arXiv:2304.07582v2 [math.DS] 8 May 2023

局部有限群上的有限型移位

JACOB RAYMOND

Abstract. 本文证明，局部有限群上的每个有限型移位、sofic 移位和强不可约移位都具有强动力学性质。这些性质包括：每个 sofic 移位都是有限型移位，每个有限型移位都是强不可约的，每个强不可约移位都是有限型移位，每个有限型移位都是熵极小的，并且每个有限型移位都有唯一最大熵测度，等等。此外，我们证明，如果一个群上的每个有限型移位都是强不可约的，或者每个 sofic 移位都是有限型移位，那么该群必定是局部有限群；这一结论也适用于我们探讨的所有性质。我们将这些结果归纳为两个主要定理，它们通过纯粹的动力学性质刻画群的局部有限性。为得到这些结果，我们给出一种在群 G 上构造 *free extension* 移位的形式化方法：该方法将子群 H （属于 G）上的一个移位自然地扩展为整个 G 上的移位。

1. Introduction

对于有限符号集 $\mathcal{A}$ 和群 G，符号动力系统研究群 G 通过平移在集合 $\mathcal{A}^G$ 上的作用。该集合称为以字母表 $\mathcal{A}$ 为字母表的完全 G-移位，以及其中的子系统。赋予其乘积拓扑（其中 $\mathcal{A}$ 取离散拓扑）后， $\mathcal{A}^G$ 的闭平移不变子集称为 G-移位；了解这类子系统可能具有哪些性质，是符号动力系统的核心问题。符号动力系统创立之初，主要关注的群是 $\mathbb{Z}$，即加法群整数。即使在这种情形下，也会出现复杂行为，不过关于 $\mathbb{Z}$ [14] 上的移位，人们已经有了许多一般性认识。对这一情形的自然推广是群 $\mathbb{Z}^d$ ，其中 d 为某个自然数；对它的研究被称为多维符号动力系统。近年来，人们对 $\mathbb{Z}^d$ 上的移位兴趣渐增，不过这种情形本身已经复杂得多 [17, 15, 9], ，而关于一般的 $\mathbb{Z}^d$-移位，人们所知较少。对一般群情形的关注则出现得更晚；正如预期，这种情形比 $\mathbb{Z}^d$ 的情形更难处理。不过，近期关于可平均群铺砌的一项结果 [6] ，使得有关可平均群上移位的一些结果成为可能 [7, 3, 2]。

G有限型移位（或称 G有限型子移位）尤其值得关注，因为它们可以由有限量的信息刻画。更准确地说， G有限型子移位 X是这样一种 G移位：存在有限个图案（对于有限 $F \subset G$，即 $\mathcal{A}^F$ 的一个元素），使得 X 是 $\mathcal{A}^G$ 中所有不出现这些图案的构型所组成的集合。 G有限型子移位具有有限性，因此适合用有限和组合方法进行分析；一般而言，与一般移位相比， G有限型子移位具有良好的性质。此外，群上的每个移位都可以表示为有限型子移位的交集，因此从这个意义上说，有限型子移位十分丰富，也是一般移位的良好近似。关于 G移位和G有限型子移位的形式化定义，见第 2.3 节。

理解群上的有限型子移位可能具有哪些性质，是符号动力系统的核心问题。其中一种性质是可数可 amenable 群 G 上有限型子移位的熵（定义 2.15）；特别地，在 G上有限型子移位能够实现的熵集记为 $\mathcal{E}(G)$。Lind [13],对 $\mathcal{E}(\mathbb{Z})$ 进行了分类；更近一些，Hochman 和 Meyerovitch[10]对 $d \geq 2$ 上的 $\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)$ 进行了分类。Barbieri [1] 的近期结果将某一类可平均群上的 $\mathcal{E}(G)$ 分类为 $\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)$。据作者所知，目前尚无已知的有限生成群 G 使得 $\mathcal{E}(G)$ 不等于 $\mathcal{E}(\mathbb{Z})$ 或$\mathcal{E}(\mathbb{Z}^2)$；而对其他群及群类的 $\mathcal{E}(G)$ 作进一步分类，仍是符号动力系统中的一个开放目标。另一种性质是强不可约性（定义 2.11）；粗略地说，它意味着 G移位很大，并且包含种类繁多的构型。一般而言， G有限型子移位未必强不可约，而强不可约的 G移位也未必是 G有限型子移位。强不可约性施加于移位上的额外结构，有助于证明有关移位[5, 16, 2]的结果。我们还探讨了移位的其他几种性质，这些性质概述于第 2 节，并在下文陈述两个主要定理之后作非正式讨论。

我们研究局部有限群的动机源于以下例子。令 $G = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 为二元群的可数直和。 G 的元素是由 0 和 1 组成的无限序列，其中只有有限多个 1；群运算为逐分量模 2 加法。利用计算移位熵的基本方法，可以直接证明

$$\mathcal{E}(G) = \left\{ \frac{\log(n)}{2^{m-1}} : n, m \in \mathbb{N} \right\} \subsetneq \mathcal{E}(\mathbb{Z}),$$

这就给出了一个无限生成群的例子，其中 $\mathcal{E}(G)$ 不等于 $\mathcal{E}(\mathbb{Z})$，也不等于 $\mathcal{E}(\mathbb{Z}^2)$。一般而言，要分类群 G 上有限型子移位能够实现的熵相当困难；不过，对于这个群，由于以下事实，分类过程变得可行：

$$H_n = \left(\bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \right) \oplus \left(\bigoplus_{k=n+1}^{\infty} \{0\} \right)$$

这是群 G 的有限子群序列，满足 $H_n \leq H_{n+1}$ 和 $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$，因此 $\{H_n\}$ 是群 G 的 Følner 序列。事实证明，具有这样一个有限子群序列 $\{H_n\}$ 的可数群必定是局部有限群。若每个有限生成子群都是有限群，则称该群为局部有限群。事实上，任意可数局部有限群都必定具有这样的子群序列，因此当群是可数群时，这一性质恰好等同于局部有限性。局部有限群以一种自然的方式扩展了有限群，使得尽管它们可能是无限群，仍可在分析时采用有限方法。因此，人们可能会认为局部有限群上的有限型子移位具有高度结构性，并具备许多良好的动力学性质。

本文的主要结果证实，局部有限群上的有限型子移位具有非常强的动力学性质。此外，我们证明，局部有限群是唯一使所有有限型子移位都具有这些性质的群。这些结果分为两类：一类适用于任意群 G ，另一类适用于可数可 amenable 群 G 。第一类结果如下，随后我们将

简要解释结果中的每一项陈述，不过下文所有术语的正式定义均可在第 2 节中找到。

定理 I. 设 G 是一个群。那么以下命题等价。

(a) G是局部有限的。(b) 每个 G-有限型子移位都是某个定义在 G的有限子群上的有限型子移位的自由扩张。(c) 每个 G-有限型子移位都是强不可约的。(d) 每个强不可约的 G-移位都是 G-有限型子移位。(e) 每个 sofic G-移位都是 G-有限型子移位。(f) 对每个 G-有限型子移位 X，自同构群 Aut(X) 都是局部有限的。

命题 I(b) 并非典型的动力学性质，而是涉及第 3 节中定义的一种特定移位，称为自由扩张移位。自由扩张移位绝非新概念，过去已有应用 [10, 1], ；不过，我们给出了一个形式化构造，事实证明它对于推导自由扩张的性质十分有用。命题 I(b) 与 I(a) 等价，这一点是证明本定理及下一定理时几乎所有论证的核心。第 3 节针对一般群定义了自由扩张移位，它们或许有助于研究一般群上的移位，而不仅限于研究局部有限群上的移位。命题 I(e) 涉及 sofic 移位，它们是有限型子移位在连续移位不变因子映射下的像。与有限型子移位一样，sofic 移位也是一类值得关注的移位，它们由有限量的信息定义。每个有限型子移位必然是 sofic 移位，但反过来通常不成立；定理 I 表明，只有当群是局部有限群时，反向命题才成立。因子映射的定义见第 2.2.1 节，sofic 移位的定义见第 2.3.3 节。命题 I(c) 表明，局部有限群上的每个有限型子移位都是强不可约的。形式化定义见定义 2.11；简而言之，强不可约性是一种性质，它保证：对于移位中的任意两个元素，都存在移位中的一个元素，使其在某个有限子集上与其中一个元素相同，并且在任意充分分离的有限子集上与另一个元素相同。从这个意义上说，强不可约移位包含丰富的构型。命题 I(d) 是前一个命题的逆命题，并且它也独立地等价于群是局部有限的。这两个命题合起来表明，当 G 是局部有限的时， G-有限型子移位的集合与强不可约 G-移位的集合恰好相同；而当 G 不是局部有限的时，二者互不包含。命题 I(f) 涉及 Aut(X)，即有限型子移位 X的自同构群。该群由从 X 到其自身、且保持 G作用的同胚组成，其形式化定义见第 2.2.1 节末尾。

对于第二个结果，我们将范围限定在 G 是可数可 amenable 群的情形，这使得我们能够引入拓扑熵，而结果中的每一条陈述都涉及这种熵。结果陈述之后简要讨论了每一条陈述，而所有术语的正式定义均见第 2 节。在陈述 II(d) 中，我们使用非标准记号 $H \ll G$ 来表示 H 是 G的有限子群。

定理 II. 设 G是可数可 amenable 群。那么以下各项等价。

(a) G是局部有限的 (b) 如果 X 是非空的 G-有限型移位，且满足 $h(X) = 0$，那么 $X = \{x\}$，其中 x 是不动点。

(c) 每个 G-有限型移位都是熵极小的。

(d) G是局部典型的，并且

$$\mathcal{E}(G) = \left\{ \frac{\log(n)}{|H|} : H \ll G, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{Q}^{+}_{\log} = \left\{ \frac{\log(n)}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

(e) 每个 G-有限型移位都有唯一最大熵测度。

我们指出，尽管本文将结果限制在可数 amenable 群上，熵也可以推广到更一般的可数 sofic 群类[4], ，但我们并不需要这个更一般的定义，因为任何可数局部有限群必然是 amenable 的。熵的定义见第 2.3.4 节。陈述 II(b) 讨论的是哪些类型的零拓扑熵有限型子移位可能存在；对于局部有限群，零熵有限型子移位只有一个（在共轭意义下）。这一结果间接肯定地回答了 Barbieri 的一个问题：

问题 3.19 [1] 是否存在一个 amenable 群 G 以及一个 G-有限型移位，其中不包含零熵 G-有限型移位?

由于局部有限群上的唯一零熵有限型移位是不动点，因此只需构造一个不含不动点的有限型移位；利用自由扩张，这很容易做到。关于这一构造的进一步讨论见第 5 节。

陈述 II(c) 涉及熵极小性，即一个移位不含有与整个移位熵相同的真子移位这一性质。正式定义见定义 2.17。陈述 II(d) 包含两部分。第一部分是，G 具有局部典型性；这是群论中一种非标准术语，意指 G 的每个有限生成子群要么是有限群，要么包含一个无限阶元素。第 4.2.3 节和第 5 节进一步讨论了该陈述为何需要这一条件。第二部分对任意局部有限群上可实现的熵集进行分类，并给出以下推论；该推论或许具有独立于定理其余部分的意义。

推论。设 G 是一个可数局部有限群。那么

$$\mathcal{E}(G) = \left\{ \frac{\log(n)}{|H|} : H \ll G, n \in \mathbb{N} \right\}$$

最后，定理中的最后一项陈述，即陈述 II(e)，涉及测度论熵和最大熵测度；后者是定义在有限型移位上的不变测度，其测度论熵等于该系统的拓扑熵。这些概念的正式定义从定义 2.21 开始给出。

1.1. 概述。在第 2 节中，我们介绍本文其余部分所用的相关背景和记号。在第 3 节中，我们针对一般群构造自由扩张移位，并证明这些移位的一些性质。在第 4 节中，我们证明定理 I 和 II，并将证明分解为若干个独立的引理。最后，在第 5 节中，我们讨论定理 I 和 II 的一些一般推论以及自由扩张的性质，并指出未来研究的可能方向。

2. Definitions and Notation

我们首先定义所有必要的背景术语和记号。本节根据所定义的内容分为若干小节。

2.1. 集合与群。对于任意集合 A，令 $B \Subset A$ 表示 B 是 A的有限子集。两个集合 A 和 B 的集合差记作 $A \setminus B$。两个集合 A 和 B 的不交并记作 $A \sqcup B$。两个集合 A 和 B 的对称差记作 $A \triangle B$

给定两个集合 A 和 B，集合 A^B 表示所有函数$f\colon B \to A$组成的集合。如果 A 赋有拓扑，那么 A^B 就赋有乘积拓扑。

对于群 G，我们用 $H \leq G$表示子集 $H \subset G$ 是 G 的子群；若要进一步说明 H 是 G的有限子群，则使用记号$H \ll G$。对于 $F \subset G$，由 F 生成的 G 的子群记作 $\langle F\rangle$。如果一个群的所有元素都具有有限阶，则称该群为周期群（也称挠群）。这些记号对于群而言是标准的，但以下术语并不标准：如果一个群既是周期群又是无限群，则称其为非典型群。如果一个群不是非典型群，则称其为典型群；这意味着它是有限群或非周期群。如果 P 是一种群可以具有的性质，那么若 $\forall F \Subset G$时子群 $\langle F\rangle$具有性质 P，就称群 G 为局部 P。如果对于 $\forall F \Subset G$，我们有 $\langle F\rangle \ll G$，那么群 G就是局部有限群；也就是说， G 的每个有限生成子群都是有限的。如果 $\forall F \Subset G$时子群 $\langle F\rangle$ 是典型群，则称 G 为局部典型群。此外，我们用“非局部有限”表示一个群不是局部有限的（“非局部典型”亦同）。

给定群 G 及其子群 $H \leq G$，我们用 $H\backslash G$表示 G 中 H的右陪集集合。此记法与集合差的记法类似（但间距不同）；不过通常可以根据上下文清楚地判断所指为何。

若可数群 G 存在一个序列 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得$F_n \Subset G$，$\{F_n\}$ 穷尽 G，从而 $G = \bigcup_n F_n$，且 $\forall g \in G$，则称其为可 amenable 群。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|gF_n \triangle F_n|}{|F_n|} = 0.$$

这样的序列称为左 Følner 序列。类似地，可 amenable 群也存在满足下列条件的右 Følner 序列:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|F_n g \triangle F_n|}{|F_n|} = 0.$$

2.2. G-空间。尽管本文的主要结果并不涉及一般的G-空间，但构造中会用到它们，因此有必要对其进行定义。G-空间的定义适用于更一般的拓扑群；但在本文的具体情形中，群 G 上的拓扑始终取为离散拓扑，因此定义可简化如下。

定义 2.1. 设 G 是一个群（视为离散群），X 是一个拓扑空间。取任意一组 $T = \{T^g\colon\ g \in G\}$ 个函数 $T^g\colon\ X \to X$，它们都是同胚，并且对所有 g、$h \in G$，都满足 $T^g \circ T^h = T^{gh}$。此外，对于单位元 $e \in G$，T^e 应为 X 上的恒等函数。则有序对（X，T）是一个 G-空间。

在我们的情形中，拓扑空间 X 总是豪斯多夫空间，通常是紧致的，偶尔是可度量化的。

2.2.1. 因子与共轭。本文中一般 G-空间的主要用途，是用于两个 G-空间之间的共轭，这是一种自然的等价概念。首先，我们定义因子和因子映射。

定义 2.2. 设 G 是一个群，且 (X,T)、(Y,S) 是两个 G-空间。若映射 $\phi\colon X\to Y$ 满足

- ϕ是连续的，
- ϕ 是满射的，且
- 对每个 $g\in G$，$S^g\circ\phi=\phi\circ T^g$。

如果存在从 X 到 Y的因子映射，那么称 Y 是 X的因子。

如果因子映射 ϕ 是一个同胚，那么称 ϕ 为共轭，并称 X 与 Y共轭。从一个 G-空间X 到其自身的共轭映射构成一个群，在复合运算下记作 Aut(X)。

2.3. G-移位。本节余下部分中，$\mathcal{A}$ 是一个有限字母表（集合），并赋予离散拓扑。

定义 2.3. 设 G 为一个群。 $\mathcal{A}^G$ 赋予乘积拓扑，使其成为一个紧豪斯多夫空间。当 G 可数时，$\mathcal{A}^G$ 可度量化；当 G 可数时，我们将视此事实为显然。对于任意 $g\in G$，定义$\sigma^g\colon \mathcal{A}^G\to\mathcal{A}^G$ 为

$$(\sigma^g x)(h)=x(hg)$$

对任意 $h\in G$均成立。每个 σ^g 都是从 $\mathcal{A}^G$ 到 $\mathcal{A}^G$的一个同胚，并且对所有 g, $h\in G$，有 $\sigma^g\circ\sigma^h=\sigma^{gh}$。此外，对每个 $x\in X$，有 $\sigma^e x=x$，因此，集合 $\sigma=\{\sigma^g\colon g\in G\}$ 是 G 在 $\mathcal{A}^G$上的连续作用。称对 $(\mathcal{A}^G,\sigma)$ 为以字母表 $\mathcal{A}$为字母表的全 G-移位；若字母表 $\mathcal{A}$ 明确（通常如此），也简称为全 G-移位。这也使 $(\mathcal{A}^G,\sigma)$ 成为一个 G-空间。 $\mathcal{A}^G$ 的元素称为构型。

尽管完整的 G-移位本身就很有趣，但我们主要关注完整 G-移位的子系统，它们称为 G-移位。

定义 2.4. 设 G 为一个群。若子集 $X\subset\mathcal{A}^G$ 满足对每个 $x\in X$以及 $g\in G$，都有 $\sigma^g x\in X$，则称其为 G-不变；当群 G 由上下文可知时，也简称为移位不变。一个闭的、 G-不变的子集 $X\subset\mathcal{A}^G$，连同 G 在 $\mathcal{A}^G$ 上的作用限制在 X上，称为 $\mathcal{A}^G$的 G-移位；若完整移位由上下文可知，也简称为 G-移位。 G-移位也是 G-空间。

2.3.1. 图案。虽然 $\mathcal{A}^G$ 的元素称为构型，但在考虑某个 $F\subset G$对应的 $\mathcal{A}^F$ 的元素时，使用“图案”一词。此外，我们还定义了几种图案运算，它们在研究移位时颇为有用。

定义 2.5. 对于任意群 G 和 $F\subset G$，元素 $w\in\mathcal{A}^F$ 称为 F上的$\mathcal{A}$-图案；如果 $\mathcal{A}$ 明确，也可简称为图案。图案 $w\in\mathcal{A}^F$ 的形状就是集合 F 本身。

对于 E、$F\subset G$ 以及图案 $w\in\mathcal{A}^E$和 $v\in\mathcal{A}^F$，如果 E 和 F 不相交，我们就称 w和 v 不相交。类似地，如果 F 是有限的，就称 $w\in\mathcal{A}^F$ 是有限的；如果 F 是无限的，就称 $w\in\mathcal{A}^F$ 是无限的。

对于任意 $E\subset F\subset G$（包括 $E=F=G$），图案 $w\in\mathcal{A}^F$在 E上的限制记作 $w|_E$，且包含于 $\mathcal{A}^E$，其定义为：对每个 $g\in E$，$w|_E(g)=w(g)$。反过来，对于某个 $w\in\mathcal{A}^E$，w 的 F-扩张集合定义为

$$[w]_F=\left\{v\in\mathcal{A}^F : v|_E=w\right\}.$$

在 $F\leq G$ 的情况下，$[w]_F$ 称为柱集。在$F=G$的情况下，则使用 $[w]$ 代替 $[w]_G$，除非有必要明确区分。

图案对于描述 G-移位的结构非常有用。对于任意 G-移位X （包括完整的 G-移位），集合

$$\mathfrak{B} = \left\{[w]_G \cap X : F \Subset G, w \in \mathcal{A}^F\right\}$$

是 X 作为完整 G-移位的子空间时所继承的子空间拓扑的一个基。注意，$[w]_G \cap X$ 可能为空，也可能非空；为区分这两种情况，我们定义以下集合。

定义 2.6。对于任意 G-移位 X 以及任意 $F \subset G$，令 $\mathcal{L}_F(X)$ 表示 X 的 F-语言，其定义如下：

$$\mathcal{L}_F(X) = \{x|_F : x \in X\} \subset \mathcal{A}^F.$$

接着令 $\mathcal{L}(X)$ 表示 X 的语言，其定义如下：

$$\mathcal{L}(X) = \bigsqcup_{F \Subset G} \mathcal{L}_F(X).$$

根据此定义，注意到 $w \in \mathcal{L}(X)$ 当且仅当 $[w]_G \cap X \neq \varnothing$。此外，令 $\mathcal{L}^\infty(X)$ 表示集合

$$\mathcal{L}^\infty(X) = \bigsqcup_{F \subset G} \mathcal{L}_F(X).$$

这与 $\mathcal{L}(X)$ 的主要区别在于， $\mathcal{L}^\infty(X)$ 还包含无限模式。

我们还令 $\mathcal{F}_F(X) = \mathcal{A}^F \setminus \mathcal{L}_F(X)$，并且

$$\mathcal{F}(X) = \bigsqcup_{F \Subset G} \mathcal{F}_F(X).$$

这些集合分别称为 X 的禁用 F-图案和 X的禁用图案。

在第 3 节中的构造里，我们使用将移位作用 σ 扩展到 $\mathcal{L}^\infty(X)$ 的一种方式，以及一种合并运算，它允许取两个不相交图案并将它们合并为一个图案。接下来给出这些定义。

定义 2.7. 设 G 是一个群， X 是一个 G-移位。设 $g \in G$。那么对于任意$F \subset G$，定义 σ_F^g: $\mathcal{L}_F(X) \to \mathcal{L}_{Fg^{-1}}(X)$ 如下：

$$(\sigma_F^g w)(h) = w(hg), \quad \forall h \in Fg^{-1}.$$

注意，在 $F = G$的情形下，这涵盖了典型的移位映射。接着，对于任意 $F \subset G$ 和图案 $w \in \mathcal{A}^F$，我们定义σ^g： $\mathcal{L}^\infty(X) \to \mathcal{L}^\infty(X)$ 如下：

$$\sigma^g w = \sigma_F^g w.$$

事实上，当 $\mathcal{L}^\infty(X)$ 赋予不交并拓扑时，$(\mathcal{L}^\infty(X), \sigma)$ 是一个 G-空间（其中 $\mathcal{L}_F(X)$ 赋予来自 $\mathcal{A}^F$ 上的乘积拓扑的子空间拓扑）。

将图案限制到子形状以及进行移位这两个操作彼此具有良好的相容性。设 $E \subset F \subset G$，并设 $g \in G$。那么对于任意 $w \in \mathcal{L}_{Eg}(X)$，图案 $\sigma^g w$的形状为 $Egg^{-1} = E$；并且对于任意 $h \in E$，

$$\sigma^g(w|_{Eg})(h) = (w|_{Eg})(hg) = w(hg) = (\sigma^g w)(h).$$

由于这对任意 $h \in E$ 都成立，因此可得

$$\sigma^g(w|_{Eg}) = (\sigma^g w)|_E.$$

许多证明在未加说明的情况下都会使用这一规则。

移位与扩展集之间也存在类似的相互作用。设 $E \subset F \subset G$，且 $g \in G$。则 $Eg \subset Fg$，并且对于任意 $w \in \mathcal{L}_{Eg}(X)$，

$$\sigma^g[w]_{Fg} = [\sigma^g w]_F.$$

许多证明中也会在不加说明的情况下使用这一点。

除了这种自然的图案移位概念外，定义两个不相交图案的合并也有一种自然的方式。

定义 2.8. 设 G 为一个群，且 X 为一个 G-移位。对于任意不相交的 u、$v \in \mathcal{L}^\infty(X)$，其形状分别为 F_u 和 F_v（因此 $F_u \cap F_v = \varnothing$），我们将 u 和 v的合并记作 $u \vee v$，定义如下。设 $w = u \vee v$ 定义为

$$w(g) = \begin{cases} u(g), & g \in F_u \\ v(g), & g \in F_v \end{cases},$$

这是一个形状为 $F_u \sqcup F_v$的图案。由于进行合并要求 F_u 和 F_v 不相交，显然 $\vee$ 是可交换的。

此外，移位作用在 $\vee$ 上满足分配律。对于任意互不相交的 u、$v \in \mathcal{L}^\infty(X)$ 和 $g \in G$，总有 $\sigma^g(u \vee v) = (\sigma^g u) \vee (\sigma^g v)$。

此外，对于任意互不相交的无限集合图案，这些图案都可以合并为一个（可能是无限的）图案；由于这种交换性，无限合并的顺序无关紧要。出于类似的原因，移位与无限合并也可交换。无限合并以及移位与无限合并的交换性，是第 3 节的重要组成部分。

2.3.2. G-移位的性质。每个 G-移位 X 定义了一组禁模式，不过，也可以根据一组禁模式来定义一个 G-移位。

定义 2.9. 设 G 为一个群，$\mathcal{A}$ 为一个有限字母表，并设 $\mathbf{F} \subset \mathcal{L}(\mathcal{A}^G)$ 为一组禁模式。定义

$$\mathcal{X}^G[\mathbf{F}] = \left\{x \in \mathcal{A}^G : \forall g \in G, \forall F \subset G,\ (\sigma^g x)|_F \notin \mathbf{F}\right\}$$

这是一个初等练习：可以证明 $\mathcal{X}^G[\mathbf{F}]$ 是一个 G-移位（尽管可能为空），因此 $\mathcal{X}^G[\mathbf{F}]$ 被称为由 $\mathbf{F}$ 定义的 G-移位。在上下文明确 G 时使用 $\mathcal{X}[\mathbf{F}]$。

另一个初等结果是，对于任意 G-移位 X，都有 $X = \mathcal{X}[\mathcal{F}(X)]$，因此每个 G-移位都由某个有限禁用模式集合生成。

虽然 $\mathcal{F}(X)$ 始终是定义 G-移位 X 的禁用模式集合，但可能存在小得多的禁用模式集合。在某些情况下，可能存在一个有限禁用模式集合，定义一个 G-移位 X；此时，该 G-移位被称为有限型移位。

定义 2.10。设 G 是一个群，X 是一个 G-移位。若存在有限集合 $\mathbf{F} \Subset \mathcal{L}(X)$ 使得 $X = \mathcal{X}[\mathbf{F}]$，则称 X 为 G有限型移位，通常记为 G-有限型移位（SFT）。

对于任意 G-有限型移位 X，总存在某个 $F \Subset G$，使得 $X = \mathcal{X}[\mathcal{F}_F(X)]$。这样的形状 F 称为 X 的禁形。此外，给定某个禁形 F，任何满足 $F \subset H$ 的 $H \Subset G$ 也是一个禁形，这意味着 $X = \mathcal{X}[\mathcal{F}_F(X)] = \mathcal{X}[\mathcal{F}_H(X)]$。许多结果在未作说明的情况下都会用到这一性质。

G-有限型子移位具有有限性，因此适合用更具组合性的方法进行分析；而且，它们在许多方面通常都具有良好的性质。G-移位还可能具有另一种重要性质，即强不可约性。这是一种强混合类型的性质，在相关文献中普遍受到关注。

定义 2.11. 设 G 为一个群，X 为一个 G-移位。若存在一个有限的 $K \Subset G$ 满足以下性质，则称 X 是强不可约的。对于任意u、$v \in \mathcal{L}(X)$，若其形状分别为 F_u和 F_v，且 $F_u \cap KF_v = \varnothing$，则存在 $x \in X$ 使得 $x|_{F_u} = u$ 且 $x|_{F_v} = v$。

此定义不同于有限生成群 [7]上移位的强不可约性的常见定义。当 G 是有限生成群时，此定义与更常见的定义等价，只是将较常见的定义推广到了（可能）无限生成群。

2.3.3. 因子与 sofic 移位。对于一般的 G-空间，因子映射的结构所知不多；而对于 G-移位（以及更广泛的一类类似 G-移位的 G-空间），因子映射具有非常具体的结构。我们首先定义一种特殊的因子映射，它可以构造于两个 G-移位之间。

定义 2.12. 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个有限字母表，G 是一个群，且X 是 $\mathcal{A}^G$的一个 G-移位。对于某个 $F \Subset G$，设 $\beta\colon \mathcal{L}_F(X) \to \mathcal{B}$ 是任意函数，称为块映射。则 β 诱导出一个映射 $\phi_\beta^G\colon X \to \mathcal{B}^G$，称为块码，其定义为

$$\big(\phi_\beta^G(x)\big)(g) = \beta\big((\sigma^g x)|_F\big),$$

且 $Y = \phi_\beta^G(X)$ 是 $\mathcal{B}^G$的一个 G-移位。不过，我们不再考虑 $\mathcal{B}^G$，而是将 ϕ_β^G 的陪域视为 Y，这使得 ϕ_β^G 成为满射，因此是从 X 到 Y的一个因子映射。

块码通常易于处理，因为生成它们的块映射具有有限性。令人惊讶的是，任意两个 G-移位之间的因子映射（其字母表可以不同）都是由某个块映射生成的块码，这一事实由以下定理给出。

定理 2.13（Curtis-Lyndon-Hedlund）。设 G 是一个群，$\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是有限字母表，X 是 $\mathcal{A}^G$ 的一个 G-移位，Y是 $\mathcal{B}^G$的一个 G-移位，并设 $\phi\colon X \to Y$。那么，ϕ 是因子映射，当且仅当存在 $F \Subset G$ 以及块映射 $\beta\colon \mathcal{L}_F(X) \to \mathcal{B}$，使得 $\phi = \phi_\beta^G$。

这一一般性层次下定理的证明可见于 [18, 推论6]。非正式地说，该定理表明，G-移位的因子映射由有限量的信息决定。还有一类范围更广、由有限量的信息决定的 G-移位，它包含所有有限型子移位，但通常还包括更多移位；这就是拟有限型 G-移位类。

定义 2.14。若存在一个 G-有限型子移位 X，使得 Y是 X的因子，则称 G-移位 Y 为拟有限型 G-移位。

Weiss 在首次引入 sofic $\mathbb{Z}$-移位时指出：“有限型子移位的缺陷在于，它们不满足最简单运算的封闭性，即取[因子]” [20]。所有 sofic 移位的集合显然对取因子运算封闭，而这正是 sofic 移位类在符号动力系统中受到关注的诸多原因之一。

2.3.4. 熵。动力系统中研究移位的另一个重要方面是熵（包括拓扑熵和测度论熵），不过，由于在尝试更一般地定义熵时会出现不一致，相关理论通常仅限于可数 amenable 群。对于更广泛的可数 sofic 群类，也存在熵的概念 [4], 然而本文仅采用可数可 amenable 群的定义。关于 G-空间的拓扑熵和测度论熵的形式化论述，以及这些熵概念的相关结果，可见 [11]。

定义 2.15。设 G 是一个可数可 amenable 群。则非空 G-有限型移位 X 的（拓扑）熵定义为

$$h(X) = \inf_n \frac{\log\big(|\mathcal{L}_{F_n}(X)|\big)}{|F_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\big(|\mathcal{L}_{F_n}(X)|\big)}{|F_n|},$$

其中 $\{F_n\}$ 是 G的某个 Følner 序列。该极限总是存在，并且等于上式中的下确界 [11, 第 9 节。9]。X 的熵也与 Følner 序列的选择无关。

此外，一些结果涉及这样一组实数：它们可以作为某个特定群上有限型子移位的（拓扑）熵取得。

定义 2.16。设 G 是一个可数可 amenable 群。令

$$\mathcal{E}(G) = \big\{h(X) : X \text{ a nonempty } G\text{-SFT}\big\}$$

注意，$\mathcal{E}(G)$ 是 $[0,\infty$ 的一个可数子集，因为对于任意群 G，G-有限型子移位只有可数多个。对于给定的群 G，准确确定集合 $\mathcal{E}(G)$ 通常相当困难。Lind 的经典结果 [13] 精确刻画了 $\mathcal{E}(\mathbb{Z})$：它是 Perron 数的对数的非负有理倍数组成的集合。最近，Hochman 和 Meyerovich 确定 $\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)$ 是非负上半可计算实数 [10]的集合。对于具有可判定字问题、且允许由 $\mathbb{Z}^2$ 赋予类平移作用的有限生成可平均群 G，Barbieri 的近期工作 [1] 已将 $\mathcal{E}(G)$ 刻画为非负上半可计算实数的集合。

借助熵，我们还可以定义以下极小性概念。

定义 2.17. 设 G 为一个可数可 amenable 群，X 为一个 G-移位。若对于每个子移位 $Y \subsetneq X,$，都有 $h(Y) < h(X)$，则称 X 是熵极小的。

一个较弱但相关的极小性概念是有限型移位熵极小性。

定义 2.18. 设 G 为一个可数可 amenable 群，X 为一个 G-移位。若对于每个有限型子移位 $Y \subsetneq X,$，都有 $h(Y) < h(X)$，则称X 是有限型移位熵极小的。

尽管一般而言，有限型移位熵极小性弱于熵极小性，但如果所讨论的移位是有限型移位，那么二者实际上等价。证明这一点是一个相当标准的论证，涉及用有限型子移位逼近子移位，因此我们略去证明。这个事实对于证明有限型移位是熵极小的非常有用，因为它大大减少了证明熵极小性时需要考虑的移位数量。

除了拓扑熵之外，如果移位 X 还赋有一个与 G的移位作用相协调的博雷尔概率测度（由于 G 可数，$\mathcal{A}^G$ 是可度量化的，因此该测度总是拉东测度），则可以定义测度论熵。

定义 2.19. 设 G 是一个可数可 amenable 群，且 X 是一个 G-移位。若对任意 $g \in G$ 和可测的 $E \subset X$，均有 $\mu(\sigma^{g^{-1}} E) = \mu(E)$，则称 X 上的测度 μ 是 G-不变的。

令 $\mathcal{M}(X)$ 表示 X 上所有 G-不变博雷尔概率测度的集合 μ 。

对于 G-移位 X 和 $w \in \mathcal{L}(X)$， $\mu[w]$ 用作 $\mu([w] \cap X)$ 的简写。要定义 X 的 μ-熵，首先必须定义相应的划分熵。

定义 2.20。设 G 是一个可数可 amenable 群， X 是一个 G-移位，且 $\mu \in \mathcal{M}(X)$。那么，对任意 $F \Subset G$， X 的 (F, μ)-熵定义为

$$H_\mu(X, F) = -\sum_{w \in \mathcal{L}_F(X)} \mu[w] \log(\mu[w]),$$

其中，按惯例令 $0 \cdot \log(0)$ 为 0。 $H_\mu(X, F)$ 在 $\mathcal{M}(X)$ 上的最大值为 $\log(|\mathcal{L}_F(X)|)$，且仅当任意满足 $\mu[w] = |\mathcal{L}_F(X)|^{-1}$ 对所有 $w \in \mathcal{L}_F(X)$ [19, 推论 4.2.1] 的 $\mu \in \mathcal{M}(X)$ 取值时达到。

由此可以定义测度论熵。

定义 2.21. 设 G 是一个可数可 amenable 群， X 是一个 G-移位，且 $\mu \in \mathcal{M}(X)$。那么，对于 G 的任意 Følner 序列 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$， X 的 μ-熵定义为

$$h_\mu(X) = \inf_n \frac{H_\mu(X, F_n)}{|F_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{H_\mu(X, F_n)}{|F_n|}.$$

与拓扑熵一样，这个极限总是存在，等于这个下确界，并且与 Følner 序列 [11, 的选取无关（第 9 节3]）。此外，变分原理 [11, （定理 9.43] ）给出

$$h(X) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X)} h_\mu(X).$$

满足 $h(X) = h_\mu(X)$ 的测度 $\mu \in \mathcal{M}(X)$ 称为最大熵测度；对于 G-移位，至少存在一个最大熵测度，因为移位作用是扩张的。

3. 自由扩张移位

尽管本文的主要目的是证明，局部有限群恰好是对所有有限型子移位都具有强动力学性质的群，但直接证明这些性质中的许多性质颇为繁琐。因此，我们建立自由扩张移位的一般理论，从而简化（甚至使之变得显而易见）局部有限群的许多结果。本文几乎所有主要结果都运用了自由扩张的性质；自由扩张将在本节中构造。

不过，自由扩张移位这一概念并非新创。Hochman 和 Meyerovich[10] 在他们那篇开创性论文中使用了这一概念（尽管没有明确称之为自由扩张移位），以刻画 $\mathbb{Z}^d$ 有限型子移位可能具有的熵。“自由扩张”这一术语及其一些相关记号由 Barbieri [1], 提出；在 Barbieri 的构造中，自由扩张是构造移位“扩张”的一种更一般方法的特例。本文给出的构造远不如 Barbieri 的构造一般，但或许更适合专门分析自由扩张。

3.1. 自由扩张的构造。我们通过取某个特定闭的、 G不变子集在一个 G空间中的同胚像来构造自由扩张移位；该空间与完整的 G移位共轭。不过，这个 G空间并非通常意义上的 G移位，因为 G 在该空间上的作用并非由通常的移位给出。通过明确构造这两个 G空间之间的共轭，我们可以轻易构造出这个 G空间的子系统，并通过该共轭将其映射到一个 G移位中。

首先，我们需要先定义子群的右陪集族的选择函数这一概念。

定义 3.1. 设 G 是一个群，且 $H \leq G$。 $H\backslash G$（ G 中 H 的右陪集）的选择函数是指任意满足以下条件的函数 $\zeta\colon H\backslash G \to G$ ：对于任意 $Hc \in H\backslash G$， $\zeta(Hc) \in Hc$。由于子群的陪集两两不相交，任何选择函数都是单射。将选择函数 ζ 的陪域限制为 $\zeta(H\backslash G)$ 后，每个选择函数都是双射。为简便起见，我们也令 $C_\zeta = \zeta(H\backslash G)$，使得 $\zeta\colon H\backslash G \to C_\zeta$ 是双射。

我们将 $\mathcal{C}(H\backslash G)$ 定义为所有选择函数 $\zeta\colon H\backslash G \to C_\zeta$ 的集合，因此它们都是双射。注意，根据选择公理，无论选择 G 和 H 如何，选择函数始终存在。

有了群 G 和子群 H的这些选择函数，我们现在可以定义与完整 G-移位共轭的 G-空间（见定理 3.4）。

定义 3.2. 设 G 是一个群， $H \leq G$是其子群， $\mathcal{A}$ 是一个有限字母表。令$\zeta \in \mathcal{C}(H\backslash G)$。 G 通过$\eta^g(Ha) = Hag$在右陪集 $H\backslash G$ 的集合上有一个自然的作用。注意，每个 η^g 都是从 $H\backslash G$ 到其自身的良定义双射。利用这两个映射，我们可以定义 G 在 C_ζ上的一个作用；对于每个 $g \in G$， g 在 C_ζ 上的作用为 $\xi^g_\zeta\colon C_\zeta \to C_\zeta$，其定义为 $\xi^g_\zeta = \zeta \circ \eta^g \circ \zeta^{-1}$。当 $H\backslash G$和 C_ζ赋予离散拓扑时，这使得$(H\backslash G, \eta)$和(C_ζ, ξ_ζ)成为共轭的 G-空间。

令 $\mathcal{A}^{H;C_\zeta}$ 表示集合 $\left(\mathcal{A}^H\right)^{C_\zeta}$。该空间赋予来自 $\mathcal{A}^H$ 上乘积拓扑的乘积拓扑，因此 $\mathcal{A}^{H;C_\zeta}$ 是一个紧致豪斯多夫空间（当 G 可数时，它还是可度量化的）。对于每个 $g \in G$，定义 $\rho^g_\zeta\colon \mathcal{A}^{H;C_\zeta} \to \mathcal{A}^{H;C_\zeta}$ 为

$$\rho^g_\zeta\left(\{w_c\}_{c\in C_\zeta}\right) = \left\{\sigma^{cg\xi^g_\zeta(c)^{-1}} w_{\xi^g_\zeta(c)}\right\}_{c\in C_\zeta}.$$

由于 $\xi^g_\zeta \circ \zeta = \zeta \circ \eta^g$，因此对于任意 $c \in C_\zeta$，

$$\xi^g_\zeta(c) = \xi^g_\zeta(\zeta(Hc)) = \zeta(\eta^g(Hc)) = \zeta(Hcg),$$

因此 $Hcg = H\xi^g_\zeta(c)$。这说明 $cg\xi^g_\zeta(c)^{-1} \in H$，所以 ρ^g_ζ 定义良好。事实上，每个 ρ^g_ζ 都是一个同胚，因为指标的重排仅取决于 g，且每个 σ 在 $\mathcal{A}^H$ 上都是一个同胚。集合 $\rho_\zeta = \{\rho^g_\zeta\colon g \in G\}$ 构成了 G 在 $\mathcal{A}^{H;C_\zeta}$ 上的一个作用，这表明 $(\mathcal{A}^{H;C_\zeta}, \rho_\zeta)$ 是一个 G-空间。

通俗地说， G-空间（$\mathcal{A}^{H;C_\zeta}, \rho_\zeta$）可以看作在群 G 中， H 的每个陪集上都有一份 $\mathcal{A}^H$；$\mathcal{A}^{H;C_\zeta}$ 中的元素在每个陪集上都有一个与 $\mathcal{A}^H$ 不同的构型。从动力系统的角度看， ρ_ζ 分两步作用于这个空间。第一步，对于 $g \in G$的一种特定选择，各陪集中的构型会被重新分配到其他陪集（不过，某个构型一定仍留在它

最初所在的陪集中），具体取决于 g 对 G中 H 的陪集的作用。第二步，再将每个构型分别在其新所在的陪集中，按 g的特定选择所决定的 H中的一个元素进行移位。动力系统完全不依赖于 $\mathcal{A}^{H;C_\zeta}$中的具体元素。对 ρ_ζ的定义作出特定选择后，对于 ζ 的任意选择，（$\mathcal{A}^{H;C_\zeta},\rho_\zeta$）的动力系统在 G 的 σ作用下与满 G-移位共轭（见下文定理 3.4）。对于任意集合 B，还可以在集合 $\mathcal{A}^{H;B}$ 上构造其他类似系统：选取函数 $\alpha\colon G\times B\to B$和 $\beta\colon G\times B\to H$，使得对每个 $g\in G$，$\alpha(g,\cdot)$都是一个双射，并定义 G 在 $\mathcal{A}^{H;B}$ 上的作用 $\delta_{\alpha,\beta}$，

$$\delta^g_{\alpha,\beta}\big(\{w_b\}_{b\in B}\big)=\big\{\sigma^{\beta(g,b)}w_{\alpha(g,b)}\big\}_{b\in B}.$$

不过，这些系统本身或许也值得研究，但我们只关注特定的系统（$\mathcal{A}^{H;C_\zeta},\rho_\zeta$）。现在来定义这些空间之间的共轭映射。

定义 3.3. 设 G 为一个群，设 $H\le G$，设 $\zeta\in\mathcal{C}(H\backslash G)$，并设 $\mathcal{A}$ 为一个有限字母表。定义构造函数 $\kappa_\zeta\colon\ \mathcal{A}^{H;C_\zeta}\to\mathcal{A}^G$，如下：

$$\kappa_\zeta(\{w_c\}_{c\in C_\zeta})=\bigvee_{c\in C_\zeta}\sigma^{c^{-1}}w_c.$$

注意，κ_ζ 定义良好，因为 $\sigma^{c^{-1}}w_c$ 的形状为 Hc，所以并中的每个图案互不相交；此外，κ_ζ 会产生 $\mathcal{A}^G$ 中的一个构型，因为 $\{Hc\}_{c\in C_\zeta}$ 是 G的一个划分。

还需证明，任意选择的构造函数 κ_ζ 实际上都是（$\mathcal{A}^{H;C_\zeta},\rho_\zeta$）与（$\mathcal{A}^G,\sigma$）之间的共轭映射。

定理 3.4. 设 G 为一个群，设 $H\le G$，且设 $\zeta\in\mathcal{C}(H\backslash G)$。那么，$\kappa_\zeta$ 是（$\mathcal{A}^{H;C_\zeta},\rho$）与（$\mathcal{A}^G,\sigma$）之间的共轭映射。也就是说，$\kappa_\zeta$是一个同胚，并且$\forall g\in G$,

$$\kappa_\zeta\big(\rho^g_\zeta(\{w_c\}_{c\in C_\zeta})\big)=\sigma^g\big(\kappa_\zeta(\{w_c\}_{c\in C_\zeta})\big).$$

证明。首先，我们证明 κ_ζ 是单射。设 $\{w_c\}_{c\in C_\zeta}$、$\{v_c\}_{c\in C_\zeta}\in\mathcal{A}^{H;C_\zeta}$ 满足 $\kappa_\zeta(\{w_c\})=\kappa_\zeta(\{v_c\})$。对于任意 $d\in C_\zeta$，必有 $\kappa_\zeta(\{w_c\})|_{Hd}=\kappa_\zeta(\{v_c\})|_{Hd}$。由于 $d\in C_\zeta$，必有 $\zeta(Hd)=d$，因此 $\kappa_\zeta(\{w_c\})|_{Hd}=\sigma^{d^{-1}}w_d$，从而得到 $\sigma^{d^{-1}}w_d=\sigma^{d^{-1}}v_d$。这意味着 $w_d=v_d$，又由于 $d\in C_\zeta$ 是任意的，因此得到 $\{w_c\}_{c\in C_\zeta}=\{v_c\}_{c\in C_\zeta}$。

接下来，我们证明 κ_ζ 是满射。设 $x\in\mathcal{A}^G$。那么

$$\begin{aligned}x&=\bigvee_{c\in C_\zeta}x|_{Hc}=\bigvee_{c\in C_\zeta}\sigma^{c^{-1}}\big(\sigma^c(x|_{Hc})\big)\\&=\bigvee_{c\in C_\zeta}\sigma^{c^{-1}}\big((\sigma^cx)|_H\big)=\kappa_\zeta\big(\{(\sigma^cx)|_H\}_{c\in C_\zeta}\big).\end{aligned}$$

现在证明 κ_ζ 是连续的。只需证明，对于任意 $w\in\mathcal{L}(\mathcal{A}^G)$，集合 $\kappa_\zeta^{-1}([w]_G)$ 在 $\mathcal{A}^{H;C_\zeta}$ 中是开集。设 F 是 w 的形状，并且对于每个 $c\in C_\zeta$，设 $F_c=F\cap Hc$。注意，由于 F 是有限的，至多只有有限多个 F_c 非空。

回想一下，对于任意集合 $E\subset F$ 和 $w\in\mathcal{A}^E$，w 的 F-扩张定义为 $[w]_F=\{v\in\mathcal{A}^F\colon\ v|_E=w\}$，并令 $U=\prod_{c\in C_\zeta}\big[\sigma^c(w|_{F_c})\big]_H$。对于任意满足 F_c 为空的 $c\in C_\zeta$（除有限多个 $c\in C_\zeta$ 外，均满足此条件），$[\sigma^c(w|_{F_c})]_H=\mathcal{A}^H$，其定义为

定义。因此， U 是 $\mathcal{A}^{H;C_\zeta}$ 中的一个基本开集。现在我们证明 $\kappa_\zeta^{-1}([w]_G) = U$。由于 $F_c \subset Hc$，可得对于任意 $x \in \mathcal{A}^G$，$x|_{Hc} \in \left[x|_{F_c}\right]_{Hc}$。利用这一点，对于任意 $x \in [w]_G$，我们有 $x|_{Hc} \in \left[x|_{F_c}\right]_{Hc} = \left[w|_{F_c}\right]_{Hc}$；而对于任意 $c \in C_\zeta$，

$$\left(\kappa_\zeta^{-1}(x)\right)_c = (\sigma^c x)|_H = \sigma^c(x|_{Hc}) \in \sigma^c[w|_{F_c}]_{Hc} = \left[\sigma^c(w|_{F_c})\right]_H,$$

因此 $\kappa_\zeta^{-1}(x) \in U$。现在令 $y = \{y_c\}_{c\in C_\zeta} \in U$。由于 $x = \kappa_\zeta(y)$，当且仅当对所有 $c \in C_\zeta$都有 $x|_{F_c} = w|_{F_c}$ 时， $x \in [w]_G$ 成立。事实上，对于每个 $c \in C_\zeta$，

$$x|_{Hc} = \sigma^{c^{-1}} y_c \in \sigma^{c^{-1}}\left[\sigma^c(w|_{F_c})\right]_H = \left[\sigma^{c^{-1}c}(w|_{F_c})\right]_{Hc} = [w|_{F_c}]_{Hc},$$

因此 $x|_{F_c} = w|_{F_c}$，由此得到 $x \in [w]_G$。这说明 $\kappa_\zeta(U) \subset [w]_G$，进而 $\kappa_\zeta^{-1}([w]_G) = U$，所以 $\kappa_\zeta^{-1}([w]_G)$ 是开集。

由此可知， κ_ζ 是一个同胚，因为 κ_ζ 是从$\mathcal{A}^{H;C_\zeta}$到 $\mathcal{A}^G$的连续双射，其中$\mathcal{A}^{H;C_\zeta}$是紧致的，而 $\mathcal{A}^G$是豪斯多夫的。

最后，对于任意 $\{w_c\}_{c\in C_\zeta} \in \mathcal{A}^{H;C_\zeta}$ 和 $g \in G$，

$$\begin{aligned}
\kappa_\zeta\left(\rho_\zeta^g(\{w_c\}_{c\in C_\zeta})\right) &= \kappa_\zeta\left(\{\sigma^{cg\xi_\zeta^g(c)^{-1}} w_{\xi_\zeta^g(c)}\}_{c\in C_\zeta}\right) \\
&= \bigvee_{c\in C_\zeta} \sigma^{c^{-1}}\left(\sigma^{cg\xi_\zeta^g(c)^{-1}} w_{\xi_\zeta^g(c)}\right) \\
&= \sigma^g\left(\bigvee_{c\in C_\zeta} \sigma^{\xi_\zeta^g(c)^{-1}} w_{\xi_\zeta^g(c)}\right) \\
&\overset{(a)}{=} \sigma^g\left(\bigvee_{c\in C_\zeta} \sigma^{c^{-1}} w_c\right) \\
&= \sigma^g\left(\kappa_\zeta(\{w_c\}_{c\in C_\zeta})\right),
\end{aligned}$$

其中等式（a）由对并集重新编号得出；这是可行的，因为 ξ_ζ^g 是 C_ζ 的一个置换。□

尽管这个共轭定义良好，但它完全取决于对 ζ 的选择。不过，由于 C_ζ 与 $H\backslash G$ 之间存在对应关系，虽然共轭的具体定义取决于 ζ，但以下结果表明，我们用构造函数定义的对象并不取决于 ζ。因此，可以不依赖于 ζ 来定义自由扩张；这将在定义 3.6 中完成。

引理 3.5. 设 G 是一个群，设 $H \leq G$，并设 ζ_1、$\zeta_2 \in \mathcal{C}(H\backslash G)$。设 $\kappa_1 = \kappa_{\zeta_1}$ 和 $\kappa_2 = \kappa_{\zeta_2}$，并设 $C_1 = C_{\zeta_1}$ 和 $C_2 = C_{\zeta_2}$。那么，对于任意 H-移位 X，$\kappa_1(X^{C_1}) = \kappa_2(X^{C_2})$。

证明。只需证明 $\kappa_1(X^{C_1}) \subset \kappa_2(X^{C_2})$，因为交换 ζ_1 和 ζ_2 的角色即可得到反向包含。

令 $x \in \kappa_1(X^{C_1})$，并令 $\{w_c\}_{c\in C_1} = \kappa_1^{-1}(x)$。这是良定义的，因为 x 属于 κ_1 的像，而根据定理 3.4，κ_1 是单射。现在令 $f = \zeta_1 \circ \zeta_2^{-1}$，它是从 C_2 到 C_1 的双射。注意，对于任意 $c \in C_2$，都有 $f(c) \in Hc$，这意味着 $cf(c)^{-1} \in H$。由于对每个 $c \in C_2$，都有 $w_{f(c)} \in X$，且 X 是一个

H-移位，因此可得 $\sigma^{cf(c)^{-1}}w_{f(c)} \in X$。接着

$$\kappa_2(\{\sigma^{cf(c)^{-1}}w_{f(c)}\}_{c\in C_2}) = \bigvee_{c\in C_2}\sigma^{c^{-1}}\left(\sigma^{cf(c)^{-1}}w_{f(c)}\right) = \bigvee_{c\in C_2}\sigma^{f(c)^{-1}}w_{f(c)}$$
$$\overset{(a)}{=} \bigvee_{c\in C_1}\sigma^{c^{-1}}w_c = \kappa_1(\{w_c\}) = x,$$

其中等式 (a) 是通过对并重新编号得到的；由于 f 是从 C_2 到 C_1 的双射，因此可以这样做。因此，$\kappa_1(X^{C_1}) \subset \kappa_2(X^{C_2})$。□

有了这一结果，我们终于可以正式定义自由扩张移位了。

定义 3.6。设 G 是一个群，设 $H \leq G$，并设 X 是一个 H-移位，称为基移位。设 $\zeta \in \mathcal{C}(H\backslash G)$。$X$ 的自由 G-扩张记为 $X^{\uparrow G}$，定义为 $\kappa_\zeta(X^{C_\zeta})$；根据引理 3.5，该定义与 ζ 的选取无关。$X^{\uparrow G}$ 是一个 G-移位，因为 X 是 H-不变的，所以 X^{C_ζ} 是 ρ_ζ-不变的；此外，由于 X 是闭的，故其也是闭的。

由于 X 的自由扩张与 ζ 无关，令 $\mathcal{A}^{H:G} = \mathcal{A}^{H;H\backslash G} = \left(\mathcal{A}^H\right)^{H\backslash G}$。对于任意选取的 ζ，它都与 $\mathcal{A}^{H;C_\zeta}$ 同胚，因为 (C_ζ, ξ_ζ) 与 $(H\backslash G, \eta)$ 共轭。接下来，我们将一般的构造函数 $\kappa : \mathcal{A}^{H:G} \to \mathcal{A}^G$ 视为对某个任意的 $\zeta \in \mathcal{C}(H\backslash G)$ 取值为 κ_ζ。采用这一记法，$X^{\uparrow G}$ 也可以写作 $X^{\uparrow G} = \kappa(X^{H\backslash G})$。类似地，对于任意选取的 $\kappa = \kappa_\zeta$，我们将 C_κ 定义为 C_ζ，将 ρ_κ 定义为 ρ_ζ，并定义 $\xi_\kappa^g = \xi_\zeta^g$。

在 $H = G$ 的情况下，很容易看出，对于任意 H-移位 X，都有$X^{\uparrow G} = X$。下一节中的大多数性质在这种情况下都显而易见，因此论证主要针对 H 是 G 的真子群的情形。

3.2. 自由扩张及其基移位的性质。既然我们已经证明自由扩张定义良好，现在就来证明，许多有用的性质可以从基移位传递到其扩张，反之亦然。

首先，我们注意到，自由扩张的拓扑熵与被扩张的移位的熵相同。

命题 3.7（命题 5.2, [1]）。设 G 是一个可数可 amenable 群，$H \leq G$，且 X 是一个 H-移位。那么

$$h(X^{\uparrow G}) = h(X).$$

其次，若有 3 个群 $K \leq H \leq G$，那么取一个 K-移位并将其扩张到 G，所得结果与先将其扩张到 H、再扩张到 G 相同。

引理 3.8. 设 G 是一个群，$K \leq H \leq G$，且 Y 是一个 K-移位。那么 $Y^{\uparrow G} = (Y^{\uparrow H})^{\uparrow G}$。

证明。设 $\zeta_1 \in \mathcal{C}(K\backslash H)$，并设 $\zeta_2 \in \mathcal{C}(H\backslash G)$，且设 $C_1 = C_{\zeta_1}$ 和 $C_2 = C_{\zeta_2}$。注意，$C_3 = C_1C_2 \subset G$ 在 $K\backslash G$的每个陪集中恰好包含一个元素。这意味着我们可以通过自然双射 $(c, d) \mapsto cd$，将 $C_1 \times C_2$ 的元素与 C_3的元素对应起来。因此，我们可以定义 $\zeta_3 \in \mathcal{C}(K\backslash G)$，使得 $C_{\zeta_3} = C_3$。设 $\kappa_i = \kappa_{\zeta_i}$

对于 $i = 1$，2，3。于是对于任意 $\{w_c\}_{c\in C_3} \in Y^{C_3}$，

$$\begin{aligned}\kappa_3(\{w_c\}) &= \bigvee_{c\in C_3} \sigma^{c^{-1}} w_c \\ &= \bigvee_{(c,d)\in C_1\times C_2} \sigma^{(cd)^{-1}} w_{c,d} \\ &= \bigvee_{d\in C_2} \sigma^{d^{-1}} \bigvee_{c\in C_1} \sigma^{c^{-1}} w_{c,d} \\ &= \bigvee_{d\in C_2} \sigma^{d^{-1}} \kappa_1(\{w_{c,d}\}_{c\in C_1}) \\ &= \kappa_2\Big(\big\{\kappa_1(\{w_{c,d}\}_{c\in C_1})\big\}_{d\in C_2}\Big),\end{aligned}$$

根据引理 3.5，因此 $Y^{\uparrow G} \subset \big(Y^{\uparrow H}\big)^{\uparrow G}$。类似地，从任意一个 $\big\{\{w_{c,d}\}_{c\in C_1}\big\}_{d\in C_2} \in (Y^{K\setminus H})^{H\setminus G}$出发，并反向使用上面的等式，可得 $\big(Y^{\uparrow H}\big)^{\uparrow G} \subset Y^{\uparrow G}$，因此二者相等。

□

接下来，我们证明自由扩张的一个稳定性结果，即自由扩张的交是移位的交的自由扩张。这也是第一个省略特定 ζ 选择、而使用任意构造函数的证明。

引理 3.9。设 G 是一个群，$H \leq G$，且 $\{Y_i\}_{i\in I}$ 是 H-移位的一个集合。那么 $\bigcap_{i\in I} Y_i^{\uparrow G} = \big(\bigcap_{i\in I} Y_i\big)^{\uparrow G}$。

证明。设 κ 是 $(\mathcal{A}^{H:G}, \rho_\kappa)$ 上任意一个构造函数。显然，我们有

$$\bigcap_{i\in I} Y_i^{H:G} = \left(\bigcap_{i\in I} Y_i\right)^{H:G},$$

并且这两者都是闭的且 ρ_κ-不变的。根据定理 3.4，κ 是一个双射同胚，因此我们有

$$\kappa\left(\bigcap_{i\in I} Y_i^{H:G}\right) = \kappa\left(\left(\bigcap_{i\in I} Y_i\right)^{H:G}\right) = \left(\bigcap_{i\in I} Y_i\right)^{\uparrow G}.$$

再次利用 κ 是双射这一事实，可得

$$\kappa\left(\bigcap_{i\in I} Y_i^{H:G}\right) = \bigcap_{i\in I} \kappa(Y_i^{H:G}) = \bigcap_{i\in I} Y_i^{\uparrow G}.$$

结合前面两个公式的结果，即得所需结论。 □

第四个结果相当自然，讨论的是如何通过一组禁模式来定义自由扩张。基本上，对于群 $H \leq G$ 上的一组选定禁模式，先取由这些禁模式定义的 H-移位，再将该移位扩张到 G，所得移位与直接由这些禁模式定义的 G-移位相同。

引理 3.10. 设 G 是一个群，且 $H \leq G$。那么对于任意 $\mathrm{F} \subset \mathcal{L}(\mathcal{A}^H)$，$\mathcal{X}^G[\mathrm{F}] = (\mathcal{X}^H[\mathrm{F}])^{\uparrow G}$。

证明. 设 κ 是定义在 $\mathcal{A}^{H:G}$上的构造函数，并设 $d \in C_\kappa$ 使得 $H = Hd$。注意，对于任意形状为 F 的 $w \in \mathbf{F}$，我们有 $F \Subset Hd$。设 $x \in (\mathcal{X}^H[\mathbf{F}])^{\uparrow G}$，且$\{w_c\}_{c\in C_\kappa} = \kappa^{-1}(x)$。那么对于任意 $g \in G$ 和 $F \Subset H$，

$$\begin{aligned}(\sigma^g x)|_F &= \big(\sigma^g \kappa(\{w_c\})\big)|_F \\ &= \kappa\big(\rho_\kappa^g(\{w_c\})\big)|_F \\ &= \kappa\big(\{\sigma^{cg\xi_\kappa^g(c)^{-1}} w_{\xi_\kappa^g(c)}\}\big)|_F \\ &= (\sigma^{d^{-1}}\sigma^{dg\xi_\kappa^g(d)^{-1}} w_{\xi_\kappa^g(d)})|_F \\ &= (\sigma^{g\xi_\kappa^g(d)^{-1}} w_{\xi_\kappa^g(d)})|_F.\end{aligned}$$

由于 $w_{\xi_\kappa^g(d)} \in \mathcal{X}^H[\mathbf{F}],$，所以 $\sigma^{g\xi_\kappa^g(d)^{-1}} w_{\xi_\kappa^g(d)}$（因为 $d^{-1} \in H$ 且 $dg\xi_\kappa^g(d)^{-1} \in H$，我们有 $g\xi_\kappa^g(d)^{-1} \in H$），因此必有 $(\sigma^g x)|_F \notin \mathbf{F}$。因此，$(\mathcal{X}^H[\mathbf{F}])^{\uparrow G} \subset \mathcal{X}^G[\mathbf{F}]$。

现在，对于任意 $x \in \mathcal{X}^G[\mathbf{F}],$，令 $\{w_c\}_{c\in C_\kappa} = \kappa^{-1}(x)$。那么，对于所有 $c \in C_\kappa$，我们有$w_c = (\sigma^c x)|_H$，所以对于每个 $h \in H$ 和 $F \Subset H$，

$$\big(\sigma^h(\sigma^c x)|_H\big)|_F = \sigma^h\Big(\big((\sigma^c x)|_H\big)|_{Fh}\Big) = \sigma^h\big((\sigma^c x)|_{Fh}\big) = (\sigma^{hc}x)|_F \notin \mathbf{F},$$

因此 $w_c \in \mathcal{X}^H[\mathbf{F}]$。因此，$\mathcal{X}^G[\mathbf{F}] \subset (\mathcal{X}^H[\mathbf{F}])^{\uparrow G}$，结合上一段的结果，得到$(\mathcal{X}^H[\mathbf{F}])^{\uparrow G} = \mathcal{X}^G[\mathbf{F}]$。□

利用这一结果，很容易看出，有限型移位的自由扩张仍然是有限型移位。或许并不意外，反过来结论也成立；如果某个移位的自由扩张是有限型移位，那么其基移位一开始就必定是有限型移位。

引理 3.11. 设 G 是一个群，$H \le G$，且 Y 是一个 H-移位。那么，Y 是有限型移位，当且仅当 $Y^{\uparrow G}$ 是有限型移位。

证明。首先，假设 Y 是有限型移位。设 $F \Subset H$ 是 Y的一个禁形，并令 $\mathbf{F} \Subset \mathcal{A}^F$为一组禁 F 图案，使得 $Y = \mathcal{X}^H[\mathbf{F}]$。由引理 3.10，$Y^{\uparrow G} = (\mathcal{X}^H[\mathbf{F}])^{\uparrow G} = \mathcal{X}^G[\mathbf{F}],$，这显然是一个有限型移位。

现在假设 $Y^{\uparrow G}$ 是有限型移位。设 κ 是 $\mathcal{A}^{H:G}$上的一个构造函数，并令 $d \in C_\kappa$ 满足 $H = Hd$。设 $F \Subset G$ 是 $Y^{\uparrow G}$ 的一个禁形，使得 $Y^{\uparrow G} = \mathcal{X}^G[\mathcal{F}_F(Y^{\uparrow G})]$。现在，定义 $C_0 \subset C_\kappa$为所有满足 $F \cap Hc \neq \varnothing$的 $c \in C_\kappa$所组成的集合；对于 $c \in C_0$，令 $F_c = F \cap Hc$。这将 F划分为有限多个互不相交的子集 F_c，它们分别包含在 H的不同陪集中。接着定义

$$E = \bigcup_{c\in C_0} F_c c^{-1} \subset H,$$

and

$$\hat{F} = \bigcup_{c\in C_0} Ec.$$

注：对于每个 $c \in C_0$，我们有 $F_c c^{-1} \subset E$，因此 $F_c = (F_c c^{-1})c \subset Ec \subset \hat{F}$，所以 $F \subset \hat{F}$。因此，$Y^{\uparrow G} = \mathcal{X}[\mathcal{F}_{\hat{F}}(Y^{\uparrow G})]$。对于任意 $w \in \mathcal{A}^E$，令

$$P(w) = \bigcup_{c\in C_0} [\sigma^{c^{-1}} w]_{\hat{F}} \subset \mathcal{A}^{\hat{F}},$$

并定义

$$\mathbf{F} = \big\{w \in \mathcal{A}^E : P(w) \subset \mathcal{F}_{\hat{F}}(Y^{\uparrow G})\big\}.$$

现在证明 $Y = \mathcal{X}^H[\mathrm{F}],$，这显然表明 Y是一个 H-有限型移位，因为 F 是有限的。

首先，令 $x \in Y^{\uparrow G} = \mathcal{X}^G[\mathcal{F}\hat{}_F(Y^{\uparrow G})]$。令 $g \in G$，并任取 $c \in C_0$。那么，根据 $P(w)$ 的定义，

$$(\sigma^{c^{-1}g}x)|_{\hat{F}} \in [(\sigma^{c^{-1}g}x)|_{Ec}]_{\hat{F}} = [\sigma^{c^{-1}}(\sigma^g x)|_E]_{\hat{F}} \subset P\big((\sigma^g x)|_E\big).$$

由于 $x \in \mathcal{X}^G[\mathcal{F}\hat{}_F(Y^{\uparrow G})],$，可知 $(\sigma^{c^{-1}g}x)|\hat{}_F \notin \mathcal{F}\hat{}_F(Y^{\uparrow G})$，因此，$P\big((\sigma^g x)|_E\big) \not\subset \mathcal{F}\hat{}_F(Y^{\uparrow G})$。由此可得 $(\sigma^g x)|_E \notin \mathrm{F}$。由于 g 是任意的，这意味着 $x \in \mathcal{X}^G[\mathrm{F}],$，因此 $Y^{\uparrow G} \subset \mathcal{X}^G[\mathrm{F}]$。

现在令 $x \in \mathcal{X}^G[\mathrm{F}]$。根据定义，对于每个 $g \in G$，必有 $(\sigma^g x)|_E \notin \mathrm{F}$，因此对于每个 $c \in C_0$，都有 $P\big((\sigma^{cg}x)|_E\big) \not\subset \mathcal{F}\hat{}_F(Y^{\uparrow G})$。因此，对于每个 $c \in C_0$，存在 $w_c \in P\big((\sigma^{cg}x)|_E\big) \setminus \mathcal{F}\hat{}_F(Y^{\uparrow G})$。注意，这意味着对于每个 $c \in C_0$，都存在 $d_c \in C_0$，使得 $(\sigma^{d_c}w_c)|_E = (\sigma^{cg}x)|_E$。令 $x_c \in Y^{\uparrow G}$ 满足 $x_c|\hat{}_F = w_c$。这一定可行，因为 $w_c \notin \mathcal{F}\hat{}_F(Y^{\uparrow G})$，且 $Y^{\uparrow G}$ 是移位不变的。令 $\{a_{c,d}\}_{d\in C_\kappa} = \kappa^{-1}(x_c)$，并注意，对于每个 $c \in C_0$ 和 $d \in C_\kappa$，都有 $a_{c,d} \in Y$。此外，对于每个 $c \in C_0$，都有 $a_{c,d_c}|_E = (\sigma^{cg}x)|_E$，由此可得

$$(\sigma^{c^{-1}}a_{c,d_c})|_{Ec} = \sigma^{c^{-1}}(a_{c,d_c}|_E) = \sigma^{c^{-1}}\big((\sigma^{cg}x)|_E\big) = (\sigma^g x)|_{Ec}.$$

按如下方式定义 $\{y_d\}_{d\in C_\kappa} \in Y^{H\setminus G}$。对于每个 $c \in C_0$，令 $y_c = a_{c,d_c}$；对于 $d \in C\setminus C_0$，令 $y_d \in Y$（这些选择的方式无关紧要）。于是 $y = \kappa(\{y_d\}) \in Y^{\uparrow G}$，因此对于每个 $c \in C_0$，都有 $y|_{Ec} = (\sigma^{c^{-1}}a_{c,d_c})|_{Ec} = (\sigma^g x)|_{Ec}$，从而得到 $y|\hat{}_F = (\sigma^g x)|\hat{}_F$。由于 $y \in Y^{\uparrow G}$，这意味着 $(\sigma^g x)|\hat{}_F \notin \mathcal{F}\hat{}_F(Y^{\uparrow G})$。由于这对所有 $g \in G$ 都成立，因此 $x \in \mathcal{X}[\mathcal{F}\hat{}_F(Y^{\uparrow G})] = Y^{\uparrow G}$，进而 $\mathcal{X}^G[\mathrm{F}] \subset Y^{\uparrow G}$。

前两段的结果表明 $Y^{\uparrow G} = \mathcal{X}^G[\mathrm{F}]$。根据引理 3.10，由于 $\mathrm{F} \subset \mathcal{A}^E$，且 $E \subset H$，我们有 $Y^{\uparrow G} = \mathcal{X}^G[\mathrm{F}] = (\mathcal{X}^H[\mathrm{F}])^{\uparrow G}$，因此 $\kappa(Y^{H\setminus G}) = \kappa\big((\mathcal{X}^H[\mathrm{F}])^{H\setminus G}\big)$。由于 κ 是双射，必有 $Y^{H\setminus G} = (\mathcal{X}^H[\mathrm{F}])^{H\setminus G}$，进而 $\mathcal{X}^H[\mathrm{F}] = Y$。□

接下来，我们证明一个与前一个结果类似的结论：将具有 G-有限型移位的性质替换为强不可约性。

引理 3.12. 设 G 为一个群，$H \leq G$，且 Y是一个 H-移位。那么 Y强不可约，当且仅当 $Y^{\uparrow G}$ 强不可约。

证明. 首先，假设 Y强不可约。那么存在 $K \Subset H$，使得对于任意形状为 F_u 和 F_v 的 $u, v \in \mathcal{L}(Y)$，只要 $F_u \cap KF_v = \varnothing$，就存在 $x \in Y^{\uparrow G}$，使得 $x|_{F_u} = u$ 且 $x|_{F_v} = v$。现在我们将证明$X = Y^{\uparrow G}$ 以相同的 K强不可约。设形状为F_u和 F_v的 $u, v \in \mathcal{L}(X)$ 满足 $F_u \cap KF_v = \varnothing$。由于 $u, v \in \mathcal{L}(X)$，取 $x_u, x_v \in X$，使得$x_u|_{F_u} = u$ 且 $x_v|_{F_v} = v$。设 κ 是定义在 $\mathcal{A}^{H:G}$上的某个构造函数。由于$x_u, x_v \in X = Y^{\uparrow G}$，我们可以取 $\{y_c\}_{c\in C_\kappa} = \kappa^{-1}(x_u)$ 和 $\{z_c\}_{c\in C_\kappa} = \kappa^{-1}(x_v)$，使得对于所有 $c \in C_\kappa$，都有 $y_c, z_c \in Y$。令 $c \in C_\kappa$，并定义 $U_c = F_u c^{-1} \cap H$ 和$V_c = F_v c^{-1} \cap H$。由于 U_c和 V_c是 H的子集，因此有 $y_c|_{U_c} \in \mathcal{L}(Y)$ 和 $z_c|_{V_c} \in \mathcal{L}(Y)$。此外，我们有

$$U_c \cap KV_c \subset F_u c^{-1} \cap KF_v c^{-1} = (F_u \cap KF_v)c^{-1} = \varnothing.$$

因此，群的强不可约性表明存在 $w_c \in Y$，使得$w_c|_{U_c} = y_c|_{U_c}$ 且 $w_c|_{V_c} = z_c|_{V_c}$。令 $x = \kappa(\{w_c\}_{c\in C_\kappa}) \in X$。现在我们证明

$x|_{F_u}=u$ 且 $x|_{F_v}=v$。事实上，由于

$$F_u=\bigsqcup_{c\in C_\kappa} F_u\cap Hc=\bigsqcup_{c\in C_\kappa}(F_uc^{-1}\cap H)c=\bigsqcup_{c\in C_\kappa}U_cc,$$

同理，将 U_c替换为 V_c，我们可以通过对每个 $c\in C_\kappa$ 检查$x|_{U_cc}=u|_{U_cc}$，得到 $x|_{F_u}=u$（对 $x|_{F_v}=v$也同理）。对于 $c\in C_\kappa$，我们有$U_cc\subset Hc$，因此

$$\begin{aligned}x|_{U_cc}=(x|_{Hc})|_{U_cc}=(\sigma^{c^{-1}}x_c)|_{U_cc}=\sigma^{c^{-1}}(x_c|_{U_c})=\sigma^{c^{-1}}(y_c|_{U_c})\\=\sigma^{c^{-1}}\big((\sigma^cx_u)|_{U_c}\big)=\sigma^{c^{-1}}\sigma^c(x_u|_{U_cc})=u|_{U_cc},\end{aligned}$$

其中，最后一个等式是由以下事实得出的： $x_u|_{F_u}=u$。采用相同的论证，将 U_c 替换为 V_c、将 y_c 替换为 z_c、将 x_u 替换为 x_v，并将 u 替换为 v，我们得到 $x|_{V_cc}=v|_{V_cc}$，因此有 $x|_{F_u}=u$ 和 $x|_{F_v}=v$。因此， $Y^{\uparrow G}$ 是强不可约的。

现在，假设 $X=Y^{\uparrow G}$ 是强不可约的。设 $L\Subset G$ 满足如下条件：若 u、$v\in\mathcal{L}(X)$ 的形状分别为 E_u 和 E_v，且满足 $E_u\cap LE_v=\varnothing$，则存在$x\in X$ 使得 $x|_{E_u}=u$ 和 $x|_{E_v}=v$。令 $K=L\cap H$，现在我们将证明，取此 K时， Y是强不可约的。注意， K 必定非空，因为L 必须包含 H 中的一个元素（否则，若 E_u 和 E_v 是 H的相交有限子集，则 $E_u\cap LE_v=\varnothing$；但如果 u 和 v 在$E_u\cap E_v$中的某个元素上不一致，那么显然不存在一个属于 X 的元素同时包含 u 和 v）。令u、$v\in\mathcal{L}(Y)$ 的形状分别为 F_u和 F_v，且满足 $F_u\cap KF_v=\varnothing$。由于 u、$v\in\mathcal{L}(Y)$，显然有 u、$v\in\mathcal{L}(X)$。现在我们来证明 $F_u\cap LF_v=\varnothing$。确实，由于$K=L\cap H$、 $F_u\cap KF_v=\varnothing$，且 F_u、 $F_v\subset H$，

$$\begin{aligned}F_u\cap LF_v&=\big(F_u\cap(L\cap H)F_v\big)\cup\big(F_u\cap(L\setminus H)F_v\big)\\&\subset\big(F_u\cap KF_v\big)\cup\big(H\cap(L\setminus H)H\big)\\&=\bigcup_{l\in L\setminus H}H\cap lH\end{aligned}$$

由于 H 是 G的子群，对于任意 $l\in L\setminus H$，我们有 $H\cap lH=\varnothing$，因为 lH 是 H的真左陪集。因此， $F_u\cap LF_v=\varnothing$，所以根据 X的强不可约性，存在 $x\in X$ 使得 $x|_{F_u}=u$ 且 $x|_{F_v}=v$。令 $y=x|_H\in Y$，于是 $y|_{F_u}=u$ 且 $y|_{F_v}=v$。因此， Y是强不可约的。□

最后，由基移位上的块映射定义的因子映射，可以以自然的方式扩展为基移位的自由扩张移位上的因子映射。然而，这不适用于来自自由扩张移位的任意因子映射，而仅适用于其块映射定义在基移位所用群的某个子集上的因子映射。对于函数 $\phi:X\to X$，我们将$(\phi)^{H\backslash G}$ 记作 $X^{H\backslash G}$上的乘积函数。若 X 是一个拓扑空间，且 ϕ连续，则在赋予乘积拓扑的 $X^{H\backslash G}$ 上，$(\phi)^{H\backslash G}$ 连续。

引理 3.13. 设 G 为一个群，且 $F\Subset H\leq G$。对于有限字母表 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$，设 X为 $\mathcal{A}^H$的一个 H-移位，并设 $\beta\colon\mathcal{L}_F(X)\to\mathcal{B}$为一个块映射。那么 ϕ_β^H是一个因子映射，因此设 $Y=\phi_\beta^H(X)$为 $\mathcal{B}^H$的一个 H-移位。令 $\kappa_{\mathcal{A}}$ 表示 $\mathcal{A}^{H:G}$ 上限制于 $X^{H:G}$ 的构造函数（其陪域也限制为其像），类似地，令 $\kappa_{\mathcal{B}}$ 表示 $\mathcal{B}^{H:G}$ 上限制于 $Y^{H:G}$ 并使用

与 $\kappa_{\mathcal{A}}$相同的 ζ 的构造函数。那么 ϕ_β^G 可以写成

$$\phi_\beta^G = \kappa_{\mathcal{B}} \circ (\phi_\beta^H)^{H\backslash G} \circ \kappa_{\mathcal{A}}^{-1}.$$

证明。设 $x \in X^{\uparrow G}$。那么对于任意 $g \in G$，令 $h \in H$ 和 $d \in C_{\kappa_{\mathcal{A}}} = C_{\kappa_{\mathcal{B}}}$ 使得$g = hd$，并且

$$\begin{aligned}
\big((\kappa_{\mathcal{B}} \circ (\phi_\beta^H)^{H\backslash G} \circ \kappa_{\mathcal{A}}^{-1})(x)\big)(g) &= \left(\bigvee_{c \in C_{\kappa_{\mathcal{B}}}} \sigma^{c^{-1}}\big(\phi_\beta^H(\kappa_{\mathcal{A}}^{-1}(x)_c)\big)\right)(g) \\
&= \Big(\sigma^{d^{-1}}\big(\phi_\beta^H(\kappa_{\mathcal{A}}^{-1}(x)_d)\big)\Big)(hd) \\
&= \phi_\beta^H\big((\sigma^d x)|_H\big)(h) \\
&= \beta\Big(\big(\sigma^h\big((\sigma^d x)|_H\big)\big)|_F\Big) \\
&= \beta\big(\big((\sigma^{hd} x)|_{Hh^{-1}}\big)|_F\big) \\
&= \beta\big((\sigma^g x)|_F\big) \\
&= \big(\phi_\beta^G(x)\big)(g)
\end{aligned}$$

□

前一个结果的一个直接推论是，自由扩张的某些因子等于基移位的某个因子的自由扩张。然而，并非所有因子都具有这一性质，但该性质仍然非常有用。

推论 3.14。设 G 为一个群，$H \leq G$、$\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 为有限字母表，并设 X 为 $\mathcal{A}^H$上的一个 H-移位。设 $F \Subset H$和 $\beta\colon \mathcal{L}_F(X) \to \mathcal{B}$为一个块映射。那么

$$\phi_\beta^G(X^{\uparrow G}) = \phi_\beta^H(X)^{\uparrow G}$$

证明。由引理 3.13，$\phi_\beta^G = \kappa \circ (\phi_\beta^H)^{H\backslash G} \circ \kappa^{-1}$，因此，

$$\begin{aligned}
\phi_\beta^G(X^{\uparrow G}) &= (\kappa \circ (\phi_\beta^H)^{H\backslash G} \circ \kappa^{-1})(X^{\uparrow G}) \\
&= \big(\kappa \circ (\phi_\beta^H)^{H\backslash G}\big)\big(\kappa^{-1}(X^{\uparrow G})\big) \\
&= \kappa\Big((\phi_\beta^H)^{H\backslash G}\big(X^{H\backslash G}\big)\Big) \\
&= \kappa\big(\phi_\beta^H(X)^{H\backslash G}\big) \\
&= \phi_\beta^H(X)^{\uparrow G}.
\end{aligned}$$

□

3.3. 自由扩张在群上的移位中的应用。利用自由扩张，可以在一定程度上分析任意群上的移位。首先，我们可以研究任意群上的有限型子移位。特别是在研究局部有限群上的有限型子移位时，我们会广泛使用以下结果；不过，该结果对所有群都完全适用。

引理 3.15。设 G 为一个群，X 为一个 G-有限型移位。则存在 $F \Subset G$ 和$\langle F\rangle$-有限型移位 Y，使得 $X = Y^{\uparrow G}$。换言之，群 G 上的每个有限型移位都是 G 的有限生成子群上的有限型移位的自由扩张。

证明。由于 X 是一个有限型移位，设 $F \Subset G$ 为 X的一个禁形，因此 $X = \mathcal{X}^G[\mathcal{F}_F(X)]$。令 $H = \langle F\rangle \leq G$，这使得 H有限生成。此外，由于 $F \Subset H$， H-移位 $Y = \mathcal{X}^H[\mathcal{F}_F(X)]$是一个 H-有限型移位。根据引理 3.10，

$$Y^{\uparrow G} = \mathcal{X}^H[\mathcal{F}_F(X)]^{\uparrow G} = \mathcal{X}^G[\mathcal{F}_F(X)] = X,$$

这就证明了所需的结果。 □

在 G 本身是有限生成的情况下，可能存在 $F \Subset G$ 使得$\langle F\rangle = G$，因此 $X = Y = Y^{\uparrow G}$，这是一条平凡的结果。然而，在 G 是无限生成的情况下，这种情形绝不可能发生，并且会导出如下有趣的结果。

推论 3.16. 设 G 是一个无限生成的可 amenable 群。则

$$\mathcal{E}(G) = \bigcup_{F \Subset G} \mathcal{E}(\langle F\rangle).$$

证明。这立即由前一个引理和命题 3.7 得出。 □

除了由有限禁形定义的有限型子移位之外，强不可约移位主要由有限形 K定义。利用与上述引理类似的技术，我们可以证明，群上的任意强不可约移位都是有限生成子群上的强不可约移位的自由扩张。

引理 3.17. 设 G 是一个群，且 X 是一个强不可约的 G-移位。那么存在 $F \Subset G$ 和强不可约的 $\langle F\rangle$-移位 Y，使得 $X = Y^{\uparrow G}$。

证明。由于 X 是强不可约的，取 $K \Subset G$，使得对于任意具有形状 F_u 和 F_v 的 u、$v \in \mathcal{L}(X)$，若 $F_u \cap KF_v = \varnothing$，则存在 $x \in X$，使得 $x|_{F_u} = u$ 且 $x|_{F_v} = v$。现在我们将证明， K 可以作为引理陈述中有限集 F 的一个选择。对于任意 $F \Subset H$，令 $\mathbf{F}_F = \mathcal{F}_F(X)$，并定义 $Y_F = \mathcal{X}^H[\mathbf{F}_F]$。那么，由于 F 是有限的，对于每个 F， Y_F 都是一个 H-有限型移位。此外，由引理 3.10 可知， $Y_F^{\uparrow G} = (\mathcal{X}^H[\mathbf{F}_F])^{\uparrow G} = \mathcal{X}^G[\mathbf{F}_F]$，因此显然 $X \subset Y_F^{\uparrow G}$。因此， $X \subset \bigcap_{F \Subset H} Y_F^{\uparrow G}$，并且由引理 3.9 可知

$$\bigcap_{F \Subset H} Y_F^{\uparrow G} = \left(\bigcap_{F \Subset H} Y_F\right)^{\uparrow G}.$$

设 $Y = \bigcap_{F \Subset H} Y_F$，它是一个 H-移位，因此我们有 $X \subset Y^{\uparrow G}$。现在我们证明 $Y^{\uparrow G} \subset X$。

设 κ 是 $\mathcal{A}^{H:G}$上的一个构造函数，设 $z \in Y^{\uparrow G}$，并设 $g \in G$ 和$F \Subset H$。根据 $Y^{\uparrow G}$的构造，我们有 $z \in Y_F^{\uparrow G} = \mathcal{X}^G[\mathbf{F}_F]$，因此 $z|_F \notin \mathbf{F}_F = \mathcal{F}_F(X)$。于是，存在 $x_F \in X$使得 $z|_F = x_F|_F$。特别地，这表明集合 $E_F = [z|_F] \cap X$非空且闭。此外，由于对每个 $g \in G$，我们都有 $\sigma^g z \in Y^{\uparrow G}$，因此也有 $[(\sigma^g z)|_F] \cap X = \sigma^g([z|_{Fg}] \cap X)$非空且闭。由于 σ^g 是 $\mathcal{A}^G$ 和 X上的一个同胚，我们有 $E_{Fg} = [z|_{Fg}] \cap X$ 是 X的一个非空闭子集。因此，

$$\mathscr{G} = \{E_{Fg} : F \Subset H, g \in G\}$$

是 X的非空闭子集的一个集合。现在我们证明 $\mathscr{G}$ 具有有限交性质。

设 $E_{F_1g_1}$、$E_{F_2g_2}$、……、$E_{F_ng_n} \in \mathscr{G}$。注意，由于 $F_i \Subset H$和 $g_i \in G$，因此对于某个唯一的 $c_i \in C_\kappa$，有 $F_ig_i \Subset Hc_i$。若对于某个$j \neq i$有 $F_jg_j \Subset Hc_i$，则 $F_ig_i \cup F_jg_j \Subset Hc_i$，从而（$F_ig_i \cup F_jg_j$）$c_i^{-1} \Subset H$，因此我们有

$$E_{F_ig_i} \cap E_{F_jg_j} = [z|_{F_ig_i}] \cap [z|_{F_jg_j}] \cap X = [z|_{(F_ig_i \cup F_jg_j)c_i^{-1}c_i}] \cap X = E_{F_ig_i \cup F_jg_j},$$

它非空，因此不失一般性，我们可以假设 $c_i \neq c_j$对于 $i \neq j$。对于有限归纳，我们知道 $E_{F_1g_1}$ 非空，因此假设我们已证明某个 $k < n$满足 $\bigcap_{i=1}^k E_{F_ig_i}$ 非空。因此，存在一个元素 $x \in X$，使得 $u = x|_{\bigcup_{i=1}^k F_ig_i} = z|_{\bigcup_{i=1}^k F_ig_i}$，这意味着 $u \in \mathcal{L}$（X）。令 $v = z|_{F_{k+1}g_{k+1}}$，并注意到 $v \in \mathcal{L}$（X），因为 $E_{F_{k+1}g_{k+1}}$ 非空。现在，由于对于每个 i都有$F_ig_i \subset Hc_i$，且根据 H的定义，$K \subset H$，我们得到

$$\left(\bigcup_{i=1}^k F_ig_i\right) \cap K(F_{k+1}g_{k+1}) \subset \left(\bigcup_{i=1}^k Hc_i\right) \cap H(Hc_{k+1}) = \left(\bigcup_{i=1}^k Hc_i\right) \cap Hc_{k+1}.$$

由于对于 $i \neq j$有 $c_i \neq c_j$，我们在最右侧的集合中得到一个右陪集与不同右陪集之并的交集，该交集必为空，因此我们有

$$\left(\bigcup_{i=1}^k F_ig_i\right) \cap K(F_{k+1}g_{k+1}) = \varnothing.$$

由 X的强不可约性，存在 $x \in X$ 使得 $x|_{\bigcup_{i=1}^k F_ig_i} = u$和 $x|_{F_{k+1}g_{k+1}} = v$。这说明 $x \in \bigcap_{i=1}^{k+1} E_{F_ig_i}$，因此该集合非空。通过不断归纳直到 n，我们得到 $\bigcap_{i=1}^n E_{F_ig_i}$ 非空。因此，$\mathscr{G}$具有有限交性质。

由于 X 是 $\mathcal{A}^G$的闭子集，而 $\mathcal{A}^G$是紧致的，因此 X 是紧致的。因此，由于 $\mathscr{G}$ 是 X 的一族具有有限交性质的闭子集，$\bigcap \mathscr{G}$也非空，特别地，存在 $x \in X$ 使得

$$x \in \bigcap_{g \in G} \bigcap_{F \Subset H} E_{Fg}.$$

结合 $\{e\} \Subset H$，这说明对于每个 $g \in G$，都有 $x \in E_{\{g\}} = [z|_{\{g\}}] \cap X$，从而 $x(g) = z(g)$，因此 $x = z$，这说明 $z \in X$。由于 $z \in Y^{\uparrow G}$ 是任意的，我们已经证明了 $Y^{\uparrow G} \subset X$，从而 $X = Y^{\uparrow G}$。

最后，由引理 3.12，由于 $X = Y^{\uparrow G}$ 是强不可约的，我们可知 Y是强不可约的。□

进一步研究自由扩张的性质，以及哪些性质会从自由扩张传递到其基移位，反之亦然，或许可以证明，对任意群上的有限型子移位的研究可以归结为对有限生成群上的有限型子移位的研究。虽然本文的结果不需要任何其他性质，但在自由扩张的背景下探索其他此类性质或许会有所裨益。

4. 群

自由扩张理论已充分发展，接下来我们可以着手证明局部有限群上有限型子移位的性质。本节包含定理 I 和 II 证明的所有部分。

我们首先介绍以下构造，它适用于任何非局部有限的群 G ，并将在本节余下部分中反复引用。

定义 4.1. 设 G 是一个非局部有限群，并且 $\mathcal{A} = \{0,1\}$。由于 G 是非局部有限的，因此存在一个无限的有限生成群 $H \leq G$。设 $S \Subset H$ 满足 $e \in S$ 和 $\langle S\rangle = H$。接着取 F $= \mathcal{A}^S \setminus \{0^S, 1^S\}$，其中 0^S 和 1^S 分别是常值 0 图案和常值 1 图案，令 $2_H = \mathcal{X}^H[\mathrm{F}]$。

根据这一构造，2_H 显然是一个有限型移位，特别是，它恰好包含两个点，即 H 上的常值 0 图案和常值 1 图案，分别记为 0^H 和 1^H。根据引理 3.11， $2_H^{\uparrow G}$ 也是一个有限型移位。

4.1. 定理 I 的证明。现在我们已经具备证明定理 I 所需的一切。本节中对定理证明有贡献的每个结果，都会标注其所给出的蕴含关系。例如，以下结果标记为 (I(a) $\Longrightarrow$ I(b))，表示它给出了这样的蕴含关系：如果 G 是局部有限的，那么每个 G-有限型移位都是 G 的某个有限子群上的有限型移位的自由扩张。这些结果中有许多都可直接由前一节所建立的自由扩张的性质推出。为方便起见，下面重述定理 I。

定理 I. 设 G 是一个群。则下列条件等价。fallow

(a) G是局部有限的。(b) 每个 G-有限型移位都是某个定义在 G的有限子群上的有限型移位的自由扩张。(c) 每个 G-有限型移位都是强不可约的。(d) 每个强不可约的 G-移位都是一个 G-有限型移位。(e) 每个 sofic G-移位都是一个 G-有限型移位。(f) 对每个 G-有限型移位 X，自同构群(X)都是局部有限的。

我们先证明以下蕴含链：

$$\mathrm{I(a)} \Longrightarrow \mathrm{I(b)} \Longrightarrow \mathrm{I(c)} \Longrightarrow \mathrm{I(a)}$$

这些蕴含中的第一个可直接由引理 3.15 得出。

命题 4.2 (I(a) $\Longrightarrow$I(b))。设 G 是一个局部有限群，且 X 是一个 G-有限型移位。则存在 $H \ll G$ 和一个 H-有限型移位 Y，使得 $X = Y^{\uparrow G}$。

证明。由引理 3.15，存在 $F \Subset G$ 和 $\langle F\rangle$-有限型移位 Y，使得 $X = Y^{\uparrow G}$。但 G 是局部有限的，因此 $H = \langle F\rangle$ 是有限的，从而得到所需结果。□

接下来我们证明，若 G 是一个群，且其每个 G-有限型移位都是 H的某个有限子群上的移位的自由扩张，那么每个 G-有限型移位都是强不可约的。事实上，我们可以证明以下更强的结果：若 X 是一个 G-有限型移位，且存在 $H \ll G$ 和 H-有限型移位 Y 使得 $X = Y^{\uparrow G}$，那么 X 是强不可约的。

引理 4.3（I(b) $\Longrightarrow$I(c)）。设 G 是一个群， X 是一个 G-有限型移位，且存在 $H \ll G$ 和 H-有限型移位 Y 使得 $X = Y^{\uparrow G}$。那么 X 是强不可约的。

证明。由于 H 是有限的， Y 显然关于 $K = H$是强不可约的。根据引理 3.12， $X = Y^{\uparrow G}$ 是强不可约的。□

最后，我们通过逆否命题证明最后一个蕴含，并以 $2_H^{\uparrow G}$ 有限型移位为例，说明非局部有限群上的有限型移位不一定是强不可约的。

引理 4.4（I(c) $\Longrightarrow$ I(a)）。设 G 是一个非局部有限群。那么存在一个 G-有限型移位，它不是强不可约的。

证明。设 $H \leq G$ 是 G的一个无限有限生成子群；这样的子群必定存在，因为 G 不是局部有限的。

要证明 $2^{\uparrow G}_H$ 不是强不可约的，必须证明：对于所有$K \Subset G$，都存在图案 u、$v \in \mathcal{L}$（$2^{\uparrow G}_H$），其形状分别为 F_u 和 F_v，使得 $F_u \cap KF_v = \varnothing$，但不存在满足 $x|_{F_u} = u$ 和 $x|_{F_v} = v$ 的 $x \in X$。

设 $K \Subset G$。由于 K 是有限的，因此 $H \backslash K$ 必定非空，故设 $h \in H \backslash K$。设 $u = 0^{\{h\}}$ 和 $v = 1^{\{e\}}$，它们显然属于 $\mathcal{L}$（$2^{\uparrow G}_H$）。于是 $F_u = \{h\}$ 和$F_v = \{e\}$；显然，由于 $h \notin K$，我们有 $F_u \cap KF_v = \{h\} \cap K = \varnothing$。但是，对于任意$x \in X$，必定有 $x|_H \in \{0^H, 1^H\}$，因此 $x|_{\{h\}} = x|_{\{e\}}$，所以 $x|_{F_u} = u$ 和 $x|_{F_v} = v$ 不可能同时成立。

因此，$2^{\uparrow G}_H$ 不是强不可约的。 □

接下来，我们将证明 I(a) $\Longrightarrow$I(d)，并在紧接着的下一小节中证明反向结论，因为我们需要用到届时引入的一个例子。

引理 4.5（I(a) $\Longrightarrow$ I(d)）。设 G 为一个局部有限群，且 X 是一个强不可约的 G-移位。那么，X 是一个 G-有限型移位。

证明。由引理 3.17，存在 $F \Subset G$ 和强不可约的 $\langle F \rangle$-移位 Y，使得 $X = Y^{\uparrow G}$。由于 G 是局部有限的，且 F是有限的，因此 $H = \langle F \rangle$ 是有限的，故 Y是一个 H-有限型移位。由引理 3.11，$Y^{\uparrow G} = X$ 是一个 G-有限型移位。□

4.1.1. 局部有限群上的 sofic 移位。接下来，我们证明以下蕴含关系，其中涉及命题“每个 sofic G-移位都是一个 G-有限型移位”。

$$\mathrm{I(a)} \Longleftrightarrow \mathrm{I(e)}$$

首先，我们直接证明，局部有限群上的所有 sofic G-移位都是 G有限型子移位。

引理 4.6（I(a) $\Longrightarrow$I(e)）。设 G 是一个局部有限群，X 是一个有限型移位，且 ϕ是一个因子映射。则 $\phi(X)$是一个有限型移位。

证明。由命题 4.2，存在 $H \ll G$ 和 H有限型移位 Y，使得 $X = Y^{\uparrow G}$。令 $F \Subset G$，并令 $\beta\colon\ \mathcal{L}_F(X) \to \mathcal{B}$是一个块映射，使得 $\phi = \phi^G_\beta$。令$K = \langle H \cup F \rangle$；由于 G 是局部有限的，因此它是有限的；再令 $Z = Y^{\uparrow K}$。由引理 3.8，我们有 $X = Y^{\uparrow G} = (Y^{\uparrow K})^{\uparrow G} = Z^{\uparrow G}$。由于 $F \subset K$，引理 3.14 给出

$$\phi(X) = \phi^G_\beta(Z^{\uparrow G}) = \phi^K_\beta(Z)^{\uparrow G}.$$

由于 K 是有限的，K移位 $\phi^K_\beta(Z) \subset \mathcal{A}^K$ 是一个有限型移位；由引理 3.11 可得，$\phi^K_\beta(Z)^{\uparrow G} = \phi(X)$是一个有限型移位。□

对于逆命题，我们将通过构造一个 sofic 移位来证明其逆否命题：对于任意非局部有限群，都存在一个不是有限型移位的 sofic 移位。我们从构造开始。

定义 4.7（例 1.11 [12]）。设 H 是一个无限有限生成群，并设 $S \Subset H$ 满足 $S = S^{-1}$、$e \notin S$和 $H = \langle S \rangle$。偶数 H-移位 $S_{\mathrm{even}} \subset \{0,1\}^H$ 是由所有全模式 x 构成的集合，这些模式满足：在凯莱图 $\Gamma(H, S)$ 中，$x^{-1}(1) \subset H$ 的任意极大有限连通分量的大小都是偶数。换言之，每个有限的 1 连通分支的大小都是偶数。

[12] 的命题 1.10 表明， S_{even} 是一个 sofic H-移位，但不是一个 H-有限型移位。利用这一点，我们可以证明逆命题。

引理 4.8（I(e) $\Longrightarrow$ I(a)）。设 G 是一个非局部有限群。那么存在一个 sofic G-移位，它不是 G-有限型移位。

证明。设 $H \leq G$ 是无限且有限生成的。那么如上所定义的 S_{even} 是一个 sofic H-移位，但不是一个 H-有限型移位。设 X 是一个 H-有限型移位，且 $\phi\colon X \to S_{\mathrm{even}}$ 是一个因子映射，由 S_{even} 的 sofic 性可知该映射必定存在。于是存在 $F \Subset H$ 和一个块映射 $\beta\colon \mathcal{L}_F(X) \to \{0,1\}$，使得 $\phi = \phi_\beta^H$。由引理 3.11 可得 $X^{\uparrow G}$ 是一个 G-有限型移位；再由引理 3.14，我们得到

$$S_{\mathrm{even}}^{\uparrow G} = \phi_\beta^H(X)^{\uparrow G} = \phi_\beta^G(X^{\uparrow G}),$$

因此 $S_{\mathrm{even}}^{\uparrow G}$ 是 sofic 的。然而，由引理 3.11 的逆否命题可知， $S_{\mathrm{even}}^{\uparrow G}$ 不是有限型移位。□

除了 S_{even} 是一个 sofic H-移位外，我们还知道它是强不可约的。给定 $K = (S \cup \{e\})^2$, 以及两个图案 u、$v \in S_{\mathrm{even}}$，其形状分别为 F_u 和F_v，且满足 $F_u \cap KF_v = \varnothing$，我们可以将 u扩展为 $(S\cup\{e\})F_u$上的一个图案，具体做法是使用符号 0 或 1，确保该扩张中每个由 1 组成的连通分量都含有偶数个 1。对 v也可以作同样处理。根据 K的定义，这些扩张彼此不相交，因此令 $x \in \{0,1\}^H$ 与 u 和 v的这些扩张相匹配，并在其他位置取 0。由于 u 和 v 的扩张中由 1 组成的连通分量大小均为偶数， x 中由 1 组成的连通分量也都只有偶数大小，即使 u 扩张中的某个连通分量与 v扩张中的某个连通分量相连也是如此，因为它们各自的大小都是偶数。因此，我们得到以下结果。

引理 4.9 (I(d) $\Longrightarrow$I(a))。设 G 是一个非局部有限群。那么存在一个强不可约的 G-移位，它不是有限型 G-子移位。

证明。设 $H \leq G$ 是无限且有限生成的。那么如上所定义的 S_{even} 是一个强不可约的 H-移位，但不是有限型 H-子移位。由引理 3.11， $S_{\mathrm{even}}^{\uparrow G}$ 不是有限型 G-子移位；由引理 3.12， $S_{\mathrm{even}}^{\uparrow G}$ 是强不可约的。□

4.1.2. 局部有限有限型子移位的自同构群。最后，我们以下述方式证明定理 I 的最后几个蕴含。

$$\mathrm{I(a)} \Longleftrightarrow \mathrm{I(f)}$$

首先，我们证明局部有限群上的任意有限型子移位的自同构群都是局部有限的。

引理 4.10 (I(a) $\Longrightarrow$ I(f))。设 G 是局部有限的，且 X 是一个有限型 G-子移位。那么 Aut(X) 是局部有限的。

证明。设 $F \Subset G$ 是 X 的一个禁形，使得 $X = \mathcal{X}^G[\mathcal{F}_F(X)]$。令 $E = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\} \subset \mathrm{Aut}(X)$ 为一个有限的自共轭集合，并令 $K = \langle E\rangle$。不失一般性，可假设 E 是对称的。于是，对每个 ϕ_i，都存在 $F_i \Subset G$ 和块映射 $\beta_i\colon \mathcal{L}_{F_i}(X) \to \mathcal{A}$，使得 $\phi_i = \phi_{\beta_i}^G$。现在，令

$$H = \left\langle F \cup \bigcup_{i=1}^{n} F_i \right\rangle.$$

H 必须是有限的，因为 G 是局部有限的。又由于 $F \subset H$，因此 $X = \mathcal{X}^G[\mathcal{F}_H($ $X)]$, 成立；根据引理 3.10，我们有 $X = \mathcal{X}^G[\mathcal{F}_H(X)] = \mathcal{X}^H[\mathcal{F}_H(X)]^{\uparrow G}$。为简便起见，令 $Y = \mathcal{X}^H[\mathcal{F}_H(X)]$。此外，根据推论 3.14，对每个 i，我们得到

$$Y^{\uparrow G} = \phi_i(Y^{\uparrow G}) = \phi^H_{\beta_i}(Y)^{\uparrow G},$$

因此 $Y = \phi^H_{\beta_i}(Y)$，由此得到 $\phi^H_{\beta_i} \in$ 自同构群(Y)。因此，令

$$\hat{E} = \{\phi^H_{\beta_i} : i \in [1, n]\},$$

并令 $\hat{} K = \langle \hat{} E\rangle \leq$ 自同构群(Y)。

现在，令 κ 为 $\mathcal{A}^{H:G}$上的构造函数，并定义映射 $\gamma : \hat{}_K \to$自同构群(X)，使得

$$\gamma(\psi) = \kappa \circ (\psi)^{H\backslash G} \circ \kappa^{-1},$$

其中 κ 限制在 $\kappa : Y^{H:G} \to X$上。于是，对任意 $\phi \in K$，存在 k和 $i_1, i_2, \ldots,$ i_k，使得 $\phi = \phi_{i_1} \circ \phi_{i_2} \circ \cdots \circ \phi_{i_k}$。令

$$\psi = \phi^H_{\beta_{i_1}} \circ \phi^H_{\beta_{i_2}} \circ \cdots \circ \phi^H_{\beta_{i_k}}.$$

$\hat{}$ 显然 $\psi \in K$，并由引理 3.13 可得

$$\begin{aligned}
\gamma(\psi) &= \kappa \circ (\psi)^{H\backslash G} \circ \kappa^{-1} \\
&= \kappa \circ \left(\phi^H_{\beta_{i_1}} \circ \phi^H_{\beta_{i_2}} \circ \cdots \circ \phi^H_{\beta_{i_k}}\right)^{H\backslash G} \circ \kappa^{-1} \\
&= \kappa \circ \left(\phi^H_{\beta_{i_1}}\right)^{H\backslash G} \circ \kappa^{-1} \circ \kappa \circ \left(\phi^H_{\beta_{i_2}} \circ \cdots \circ \phi^H_{\beta_{i_k}}\right)^{H\backslash G} \circ \kappa^{-1} \\
&= \phi^G_{\beta_{i_1}} \circ \kappa \circ \left(\phi^H_{\beta_{i_2}} \circ \cdots \circ \phi^H_{\beta_{i_k}}\right)^{H\backslash G} \circ \kappa^{-1} \\
&= \phi_{i_1} \circ \phi^G_{\beta_{i_2}} \circ \kappa \circ \left(\phi^H_{\beta_{i_3}} \circ \cdots \circ \phi^H_{\beta_{i_k}}\right)^{H\backslash G} \circ \kappa^{-1} \\
&= \phi_{i_1} \circ \phi_{i_2} \circ \cdots \circ \phi_{i_k} \\
&= \phi,
\end{aligned}$$

因此 $K \subset \gamma(\hat{} K)$，所以 $|K| \leq |\gamma(\hat{} K)| \leq |\hat{} K| \leq |$自同构群$(Y)|$。由于 H 是有限的，且Y 是一个 H-移位，因此自同构群(Y)必定是有限的，从而 K 也必定是有限的。由于 E 是任意的，这说明自同构群(X)是局部有限的。□

最后，我们证明：如果有限型移位的自同构群是局部有限的，那么定义该有限型移位的群也必定是局部有限的。

引理 4.11（I(f) $\Longrightarrow$I(a)）。设 G 是一个群。若对每个 G-有限型移位 X，自同构群(X)都是局部有限的，那么 G 就是局部有限的。

证明。若每个 G-有限型移位 X 都满足 Aut(X) 是局部有限的，那么全 G移位 Σ （至少有 2 个符号）也显然满足这一点。显然，映射 $\psi : G \to$Aut(Σ) 定义为 $\psi(g) = \sigma^g$ 是一个单同态，因为对于任意 $h \neq g$，我们在 Σ上有$\sigma^h \neq \sigma^g$ ，这是因为可以描述一个构型，使其在 σ^h 和 σ^g作用下被映射为不同的构型。因此， $\psi(G) \leq$ Aut(Σ)。由于 Aut(Σ) 是局部有限的， $\psi(G)$ 也是局部有限的。然而， $\psi(G)$ 与 G 同构，因此G 是局部有限的。□

4.2. 定理 II 的证明。接下来，我们将证明定理 II。与上一节一样，涉及定理 II 中某些蕴含关系的结果均有标记。我们需要的主要额外假设是，G 是一个可数可 amenable 群，而不是任意群。这些结果大多也很大程度上依赖于上一节所发展的自由扩张的性质。为方便起见，我们在下面重述定理 II。

定理 II. 设 G是一个可数可 amenable 群。则以下命题等价。

(a) G是局部有限的 (b) 若 X 是一个非空的 G-有限型子移位，且 $h(X) = 0$，则 $X = \{x\}$，其中 x 是不动点。 (c) 每个 G-有限型子移位都是熵极小的。
(d) G是局部典型的，并且

$$\mathcal{E}(G) = \left\{ \frac{\log(n)}{|H|} : H \ll G, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{Q}^+_{\log}.$$

(e) 每个 G-有限型子移位都有唯一最大熵测度。

定理中的每个等价关系都将分别证明等价于 II(a)。我们先证明它与 II(b) 等价。另外，注意所有可数局部有限群都是 amenable 的，因此在若干结果中我们省略 amenable 这一假设。

4.2.1. 局部有限群上的零熵有限型子移位。我们先证明，局部有限群上的零熵有限型子移位由单个不动点组成。

引理 4.12（II(a) $\Longrightarrow$II(b)）。设 G 是一个可数局部有限群。那么，若X 是一个非空的 G-有限型移位，且 $h(X) = 0$，则 $X = \{x\}$ 对某个不动点 x成立。

证明。设 X 是一个 G-有限型移位，且 $h(X) = 0$。根据假设，$X = Y^{\uparrow G}$ 对某个 $H \ll G$ 和 H-移位 Y成立。由命题 3.7 可得，$h(X) = h(Y) = 0$。由于 H 是有限的，

$$0 = h(Y) = \frac{1}{|H|} \log(|Y|),$$

这意味着 $|Y| = 1$。于是 $|Y^{H\setminus G}| = 1$，因此对于任意构造函数 κ，都有 $|X| = |\kappa(Y^{H\setminus G})| = 1$，所以 $X = \{x\}$ 对唯一的 $x \in X$成立。由于 X 是移位不变的，必有 x 是不动点。□

为证明逆命题，回顾第 4 节开头对有限型移位 $\mathbb{2}_H$ 的定义。

引理 4.13（II(b) $\Longrightarrow$II(a)）。设 G 是一个可数的、可和的非局部有限群。那么存在一个 G-有限型移位 X，其拓扑熵为 0，然而 $|X| > 1$。

证明。设 $H \leq G$ 是一个无限有限生成子群。根据命题 3.7，我们有 $h(2_H^{\uparrow G}) = h(\mathbb{2}_H)$。由于 G 是可数且可和的，并且 $H \leq G$，因此 H 也是可数且可和的，所以设 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H的一个 Følner 序列。由于 $\mathbb{2}_H$ 恰好包含 2 个点，即 0^H 和 1^H，显然 $\mathcal{L}_{F_n}(\mathbb{2}_H) = \{0^{F_n}, 1^{F_n}\}$，因此 $|\mathcal{L}_{F_n}(\mathbb{2}_H)| = 2$。此外，必有 $\lim_{n\to\infty} |F_n| = \infty$，因为 H 是一个无限子群。然后

$$h(2_H^{\uparrow G}) = h(\mathbb{2}_H) = \lim_{n\to\infty} |F_n|^{-1} \log\big(|\mathcal{L}_{F_n}(\mathbb{2}_H)|\big) = \log(2) \lim_{n\to\infty} |F_n|^{-1} = 0.$$

此外，由于 $|2_H| = 2$，$|2_H^{\uparrow G}| > 1$，从而得到所需结果。 □

4.2.2. 局部有限群上有限型子移位的熵极小性。回忆一下，若对每个 G-移位 $Y \subsetneq X,$，都有 $h(Y) < h(X)$，则称 a G-有限型移位X 是熵极小的。下面的结果表明，对于可数局部有限群，群上的每个有限型移位都是熵极小的。

引理 4.14 (II(a) $\implies$ II(c))。设 G 是一个可数局部有限群，且 X 是一个 G-有限型移位。那么 X 是熵极小的。

证明。由于 X是有限型移位，取 $F \Subset G$使得 $X = \mathcal{X}^G[\mathcal{F}_F(X)]$。再设 $Y \subsetneq X$也是有限型移位，取 $E \Subset G$ 使得 $Y = \mathcal{X}^G[\mathcal{F}_E(Y)]$。令 $H = \langle F \cup E \rangle$；由于 E 和 F 都是有限的，且 G 是局部有限的，因此它是有限的。此外，我们有E、$F \subset H$，因此 $X = \mathcal{X}^G[\mathcal{F}_H(X)]$ 且 $Y = \mathcal{X}^G[\mathcal{F}_H(Y)]$。由引理 3.10 可得 $X = (\mathcal{X}^H[\mathcal{F}_H(X)])^{\uparrow G}$且 $Y = (\mathcal{X}^H[\mathcal{F}_H(Y)])^{\uparrow G}$。鉴于 $Y \subsetneq X,$，必有 $\mathcal{X}^H[\mathcal{F}_H(Y)] \subsetneq \mathcal{X}^H[\mathcal{F}_H(X)]$。结合命题 3.11，得到

$$\begin{aligned} h(Y) = h(\mathcal{X}^H[\mathcal{F}_H(Y)]) &= |H|^{-1} \log(|\mathcal{X}^H[\mathcal{F}_H(Y)]|) \\ &< |H|^{-1} \log(|\mathcal{X}^H[\mathcal{F}_H(X)]|) = h(\mathcal{X}^H[\mathcal{F}_H(X)]) = h(X), \end{aligned}$$

其中，严格不等式源于对数函数严格递增这一事实，这意味着 X 是有限型移位熵极小的。由于 X 是有限型移位，且有限型子移位的有限型移位熵极小性与熵极小性等价，因此 X 是熵极小的。□

对于关于熵极小性的逆命题，我们再次使用有限型移位 2_H。

引理 4.15（II(c) $\implies$II(a)）。设 G 是一个可数的、可和的非局部有限群。则存在一个 G-有限型移位 X，它不是熵极小的。

证明。设 $H \leq G$ 是一个无限的有限生成子群。我们有 $2_H^{\uparrow G}$ 是一个 G-有限型移位，并且 $h(2_H^{\uparrow G}) = 0$；相关论证可见引理 4.13。显然，$\{0^G\} \subset 2_H^{\uparrow G}$；而 $\{0^G\}$ 显然是一个 G-移位，因为它与由 1 个符号构成的满G-移位共轭。此外，$h(\{0^G\}) = 0$，因此 $2_H^{\uparrow G}$ 不是熵极小的。□

4.2.3. 局部有限群的有限型移位熵集合。接下来，我们确定有限型子移位在局部有限群上能够取得的所有熵。以下结果表明，II(a) 蕴含 II(d)。该蕴含的第一部分显然成立：如果 G 是局部有限的，那么每个有限生成子群都是有限群，因此 G 是局部典型的。该蕴含的第二部分如下所示。

引理 4.16 (II(a) $\implies$ II(d))。设 G 是一个可数局部有限群。那么

$$\mathcal{E}(G) = \left\{ \frac{\log(n)}{|H|} : H \ll G, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{Q}^+_{\log}.$$

证明。首先，考虑 G 有限的情形。设 X 是一个 G-有限型移位。那么 $h(X) = \frac{\text{对数}(|X|^{|G|})}{\text{对数}} \in \mathbb{Q}^+$，因此

$$\mathcal{E}(G) \subset \left\{ \frac{\log(n)}{|H|} : H \ll G, n \in \mathbb{N} \right\},$$

因为 $G \ll G$。现在设 $H \ll G$ 和 $n \in \mathbb{N}$。由于 G 和 H 都是有限的，设 $m = \frac{|G|}{|H|} \in \mathbb{N}$。设 $\mathcal{A}$ 是一个有限字母表，且 $|\mathcal{A}| = n^m$。接着，设 $X = \{a^G : a \in \mathcal{A}\}$，它是一个 G-有限型移位，并且 $|X| = n^m$。于是

$$h(X) = \frac{\log(|X|)}{|G|} = \frac{\log(n^m)}{|G|} = \frac{m\log(n)}{|G|} = \frac{\log(n)}{|H|},$$

因此，

$$\left\{ \frac{\log(n)}{|H|} : H \ll G, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathcal{E}(G),$$

这就得到了所需的结果。

如果 G 是无限的，那么 G 必定是无限生成的，因此根据推论 3.16，

$$\mathcal{E}(G) = \bigcup_{F \Subset G} \mathcal{E}(\langle F \rangle).$$

由于 G 是局部有限的，$H \ll G$ 当且仅当 H 是有限生成的，由此得到

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(G) &= \bigcup_{H \ll G} \mathcal{E}(H) = \bigcup_{H \ll G} \left\{ \frac{\log(n)}{|K|} : K \ll H, n \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \left\{ \frac{\log(n)}{|H|} : H \ll G, n \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned}$$

□

许多局部有限群并不满足 $\mathcal{E}(G) = \mathbb{Q}^{+}_{\text{对数}}$，这是因为它们缺少某些阶的子群。例如，$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 是局部有限的，但只有阶为 2^n 的子群。确实存在达到 $\mathcal{E}(G) = \mathbb{Q}^{+}_{\text{对数}}$ 的局部有限群；其中最著名的例子可能是 Hall 的万有群 $\mathbb{U}$ [8]，它具有这样的性质：每个可数局部有限群都能嵌入其中，这也包括所有有限群。因此，它含有每个阶的有限子群，所以 $\mathcal{E}(\mathbb{U}) = \mathbb{Q}^{+}_{\text{对数}}$。

作者一直未能找到前一个引理的直接逆命题，这就是在 II(d) 中附加说明 G 是局部典型的原因。以下引理给出了作者所找到的最一般形式的逆命题。

引理 4.17. 设 G 是一个可数可 amenable 群，满足 $\mathcal{E}(G) \subset \mathbb{Q}^{+}_{\text{对数}}$。那么 G 是周期的。

证明。我们通过逆否命题进行证明。设 G 是一个非周期的群，也就是说，存在一个阶为无限的元素 $h \in G$。令 $H = \langle h \rangle$，使得 H 同构于 $\mathbb{Z}$，并定义 $\mathbf{F} = \{1^{\{e,h\}}\} \subset \{0,1\}^{\{e,h\}}$，且令 $X = \mathcal{X}^H[\mathbf{F}]$。由于 G 是可和的，且 $H \leq G$，因此 H 必定是可和的。于是 X 共轭于定义在 $\mathbb{Z}$ 上的著名黄金均值移位，因此 $h(X) = \log(\varphi)$，其中 $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 是黄金比例。显然，X 也是一个有限型移位，所以根据引理 3.11，G-移位 $X^{\uparrow G}$ 是有限型移位；再由命题 3.7 可得 $h(X^{\uparrow G}) = h(X) = \log(\varphi)$。这是一个初等数论练习：证明对于所有 $n \in \mathbb{N}$，φ^n 都是无理数。因此，对于任意 n、$m \in \mathbb{N}$，都有 $\varphi^m \neq n$。所以 $\forall n$、$m \in \mathbb{N}$，有 $\log(\varphi) \neq \log(n)\, m$，故 $\log(\varphi) \notin \overline{\mathbb{Q}^{+} \log}$。然而，$\log(\varphi) \in \mathcal{E}(G)$，因此 $\mathcal{E}(G) \not\subset \mathbb{Q}^{+} \log$。□

剩下要证明的是，周期但非局部有限的群存在拓扑熵不属于 $\mathbb{Q}^+$ 对数 的有限型子移位。然而，一般来说，要在这类群上构造有限型子移位，使其拓扑熵便于计算，是相当困难的。因此，我们改为补充说明 G 是局部典型的，这样便无需考虑这类群。

引理 4.18（II(d) $\implies$ II(a)）。设 G 是一个局部典型的可数可 amenable 群，且 $\mathcal{E}(G) \subset \mathbb{Q}^+$ 对数。那么 G 是局部有限的。

证明。根据引理 4.17， G 是周期的。令 $F \Subset G$，并考虑 $H = \langle F \rangle$。由于G 是周期的，H 是周期的。由于 G 是局部典型的， H 要么有限，要么非周期，因此 H 必定有限。由于 $F \Subset G$ 是任意的， G 是局部有限的。□

作者猜想，若 $\mathcal{E}(G) \subset \mathbb{Q}^+$ 对数，则 $\mathcal{E}(G)$ 必定是局部有限的。这样一来，II(d) 中就可以去掉局部典型这一假设，只保留$\mathcal{E}(G) \subset \mathbb{Q}^+$ 对数。

4.2.4. 局部有限群上有限型子移位的最大熵测度。最后，我们证明，可数局部有限群上的每个有限型子移位都有唯一最大熵测度；并且，如果可数 amenable 群上的每个有限型子移位都有唯一最大熵测度，那么该群必定是局部有限群。首先，我们需要一个关于可数局部有限群上有限型子移位的拓扑结构的简单而有力的结果。

引理 4.19. 设 G 是一个可数局部有限群，且 X 是一个 G-有限型移位。那么存在一个序列 $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ ，使得对所有 n都有 $H_n \leq H_{n+1} \ll G$ ，且 $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$；并且存在 H_n-有限型子移位 Y_n，使得对所有 n都有 $X = Y_n^{\uparrow G}$。此外，集合

$$\mathfrak{B}[\{Y_n\}] = \{[y] \cap X : n \in \mathbb{N}, y \in Y_n\}$$

是 X上子空间拓扑的一个基。

证明. 首先，由于 X 是一个 G-有限型移位，根据命题 4.2，存在 $H_1 \ll G$ 和H_1-有限型子移位 Y_1 ，使得 $X = Y_1^{\uparrow G}$ 。然后，由于 G 可数，令 $G = \{g_n : n \in \mathbb{N}\}$为 G的一个枚举。对 $n \geq 2$，定义

$$H_n = \langle H_1 \cup \{g_i : i < n\} \rangle.$$

由于 H_1 和 $\{g_i : i < n\}$ 都是有限的， H_n 是有限生成的，因而是有限的。此外，对于任意 $g \in G$，都存在某个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $g = g_n$，并且显然 $g_n \in H_{n+1}$。另外， $H_n \leq H_{n+1}$。

现在，对每个 $n \geq 2$，令$Y_n = Y_1^{\uparrow H_n}$。由引理 3.8，我们得到 $X = Y_1^{\uparrow G} =(Y_1^{\uparrow H_n})^{\uparrow G} = Y_n^{\uparrow G}$。

最后，令 $\mathfrak{B}$ 为 X 的所有柱集的标准基。为证明 $\mathfrak{B}[\{Y_n\}]$ 是 X 上拓扑的一个基，首先注意到 $\mathfrak{B}[\{Y_n\}] \subset \mathfrak{B}$，因此只需证明 $\mathfrak{B}$ 中的任意集合都可以由 $\mathfrak{B}[\{Y_n\}]$ 中的集合构造出来。令 $w \in \mathcal{L}$（X），使得 $[w] \cap X$ 非空，并令 F 为 w 的形状。由于 $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ 且 $H_n \leq H_{n+1}$，可知存在 $N \in \mathbb{N}$，使得 $F \subset H_N$。于是显然，

$$[w] \cap X = \bigcap_{z \in [w]_{H_N} \cap Y_N} [z] \cap X,$$

其中此交集是有限的，这意味着 $\tau(\mathfrak{B})$——由 $\mathfrak{B}$ 生成的拓扑——包含于 $\tau(\mathfrak{B}[\{Y_n\}])$，因此 $\mathfrak{B}[\{Y_n\}]$ 是 X 上拓扑的一个基。□

引理 4.20（II(a) $\Longrightarrow$II(e)）。设 G 为可数局部有限群。则对于任意 G-有限型移位 X，都存在唯一最大熵测度。

证明。对于可数可 amenable 群的所有移位作用，都存在最大熵测度，因此令 $\mu \in \mathcal{M}(X)$ 使得 $h_\mu(X) = h(X)$。

根据引理 4.19，存在 $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 H_n-有限型子移位 Y_n，使得 $\mathfrak{B}[\{Y_n\}]$ 是 X上的拓扑基，因此也生成 X上的 Borel σ-代数。此外，由于 $X = Y_n^{\uparrow G}$，引理 3.7 给出

$$h(X) = h(Y_1) = h(Y_n) = \frac{\log(|Y_1|)}{|H_1|} = \frac{\log(|Y_n|)}{|H_n|}$$

对于所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。另请注意，$\{H_n\}$ 是 G的 Følner 序列，因此

$$h_\mu(X) = \inf_n \frac{H_\mu(X, H_n)}{|H_n|}.$$

因此，我们得到 $h_\mu(X) \leq {}^{H_\mu(X,\ H_n)}\!/_{|H_n|}$ 对于所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。但是

$$H_\nu(X, H_n) \leq \log(|\mathcal{L}_{H_n}(X)|) = \log(|Y_n|)$$

对于任意 $\nu \in \mathcal{M}(X)$，因此

$$\frac{\log(|Y_n|)}{|H_n|} = h(X) = h_\mu(X) \leq \frac{H_\mu(X, H_n)}{|H_n|} \leq \frac{\log(|Y_n|)}{|H_n|},$$

因此，所有这些量都必须相等，这进一步意味着对于每个 n 和$y \in Y_n$，都有 $\mu[y] = \frac{1}{|Y_n|}$。这对任意 $n \in \mathbb{N}$ 都成立，因此最大熵测度在 $\mathfrak{B}[\{Y_n\}]$的每个元素上都必须取这些特定值。根据 Carath´eodory 扩张定理，存在唯一一个具有这些性质的博雷尔概率测度，因此最大熵测度只有一个。□

尽管前面的证明没有明确说明如何构造最大熵测度，但其构造相当简单。对于可数局部有限群 G 和 G-有限型移位 X，取某个 $H \ll G$ 和 H-有限型移位 Y，使得$X = Y^{\uparrow G}$。令 ν 为 Y上的一个测度，其定义为：对所有 $y \in Y$，$\nu(y) = \frac{1}{|Y|}$。那么$\mu = (\nu)^{H\backslash G} \circ \kappa^{-1}$ 是 X的最大熵不变测度。直观地说，μ是 X上的均匀测度，它是将乘积测度经构造函数推前得到的。还可以证明，对于满足 $X = Y^{\uparrow G}$的 H 和 Y，μ 与其选择无关。

对于逆命题，我们在任意非局部有限群上给出一个具有多个最大熵测度的有限型移位。

引理 4.21（（e）$\Longrightarrow$（a））。设 G 是一个可数的、可和的非局部有限群。则存在一个 G-有限型移位 X，它具有多个最大熵测度。

证明。由于 $h(2_H^{\uparrow G}) = 0$，变分原理给出，对于所有 $\mu \in \mathcal{M}(X)$，有 $0 \leq h_\mu(2_H^{\uparrow G}) \leq h(2_H^{\uparrow G}) = 0$，因此 $h_\mu(2_H^{\uparrow G}) = h(2_H^{\uparrow G})$。这意味着每个测度 $\mu \in \mathcal{M}(X)$ 都是最大熵测度。

由于 0^G 和 1^G 都是 $2_H^{\uparrow G}$ 的元素，因此两个狄拉克测度 δ_{0^G} 和 δ_{1^G}彼此不同；又由于 0^G 和 1^G 都是不动点，它们也都是不变的，

因此都包含在 $\mathcal{M}(2_H^{\uparrow G})$中。因此， $2_H^{\uparrow G}$ 至少有 2 个最大熵测度。□

5. Final Remarks

本文的主要结果表明，局部有限群这一类群呈现出通常出人意料的有趣动力学行为。结合逆命题结果——它们表明这些有趣行为是局部有限群所独有的——我们得以深入了解哪些类型的群可能出现有趣行为。如第1节所述，定理 II(b)表明，只有局部有限群才仅具有平凡的零熵动力学；这一性质间接肯定地回答了 Barbieri [1] 的问题 3.19：“ 是否存在一个可 amenable 群 G 和一个 G- 有限型子移位，其中不包含零熵 G-有限型子移位？”对于任意可数局部有限群 G，取任意一个满足 $|H| > 1$ 的有限 $H \ll G$ ，并任选一个不含任何不动点的 H-有限型子移位 Y 。那么 $X = Y^{\uparrow G}$ 也不含不动点，因此不含零熵有限型子移位。鉴于无限局部有限群必然是无限生成的，这一问题的答案引出了以下对该问题的进一步细化：

问题：是否存在一个无限有限生成可 amenable 群 G ，以及一个不包含零熵 G有限型子移位的 G-有限型移位？

定理 II(d) 也有助于全面分类在特定群上可实现为有限型子移位熵集的集合。若 G 是局部有限的，则 $\mathcal{E}(G) \subset \mathbb{Q}^{+\text{ 对数}}$ （特别是，已知 $\mathcal{E}(G)$的精确形式）。若 G 不是周期的，那么它包含一个无限阶元素（因而包含一个与 $\mathbb{Z}$同构的子群），因此由引理 3.15 可得， $\mathcal{E}(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{E}(G)$。尽管要准确分类这类群的 $\mathcal{E}(G)$仍需进一步研究（例如 Barbieri 的工作 [1]），但至少已知 $\mathbb{Z}$-有限型移位的熵可以实现。剩下的一类群是无限周期但非局部有限群。我们在引理 4.17 中证明了 $\mathcal{E}(G) \subset \mathbb{Q}^{+\text{ 对数}}$ 确实意味着 G 是周期的，但以下问题能否得到肯定回答尚不明确：

问题：如果 G 是一个可数可 amenable 群，使得 $\mathcal{E}(G) \subset \mathbb{Q}^{+\text{ 对数}}$，那么是否必然有 G 是局部有限的？如果不是，是否

$$\mathcal{E}(G) = \left\{ \frac{\log(n)}{|H|} : H \ll G, n \in \mathbb{N} \right\}$$

足以得出 G 是局部有限的结论 te?

若能对这两个问题中的任意一个作出肯定回答，就可以删去 II(d) 中的局部典型性陈述，从而得到一个严格更强的结果。沿用证明 $\mathcal{E}(G) \subset \mathbb{Q}^{+\log}$ 蕴含周期性的方法，只需对任意无限有限生成周期群 H构造一个熵不属于 $\mathbb{Q}^{+\log}$ 的 H-有限型移位。于是，对于任何非局部有限的无限周期群 G ，它必定包含一个无限有限生成周期子群 H（可能就是整个群）；这个有限型移位可以定义在 H 上，再以相同的熵自由扩张到 G 。通常，定义有限型子移位并不困难；主要难点在于计算其熵，尤其是在考虑任意有限生成群时。

除了加强陈述 II(d) 之外，定理 I 和 II 可能还可以加入其他陈述。本研究探讨的动力学性质绝非面面俱到，因此未来的工作或许能够扩充这些定理；而此类工作很可能会像本文一样，大量运用自由扩张。除了扩展这些定理之外，拓展自由扩张理论也可能有助于研究群上的移位。例如，虽然利用 Barbieri [1]，更一般的嵌入，引理 3.11 的正向结论在更一般的情况下成立，但据作者所知，其反向结论对于自由扩张这一特定情形而言是一个新结果。这一点连同关于自由扩张的其他结果也表明，群上的有限型子移位研究或许可以归结为有限生成群上的有限型子移位研究，其中每个有限型子移位的禁形都是该群的生成集。可以称这类有限型子移位为群的内禀有限型子移位，因为它们只有在考虑整个群而非其任一子群时才会出现。

最后，这一定理的存在本身表明，或许可以根据群的性质对其他动力学性质进行分类。据作者所知，这些结果或许是符号动力系统中仅有的、仅凭群的动力学性质便能推导出有关群的结论的结果，更不用说依据动力学性质对群进行完整刻画了。通过对群作出额外的结构假设，或许可以根据这些结构刻画其他动力学性质，并为其他群类推导出类似于定理 I 和 II 的定理。

致谢。作者谨向 Robert Bland 致谢，感谢他进行富有成效的讨论；并向 Kevin McGoff 致谢，感谢他对本文结构和行文表达提出的宝贵建议。本研究是在作者于北卡罗来纳大学夏洛特分校攻读博士期间完成的。

References

[1] S. Barbieri. 关于可数可平均群上有限型子移位的熵。 *Groups, Geometry and Dynamics* 15 2 607 638, 2021 , , ( ): – .

[2] R. Bland. 具有比较性质的可平均群上子移位的嵌入定理，2023。[3] R. Bland、K. McGoff 和 R. Pavlov. 可数可平均群上有限型移位和 sofic 移位的子系统熵。 *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 第 1–34 页，2022 年 9 月。[4] L. Bowen. 可数 sofic 群作用的测度共轭不变量。 *Journal of the American Mathematical Society* 23 1 217 245, 2010 , ( ): – . [5]

T. Ceccherini-Silberstein 和 M. Coornaert. 强不可约子移位中周期构型的稠密性。 *Nonlinearity*, 25(7):2119，2012 年 6 月。[6] T. Downarowicz、D. Huczek 和 G. Zhang. 可平均群上的铺砌。 *Journal fur die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 2019 747 277 298, 2019 , ( ): – . [7]

J. Frisch 和 O. Tamuz. 可平均群上的符号动力系统：一般移位的熵。 *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 37(4):1187–1210，2017。[8] P. Hall. 局部有限群的一些构造。 *Journal of the London Mathematical Society* 1 3 305 319, 1959 , ( ): – . [9]

M. Hochman. 多维有限型移位的自同构群。 *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 30 3 809 840, 2010 , ( ): – .

[10] M. Hochman 和 T. Meyerovitch. 多维有限型移位的熵刻画。 *Annals of Mathematics*, 第 2011–2038 页，2010。[11] D. Kerr 和 H. Li. 遍历理论。 *Springer Monographs in Mathematics. Springer, Cham*, 2016。

[12] S. A. B. Lemp. *Shift spaces on groups: computability and dynamics*. 博士论文，里昂大学，2017 年。[13] D. A. Lind. 拓扑马尔可夫移位的熵及一类相关代数整数。
Ergodic Theory and Dynamical Systems, 4(2):283–300，1984 年。[14] D. A. Lind 和 B. Marcus.
An introduction to symbolic dynamics and coding. 剑桥大学出版社，第 2 版，2021 年。[15] K. McGoff 和 R. Pavlov. 随机 $\mathbb{Z}^d$有限型移位。 *Journal of Modern Dynamics*, 10 2 287( ): –330, 2016 年。[16] R. Pavlov. 多维有限型移位的扰动。 *Ergodic Theory and Dynamical Systems - ERGOD THEOR DYN SYST* 30 04 2010 , , .

[17] R. M. Robinson. 平面铺砌的不可判定性与非周期性。 *Inventiones mathematicae* 12 177 209, 1971 , : – .

[18] S. Wacker. 群集上的元胞自动机与一致 Curtis–Hedlund–Lyndon 定理。*Natural Computing*, 18(3):459–487，2019 年。[19] P. Walters. *An introduction to ergodic theory*, 第 79 卷。施普林格科学与商业媒体，2000 年。[20] B. Weiss. 有限型子移位与 sofic 系统。 *Monatshefte für Mathematik*, 77(5):462–474，1973 年。

Jacob Raymond, Department of Mathematics and Statistics, University of North Carolina at Charlotte, 9201 University City Blvd., Charlotte, NC 28223*Email address*: jraymon9@uncc.edu