例如Acharya 等人，2017）。从统计学角度来看，令 X_j 表示第 j家金融机构（银行）的负收益随机变量（下文为简洁起见称为收益），其分布为 F_j，其中 $j \in \{1, \ldots, d\}$，并令 $R = X_1 + \ldots + X_d$ 表示市场收益。那么，金融体系的预期损失为

$$\Theta(\tau) = \mathbb{E}(R | R > Q_R(\tau)),$$

其中，对于随机变量 X，$Q_X(\tau) = U_X(1/(1-\tau))$ 是 τ 分位数，也称为置信水平为 τ 的风险价值，其中 $\tau = 1-p$，而 $p \in (0, 1)$ 表示较小的超越概率；并且 $U_X(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X \geq 1 - t^{-1}\}$，其中 $t > 1$。边际预期损失（MES）是一个与金融市场的预期损失密切相关的量，在系统性风险度量过程中发挥着关键作用。MES 是市场下行确实发生时个体银行的预期股权损失（例如 Acharya 等人，2017）。其定义为

$$\theta_j(\tau) = \mathbb{E}\left(X_j \middle| R > Q_R(\tau)\right), \quad j \in \{1, \ldots, d\}, \tag{1.1}$$

并且满足以下性质： $\Theta(\tau) = \sum_{j \leq d} \theta_j(\tau)$，对于任意 $\tau \in (0,\ 1)$。因此，它是监管政策中一项特别有用的工具，可用于确定个体机构对整个金融体系风险的贡献，进而要求其增加资本（例如 Tarashev 等人，2010年）。

在实际金融分析中，评估极端边际预期损失（对应于置信水平 τ 趋近于 1）对于了解严重金融市场下行的风险至关重要。要恰当地计算该指标，必须量化 $\boldsymbol{X}$各组成部分之间的依赖程度。为此，我们在多元正则变差框架下研究边际预期损失的行为（例如Resnick，2007年）。

我们的首项贡献是：当 $\tau \uparrow 1$ 时，为公式（1.1）提供一个简洁的闭式近似表达式。这一结果与 Joe 和 Li（2011）论文中的发现一致；该文作者研究了更一般的情形，但没有给出可直接用于边际预期损失统计估计的显式公式。在密度层面满足一些标准多元正则变差条件时，我们确定了当 $\tau \uparrow 1$ 时该近似方法逼近边际预期损失的速度。文献中已提出多种极端边际预期损失估计量，例如 Cai 等（2015）、Cai 等（2017）、Di Bernardino 和 Prieur（2018）以及 Goegebeur 等（2021）；此外，Daouia 等（2018）还提出了一种基于期望分位数的版本。然而，这些方法都依赖二元极值理论，而非适用于任意维数的恰当多元理论。我们的第二项贡献是基于上述近似公式提出一种边际预期损失估计量，并证明其渐近正态性。通过模拟研究，我们表明，与 Cai 等（2015）提出的两种估计量相比，我们的估计量表现更优；这两种估计量是标准文献中的基准。与竞争估计量相比，我们的方法在高维情形下优势尤为明显。我们进一步提出该估计量的偏差校正版本，并再次证明其渐近正态性。结果表明，该版本优于竞争估计量，且在有效样本比例从 2% 到 30% 的较大范围内表现稳定。这一结果尤其有用，因为它简化了实际应用中众所周知的有效样本比例选择难题。极限正态分布中的方差项若被低估，会严重影响据此构造的置信区间的准确性。因此，我们提出对最初推导的置信区间进行调整，使其在有效样本比例的较大范围内具有接近名义水平的覆盖概率。现有关于极端边际预期损失行为的大多数结果均针对独立数据，近期的 Davison 等人 (2022) 一文除外。作为最后一项贡献，我们将估计量的渐近结果推广到由 β-混合重尾严格平稳多元时间序列构造的情形。我们的方法已集成至可在 CRAN 上获取的 R软件包ExtremeRisks 中。

本文结构安排如下。第2 节介绍统计背景以及我们针对边际预期损失的主要近似公式。第3 节讨论边际预期损失的估计，并介绍一种用于构造置信区间的有限样本程序。第4 节通过模拟研究检验这些方法，并在第5节将其应用于金融数据。本文最后在第6节讨论理论结果在时间序列背景下的推广。在线补充材料包含证明以及真实数据分析的更多结果。

2 统计模型

设 $\boldsymbol{X} = (X_1,\ \ldots,\ X_d)^\top$ 是定义在 $[0,\infty)^d$ 上的 d 维随机向量。考虑将其变换为径向 $R = \|\boldsymbol{X}\|$ 分量和角向 $\boldsymbol{W} = R^{-1}\boldsymbol{X}$ 分量，其中 $\|\cdot\|$ 是 $[0,\infty)^d$ 上的任意范数。令 $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{w} \in [0,\infty)^d\colon\ \|w\| = 1\}$ 为 $[0,\infty)^d$ 上的单位球面

相对于 $\|\cdot\|$。我们假设 $\boldsymbol{X}$ 的分布 F 具有指数为 $1/\gamma$ 和 $\gamma>0$ 的正则变差，记作 $F\in\mathcal{RV}(1/\gamma)$，即存在定义在 $\mathscr{E}:=[\mathbf{0},\infty]\setminus\{\mathbf{0}\}$ 上的拉东测度 ν，使得对于任意满足 $\nu(\partial B)=0$ 的相对紧博雷尔集 $B\subset\mathscr{E}$，有

$$\frac{\mathbb{P}(t^{-1}\boldsymbol{X}\in B)}{\mathbb{P}(R>t)}\to\nu(B),\quad t\to\infty \tag{2.1}$$

且其满足齐次性 $\nu(xB)=x^{-1/\gamma}\nu(B)$，对任意 Borel 集 $B\subset\mathscr{E}$以及任意 $x>0$ (例如，Jessen 和 Mikosch，2006 年；Resnick，2007 年，第 6 章）。结果（2.1）等价于 $\mathbb{P}(R>x)$ 具有正则变差指数 $1/\gamma$ 且

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{W}\in B|R>t)\to H(B),\quad t\to\infty,$$

对任意 Borel 集 $B\subset\mathcal{S}$，其中 $H(\partial B)=0$，且 H 是定义在 $\mathcal{S}$上的概率测度。我们将边际角平均记作

$$\overline{w}_j=\int_{\mathcal{S}}w_jH(\mathrm{d}\boldsymbol{w}).$$

上述两个测度之间的关系如下：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-F(t\boldsymbol{x})}{1-F(t\mathbf{1})}=\frac{\nu\left([\mathbf{0},\boldsymbol{x}]^{\complement}\right)}{\nu\left([0,\mathbf{1}]^{\complement}\right)}=\frac{\gamma^{-1}}{\nu\left([0,\mathbf{1}]^{\complement}\right)}\int_{\mathcal{S}}\max_{1\le j\le d}\left(\frac{w_j}{x_j}\right)^{1/\gamma}H(\mathrm{d}\boldsymbol{w})$$

对所有 $\boldsymbol{x}\in\mathscr{E}$。若 $\gamma=1$，则 ν 和 H 分别是典范指数测度和角概率测度，例如见Resnick (2007年，定理 6.1）、de Haan 和 Ferreira (2006年，第 6.1.3 章）以及Falk 等人 (2010年，第 4.2 章）。

现在我们可以陈述第一个主要概率结果。为简便起见，在下文中假设上述框架中的 $\|\cdot\|$ 是 L_1- 范数，记作 $\|\cdot\|_1$。

命题2.1。设 $\boldsymbol{X}$ 为一个随机向量，其分布满足 $F\in\mathcal{RV}(1/\gamma),\gamma>0$。对于 $1\le i,\ j\le d$ 还假设

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathbb{P}(X_i>x)}{\mathbb{P}(X_j>x)}=c_{i,j}\in(0,\infty).$$

那么，对于任意 $j\in\{1,\ldots,d\}$，我们有

$$\lim_{\tau\to1^-}\frac{\theta_j(\tau)}{Q_R(\tau)}=\frac{\overline{w}_j}{1-\gamma}.$$

由此结果可得以下近似

$$\theta_j(\tau)\approx Q_R(\tau)\frac{\overline{w}_j}{1-\gamma},\quad\tau\uparrow1.$$

下一个定理进一步假设密度层面满足二阶条件，并量化上述收敛结果的速度。具体而言，假设 F 存在密度 f，且 H 存在有界连续密度 $h:\ \mathcal{S}\to(0,\ \infty)$，使得

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{\boldsymbol{w}\in\mathcal{S}}\left|\frac{t^df(t\boldsymbol{w})}{\mathbb{P}(R>t)}-\frac{h(\boldsymbol{w})}{\gamma}\right|=0.$$

因此，ν 也存在满足 $q(t\boldsymbol{x})=t^{-(d+1/\gamma)}q(\boldsymbol{x})$ 的密度函数 q；对于所有满足 $\boldsymbol{x}\in\mathscr{E}$ 的 $t>0$，以及所有属于 $\mathscr{E}$ 的博雷尔 σ-域的集合 B，我们有

$$\nu(B)=\int_{\boldsymbol{x}\in B}q(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\frac{1}{\gamma}\int_{\{r>0,\boldsymbol{w}\in\mathcal{S}:\boldsymbol{x}\in B\}}r^{-1/\gamma-1}h(\boldsymbol{w})\mathrm{d}r\mathrm{d}\boldsymbol{w}.$$

接下来给出所需的其他二阶条件。

条件 2.2。 对于某个 $\rho < 0$ 以及任意 $j \in \{1, \ldots, d\}$:

(a) 存在一个速率函数 $A_{X_j}(t)$，使得 $\lim_{t\to\infty} t^{-\rho} A_{X_j}(t) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ and

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1-F_{X_j}(tx)}{1-F_{X_j}(t)} - x^{-1/\gamma}}{A_{X_j}(t)} = x^{-1/\gamma} \frac{x^\rho - 1}{\rho};$$

(b) 存在一个非零函数 λ_j，其在远离零的有界集合上可积，且 $\sup_{\boldsymbol{w}\in\mathcal{S}} |\lambda_j(\boldsymbol{w})| < \infty$，并且存在一个函数 $q_j(\boldsymbol{x}) \propto r^{-d-1/\gamma} h(\boldsymbol{w})$，使得

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\frac{t^d f(t\boldsymbol{x})}{\mathbb{P}(X_j>t)} - q_j(\boldsymbol{x})}{A_{X_j}(t)} = \lambda_j(\boldsymbol{x}), \forall\, \boldsymbol{x} \in (0,\infty)^d,$$

and

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\boldsymbol{w}\in\mathcal{S}} \left| \frac{\frac{t^d f(t\boldsymbol{w})}{\mathbb{P}(X_j>t)} - q_j(\boldsymbol{w})}{A_{X_j}(t)} - \lambda_j(\boldsymbol{w}) \right| = 0.$$

定理 2.3. 若满足条件 2.2，则对每个 $j \in \{1, \ldots, d\}$，都存在一个常数 $c_j \in \mathbb{R}$，使得当 $\tau = 1 - 1/t$ 时，

$$A_{X_j}^{-1}(U_{X_j}(t)) \left(\frac{\theta_j(\tau)}{Q_R(\tau)\frac{\overline{w}_j}{1-\gamma}} - 1 \right) \to c_j, \quad t \to \infty.$$

3 推断

设 $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的独立同分布副本样本，其分布满足 $F \in \mathcal{RV}(1/\gamma)$，其中 $\gamma > 0$。目标是估计 $\theta_j(\tau)$，对任意 $j \in \{1, \ldots, d\}$，其对应的极端水平为 τ_n，满足当 $n \to \infty$ 时 $\tau_n \to 1$，特别是当 $n \to \infty$ 时 $n(1-\tau_n) \to a > 0$。此任务通过适当结合 γ 和 Q_R 的估计来完成，这些估计由数据的所谓有效样本比例 k_n/n 得到。特别地，我们假设当 $n \to \infty$ 时 $k_n \to \infty$，且 $k_n = o(n)$。

我们提出的估计 $\theta_j(\tau_n)$方法如下。首先，我们使用 Hill估计量（Hill，1975）估计尾指数 γ

$$\widehat{\gamma}_n = \sum_{i=1}^{k_n} \frac{i}{k_n} \ln \frac{R_{(n-i+1,n)}}{R_{(n-i,n)}},$$

其中，$R_{(1,n)} \le \cdots \le R_{(n,n)}$是样本 R_1，……，R_n的 n阶次序统计量。令

$$\widehat{Q}_R(\tau_n) = R_{(n-k_n,n)} \left(\frac{n(1-\tau_n)}{k_n} \right)^{-\widehat{\gamma}_n},$$

为径向分位数在水平 τ_n 处的 Weissman 估计量（Weissman，1978年），并且

$$\widehat{\overline{w}}_{j,n} = \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_{i,j}}{R_i} \mathbb{1}\left(R_i > R_{(n-k_n,n)}\right)$$

为中间水平$1 - k_n/n$处第 j个角分量均值的估计量。最后，$\theta_j(\tau_n)$的一个估计量为

$$\widehat{\theta}_j(\tau_n) = \widehat{Q}_R(\tau_n) \frac{\widehat{\overline{w}}_{j,n}}{1-\widehat{\gamma}_n}.$$

在条件 2.2下，半径 F_R 的分布属于所谓的 Hall-Welsh 类（Hall 和 Welsh，1985），即它可以表示为

$$U_R(t) = C_R t^{\gamma}\left(1 + \frac{A_R(t)}{\rho_R} + o(t^{\rho_R})\right), \quad A_R(t) = \beta_R t^{\rho_R},$$

其中，A_R 和 ρ_R 分别是径向分量的速率函数和二阶参数，$C_R > 0$、$\beta_R \neq 0$ 和 $\rho_R = \gamma\rho$，见补充材料中的引理 B.6。接下来，我们考虑尾指数估计量和径向分位数 Weissman 估计量的以下调整后或偏差校正版本，

$$\widehat{\gamma}_n^{(\mathrm{Adj})} := \widehat{\gamma}_n\left(1 - \frac{\widehat{\beta}_{R,n}}{1-\widehat{\rho}_{R,n}}\left(\frac{n}{k_n}\right)^{\widehat{\rho}_{R,n}}\right),$$

$$\widehat{Q}_R^{(\mathrm{Adj})}(\tau) := R_{(n-k_n,n)}\left(\frac{n(1-\tau_n)}{k_n}\right)^{-\widehat{\gamma}_n^{(\mathrm{Adj})}} \exp\left(C_\tau(n;\widehat{\beta}_{R,n},\ \widehat{\rho}_{R,n})\right),$$

其中$\widehat{\beta}_{R,\ n} \equiv \beta_R(s_n)$ 和$\widehat{\rho}_{R,\ n} \equiv \widehat{\rho}_R(s_n$分别是 β_R 和 ρ_R 在Gomes 和 Pestana (2007年) 第 2.1 和 2.2 节中的估计量，其中 s_n 是另一个不同于 k_n 的中间序列，且满足 $s_n \to \infty$ 当 $n \to \infty$ 时，以及 $s_n = o(n)$ 和

$$C_\tau(n;\widehat{\beta}_{R,n},\widehat{\rho}_{R,n}) := \widehat{\beta}_{R,n}\left(\frac{n}{k_n}\right)^{\widehat{\rho}_{R,n}} \frac{(k_n/(n(1-\tau_n)))^{\widehat{\rho}_{R,n}} - 1}{\widehat{\rho}_{R,n}}.$$

基于这些改进后的估计量，我们现在可以定义以下 $\theta_j(\tau)$的调整后估计量，

$$\widehat{\theta}_j^{(\mathrm{Adj})}(\tau_n) := \widehat{Q}_{R,n}^{(\mathrm{Adj})}(\tau_n)\frac{\widehat{\overline{w}}_{j,n}}{1-\widehat{\gamma}_n^{(\mathrm{Adj})}},$$

对于任意 $j \in \{1,\ldots,d\}$。MES 估计量的未调整版本和调整后版本均满足渐近正态性。

定理 3.1。假设条件 2.2 成立。还假设 $k_n = o(n)$,$\sqrt{k_n}A_R(n/k_n) \to \lambda_R \in \mathbb{R}$ 当 $n \to \infty$时。于是，对于任意 $j \in \{1,\ldots,d\}$，当 $n \to \infty$

$$\frac{\sqrt{k_n}}{\log(k_n/n(1-\tau_n))}\log\frac{\widehat{\theta}_j(\tau_n)}{\theta_j(\tau_n)} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\frac{\lambda_R}{1-\rho_R}, \gamma^2\right).$$

此外，如果 $s_n = o(n)$ 且 $\sqrt{s_n}A_R(n/s_n) \to \infty$ 当 $n \to \infty$时，那么当 $n \to \infty$

$$\frac{\sqrt{k_n}}{\log(k_n/n(1-\tau_n))}\log\frac{\widehat{\theta}_j^{(Adj)}(\tau_n)}{\theta_j(\tau_n)} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0,\gamma^2\right).$$

利用第一个结果，我们可以得到 $\theta_j(\tau_n)$ 的近似 $(1-\alpha)100\%$ 置信区间，形式如下

$$\left[\widehat{\theta}_j(\tau_n)\left(\frac{n(1-\tau_n)}{k_n}\right)^{\widehat{b}_n + z_{1-\alpha/2}\widehat{\gamma}_n/\sqrt{k_n}};\ \widehat{\theta}_j(\tau_n)\left(\frac{n(1-\tau_n)}{k_n}\right)^{\widehat{b}_n - z_{1-\alpha/2}\widehat{\gamma}_n\sqrt{k_n}}\right], \qquad (3.1)$$

其中，偏差项 $\lambda_R/(1-\rho_R)$ 通过 $\sqrt{k_n}\widehat{b}_n$ 估计，其中$\widehat{b}_n = \widehat{\gamma}_n\widehat{\beta}_{R,n}(n/k_n)^{\widehat{\rho}_{R,n}}/(1-\widehat{\rho}_{R,n})$，且 z_p 是标准正态分布的 p 分位数。在实践中，$\widehat{\ }$个观测值 β_R、$_n$ 和 $\widehat{\rho}_R$、$_n$ 使用 R 包 evt0（Manjunath 等人，2013）计算。或者，也可以考虑第二个渐近结果，从而得到一个相似的区间，但其中 $\widehat{\theta}_j(\tau_n)$ 被 $\widehat{\theta}_j^{(\mathrm{Adj})}(\tau_n)$ 替代，且 $\widehat{b}_n$ 置为零。在

实践中，这两个区间的表现相近，不过特别是当 k_n取值较大时，调整后的版本表现更好。对方差项 γ^2 的低估会导致定理3.1 中上述区间的覆盖概率较差。为改善区间的表现，可以进一步进行调整，例如采用沿用 Gomes 和 Pestana (2007年) 第 287 页建议的方法。由于这种方法在此情境下未能取得预期效果，我们提出了偏差校正和方差校正区间。我们的新调整是对置信区间（3.1）稍作改进的版本，其推导基于以下简单考虑。首先，我们发现，与另外两个贡献更为显著的分量相比，元素 $w_{j,\ n}$ 对估计量 $\theta_j(\tau_n)$ 总变异性的贡献很小。接下来，我们考察以下展开式

$$
\begin{aligned}
\log \frac{\widehat{\theta}_j(\tau_n)}{\theta_j(\tau_n)} \frac{\overline{w}_j}{\widehat{\overline{w}}_j} &= (\widehat{\gamma}_n - \gamma)\left(\frac{\sqrt{k_n}}{c_n} + \frac{1}{1-\gamma}\right) + \log \frac{R_{n-k_n+1,n}}{U(n/k_n)} + \mathrm{O}_p\left((\gamma - \widehat{\gamma}_n)^2\right) \\
&= (\widehat{\gamma}_n - \gamma)\left(\log \frac{\sqrt{k_n}}{c_n} + \frac{1}{1-\gamma}\right) + \frac{R_{n-k_n+1,n}}{U(n/k_n)} - 1 \\
&+ \mathrm{O}_p\left(\left(\frac{R_{n-k_n+1,n}}{U(n/k_n)} - 1\right)^2\right) + \mathrm{O}_p\left((\gamma - \widehat{\gamma}_n)^2\right) \\
&= (\widehat{\gamma}_n - \gamma)\left(\frac{\sqrt{k_n}}{c_n} + \frac{1}{1-\gamma}\right) + \frac{R_{n-k_n+1,n}}{U(n/k_n)} - 1 + \mathrm{O}_p\left(1/k_n\right).
\end{aligned}
$$

此处为 $c_n = \overline{\sqrt{k_n}/(\log(k/n(1-\tau_n)))}$。在此基础上，我们得到（近似地）

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(c_n \log \frac{\widehat{\theta}_j(\tau_n)}{\theta_j(\tau_n)} \frac{\overline{w}_j}{\widehat{\overline{w}}_j}\right) &= \frac{\lambda_R}{1-\rho_R}\left(1 + \frac{c_n}{\sqrt{k_n}} \frac{1}{1-\gamma}\right), \\
\mathrm{Var}\left(c_n \log \frac{\widehat{\theta}_j(\tau_n)}{\theta_j(\tau_n)} \frac{\overline{w}_j}{\widehat{\overline{w}}_j}\right) &= \gamma^2\left(1 + \frac{2}{1-\gamma} \frac{c_n}{\sqrt{k_n}} + 2\frac{c_n^2}{k_n}\right)
\end{aligned}
$$

and 随后，我们提出针对 $\theta_j(\tau_n)$ 的改进近似 $(1-\alpha)100\%$ 置信区间

$$
\left[\widehat{\theta}_j(\tau_n)\left(\frac{n(1-\tau_n)}{k_n}\right)^{\widehat{b}_n^* + z_{1-\alpha/2}\widehat{v}_n/\sqrt{k_n}};\ \widehat{\theta}_j(\tau_n)\left(\frac{n(1-\tau_n)}{k_n}\right)^{\widehat{b}_n^* - z_{1-\alpha/2}\widehat{v}_n\sqrt{k_n}}\right], \qquad (3.2)
$$

其中

$$
\widehat{b}_n^* = \widehat{b}_n\left(1 + \frac{c_n}{\sqrt{k_n}} \frac{1}{1-\widehat{\gamma}_n}\right), \quad \widehat{v}_n = \widehat{\gamma}_n\left(1 + \frac{2}{1-\widehat{\gamma}_n} \frac{c_n}{\sqrt{k_n}} + 2\frac{c_n^2}{k_n}\right)^{1/2}.
$$

将 $\widehat{\theta}_j(\tau_n)$ 替换为 $\widehat{\theta}_j^{(\mathrm{Adj})}(\tau_n)$，并将 $\widehat{b}_n^*$ 设为零，即可得到该区间的另一种形式。

4 模拟研究

通过大量模拟研究，我们展示了所提出估计量及其相应置信区间的有限样本表现。模拟实验基于三种不同的二元分布、一种四元分布和一种十五元分布。我们考虑了 3 种阿基米德 Copula 族以及一种椭圆族。回顾一下，生成元为 φ 的阿基米德 Copula 是定义在 d 维超立方体上的分布，其形式为

$$
C(\boldsymbol{u}) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \cdots + \varphi(u_d)), \quad \boldsymbol{u} \in [0,1]^d,
$$

其中，$\varphi:(0,1]\to[0,\infty)$ 是一个凸且严格递减的函数，满足 $\varphi(1)=0$ 且 $\varphi(t)\to\infty$as $t\to 0$ （详情参见 Joe，2014）。我们重点关注以下几类。Clayton，其生成元为 $\varphi(u)=\delta^{-1}(u^{-\delta}-1)$，其中 $\delta>0$，$\delta\to 0$ 和 $\delta\to\infty$ 分别表示 $\boldsymbol{u}$ 个分量相互独立和完全依赖的情形。Gumbel，其生成元为 $\varphi(u)=(-\log(u))^{\delta}$，其中 $\delta\geq 1$，$\delta=1$ 和 $\delta\to\infty$ 分别表示独立和完全依赖的情形。Joe（Joe，2014，第 4.7 章），其生成元为 $\varphi(u)=-\log(1-(1-u)^{\delta})$，其中 $0\leq\delta\leq 1$，$\delta=1$ 和 $\delta\to 0$ 分别表示独立和完全依赖的情形。

在模拟中，我们考虑以下具体模型。

(i) [Clayton-Half-t 模型] 设 $\boldsymbol{U}$ 服从依赖参数为$\delta=3$的Clayton联结函数。取 $X_j=F^{\leftarrow}((U_j+1)/2)$，其中 $j=1$为2，而 F服从自由度为 $5/2$ 的Student-t 分布。于是，$\boldsymbol{X}$ 的边缘分布为尾指数 $\gamma=2/5$的半-t 分布。(ii) [Gumbel-Burr模型] 设 $\boldsymbol{U}$ 服从依赖参数为$\delta=0.8$的Gumbel联结函数。取 $X_j=F^{\leftarrow}(U_j)$，其中 $j=1$为2，而 F服从参数为$\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{3}$的Burr分布。于是，$\boldsymbol{X}$ 的边缘分布为尾指数 $\gamma=1/3$的Burr分布。(iii) [Student-t-Burr模型] 设 $\boldsymbol{U}$ 服从依赖参数为 $\omega=0.8$的Student-t 联结函数。取 $X_j=F^{\leftarrow}(U_j)$，其中 $j=1$为2，而 F服从参数为2和2的Burr分布。于是，$\boldsymbol{X}$ 的边缘分布为尾指数 $\gamma=1/4$的Burr分布。(iv) [Gumbel-Half-t-Burr-Fr´échet-Pareto模型] 设 $\boldsymbol{U}$ 服从依赖参数为 $\delta=0.7$的Gumbel联结函数。取 $X_j=F_j^{\leftarrow}(U_j)$，其中 $j=1$为.....、4，而 F_j在 $j=1$为.....、4时，分别服从半-t、Burr、Fr´échet和Pareto分布，且这些分布的尾指数均为 $\gamma=1/5$。(v) [Student-t-Half-t] 设 $\boldsymbol{U}$ 服从Student-t 联结函数，其 $d=15$ 和自由度为4，依赖参数沿对角线取1，非对角线取$\omega_{i,j}=0.4$，其中 $i=2$为.....、15，且 $j>i$。取 $X_j=F_j^{\leftarrow}((U_j+1)/2)$，其中 $j=1$为.....、15，而 F_j服从自由度为4的Student-t 分布。于是，$\boldsymbol{X}$ 的边缘分布为尾指数 $\gamma=1/4$的半-t 分布。

$\boldsymbol{X}$ 的各个分量在模型 (i) 下渐近独立，而在其他所有模型下渐近相关，即在前一种情况下，对于所有$1\leq i\neq j\leq d$，$F_j(X_j)>u|F_i(X_i)>u(\to 0)$as $u\to 1$，而在后一种情况下，该极限为正。对于每个模型，我们模拟 $M=50$，000个样本，每个样本的样本量为 $n=500$，并使用我们的估计量 $\theta_j(0.998)$和$\widehat{\theta}_j^{\mathrm{Adj}}(0.998)$，计算 $\theta_j(\tau_n)$的$\widehat{\ }$估计值，其中 $\tau_n=1-1/500=0.998$。具体而言，对于模型 (i)-(iii) 和 (v)，我们计算与 $j=1$ 对应分量的边际预期损失（MES）估计值；对于模型 (iv)，则计算与 $j=1$、.....、4对应分量的边际预期损失估计值。$\theta_j(0.998)$的真实值无法以闭式形式获得，因此我们通过蒙特卡罗模拟计算了这些值（见表1）。为便于比较，我们还使用以下估计量估计边际预期损失（MES）

$$\widehat{\theta}^{(\mathrm{Emp})}(\tau_n) = \left(\frac{k}{n(1-\tau_n)}\right)^{\widehat{\gamma}_n}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}X_1\mathbb{I}(R_i>R_{(n-k),n}),$$

$$\widehat{\theta}^{(\mathrm{Cai})}(\tau_n) = \left(\frac{k}{n(1-\tau_n)}\right)^{\widehat{\gamma}_n}X_{(n-k)}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}(R_i>R_{(n-k),n})\left\{\frac{n-\mathrm{rank}(X_i)+1}{k}\right\}^{-\widehat{\gamma}_n},$$

提出于Cai 等人（2015），我们将它们称为竞争估计量。利用得到的估计值，我们计算偏差平方、方差以及

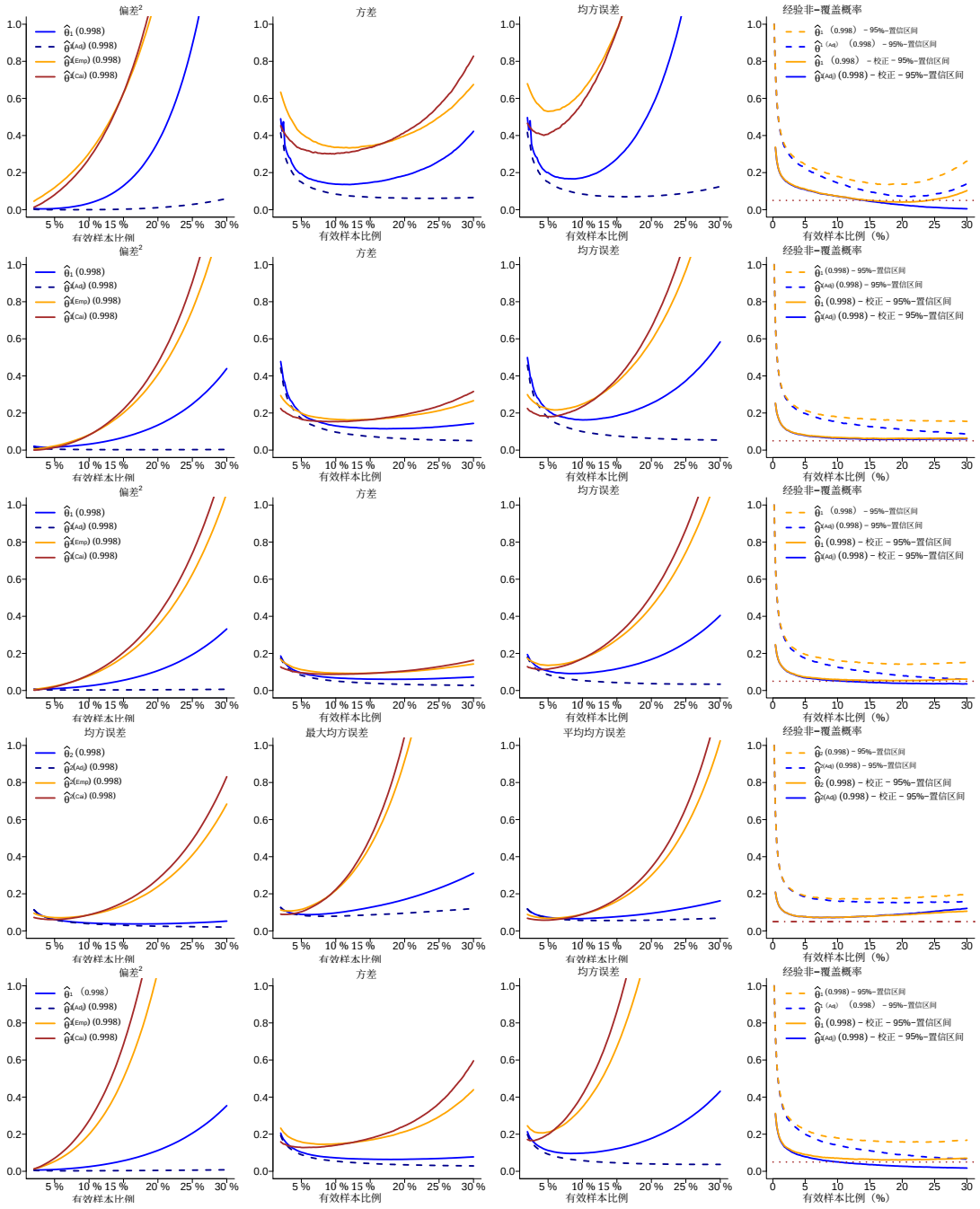


图 1：不同 k_n/n 值下，我们的估计量（蓝色实线和点线）与竞争估计量（棕色实线和黄色实线）的偏差平方、方差和均方误差（从左起前三列），结果来自模型 (i)–(v)（从上到下）。最右侧一列报告了上一节定义的四个置信区间在 5% 名义水平下的未覆盖概率。

所有估计量的均方误差（MSE）。我们还通过蒙特卡罗近似，计算上一节讨论的置信区间在名义覆盖水平为 95% 时的覆盖概率。

图 1从左至右各列分别展示偏差平方、方差、均方误差和覆盖概率，这些结果是在有效样本量 k_n 介于 n 的 1% 至 30% 之间时计算得出的。模型 (i)–(v) 的结果按从上到下的顺序排列。最左侧的前三列展示了

模型	$\theta_1(0.998)$	$\theta_2(0.998)$	$\theta_3(0.998)$	$\theta_4(0.998)$
(i)	16.58656	–	–	–
(ii)	10.09849	–	–	–
(iii)	5.270914	–	–	–
(iv)	6.965690	3.783465	3.875493	3.869831
(v)	6.738795	–	–	–

表1：通过大量蒙特卡罗模拟得到的 $\theta_j(0.998)$ 值。

使用我们的估计量 $\widehat{\theta}_j$ 及其调整后版本 $\widehat{\theta}_j^{(\mathrm{Adj})}$ 所得的结果，分别以蓝色实线和虚线表示；竞争估计量 $\widehat{\theta}^{(\mathrm{Emp})}$ 和 $\widehat{\theta}_j^{(\mathrm{Cai})}$ 所得的结果则分别以黄色和棕色实线表示。对于模型 (iv)，边缘分布各不相同，因此为节省篇幅，第四行仅报告部分结果。从左至右依次为：针对 Burr 边缘分布的边际预期损失估计量的均方误差，以及针对四种边缘分布的边际预期损失估计量计算得到的最大均方误差和平均均方误差。最右侧一列以 5% 名义水平展示了置信区间 (3.1) 及其调整后版本的未覆盖概率（分别以黄色和蓝色虚线表示），以及校正后的置信区间 (3.2) 及其调整后版本的未覆盖概率（分别以黄色和蓝色实线表示）。红色水平虚线表示 5% 名义水平。对于模型 (iv)，结果针对的是 Burr 边缘分布对应的边际预期损失置信区间。

根据偏差平方、方差和均方误差，在所有考察的模型中，我们提出的估计量均优于竞争估计量。与偏差平方和边际预期损失相关的优势尤为显著，在考察高维模型时也是如此。这一结果在意料之中，因为与竞争估计量不同，我们的估计量包含了一个对 $F_{\boldsymbol{X}}$ 尾部依赖的估计量（以及对尾指数和径向分位数的估计量），从而显著改善了最终的边际预期损失估计值。我们估计量的偏差校正版本在均方误差方面表现出色，因为它大幅降低了偏差项和变异性。就覆盖概率而言，公式（3.1）中的区间表现不佳：其最低未覆盖概率约为 20%，且 k_n/n 在所有模型中介于 15% 和 20% 之间。对于较小的 k_n值，其调整后版本表现相同；但对于较大的 k_n 值，表现有所改善（当 $k_n/n = 20\%$ 时，模型 (i) 的覆盖概率约达到名义水平；当 $k_n/n = 30\%$ 时，模型 (ii)、(iii) 和 (v) 的覆盖概率也约达到名义水平。而模型 (iv) 的表现仍然不佳，其最低未覆盖概率约在 $k_n/n = 20\%$ 时取得）。最后，公式（3.2）中我们提出的改进区间达到了预期效果。对于模型 (i)–(iii) 和 (v)，当 $k_n/n \geq 10\%$ 时，未覆盖概率达到名义水平，并保持稳定。在最困难的情形——模型 (iv)（所有边际分布均不同）——中，当 $k_n/n \in [3\%,\ 18\%]$, 时，未覆盖概率约达到名义水平，之后结果略有变差。对于模型 (i)、(iii) 和 (v)，当 $k_n/n \geq 15\%$ 时，该区间的调整后版本略比未调整版本保守，因此不能作为有效替代方案。总之，我们的估计量远优于现有竞争估计量，而我们表现最佳的置信区间具有很高的准确性。

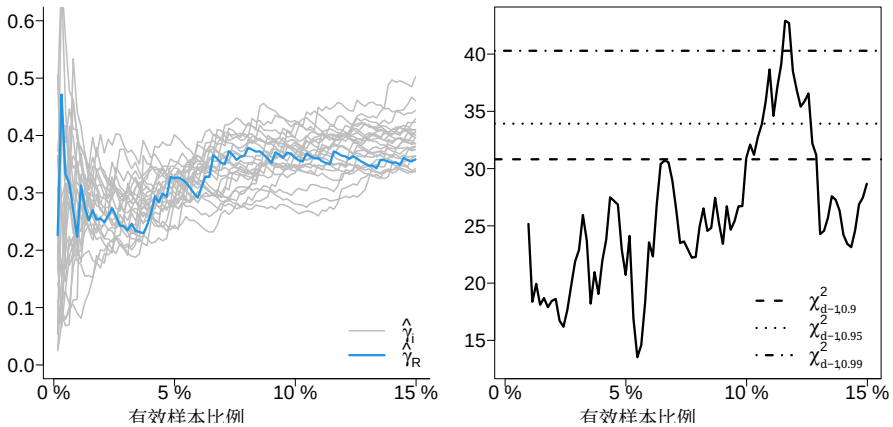


图2：个别银行分布的估计尾指数（左图，灰线）及其加权和（浅蓝线）。用于检验个别银行分布的尾指数是否相等的检验统计量值（右图实线）。虚线、点线和点划线分别表示 10%、5% 和 1% 的临界值。两者均针对 $[1\%, 15\%]$ 的有效样本比例计算。

5 边际预期损失推断在宏观审慎政策中的应用

宏观审慎监管旨在维护整个金融体系的稳定。为此，需要防范系统性风险，并采取相应措施保护经济免受金融危机冲击。边际预期损失主要用于根据金融机构对市场风险的贡献对其进行排序。因此，对金融体系影响最大的银行被归类为系统重要性金融机构，需要接受更严格的监测和监管（例如 Acharya 和 Steffen，2013）。边际预期损失还有助于直接量化经济下行期间各机构预期损失的资本金额，并据此确定避免资本金不足所需的额外资源。

我们关注2010年5月5日至2022年3月31日期间，来自美国和加拿大、被归类为全球系统重要性银行和国内系统重要性银行的23家金融机构的每周负收益（简称收益），见表3左栏。数据来自证券价格研究中心（Center for Research in Security Prices）数据库，可在 https://www.crsp.org 在线获取。按照第1节的记号，第 j家机构某一周的收益定义为 $X_j = \varphi_j(1 - P(j)_t / P(j)_{t-1})$，其中 $P(j)_{t-1}$和 $P(j)_t$分别是第 j家机构股票的每周开盘价和收盘价，而$^t\varphi_j = $($j$家机构在2022年3月31日的市值/市场市值)是该机构相对于市场的权重。总计有 $n = 621$ 个收益观测值。每周观测值的自相关图显示几乎不存在自相关。两两散点图显示，各机构的收益之间存在显著依赖关系。为此，我们计算了两两相关系数和上尾依赖系数，其取值范围分别为 $[0.47, 0.87]$ 和 $[0.25, 0.80]$，这表明二元分布主体部分以及联合上尾均存在相当大的依赖关系。我们回顾一下，上尾依赖系数 λ_U（例如 Joe，2014，第62页）满足 $0 \leq \lambda_U \leq 1$，其中下界和上界分别代表完全依赖和独立性情形。为节省篇幅，所有这些结果均列于补充材料D节。图2右图展示了各家银行的尾指数估计值（灰色实线），以及

Bank	规模/排名	MES/排名	ES/排名
摩根大通	17.60/ 1	18.88/ 1	105.10/ 2
美国银行	14.54/ 2	17.33/ 2	111.78/ 1
富国银行	8.08/ 3	8.07/ 3	65.12/ 3
摩根士丹利	6.81/ 5	7.75/ 4	42.56/ 4
花旗集团	4.62/ 8	5.83/ 5	39.36/ 5
高盛集团	4.93/ 7	5.10/ 6	22.99/ 11
加拿大皇家银行	6.83/ 4	4.60/ 7	25.54/ 8
多伦多道明银行	6.30/ 6	4.49/ 8	31.68/ 6
Truist金融公司	3.29/ 13	3.48/ 9	26.48/ 7
PNC金融服务集团公司	3.37/ 11	3.25/ 10	21.96/ 12
美国合众银行	3.45/ 10	3.16/ 11	23.80/ 10
加拿大丰业银行	3.78 / 9	2.58/ 12	23.23/ 9
第一资本金融公司	2.33/ 15	2.55/ 13	18.48/ 13
蒙特利尔银行	3.34/ 12	2.54/ 14	15.52/ 14
纽约梅隆银行	1.75/ 16	1.72/ 15	12.07/ 16
加拿大帝国商业银行	2.40/ 14	1.65/ 16	15.16/ 15
道富公司	1.39/ 17	1.47/ 17	8.16/ 20
五三银行	1.29/ 18	1.39/ 18	10.86/ 17
Huntington Bancshares Incorporated	0.92/ 21	1.04/ 19	9.77/ 18
北方信托公司	1.06/ 19	0.99/ 20	6.74/ 21
M&T银行	0.96/ 20	0.93/ 21	9.59/ 19
Comerica Incorporated	0.52/ 22	0.66/ 22	4.61/ 22
Zions Bancorporation	0.43/ 23	0.53/ 23	3.63/ 23

表 2：主要北美银行列表及其市值（规模占比，%）、边际预期损失（%）和预期损失（十亿美元）。

所有银行尾指数之和（浅蓝色实线），代表北美金融业。尾指数是在有效样本比例为1%至15%的范围内估计的，其数值从约7%的水平开始似乎趋于稳定。在这一区间内，个体估计值约为0.28至0.4，总和的估计值约为0.35。我们采用Padoan 和 Stupfler (2022)提出的统计检验，检查边际尾指数相等这一假设是否合理。具体而言，当 H_0: $\gamma_1 = \cdots = \gamma_{23}$ 时，零假设被拒绝，其中 $\Lambda_n > \chi^2_{22,1-\alpha}$，显著性水平为 $\alpha \in (0,1)$，其中 Λ_n 为检验统计量，而 $\chi^2_{22,1-\alpha}$ 为 $1-\alpha$)-分位数，服从自由度为22的卡方分布（详情参见Padoan 和 Stupfler，2022）。图2 右图展示了检验统计量随有效样本比例变化的数值。在10%（虚线）、5%（点线）和1%（点划线）显著性水平下，检验统计量始终低于临界值，分别只有9、6和2个点例外。所有这些结果都支持采用我们的方法分析金融机构的极端MES。表3报告了银行规模（即 $\varphi_j \cdot 100\%$），以及采用我们的方法计算的MES（均以百分比表示）和用于比较的、以十亿美元计的ES（从左至右）。表中还据此列出了银行从数值最大到最小的排名。根据MES（第 j家机构对市场下行的贡献），摩根大通、美国银行、富国银行和摩根士丹利这四家机构造成了北美市场下行的50%以上。这一排名与按银行规模得到的排名并不完全相同，说明仅凭市值无法完全解释总体资本缺口，其他因素也会对其产生影响。最后，表3 报告了.....的估计值

第 j家机构的预期资本损失（百分比），即 $\varphi_j^{-1}\theta_j(\tau)\cdot 100\%$，以及相应的 95% 置信区间；其中 $\tau = 0.9989$ 和 $\tau = 0.9995$ 满足以下条件： R 的预期值平均每 10 年和 20 年分别超过 $Q_R(\tau)$。有趣的是，对北美市场下行贡献最大者，不一定也是其个体资本损失最大者。

Bank	10 年		20 年	
	MES	95%置信区间	MES	95%置信区间
Comerica Incorporated	32.53	[19.56, 54.10]	41.84	[23.55, 74.37]
花旗集团	32.05	[19.27, 53.30]	41.22	[23.19, 73.26]
Zions Bancorporation	30.86	[18.56, 51.33]	39.70	[22.34, 70.55]
美国银行	30.32	[18.23, 50.43]	39.01	[21.95, 69.32]
摩根士丹利	28.97	[17.42, 48.18]	37.26	[20.97, 66.23]
Huntington Bancshares Incorporated	28.82	[17.33, 47.93]	37.07	[20.86, 65.89]
第一资本金融公司	27.91	[16.78, 46.42]	35.90	[20.20, 63.80]
五三银行	27.32	[16.42, 45.43]	35.14	[19.77, 62.45]
摩根大通	27.29	[16.41, 45.39]	35.11	[19.75, 62.40]
Truist金融公司	26.91	[16.18, 44.76]	34.62	[19.48, 61.52]
道富公司	26.83	[16.13, 44.62]	34.51	[19.42, 61.33]
高盛集团	26.32	[15.83, 43.78]	33.86	[19.05, 60.18]
富国银行	25.39	[15.27, 42.22]	32.66	[18.38, 58.04]
纽约梅隆银行	24.94	[15.00, 41.48]	32.08	[18.05, 57.01]
M&T银行	24.78	[14.90, 41.22]	31.88	[17.94, 56.66]
PNC金融服务集团公司	24.53	[14.75, 40.80]	31.56	[17.76, 56.09]
北方信托公司	23.71	[14.26、39.44]	30.50	[17.16, 54.21]
美国合众银行	23.30	[14.01, 38.75]	29.97	[16.86, 53.26]
蒙特利尔银行	19.35	[11.64, 32.18]	24.89	[14.01, 44.24]
多伦多道明银行	18.14	[10.90, 30.16]	23.33	[13.13, 41.46]
加拿大帝国商业银行	17.53	[10.54、29.15]	22.55	[12.69, 40.07]
加拿大丰业银行	17.37	[10.44, 28.88]	22.34	[12.57, 39.70]
加拿大皇家银行	17.13	[10.30, 28.48]	22.03	[12.40, 39.15]

表3：北美主要银行及其预期资本损失列表。

6 对序列相关数据的扩展

在金融行业，某些应用需要处理高频数据。为了避免错误且过于乐观的估计结果，不能忽视这些数据的序列依赖。为此，我们将针对独立同分布数据建立的理论扩展到时间依赖数据的情形。为涵盖 ARMA 和 GARCH 等重要且常见的金融时间序列模型，我们着重研究多变量 β- 混合重尾严格平稳时间序列框架，参见 Hoga (2018)，关于单变量和双变量框架下的相关结果，另请参见Drees (2003) 和 Davison 等人 (2022)。

我们考虑以下设定。设 $(\boldsymbol{X}_i, i = 1, 2, \ldots)$ 为具有连续联合边缘分布 F 的多变量严格平稳时间序列，其中 $\boldsymbol{X}_i = (X_{i,1}, \ldots, X_{i,d})^\top$。

条件 6.1。 时间序列 $(\boldsymbol{X}_i, i = 1, 2, \ldots)$ 满足以下性质：

(i) 它是 β-混合的，即对于任意 $m \geq 1$，令 $\mathcal{F}_{1,\,m} = \sigma(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_m)$ 和 $\mathcal{F}_{m,\,\infty} = \sigma(\boldsymbol{X}_m, \boldsymbol{X}_{m+1}, \ldots)$ 分别为由该时间序列生成的过去和未来 σ-域，

then

$$\beta(l) := \sup_{m\geq 1} \mathbb{E}\left(\sup\{|\mathbb{P}(B|\mathcal{F}_{1,m}) - \mathbb{P}(B)| : B \in \mathcal{F}_{m+l,\infty}\}\right) \to 0, \quad l \to \infty;$$

其边缘分布 F 满足条件 2.2;

(iii) 存在整数序列 (l_n) 和 (r_n)，使得 $l_n \to \infty$， $r_n \to \infty$， $n\beta(l_n)/r_n \to 0$，并且当 $n \to \infty$ 时 $r_n k_n^{-1/2} \log^2 k_n \to 0$，其中 $l_n = o(r_n)$ 且 $r_n = o(n)$。

(iv) 对任意 $t = 1, 2\ldots$，存在定义在 $[0,\infty]^2 \setminus \{(\infty, \infty)\}$ 上的函数 r_t，使得

$$\lim_{s\to\infty} s\mathbb{P}\left(\overline{F}_{R_1}(R_1) \leq \frac{x}{s}, \overline{F}_{R_{1+t}}(R_{1+t}) \leq \frac{y}{s}\right) = r_t(x,y), \ \forall (x,y) \in [0,\infty]^2 \setminus \{(\infty,\infty)\};$$

(v) 存在非负的 $\eta(t)$，使得 $\sum_{t=1}^{\infty} \eta(t) < \infty$，以及 $D \geq 0$，对所有$t = 1, 2\ldots$和 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$，满足 $x_1 < x_2$ 且当 $s \to \infty$ 时 $y_1 < y_2$

$$s\mathbb{P}\left(\frac{x_1}{s} < \overline{F}_{R_1}(R_1) \leq \frac{x_1}{s}, \frac{y_1}{s} < \overline{F}_{R_{1+t}}(R_{1+t}) \leq \frac{y_1}{s}\right) \leq \eta(t)\sqrt{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)} + \frac{D}{s}(x_1 - x_2)(y_1 - y_2).$$

条件 6.1(i) 是 Hoga (2018) 采用的多变量 β-混合条件，它以自然的方式扩展了单变量情形（例如参见 Drees, 2003）。条件 6.1(ii) 与独立情形中使用的条件相同。条件 6.1(iii)-6.1(v) 是在带混合条件的极值分析中采用的标准条件（参见 Davison 等人, 2022; Drees, 2003），在本文语境下，这些条件是径向分量所必需的。序列 (r_n) 和 (l_n) 是混合时间序列文献中大块间隔小块方法所使用的序列，其中序列 $(\boldsymbol{X}_i, i = 1, 2\ldots)$ 被划分为 $m_n = [n/(r_n + l_n)]$ 个大小为 r_n 的大块，各大块之间由大小为 l_n 的小块隔开（以及一个可忽略的余项）。下面我们给出一个关于序列相关数据的一般结果。

定理 6.2。 在条件 *6.1* 下进行分析。另假设 $\sqrt{k_n} A_R(n/k_n) \to \lambda_R \in \overline{\mathbb{R}}$，当 $n \to \infty$ 时成立。那么，对任意 $j \in \{1, \ldots, d\}$，当 $n \to \infty$

$$\frac{\sqrt{k_n}}{\log(k_n/n(1-\tau_n))} \log \frac{\widehat{\theta}_j(\tau_n)}{\theta_j(\tau_n)} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\frac{\lambda_R}{1-\rho_R}, \gamma^2\left(1 + 2\sum_{t=1}^{\infty} r_t(1,1)\right)\right).$$

与 Davison 等人 (2022); Drees (2003) 一样，函数序列 $(r_t, t = 1, 2\ldots)$ 刻画了时间序列中不同时刻之间的极端依赖。在独立同分布情形下，对所有 $r_t = 0$，都有 $t \geq 1$，且上述渐近方差可简化为定理 3.1 中的结果。

致谢

Simone Padoan 获得意大利博科尼数据科学与分析研究所（BIDSA）的资助。

参考文献

Acharya, V. V., L. H. Pedersen, T. Philippon, 和 M. Richardson（2017）。系统性风险的测度。《金融研究评论》*30*(1), 2–47。

Acharya, V. V. 和 S. Steffen（2013）。分析欧洲银行业的系统性风险。系统性风险手册, 247–282。Cai, J.-J., V. Chavez-Demoulin, 和 A. Guillou（2017）。渐近依赖下修正的边际预期损失。*Biometrika 104*(1), 243–249。Cai, J.-J., J. H. J. Einmahl, L. de Haan, 和 C. Zhou（2015）。边际预期损失的估计：相关变量处于极端值时的均值。皇家统计学会会刊：*B*辑（统计方法学）*77(2)*, 417–442。Daouia, A., S. Girard, 和 G. Stupfler（2018）。基于极端期望分位数的尾部风险估计。皇家统计学会会刊：*B*辑（统计方法学）*80*(2), 263–292。Davison, A. C., S. A. Padoan, 和 G. Stupfler（2022）。通过重尾时间序列中的期望分位数进行尾部风险推断。《商业与经济统计学杂志》，即将发表。de Haan, L. 和 A. Ferreira（2006）。极值理论：导论。Springer。Di Bernardino, E. 和 C. Prieur（2018）。极端风险水平下多元条件尾部期望的估计：环境数据集上的示例。《环境计量学》*29*(7)。Drees, H.（2003）。相关数据的极端分位数估计及其在金融中的应用。*Bernoulli 9*(4), 617–657。Falk, M., J. H¨usler, 和 R.-D. Reiss（2010）。小数定律：极端事件与罕见事件。Springer Science & Business Media。Goegebeur, Y., A. Guillou, N. K. Le Ho, 和 J. Qin（2021）。条件边际预期损失。*Extremes 24*(4), 797–847。Gomes, M. I. 和 D. Pestana（2007）。稳健的降偏极端分位数（风险价值）估计量。《美国统计学会杂志》*102(477)*, 280–292。Hall, P. 和 A. H. Welsh（1985）。正则变差参数的自适应估计。《统计学年鉴》*13(1)*, 331–341。Hill, B. M.（1975）。关于分布尾部推断的一种简单通用方法。《统计学年鉴》*3(5)*, 1163–1174。Hoga, Y.（2018）。检测多元时间序列中的尾部风险差异。《时间序列分析杂志》*39*(5), 665–689。Jessen, H. A. 和 T. Mikosch（2006）。正则变函数。*Publications del'institut Math´ematique 80*(94), 171–192。Joe, H.（2014）。基于*Copula*的依赖建模。CRC Press。Joe, H. 和 H. Li（2011）。多元正则变差的尾部风险。《应用概率方法与计算》*13*(4), 671–693。Manjunath, B., F. Caeiro, M. Gomes, 和 M. Alves（2013）。evt0：p阶均值、随机阈值Hill峰值法和高分位数估计。*R*软件包版本, 1–1。Padoan, S. A. 和 G. Stupfler（2022）。多元重尾分布极端期望分位数的联合推断。*Bernoulli 28*(2), 1021–1048。

Resnick, S. I.（2007年）。极值、正则变差与点过程。Springer Science & Business Media。Tarashev, N. A.、C. E. Borio 和 K. Tsatsaronis（2010年）。将系统性风险归因于个体机构。国际清算银行工作论文。Weissman, I.（1978年）。基于 k 个最大观测值估计参数和大分位数。《美国统计学会杂志》*73*(364)，812–815。