arXiv:2304.07579v1 [math.LO] 15 Apr 2023

关于可数完美瘦集与可数完美零测集

Tomasz Weiss 与 Piotr Zakrzewski

Abstract. 我们研究普遍瘦集概念的一种强化，以及其对偶对应概念——普遍零测集概念——的一种强化。

我们称完美波兰空间 A 的子集 X 在 X 中是可数完美瘦的（分别是可数完全零的），如果对于 X 上每个赋予 X 原有博雷尔结构的完美波兰拓扑 τ， A 都能被 X 上一个具有原有波兰拓扑的 F_σ 集 F 覆盖，使得 F 关于 τ 是瘦集（分别地，对于 X 上每个有限无原子博雷尔测度 μ， A 都能被 X 上的一个 F_σ 集 F 覆盖，且 $\mu(F) = 0$）。

我们证明，若 $2^{\aleph_0} \leq \aleph_2$，则存在 $2^{\mathbb{N}}$ 中一个普遍瘦集，它在 $2^{\mathbb{N}}$ 中并非可数完美瘦（分别地，存在 $2^{\mathbb{N}}$ 中一个普遍零测集，它在 $2^{\mathbb{N}}$ 中并非可数完全零）。

1. Introduction

我们继续研究 Pol 和 Zakrzewski [19]所开展的可数完美瘦集研究。我们称完美波兰空间 X 的子集 A 在 X 中是可数完美瘦的（$A \in \mathbf{PM}_\sigma$）（参见 [19]），若对于 X的每个完美子集序列 $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$，都存在一个 F_σ-集 F，使得 $A \subseteq F$ 且对每个n， $F \cap P_n$ 在 P_n 中都是瘦集。还请回顾，若对于 X 与任意完美波兰空间 Y之间的每个博雷尔同构 f，A 在 f 下的像在 Y 中都是瘦集（见 [26], [27], [1], [2]，另见 [10], [11], [12], ，该类此前由 Grzegorek 研究并记为 AFC），则称 A 是普遍瘦的 ~~($A \in$~~ UM）。由 [2, 定理 7] 可知 $\mathbf{PM}_\sigma \subseteq$UM；由[19, 定理 1.1], 可知，这一包含关系在一致意义下是真包含，即若存在一个基数为 $2^{\aleph_0}$的普遍瘦集，则该关系成立；特别地，连续统假设成立时亦如此。

在本文中，我们证明（见定理 2.2），只要满足 $2^{\aleph_0} = \aleph_2$，$\mathbf{PM}_\sigma \neq$ UM 也成立。$\mathbf{PM}_\sigma =$ UM 是否相容仍是一个开放问题（UM $\subsetneq$ 是相容的

日期：2022年8月24日。2010年数学主题分类：03E20、03E15、54E52、28E15。关键词与短语：完美贫乏集、普遍瘦集、普遍零测集。

PM，而且 UM =PM（见 [1]），其中 PM 表示 X 的所有完美贫集构成的族）。

ß

如果 I 是 X 的子集上的一个 σ-理想，也就是说，它具有遗传性，对可数并封闭，且包含所有单点集，那么我们用 I^* 表示由属于 I 的 X 的闭子集生成的 X 上的 σ-理想（参见 [22]）。

ß

如果 τ 是 X 上的一个完美波兰拓扑，且给出 X 的原始博雷尔结构，那么我们用 $\mathscr{M}(X,\tau)$ 表示相对于 τ 的贫集 σ-理想。注意，$\mathscr{M}^*(X,\tau)$ 由这样的 $A\subseteq X$ 构成：存在一个 F_σ 集 F 属于 X（赋予原始波兰拓扑），满足 $A\subseteq F$ 且 $F\in\mathscr{M}(X,\tau)$。根据 [26, 定理 2.1]，A 在 X 中是普遍瘦的，当且仅当 A 属于所有形如 $\mathscr{M}(X,\tau)$ 的 σ-理想的交集；而根据 [19, 命题 4.6]，A 在 X 中是可数完美瘦的，当且仅当 A 属于所有形如 $\mathscr{M}^*(X,\tau)$ 的 σ-理想的交集。

普遍瘦集可视为 X 中普遍零测集在范畴论上的对应物。具体而言，若在 X 上给定一个有限无原子博雷尔测度 μ（即一个可数可加测度 $\mu\colon \mathrm{B}(X)\to[0,+\infty)$），定义在 X 的博雷尔子集所成的 σ- 代数 $\mathrm{B}(X)$ 上，并且在 X 的单点集上取值为零），我们用 $\mathcal{N}(X,\mu)$ 表示 μ-零测集（即外 μ 测度为零的集合）所成的 σ-理想，那么 X 的普遍零测子集族 UN，便是所有形如 $\mathcal{N}(X,\mu)$ 的 σ-理想的交集。

ß

Taras Banakh 提出了可数完美瘦集的测度类比的如下定义。若 A 属于所有形如 $\mathcal{N}^*(X,\mu)$ 的 σ-理想的交集，我们就称 A 在 X 中是可数完全零的（$A\in\mathrm{PN}_\sigma$）。换言之，若对每个定义在 X 上的有限无原子博雷尔测度 μ，A 都包含在 X 中某个 F_σ 集 F 内，且 $\mu(F)=0$，则称 $A\in\mathrm{PN}_\sigma$。注意，若 λ 是康托尔空间 $2^{\mathbb{N}}$ 上的标准概率乘积测度，那么 $\mathcal{N}^*(2^{\mathbb{N}},\lambda)$ 是一个著名的 σ-理想，通常记作 $\mathscr{E}$（参见 [3]）。

PN_σ 这一类的名称，以下观察可进一步说明其合理性。

命题 1.1. 集合 $A\subseteq X$ 在 X 中是可数完全零，当且仅当对于 X 中任意一列完美子集 $\{P_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ 及其对应的定义在 P_n 上的概率非原子博雷尔测度 μ_n，存在一个 X 中的 F_σ-集 F，使得 $A\subseteq F$ 且对每个 n 都有 $\mu_n(F\cap P_n)=0$。

证明。若 $A\in\mathrm{PN}_\sigma$，且对每个 n，都有一个完美集 P_n 及其在 P_n 上的相应测度 μ_n，那么只需用以下集合覆盖 A：

一个 F_σ 集 F，其 $\mu(F)=0$ 对 μ 的定义如下:

$$\mu(B)=\sum_n \frac{1}{2^n}\mu_n(B\cap P_n) \quad \text{for} \quad B\in \mathbf{B}(X).$$

反过来，给定一个定义在 X 上的有限无原子博雷尔测度 μ，注意到 μ 的正则性（参见 [16, 17.C]）蕴含着存在一族（两两不交的）完美集 $\{P_n:\ n\in\mathbb{N}\}$，其μ测度为正，且 $\mu(X\setminus\bigcup_n P_n)=0$。于是，只需用一个 F_σ集 F 覆盖 A，使得对于每个 n，都有 $\mu(F\cap P_n)=0$。

□

显然，我们有 $\mathsf{PN}_\sigma\subseteq\mathsf{UN}$。容易看出，我们也有 $\mathsf{PN}_\sigma\subseteq\mathsf{PM}_\sigma$。

命题 1.2. 每个 X 的可数完全零子集都是可数完美瘦集。

证明。假设 $A\in\mathsf{PN}_\sigma$，并令 $\{P_n:\ n\in\mathbb{N}\}$ 为 X的完美子集序列。对于每个 n，令 μ_n 为定义在 P_n 上的博雷尔概率测度，且为无原子测度，并对 P_n 的所有非空相对开子集赋予正值（例如，可以将 μ_n 集中在 P_n 中稠密的无理数集的一个同胚副本上）。令 F 为 X中的一个 F_σ集，使得 $A\subseteq F$，且对于每个 n，都有 $\mu_n(F\cap P_n)=0$（参见命题 1.1）。显然，对于每个 n，$F\cap P_n$ 在 P_n 中是瘦集，因此 $A\in\mathsf{PM}_\sigma$。□

至少在相容的情况下，$\mathsf{PN}_\sigma\subseteq\mathsf{PM}_\sigma$ 是严格包含关系。事实上，若 $A\subseteq 2^{\mathbb{N}}$ 是关于测度 λ的 Sierpi´nski 集，那么$A\in\mathsf{PM}_\sigma$ 属于 $2^{\mathbb{N}}$（参见 [19, 推论 2.9 和注 2.11]），但 A 具有正外测度 λ。

类似的论证表明，$\mathsf{PN}_\sigma\neq\mathsf{UN}$ 的相容性也成立。具体而言，若 $A\subseteq 2^{\mathbb{N}}$ 是 $2^{\mathbb{N}}$ 中的卢津集（例如在连续统假设下存在），那么$A\in$UN，但 A 在 $2^{\mathbb{N}}$中甚至不是瘦集。

本文证明（见定理 3.2），$\mathsf{PN}_\sigma\neq$UN 也可由以下假设推出：要么 $2^{\mathbb{N}}$ 中存在一个基数为 $2^{\aleph_0}$ 的普遍零测集（此时实际上甚至有 $\mathsf{UN}\setminus\mathsf{PM}_\sigma\neq\emptyset$；参见命题 1.2），要么$2^{\aleph_0}=\aleph_2$。$\mathsf{PN}_\sigma=$UN 是否相容仍是一个开放问题。

第 2 节致力于证明定理 2.2，该定理指出，如果$2^{\aleph_0}=\aleph_2$，那么在 $2^{\mathbb{N}}$ 中存在一个普遍瘦集，它在 $2^{\mathbb{N}}$中不是可数完全瘦集。

在第3节中，我们给出一些可数完美零测集的例子，并证明定理 3.2。该定理表明，在以下任一条件下，$\mathsf{PN}_\sigma\neq$UN：在 $2^{\mathbb{N}}$ 中存在一个基数为 $2^{\aleph_0}$ 的普遍零测集（此时实际上还有 $\mathsf{UN}\setminus\mathsf{PM}_\sigma\neq\emptyset$，参见命题 1.2）；或者 $2^{\aleph_0}=\aleph_2$。

我们在第4节汇集一些评论和开放问题。

2. Universally meager not countably perfectly meagersets

回顾一下，基数 $\mathfrak{b}$ 是 $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ 的一个子集的最小基数，该子集在最终支配的序关系 $\leq^*$ 下无界。按照 [24, 定义 2.8]，，我们所说的 $\mathfrak{b}$-*scale* （在 $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ 中）是指 $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ 的一个子集 $B = \{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\}$，它具有以下性质：

- f_α： $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 严格递增，
- $\alpha < \beta < \mathfrak{b}$ 蕴含 $f_\alpha <^* f_\beta$，
- 对于每个 $f \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$，都存在 $\alpha < \mathfrak{b}$，使得 $f_\alpha \not\leq^* f$。

将每个 f_α 与其值域的特征函数（或分别直接与其值域）对应起来，我们得到 $2^\mathbb{N}$ 中的B 的一个同胚副本 A（或分别在具有康托尔集拓扑的 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 中），我们也将其称为 $2^\mathbb{N}$ 中的 $\mathfrak{b}$-*scale* （或分别在 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 中）（参见 [24]）。众所周知，也很容易看出，可以在 ZFC 中构造 $\mathfrak{b}$-尺度。它们也是既普遍瘦又普遍零测的集合的经典例子（参见 [18]）。

回顾一下，给定完美波兰空间 X 的子集 A，我们用 γ*–cover* 表示 A 的一个可数相对开覆盖 $\mathscr{U}$，它是无限的，并且对每个 $x \in A$，集合 $\{U \in \mathscr{U} : x \notin U\}$ 都是有限的。若对任意由 γ 构成的 A 的 $\mathscr{U}_n : n \in \mathbb{N}$ 序列，我们都能对每个 n 选取一个集合 $V_n \in \mathscr{U}_n$，使得 $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 A 的一个 γ-覆盖（参见 [14], [24]），则称 A 满足 *property* $S_1(\Gamma,\Gamma)$。众所周知（这归功于 Hurewicz [13]），性质 $S_1(\Gamma,\Gamma)$ 蕴含 Hurewicz性质（有关 Hurewicz性质的定义，见第3节）。

如果 $\mathfrak{b} = \omega_1$，那么在 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 中存在一个 $\mathfrak{b}$-尺度 $A = \{a_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\}$，并且还具有如下性质： $\alpha < \beta < \mathfrak{b}$ 蕴含 $a_\beta \setminus a_\alpha$ 是有限的（见 [24, 第 8] 页）；根据 Scheepers [23] 的一个定理（另见 [5, 定理 123]），如果 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 中的 A 是这样的 $\mathfrak{b}$- 尺度，那么 $A \cup [\mathbb{N}]^{<\aleph_0}$ 具有性质 $S_1(\Gamma,\Gamma)$。下面的观察是这一结果的一个简单推论。回顾一下，若 κ 是一个无限基数，则如果对于 X 中包含 Q 的每个开集 U， $|A \setminus U| < \kappa$，那么集合 $A \subseteq X$ 就是集中于集合 $Q \subseteq X$ 的 κ-集中集。

引理 2.1。假设 $\mathfrak{b} = \omega_1$。令 $A = \{a_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\}$ 是 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 中的一个 $\mathfrak{b}$-尺度，并满足以下附加性质：若 $\alpha < \beta < \mathfrak{b}$，则 $a_\beta \setminus a_\alpha$ 是有限的。

对于每个 n，令 $\mathscr{U}_n = \{U^n_k : k \in \mathbb{N}\}$ 为 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 中的一个递增（即 $U^n_k \subseteq U^n_{k+1}$）开集序列，满足 $[\mathbb{N}]^{<\aleph_0} \subseteq \bigcup_k U^n_k$，但对于任何 k 都不满足 $[\mathbb{N}]^{<\aleph_0} \subseteq U^n_k$。那么，对于每个 n，我们可以选取一个集合 $V_n = U^n_{k_n}$，使得$\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 $\big(A \cup [\mathbb{N}]^{<\aleph_0}\big) \setminus Y$ 的一个 γ-覆盖，其中 $Y \subseteq A$ 是某个可数集。

证明。集合 A 是 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 中的一个 $\mathfrak{b}$-标度，因此集中于 $[\mathbb{N}]^{<\aleph_0}$ 的 $\mathfrak{b}$ 上（见 [24, 引理 2.10]）。因此，由于 $\mathfrak{b} = \omega_1$，存在 $\xi < \omega_1$ 使得若令 $A' = \{a_\alpha : \xi < \alpha < \mathfrak{b}\}$，则对每个 n，我们都有

$A' \cup [\mathbb{N}]^{<\aleph_0} \subseteq \bigcup_k U_k^n$并且根据序列 $\{U_k^n\colon\ k \in \mathbb{N}\}$、$\{(A' \cup [\mathbb{N}]^{<\aleph_0}) \cap U_k^n\colon\ k \in \mathbb{N}\}$ 的性质，它是 $A' \cup [\mathbb{N}]^{<\aleph_0}$ 的一个 γ-覆盖。与此同时， A' 仍是 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 中的一个 $\mathfrak{b}$-标度，并具有上述附加性质，因此 Scheepers定理给出了所需的结论。□

回顾一下，$\mathrm{non}(\mathscr{M})$ 是 $2^{\mathbb{N}}$ 的非瘦子集的最小基数。众所周知，如果 τ 是波兰空间 X 上的完美波兰拓扑，那么 $\mathrm{non}(\mathscr{M})$ 是 X 中不属于 $\mathscr{M}(X,\tau)$ 的子集的最小基数。我们用 $\mathbb{Q}$ 表示 $2^{\mathbb{N}}$ 中由所有最终为零的二进制序列组成的有理数集副本。

ß

现在我们准备证明本节的主要结果（参见 $[25,\ 定理\ 4]$ 的证明）。

定理 2.2。如果 $2^{\aleph_0} \leq \aleph_2$，那么在 $2^{\mathbb{N}}$ 中存在一个普遍瘦集，它在 $2^{\mathbb{N}}$ 中不是可数完美瘦集。

证明。如果 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$，则结论由 $[19,\ 定理\ 1.1]$，得出，因此从现在起我们假设 $2^{\aleph_0} = \aleph_2$。

我们将论证分为三种情况。

情况 (A)：$\mathrm{non}(\mathscr{M}) = \aleph_2$。

那么，根据 Grzegorek 的一个结果（见 $[11,\ 定理\ 1]$），存在一个基数为 $\aleph_2 = 2^{\aleph_0}$ 、属于 $2^{\mathbb{N}}$ 的普遍瘦集，由此结论可由 $[19,\ 定理\ 1.1]$ 得出。

情况 (B)：$\mathfrak{b} = \aleph_2$。

这种情况已由前一种情况涵盖，因为众所周知 $\mathfrak{b} \leq \mathrm{non}(\mathscr{M})$。

情况 (C)：$\mathrm{non}(\mathscr{M}) = \mathfrak{b} = \aleph_1$。

令 C 和 D 是 $2^{\mathbb{N}}$ 中两个不相交的康托尔集副本，使得

(1) 加法运算 $+$ 是 $C \times D$ 与 $C + D$ 之间的一个同胚（参见 $[20]$）。

固定一个同胚 $h\colon\ 2^{\mathbb{N}} \to C$。

令 $A = \{a_\alpha\colon\ \alpha < \mathfrak{b}\}$ 是 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 中的一个 $\mathfrak{b}$-尺度，并且具有如下附加性质：$\alpha < \beta < \mathfrak{b}$ 蕴含 $a_\beta \setminus a_\alpha$ 是有限的（参见引理 2.1 前的段落）；并将其与它在 $2^{\mathbb{N}}$ 中的同胚副本等同起来。

令$X = h[A] \subseteq C$。由于 X 是普遍瘦集，$\tilde{X}$ 也是如此。

让我们固定一个基数为 $\mathrm{non}(\mathscr{M})$ 的集合 $M \subseteq D$，使得

(2) M 在 D 中是相对非瘦的。

由于 $|X| = \aleph_1$，我们可以固定一个满射 $m\colon\ X \to M$ 到 X，并令 $H = \{(x, m(x))\colon\ x \in X\} \subseteq C \times D$ 为 m的图。注意，由于 X 是 H 在沿第一坐标轴的投影下的单射连续像，而 X 是普遍瘦的，因此 H也是普遍瘦的。

最后，令 $Z = \{x+m(x)\colon\ x \in X\}$。显然， Z 是 H 在 $C \times D$ 与$C + D$ 之间的同胚 $+$ 下的像，因此是普遍瘦的（参见 (1)）。

我们将证明

(3) Z 不是 $2^{\mathbb{N}}$ 中的 PM$_\sigma$-集

由此定理的证明便告结束。

为此，设 $\{q_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ 并反设存在 $2^{\mathbb{N}}$ 中的闭集 F_n，使得$Z \subseteq \bigcup_n F_n$，且 F_n 在 q_k+D 中相对无处稠密；或者等价地，对每个 n 和 k，$(q_k + F_n) \cap D$ 在 D 中相对无处稠密。

令 $\{I_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ 为可数基 $\mathscr{B}$ of D 中各元素的一个枚举，其中每个元素都重复出现无穷多次。

任取一个 i，并令 $F = F_i$。

由于集合 F 是紧的，对于每个 n，我们可以按 k 归纳定义开集 C 中的递增序列 $\{U_k^n\colon k \in \mathbb{N}\}$，满足 $\{q_i\colon i < k\} \subseteq U_k^n \cap \mathbb{Q} \neq \mathbb{Q}$ 对每个 k 都成立；同时定义一个序列$\{D_k^n\colon k \in \mathbb{N}\}$，其元素是 D 中非空的相对既开又闭集，使得

(4) $D_{k+1}^n \subseteq D_k^n \subseteq I_n$ and $cl_D((U_k^n + F) \cap D) \cap D_k^n = \emptyset$ for every k.

现在，由于 X 和 $\mathbb{Q}$ 分别是 h 下 X 和 $\mathbb{Q}$ 的像，并且 $\mathscr{U}_n = \{U_k^n\colon k \in \mathbb{N}\}$ 是 C 中开集的递增序列，满足 $\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_k U_k^n$，但对任何 k 都不满足 $\mathbb{Q} \subseteq U_k^n$，引理 2.1 使我们能够为每个 n 选取一个集合 $V_n = U_{k_n}^n$，使得

(5) $\{V_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ 是某个可数集$Y \subseteq X$的 γ-覆盖。

我们将证明

(6) $((\tilde{X} \setminus Y) + F) \cap D$ is meager in D.

为此，对每个 m 令$K_m = \bigcap_{n\geq m} cl_D\left((V_n + F) \cap D\right)$，并注意到 K_m 是 D的闭的相对处处不稠密子集。事实上， $\mathscr{B}$ 中的任意开集都具有 I_n 的形式，其中某个 $n \geq m$ 和 $I_n \not\subseteq K_m$由（4）可知。

此外，我们有 $\left((X \setminus Y) + F\right) \cap D \subseteq \bigcup_m K_m$。事实上，若 $c \in X \setminus Y$，则存在 m 使得对每个 $n \geq m$ 都有 $c \in V_n$（参见（5））。因此， $(c + F) \cap D \subseteq \bigcap_{n\geq m} \left((V_n + F) \cap D\right) \subseteq K_m$，从而完成了（6）的证明。

总结一下：对于每个 i，我们都找到了一个可数集 $Y_i \subseteq X$，使得 $((X \setminus Y_i) + F_i) \cap D$ 在 D 中是瘦集。

因此，令 $Y = \bigcup_i Y_i$，我们得到 C 的一个可数子集 ，使得 $((X \setminus Y) + \bigcup_n F_n) \cap D$ 在 D 中是瘦集。

但由于 $Z \subseteq \bigcup_n F_n$，我们得出

(7) $((\tilde{X} \setminus \tilde{Y}) + Z) \cap D$ is meager in D.

另一方面， $M \setminus m(Y) \subseteq (X \setminus Y) + Z$。事实上，若 $m \in M \setminus m(Y)$，则对某个 $x \in X \setminus Y$，有 $m = m(x)$，进而 $m = (x + (x + m(x))) \in x + Z$。这意味着 $((X \setminus Y) + Z) \cap D$ 在 D 中不是瘦集（参见 (2)），与 (7) 矛盾，从而完成了 (3) 的证明。

□

注意，在连续统假设下，我们有 $\mathrm{non}(\mathscr{M}) = \mathfrak{b} = \aleph_1$，而上述证明的情形 (C) 以不使用 [19, 定理 1.1]的方式，证明了 PM_σ ≠UM 的相容性。

3. Countably perfectly null sets

回顾一下，给定一个完美波兰空间 X，若集合 $A \subseteq X$ 具有Hurewicz性质，则对于 A 的任意开覆盖序列 $\mathscr{U}_1$、$\mathscr{U}_2$、.....，都存在有限子族 $\mathcal{F}_n \subseteq \mathscr{U}_n$，使得 $A \subseteq \bigcup_n \bigcap_{m \geq n} (\bigcup \mathcal{F}_m)$。若 A 是 X 的零维子空间，那么根据 Hurewicz 的一个结果（参见 [13] 和 [21]），这等价于以下陈述：A 在 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 中的每个连续像，在最终支配序 $\leq^*$ 下都有界。

$2^{\mathbb{N}}$ 中关于 $2^{\mathbb{N}}$ 上的标准概率乘积测度 λ不可测的子集的最小基数记为 $\mathrm{non}(\mathcal{N})$。众所周知，若 μ 是 X上的非零、有限、无原子的博雷尔测度，则 $\mathrm{non}(\mathcal{N})$是 X 中不属于 $\mathcal{N}(X, \mu)$的子集的最小基数。

我们还回顾一下，$\mathbb{Q}$ 表示$2^{\mathbb{N}}$ 中由所有最终为零的二进制序列组成的有理数集副本。

ß

下面的结果给出了普遍零测、可数完美瘦且同时可数完全零的集合示例。

命题3.1。以下各类集合在相应的完美波兰空间中都是可数完全零集：

(1) 在任意完美波兰空间 X中，具有Hurewicz性质的普遍零测集；(2) 在任意完美波兰空间 X中，基数小于 $\min(\mathrm{non}(\mathcal{N}), \mathfrak{b})$ 的任意集合；(3) 任意完美波兰空间 X中的 γ-集；(4) $2^{\mathbb{N}}$中的 $\mathfrak{b}$-尺度；(5) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$中的 Hausdorff (ω_1, ω_1^*)-间隙。

证明。(1) 设 $A \subseteq X$ 是一个具有 Hurewicz性质的普遍零测集，并设 μ 是X上的非零有限无原子博雷尔测度。由于 $A \in \mathrm{UN}$，存在一个 G_δ集 G 属于 X，使得 $A \subseteq G$ 且$\mu(G) = 0$。现在，由于 A 具有Hurewicz性质，存在一个 F_σ 集F 属于 X，使得 $A \subseteq F \subseteq G$（参见 [14, 定理 5.7]）。因此，$\mu(F) = 0$，这表明 $A \in \mathrm{PN}_\sigma$。

ß

陈述 (2)–(4) 可由 (1) 如下推得。

ß

(2) 基数小于 non($\mathcal{N}$) 的集合是普遍零测集，而基数小于 $\mathfrak{b}$ 的集合具有Hurewicz性质。

(3) γ-集是普遍零测集（因为它们实际上具有 Rothberger 性质 C''，参见[8]），并且根据 [7, 定理 2]，它们具有 Hurewicz 性质。

(4) 假设 A 是 $2^{\mathbb{N}}$中的一个 $\mathfrak{b}$-标度。令 $B = A \cup \mathbb{Q}$。那么B 是一个具有 Hurewicz性质的普遍零测集（例如参见 [19,例 4.1 和注 4.2]），因此 $B \in \mathrm{PM}_\sigma$ 属于 $2^{\mathbb{N}}$。由此，$A \in \mathrm{PM}_\sigma$ 属于 $2^{\mathbb{N}}$。

(5). 事实上，可以通过一个经典论证证明 Hausdorff间隙是普遍零测的；为求完整起见，我们在此概述该论证。按照 [15, 引理 20.5],的证明，令$\langle\langle a_\alpha : \alpha < \omega_1\rangle, \langle b_\alpha : \alpha < \omega_1\rangle\rangle$ 为一个 Hausdorff间隙，$F_\alpha = \{c \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : a_\alpha \subseteq^* c \subseteq^* b_\alpha\}$，其中 $\alpha < \omega_1$，并令 μ 为 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 上的一个非零有限无原子博雷尔测度。于是 F_α都是 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 中的 F_σ-集，并且当 ξ 充分大时，我们有 $\mu(F_\xi) = 0$ （参见 [15, 引理 20.5]的证明）。令

$$F = F_\xi \cup \{a_\alpha : \alpha < \xi\} \cup \{b_\alpha : \alpha < \xi\},$$

我们得到一个带有 $\{a_\alpha$ 的 F_σ-集：$\alpha < \omega_1\} \cup \{b_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq F$和 $\mu(F) = 0$，这表明 $\{a_\alpha : \alpha < \omega_1\} \cup \{b_\alpha : \alpha < \omega_1\} \in \mathrm{PM}_\sigma$ 在 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 中。 □

本节的主要结果是定理 1.1]和定理 2.2 的一个测度对应结果。

定理 3.2. 若满足以下任一条件

(a) 在 $2^{\mathbb{N}}$ 中存在一个基数为 $2^{\aleph_0}$ 的普遍零测集，或

(b) $2^{\aleph_0} \leq \aleph_2$,

那么在 $2^{\mathbb{N}}$ 中存在一个普遍零测集，它在 $2^{\mathbb{N}}$ 中不是可数完全零的。

证明. (a) 设 T 是 $2^{\mathbb{N}}$ 中一个基数为 $2^{\aleph_0}$ 的普遍零测集。

根据命题 1.2，只需证明还存在一个不是可数完美瘦集的集合。

回想一下，根据 [19, 定理 1.1], ，存在一个集合 $H \subseteq T \times 2^{\mathbb{N}}$，它与每个垂直截面 $\{t\} \times 2^{\mathbb{N}}$, $t \in T$ 的交都是单点集；还存在一个 H 在 $2^{\mathbb{N}}$ 中的同胚副本 E，它不是 $2^{\mathbb{N}}$ 中的 PM_σ-集。现在，由于 T 是普遍零测集，因此作为连续单射 T 下的原像，E 也是普遍零测集。

ß

(b) 如果 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$，那么 $2^{\mathbb{N}}$ 中的任意卢津集都能给出一个非瘦且普遍零测的集合的例子。

从现在起，假设 $2^{\aleph_0} = \aleph_2$。

紧接着定理 2.2 的证明思路，我们将论证分为三种情况。

情形（A）：$\mathrm{non}(\mathcal{N}) = \aleph_2$。

于是，由 Grzegorek 的一个定理（见 [9]），存在一个包含于 $2^{\mathbb{N}}$ 的基数为 $\aleph_2 = 2^{\aleph_0}$ 的普遍零测集，结论由（a）部分得出。

情形（B）：$\mathfrak{b} = \aleph_2$。

在此情形下，$2^{\mathbb{N}}$ 中任意一个 $\mathfrak{b}$-尺度都是基数为$\mathfrak{b} = 2^{\aleph_0}$ 的普遍零测集，结论同样由（a）部分得出。

情形（C）：$\mathrm{non}(\mathcal{N}) = \mathfrak{b} = \aleph_1$。

与定理 2.2 的证明中一样，我们在 $2^{\mathbb{N}}$ 中固定康托尔集的副本 C、 D，使得

(1) 加法运算 $+$ 是 $C \times D$与 $C + D$ 之间的同胚（参见 [20]），

一个同胚 h： $2^{\mathbb{N}} \to C$，一个 $\mathfrak{b}$-尺度 X 在 $2^{\mathbb{N}}$ 中，并令 $\tilde{X} = h(X)$。由于 X 是普遍零测的， X也是如此。

我们还固定一个同胚 g： $2^{\mathbb{N}} \to D$，并通过令.....在 $2^{\mathbb{N}}$ 上定义一个博雷尔测度 μ

$$\mu(B) = \lambda(g^{-1}(B \cap D)), \quad \text{for} \quad B \in \mathbf{B}(2^{\mathbb{N}}).$$

然后，我们固定一个基数为 $\mathrm{non}(\mathcal{N}) = \aleph_1$ 的集合 $M \subseteq D$，使得

(2) $\mu^*(M) > 0$,

令 m： $X \to M$为到 M上的一个满射，并令 $H = \{(x, m(x))$： $x \in X\}$。由于 X 是 H 在沿第一轴的投影下的单射连续像，且 X 是普遍零测的，因此 H也是如此。

最后，令 $Z = \{x + m(x)$： $x \in X\}$。显然，Z是普遍零测的，因为它是 $C \times D$ 与$C + D$ 之间的同胚 $+$ 下 H 的像（参见 (1)）。

另一方面，我们将证明

(3) Z 不是 $2^{\mathbb{N}}$中的 PN$_\sigma$-集，

从而完成该定理的证明。

为此，令 $\mathcal{A}(\mathbb{Q}) = \{q_n$： $n \in \mathbb{N}\}$ 并且我们反设存在闭的 μ-零测集 F_n，它们包含于 $2^{\mathbb{N}}$，使得 $Z \subseteq \bigcup_n F_n$，且对每个 n，都有 $\mu(q_k + F_n) = 0$ 和 k（参见命题 1.1。）

任取一个 $\varepsilon > 0$。

对每个 n，由于 F_n 是紧的且为 μ-零测集，存在开集 U_n，满足 $\mathcal{C}$，使得 $\mathbb{Q} \subseteq U_n$，并且

(4) $\mu(U_n + F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$。

现在， X 作为 $2^{\mathbb{N}}$ 中的一个 $\mathfrak{b}$-尺度，在 $\mathbb{Q}$ 上是 $\mathfrak{b}$-集中的（见 [24, 引理 2.10]）。因此， X 在 $\mathbb{Q}$ 上是 $\mathfrak{b}$-集中的。考虑到 $\mathfrak{b} = \aleph_1$，这意味着对每个 n，都存在一个可数集

~ ~ ~$Y_n \subseteq X$ 使得 $X \setminus Y_n \subseteq U_n$。由此可得（参见（4））$\mu^*((X \setminus Y_n) +_\sim F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$，这意味着，令 $F = \bigcup_n F_n$ 和 $Y = \bigcup_n Y_n$，我们~ ~有 $\mu^*((X \setminus Y) + F) < \varepsilon$。但由于 $Z \subseteq F$，且 ε 的选取是任意的，我们得出

(5) $\mu^*((\tilde{X} \setminus \tilde{Y}) + Z) = 0.$

另一方面，正如定理 2.2 的证明中那样，我们有

~ ~ ~$M \setminus m(Y) \subseteq (X \setminus Y) + Z$ 这表明，由于 Y 是可数的，~ ~$\mu^*((X \setminus Y) + Z) > 0$（参见（2）），与（5）矛盾，从而完成了（3）的证明。

□

4. 备注与开放问题

第 2 节和第 3 节的结果引出了以下问题。前两个问题分别与定理 2.2 和定理 3.2 直接相关。ß

问题 1. PM_σ =UM 是否相容?

ß问题 2. PN_σ =UN 是否相容?

ß

请注意，我们始终有 $\mathrm{PM}_\sigma \subseteq$ UN，因为在向一个 GCH 模型添加 $\aleph_2$ 个 Cohen 实数所得到的模型中，UM $\subseteq$ UN（见 Corazza [6, 定理 0.6(b)]和 Miller [17]；根据 Bartoszy´nski 和 Shelah 的一个定理，参见 [4, 定理 3],，即使所有完全瘦集都是普遍零测集，这一结论也始终成立）。由 $\mathrm{PN}_\sigma \subseteq \mathrm{PM}_\sigma$（见命题 1.2），其对偶命题 $\mathrm{PN}_\sigma \subseteq$UM 只是成立而已，但以下问题仍未解决。

ß

问题 3. $\mathrm{PN}_\sigma = \mathrm{PM}_\sigma$ 是否相容?

ß

最后，鉴于包含关系 $\mathrm{PN}_\sigma \subseteq \mathrm{PM}_\sigma \cap$UN，我们可以问：ß

问题4. $\mathrm{PN}_\sigma = \mathrm{PM}_\sigma \cap$UN 是真命题/相容的吗?

References

1. T. Bartoszy´nski, 《关于完美瘦集》, Proc. Amer. Math. Soc. 130(4) (2002), 1189–1195。 2. T. Bartoszy´nski, 《实数小集札记》, Proc. Amer. Math. Soc. 131(2) (2003), 625–630。 3. T. Bartoszy´nski、H. Judah, 《集合论：实直线的结构》, A K Peters, 韦尔斯利, 1995。 4. T. Bartoszy´nski、S. Shelah, 《完美瘦集与普遍零测集》, Proc. Amer. Math. Soc. 130(12) (2002), 3701–3711。 5. L. Bukovsk´y, 《实直线的结构》, 《数学专著》第71卷, Birkh¨auser, Springer Basel AG, 2011。 6. P. Corazza, 《广义博雷尔猜想与强适当序》, 《美国数学学会汇刊》316(1) (1989), 115–140,

7. F. Galvin、A. W. Miller，《有理数集及其他实数奇异集》，Topol- ogy Appl. 17 (1984), 145–155。 8. J. Gerlits、Zs. Nagy，《 $C(X)$ 的一些性质》，I, Topology Appl. 14 (1982), 151–161。 9. E. Grzegorek，《Banach 关于无连续测度的 σ域问题的解答》，Bull. Acad. Pol. Sci. 28 (1980), 7–10。 10. E. Grzegorek，《Banach 关于无连续测度的 σ域问题的解答》，Bull. Acad. Pol. Sci. 28 (1980), 7–10。 11. E. Grzegorek，《恒为第一纲的集合》，Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. Suppl. 6 (1984), 139–147。 12. E. Grzegorek，《恒为第一纲的集合 II》，Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. Suppl. 10 (1985), 43–48。¨ 13. W. Hurewicz，《关于连续函数列》，Fund. Math. 9 (1927), 193—204。 14. W. Just、A.W. Miller、M. Scheepers、P.J. Szeptycki，《开覆盖组合学（II）》，Topology Appl. 73 (1996), 241–266。 15. W. Just、M. Weese，《探索现代集合论 II：每位数学家的集合论工具》，Graduate Studies in Mathematics 18，美国数学学会，1997。 16. A. S. Kechris，《经典描述集合论》，Graduate Texts in Math. 156，施普林格出版社，1995。 17. A. W. Miller，《将实数集映射到实数集》，J. Symbolic Logic 48 (1983), 575–584。 18. S. Plewik，《塔普遍零测且恒为第一纲》，Proc. Amer. Math. Soc. 119(3) (1993), 865–868。 19. R. Pol、P. Zakrzewski，《可数完美瘦集》，J. Symbolic Logic (2021), 1-17。 doi:10.1017/jsl.2021.35。 20. I. Rec law，《实数特殊子集的一些可加性质》，Colloquium Mathematicum 62(2) (1991), 221—226。 21. I. Rec law，《每个卢津集在点开博弈中都是未定的》，Fund. Math. 144 (1994), 43–54。 22. M. Sabok、J. Zapletal，《闭集理想的强迫性质》，J. Symbolic Logic 76 (2011), 1075—1095。 23. M. Scheepers，《 $C_p(X)$ 与 Arhangel'skii 的 α_i-空间》，Topology Appl. 89 (1998), 265–275。 24. B. Tsaban，《门格尔问题与赫维茨问题：来自《The Book》的解答及其改进》，Contemp. Math. 533 (2011), 211–226。 25. T. Weiss，《传递意义下的完美瘦集》，Proc. Amer. Math. Soc. 130(2) (2001), 591–594。 26. P. Zakrzewski，《普遍瘦集》，Proc. Amer. Math. Soc. 129(6) (2001), 1793–1798。 27. P. Zakrzewski，《普遍瘦集 II》，Topology Appl. 155 (2008), 1445–1449。

Institute of Mathematics, College of Science, Cardinal Stefan Wyszyński University, Dewajtis 5, 01-815 Warsaw, Poland电子邮件地址：tomaszweiss@o2.pl

Institute of Mathematics, University of Warsaw, Banacha 2, 02-097Warsaw, Poland电子邮件地址：piotrzak@mimuw.edu.pl