arXiv:2304.07603v1 [math.GR] 15 Apr 2023

图灵机的准线性 S-机仿真

BOGDAN CHORNOMAZ 和 FRANCIS WAGNER

谨以此文纪念 Mark V. Sapir

ABSTRACT. 我们证明，对于任意 $\varepsilon > 0$，时间复杂度为 $T(n)$ 的非确定性图灵机 $\mathcal{T}$，都可以由一台 S-机仿真，其时间和空间复杂度分别至多为$T(n)^{1+\varepsilon}$ 和 $T(n)$。这改进了 [14] 中关于仿真的界，并进一步改进了 [1] 主定理中的界。特别地，对于字问题具有线性时间复杂度的非双曲有限生成群 G，这给出了一个将 G 嵌入有限表示群 H 的方法，使得 G 在 H 中具有有界畸变，且 G 在 H 中的 Dehn 函数上界为 $n^{2+\varepsilon}$；除去 ε 因子外，这是最优界。为此，我们引入并发展了 S-图理论，从不同角度探讨 S-机的构造，这种构造类似于一种粗略的面向对象编程语言。

1. 引言

[14], 中首次引入的 S-机器是一种复杂的计算模型，与多带图灵机有相似之处。然而，这两种模型之间存在若干根本区别。举一个例子， S-机器处理群词，而图灵机则基于自由幺半群进行操作，其中没有逆字母或约化。尽管存在这些差异， [14]的基本结果仍确立了二者之间的对应关系：对于每一台图灵机 $\mathcal{T}$，都存在一台 S-机器，能够以某种特定意义“模拟” $\mathcal{T}$。

不过，一个或许更有力的发现，是 S-机器与自由群的多重 HNN 扩张之间的联系。这类群由其命名者 Higman、B.H Neumann 和 H. Neumann 于 1949年首次引入， [5], 其构造方式便于有条理且直接地加以研究，同时又构成了足够丰富的一类群，能提供大量有趣的例子。因此， S-机器已成为研究群的卓越工具，解答了许多尚未解决的问题与猜想。以下按时间顺序列举若干借助这一工具取得的成果：

- Sapir、Birget 和 Rips 论文的第一个版本 [14] 于1996年发表，首次引入了 S-机器。作者在文中证明，对于任何能够以“合理快”的速度计算的 $\alpha \geq 4$，都存在一个有限表示群，其 Dehn 函数等价于 n^{α}。

- 1998年，Birget、Ol’shanskii、Rips 和 Sapir [1] 证明，一个有限生成群的字问题属于 NP，当且仅当该群能够嵌入到一个 Dehn 函数为多项式的有限表示群中。

- 2001年，Ol’shanskii 和 Sapir [9] 构造了一个非可平坦有限表示群的例子，该群是一个有限生成挠群被一个循环群扩张得到的。

- 2002年，Ol’shanskii 和 Sapir [8] 构造了 Higman 嵌入定理的一个类似结果，该结果保持共轭问题的可判定性（在图灵度意义下）。

- 2018年，Ol’shanskii [6] 给出了 Dehn 函数等价于 n^{α} 、对应 $\alpha \in (2, 4)$ 的有限表示群的描述；该描述在 P $=$ NP 猜想成立的前提下，完成了对等周谱 [13]的描述。

- 2019年，Ol’shanskii [7] 针对指数足够大的群所组成的 Burnside簇，给出了 Higman嵌入定理的一个类似结果。

• 2020年，Ol'shanskii 和 Sapir [10] 构造了一个具有二次 Dehn 函数但共轭问题不可解的有限表示群。
•2020 年，第二作者 [15] 构造了一些具有二次 Dehn 函数的有限表示群，这些群包含有限生成扭子子群。事实上，文中证明，任何指数足够大的自由 Burnside 群都可以准等距嵌入到一个具有二次 Dehn 函数的群中；这是此类环境群中的最优例子 [2]。

在这份手稿中，我们介绍了一种称为 S-图的替代构造，它与原构造等价。引入它们有两个原因。

首先， S-机定义的复杂技术性质，使得研究它们成为一项艰巨任务。尽管已有一些尝试，旨在为进阶读者提供辅助材料，帮助他们理解特定机器的构成（例如，参见 [9] 中的图13），但对于普通读者和任意机器而言，现有工具似乎都不够用。作者希望 S-图能够发挥这一作用：它们既能以图示方式完整描述一台"机器"，也能提供一种简单方法来理解其计算结构。

不过，更为重要的是，这一定义的图示性质促成了一种自然的方法来"复合"这些机制。就其本身而言，这并非创新，因为在以往的手稿中（例如 [6], [7], [10], [15]），人们常常以各种方式组合和复合 S- 机器，以构造所需的计算结构。然而，既有机制总是要求对这类机器作出繁复的定义，使其构成和用途变得晦暗不明。尽管证明 S-图的"复合"是一种"定义良好"的操作本身相当复杂（见定理 8.10），但最终得到的却是对这一过程简单而连贯的描述，使复杂结构得以有效地迭代构造；在以往的框架下，这一点将很难描述。这正是本手稿的主要创新之处。

具体而言，借助 S-图这一框架，本手稿的主要结果是显著提高了用 S-机器仿真图灵机的效率；S-机器是 [14] 的骨干。为清楚地陈述这一结果，先概述一些基本术语。有关这些术语的完整定义，见第 3 节和第 9 节。

粗略地说， S-机 $\mathcal{S}$ 是一种特殊的（非确定性）群词有限重写系统。机器有多个可处于其中的"状态"，以及多条"带"，其上写有取自指定字母表的群词。 $\mathcal{S}$ 的一条"规则"会检查机器所处的状态以及带上写着哪些词（这些信息合起来称为 $\mathcal{S}$的一个"配置"），并确保它们"合适"，随后按规定的方式切换状态并改写带上的词。 $\mathcal{S}$ 的"计算"是依次连续应用的一有限规则序列。计算的时间是所应用规则的数量，而空间则是它在过程中经过的各个配置的最大"大小"。

通常假设 $\mathcal{S}$ 具有识别功能，即它有两个特殊状态，分别称为初始状态和结束状态，并有一条特殊的带，称为输入带。给定一个取自输入带对应字母表的群词 w ，输入构型 $I(w)$ 是这样一种配置：$\mathcal{S}$ 处于初始状态，输入带上写着 w ，而所有其他带均为"空"（即写着平凡词）。类似地，接受构型 W_0 是这样一种配置：$\mathcal{S}$ 处于结束状态且所有带均为空。 w 的"接受计算"是介于 $I(w)$ 与 W_0之间的计算，而 $\mathcal{S}$的语言 $L_{\mathcal{S}}$则是存在接受计算的所有词 w 所构成的集合。

给定 $w \in L_{\mathcal{S}}$， w 的时间 $\mathsf{tm}(w)$ 是一次接受计算所需的最短时间。同样， w 的空间 $\mathsf{sp}(w)$ 是此类计算所需的最小空间。因此，识别 S 的机器 $\mathcal{S}$ 的时间复杂度定义为函数 $\mathsf{TM}_{\mathcal{S}}$: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ，其定义为 $\mathsf{TM}_{\mathcal{S}}(n) = \max\{\mathsf{tm}(w) \mid w \in L_{\mathcal{S}}, |w| \leq n\}$。空间复杂度的定义类似。

给定一对非递减函数 $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，若对任意 $w \in L_{\mathcal{S}}$， w 都存在一次接受计算，其时间至多为 $f(|w|)$，空间至多为 $g(|w|)$，则称识别 S 的机器 $\mathcal{S}$ 的时间-空间复杂度上界为 (f, g)，记作 $\mathrm{TMSP}_{\mathcal{S}} \leq (f, g)$。

在这些情形下研究的自然数集上的所有非递减函数，均视为模等价关系 $\sim$，该等价关系由预序 $\preceq$ 诱导；预序 $f \preceq g$ 定义为：当且仅当存在 $C \in \mathbb{N}$ 使得对所有 $n \in \mathbb{N}$， $f(n) \leq Cg(Cn) + C$。自然地，这一关系也扩展到非递减函数的元组。例如，若 $f' \sim f$ 且 $g' \sim g$，则称 $\mathcal{S}$ 的时间-空间复杂度在渐近意义上以 (f', g') 为上界，记作 $\mathrm{TMSP}_{\mathcal{S}} \preceq (f', g')$。通常也会自然地考虑这类非递减函数上的等价关系 $\sim_1$，它由预序 $\preceq_1$ 诱导；预序 $f \preceq_1 g$ 定义为：当且仅当 $\max(f, n) \preceq \max(g, n)$。

多带非确定性图灵机也使用大部分相同的术语。更多讨论请参见第 13 节，或参见 [14] 或 [7] 了解完整背景。具体而言，图灵机 M所识别的语言记作 L_M，它是由指定字母表上的词 w 组成的集合，其中存在一段计算，能够将由 w指定的特定配置转变为一个特殊的“接受”配置。随后，以类似于定义 S-机器时间复杂度的方式定义 M 的时间复杂度。

有了这些术 语，本文的主定理可以表述如下 :

定理 1.1。设 M 是一台多带非确定性图灵机。则存在 S-机器，能够在准线性时间内“模拟” M；也就是说，对于所有 $\varepsilon > 0$，都存在一台 S-机器 $\mathcal{S}_\varepsilon$，使得 $L_{\mathcal{S}_\varepsilon} = L_M$且 $\mathrm{TMSP}_{\mathcal{S}_\varepsilon} \preceq_1 (\mathrm{TM}_M^{1+\varepsilon}, \mathrm{TM}_M)$。

这一结论可与 [14], 中的命题4.1相对照：在那里，条件（4）意味着相应的模拟 S-机器 $\mathcal{S}(M)$ 满足$\mathrm{TMSP}_{\mathcal{S}(M)} \preceq_1 (\mathrm{TM}_M^3, \mathrm{TM}_M)$；事实上，它意味着等价，因为$(\mathrm{TM}_M^3, \mathrm{TM}_M)$是相对于 $\preceq_1$而言 $\mathrm{TMSP}^{\mathcal{S}(M)}$的最小上界。可以看出，定理 1.1对此作出了实质性的改进，因此可用于完善作为其理论基础的各种群论结果。下文第2节将讨论其中一些改进。

本文大致分为两部分。第一部分由第3–9节组成，致力于为 S-机器开发一种原始的面向对象语言；随后，第二部分将使用这种语言构造一种模拟算法，该算法能够生成满足定理 1.1的 S-机器。因此，本部分的目标有两个：这种语言应具有足够的表达能力，以便简洁地描述该模拟，同时又能避免将此算法转换为S-机器时所涉及的复杂细节。尽管本部分的定义和证明总体上篇幅较长且技术性较强，但其目标直截了当；从概念上说，任何熟悉高级编程语言的人都不难理解。下面将更详细地介绍第一部分:

在第 3 节中，我们引入 S-图的概念，并在定理 3.4 中明确建立了 S-图与 S-机器之间的对应关系。第4节概述了关系代数的一些概念，这些工具将有助于今后所有涉及 S-图的证明。第 5 节专门介绍对象和操作的构造；它们是 S-图的简单语法扩展，并满足特定性质。随后，我们在第6节利用这些工具定义 S-图的“复合”，从而能够构造“更高度的 S-图”——即 S^*-图。这种构造产生的机制类似于标准编程语言（但不包含递归）。具体而言，在第7节中，我们定义 S^*-图的计算。通过第 8 节所述的“展开”过程，可以将 S^*-图转换回“常规” S-图，进而转换为 S-机器。最后，第 9 节讨论 S^*-图的时间和空间复杂度。为使其与相应 S-机器的复杂度保持一致， S^*-图的复杂度是根据该图的展开来定义的；不过，我们还开发了许多工具，以便

能够直接估算复杂度，而无需明确参照图的展开。

论文的第二部分由第 10–15 节组成。在这一部分中，我们构造了一个特定的 S^*-图，使得与其展开相对应的 S-机器满足定理 1.1。在许多方面，这一构造与 [14] 中的构造相似：首先，在第 11 节中定义一个“计数器”，借此可以判断机器的带中以某种方式编码的整数是否非零（对于 S-机器而言，这项任务众所周知并非平凡）。接着，在第 12 节中构造一个 S^*-图，它“接受”所有正群词组成的语言，也就是说，接受自由约化形式只包含字母正幂的所有词。然后，在第 14 节中，我们构造一个仿真图灵机一条带的对象。最后，在第 15 节中，我们利用前面构造的图，通过一个 S^*-图仿真任意图灵机，从而完成主定理的证明。与此同时，不同于 [14], ，上述每一步都经过了“改进”，使整体时间复杂度能够任意接近原图灵机的时间函数。尽管每一步处理复杂度问题的细节各不相同，但都采用了相应对象的递归定义，并通过每次迭代改进界。S^*-图的递归性质大大简化了这一过程，无论是表述还是计算皆如此，也因此证明了定义它们这一繁琐但枯燥的工作的必要性。其余各节则用于定义如何用 S^* 图来表示“接受一种语言”（第 10 节），并给出一种经过专门设计的图灵机定义，使其能够与 S-图相对应，同时也适用于仿真（第 13 节）。

本手稿全文采用以下术语和记号：

对于集合 X 和 Y，$X - Y$ 表示 X 和 Y 的集合差，即当且仅当 $x \in X$ 和 $x \notin Y$ 时，$x \in X - Y$。

对于 $n \in \mathbb{N} - \{0\}$，记号 $\overline{n}$ 表示 $\mathbb{N}$ 的子集 $\{1, \ldots, n\}$。此外，对于任意 n，若 $n \leq m$，则定义 $m \in \mathbb{Z}$ 为 $\{n, \ldots, m\}$。对于所有尚未定义这些记号的 n 和 $m \in \mathbb{Z}$，令 $\overline{n} = \emptyset$ 且 n，并对所有此类 n 令 $m = \emptyset$，从而将这些定义推广到所有 n 和 $m \in \mathbb{Z}$。

对于指标集 I，一个 I 元组 $g = (g_i)_{i \in I}$ 是一个定义域为 I 的函数，满足对于 $i \in I$，$g(i) = g_i$。对于 $n \in \mathbb{N} - \{0\}$，$\overline{n}$ 元组简称为 n 元组。对于不相交指标集 I 和 J，给定一个 I 元组 g 和一个 J 元组 h，$g \sqcup h$ 是由下式给出的 $(I \sqcup J)$ 元组：对于 $i \in I$，$(g \sqcup h)(i) = g(i)$；对于 $j \in J$，$(g \sqcup h)(j) = h(j)$。对于指标集 I 以及由集合组成的 I 元组 $(G_i)_{i \in I}$，$\bigtimes_{i \in I} G_i$ 是所有满足 $g(i) \in G_i$ 的 I 元组 g 构成的集合。对于不相交指标集 I 和 J，给定一个由 I 元组组成的集合 G 和一个 J 元组 h，$G \sqcup h = \{g \sqcup h \mid g \in G\}$；$g \sqcup H$ 和 $G \sqcup H$ 的定义类似。对于一个 I 元组 g 和 $J \subseteq I$，$g(J)$ 表示一个 J 元组 $g|_J$；类似地，对于由 I 元组组成的集合 G 和 $J \subseteq I$，$G(J) = \{g(J) \mid g \in G\}$。

致谢。作者衷心感谢亚历山大·奥尔尚斯基和已故的 Mark Sapir，他们将作者引入这一深邃而强大的理论，他们的工作也启发了本研究。

2. Implications of Theorem 1.1

如上所述，[14] 中展示的用 S-机器仿真图灵机，是证明若干深刻群论结果的一项核心工具。因此，自然会问，定理 1.1 对这种仿真的复杂度界所作的改进，本身是否足以进一步完善上述某些结果。本节将讨论沿着这一思路可以解决哪些问题。请注意，在本节余下部分中，所有等价和渐近界的概念，均指由预序 $\preceq_1$ 所诱导的概念。

首先，考虑 Sapir、Birget 和 Rips 在 [14] 中证明的以下两个命题：

(1)（[14] 的定理 1.3）：设 $L \subseteq X^+$ 是一种由图灵机 M 接受的语言，该图灵机的时间函数为 $T(n)$，且 $T(n)^4$ 是超可加的。那么存在一个有限表示的

群 $G(M) = \langle A \rangle$，其 Dehn 函数等价于 $T(n)^4$,，且其等直径函数是与 $T(n)^3$, 等价的最小函数；并且存在一个单射 $K\colon X^+ \to \left(A \cup A^{-1}\right)^+$，使得：

(a) $u \in L$ 当且仅当 $K(u) = 1$ 属于 G；(b) $K(u)$ 的长度为 $O(|u|)$，且可在时间 $O(|u|)$ 内计算。

(2)（[14] 的推论 1.3）：设 $f(n) > n^4$ 是一个超可加函数，且 $f(n)$ 的二进制表示可由图灵机在时间 $O\left(\sqrt[4]{f(n)}\right)$ 内计算。那么，$f(n)$ 等价于某个有限表示群的 Dehn 函数，而该群的最小等直径函数等价于 $f^{3/4}(n)$。

表面看来，（1）中出现的函数 $T(n)^3$ 和 $T(n)^4$ 似乎源自 [14] 的模拟机的时间-空间复杂度。事实确实如此：$T(n)^3$ 项对应于 S-机的时间复杂度，而 $T(n)^4$ 项对应于该机器的面积复杂度；其界由构成任意时间-空间复杂度界的各函数的关系乘积给出。然而，尽管定理 1.1 改进了相应的复杂度界，定义 Dehn 函数渐近行为的非主导项却妨碍了同等程度的改进。尽管如此，以下陈述体现了通过定理 1.1 对（1）所作的改进：

定理 2.1。设 $L \subseteq X^+$ 是由图灵机 M 接受的语言，该图灵机的时间函数为$T(n)$，且 $T(n)^2$ 是超可加的。那么，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个有限表示群$G_\varepsilon(M) = \langle A \rangle$，其 Dehn 函数的上界为 $T(n)^{2+\varepsilon} + n^4$，等直径函数的上界为 $T(n)^{1+\varepsilon} + n^2$；并且存在一个单射 $K\colon X^+ \to \left(A \cup A^{-1}\right)^+$，使得：

(1) $u \in L$ 当且仅当 $K(u) = 1$ 属于 G；(2) $K(u)$ 的长度为 $O(|u|)$，且可在时间 $O(|u|)$ 内计算。

证明。群 $G(M)$ 是群 $G_N(\mathcal{S})$，它是在 [14],的第 5 节中构造的，其中 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(M)$ 是一个模拟 M的 S-机器。可以采用相同的群构造，只将 S-机器替换为定理 1.1 中给出的机器 $\mathcal{S}_\varepsilon$，从而得到群 $G_\varepsilon(M) = G(\mathcal{S}_\varepsilon)$。

根据 [14], 的命题 11.1，对于 $G(M)$ 上的任意极小图 Δ，

$$\mathrm{Area}(\Delta) \le C_4 T(C_6|\partial\Delta|)^4 + (C_3 + C_9)|\partial\Delta|^4$$

其中 C_3、C_4、C_6 和 C_9 都是足够大的常数。

$C_4T(C_6|\partial\Delta|)^4$ 项仅依赖于 $T(n)^4$ 的超可加性以及 $\mathcal{S}(M)$ 的面积复杂度。要求 $T(n)^2$ 具有超可加性，意味着 $T(n)^{2+\varepsilon}$ 也必须是超可加的，而 $\mathcal{S}_\varepsilon$ 的面积复杂度有上界 $T(n)^{2+\varepsilon}$。因此，完全相同的论证立即表明，$G_\varepsilon(M)$ 上的极小图 Δ 满足：

$$\mathrm{Area}(\Delta) \le C_4 T(C_6|\partial\Delta|)^{2+\varepsilon} + (C_3 + C_9)|\partial\Delta|^4$$

类似地，$G(M)$ 上极小图 Δ 的直径 $d(\Delta)$，在 [14] 的命题 11.1 中估计为

$$d(\Delta) \le C_1' T(C_2'|\partial\Delta|)^3 + C_3'|\partial\Delta|^2$$

对于充分大的常数 C_1'、C_2'、C_3'，对任意关于 $G_\varepsilon(M)$ 的极小图 Δ，上述同样的论证即可得出结论，

$$d(\Delta) \le C_1' T(C_2'|\partial\Delta|)^{1+\varepsilon} + C_3'|\partial\Delta|^2$$

□

请注意，虽然 (1) 给出了 $G(M)$ 的 Dehn 函数与等直径函数之间的等价关系，但定理 2.1 对 $G_\varepsilon(M)$ 的相应函数仅给出了上界。这种差异的一个原因是，定理 1.1 只给出了仿真的复杂度上界，而 (1) 中的界虽然要差得多，却是精确的。这个问题可以克服，但本文出于若干原因并未这样做。首先，构造达到该界的 S-机器会更加复杂。其次，需要构造一个明确的值序列 ε_k，使其收敛于 0，以确保能够达到下界。不过，最重要的是，上界中的非支配项 n^4 意味着，除非 $T(n) \succeq n^2$，否则这种等价关系不会以时间函数为依据。依据同样的推理可以看出，定理 1.1 对 (2) 所作的任何改进都将是极小的，而且主要障碍 $f(n) > n^4$ 仍然存在。

鉴于 [14]的一个主要目标是解决如何描述群的等周谱这一问题，也就是描述满足n^α 是某个有限表示群的 Dehn 函数的数 α 所构成的集合，因此这番讨论尤为重要。(2) 使作者得以对 $\alpha \geq 4$做到这一点，而棘手的情形 $\alpha \in (2, 4)$ 则悬而未决约二十年，直到 Ol'shanskii 在 2018 [6] 中对其作出刻画。尽管 Ol'shanskii 的论文大量采用了 S-机器的框架，但正如作者所指出的，该论文也需要不少新思想。因此，很自然会想知道，借助改进后的模拟，能否采用与 [14]中本质相同、甚至完全相同的构造来实现这一点。如前所述，主要障碍在于 (1) 中的 n^4 项；或许只需更精确地估算相同图表的面积，就能改进这一项。

接下来，在后续手稿中，Birget、Ol'shanskii、Rips 和 Sapir [1] 利用[14] 的仿真来处理由此自然引出的一个群论问题，并由此给出了著名 Higman 嵌入定理的一个类似结果 [4]，该结果将字问题的复杂度与其嵌入其中的有限表示群的 Dehn 函数联系起来。具体而言，[1] 的主定理（定理 1.1）指出：如果 G是有限生成的，且其字问题可由一台时间函数为 $\leq T(n)$、满足 $T(n)^4$为超可加的非确定性图灵机判定，那么就存在一个将 G 嵌入有限表示群 H 的嵌入，其等周函数为 $n^2T(n^2)^4$，并且 G 在 H中具有有界畸变。

The fo以下改进可直接由定理 1 .1:

定理 2.2。设 G 是一个有限生成群，其字问题可由一台时间函数为 $\leq T(n)$、满足 $T(n)^2$ 为超可加的非确定性图灵机求解。那么，对于任意$\varepsilon > 0$， G 都可以嵌入有限表示群 H_ε，且该群的 Dehn 函数上界为 $n^2T(n^2)^{2+\varepsilon}$，并且 G 在 H_ε中具有有界畸变。

此外， G 在 H_ε 中的 Dehn 函数至多为 $T(n)^{2+\varepsilon}$。

请注意，这里有限表示群中有限生成子群的 Dehn 函数这一术语，与 [14]中使用的术语一致。也就是说，给定有限表示群 H 及其有限表示 $\mathcal{P}$，以及其有限生成子群 $G = \langle A\rangle$， G 在 H 中的 Dehn 函数是函数$\delta_{G,\ H}$： $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$，定义如下：

$$\delta_{G,H}(n) = \max\{\mathrm{Area}_{\mathcal{P}}(w) \mid w \in (A \cup A^{-1})^*,\ w =_G 1,\ |w|_A \leq n\}$$

与有限表示群的 Dehn 函数一样，这一术语的合理性源于以下观察： G 在 H 中的 Dehn 函数的等价类，不随有限生成集 A 或有限表示 $\mathcal{P}$的改变而变化。

此外请注意，关于 G 中 H 的 Dehn 函数的陈述部分并未在 [1]中表述。不过，这样的陈述是其构造的直接推论，相当于 $T(n)^4$。

证明。在 [1],的定理 1.1 中，群 H被构造为 $H_N(\mathcal{S})$，其中 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(M)$是模拟图灵机 M 的 S-机器，该图灵机接受 G的语言。 $H_N(\mathcal{S})$的构造方式与上文引用的 [14] 中的 $G_N(\mathcal{S})$非常相似，但额外加入了一些关系以确保嵌入。其 Dehn 函数的上界在 [1] 的第6节中估计为$O(n^6) + O(T(O(n^2))^4) + O(n^2T(O(n^2))^4)$。这里，第二项估计来自圆盘的面积，第三项估计来自 G_b-胞腔的面积，第一项则估计来自所有其他胞腔的面积。

从给出的这些估计可以明显看出，圆盘和 G_b-胞腔的面积取决于机器 $\mathcal{S}$。事实上，它们源自该机器的面积复杂度。因此，以完全相同的方式构造 $H_\varepsilon = H_N(\mathcal{S}_\varepsilon)$，Dehn 函数的上界为 $O(n^6) + O(T(O(n^2))^{2+\varepsilon}) + O(n^2T(O(n^2))^{2+\varepsilon})$。由于 $T(n) \succeq n$，最后一项是主导项，因此给出了所需的界。

G属于 $H_N(\mathcal{S}_\varepsilon)$ 的 Dehn 函数至多为 $T(n)^{2+\varepsilon}$这一事实，源于在 G 中平凡的每个字都对应一个 G_b-胞腔，而该胞腔可以用一个至多含有 $O(T(O(n))^{2+\varepsilon})$ 个胞腔的图示填充（相比之下，在 H中需要 $O(T(O(n))^4)$ 个胞腔）。□

[1] 的嵌入标志着相较于 Higman嵌入定理的其他类似结果的一项重大改进，后者给出的界将是指数级的。因此， [1] 不可分割地联系了字问题可由 NP 求解的群类与具有多项式有界 Dehn 函数的有限表示群类。定理 2.2 随后对此作出了重大深化，将界改进到了在某些情况下准最优的程度。例如，如果 G 是一个字问题具有准线性复杂度的非双曲群（例如有限生成无限自由 Burnside 群），那么G 不可能以有界畸变嵌入双曲群中，因此等周间隙 [3] [11] 意味着，在任何有限表示群中， G 的 Dehn 函数至少是二次的。

作者相信，利用第二作者所发展出的技术，将自由 Burnside群嵌入一个具有二次 Dehn 函数的有限生成群中，可以进一步改进定理 2.2 [15]:

猜想 2.3. 设 G 是一个有限生成群，其字问题可由一台时间函数为 $\leq T(n)$、且 $T(n)^2$ 是超可加的非确定性图灵机判定。那么，对于任意 $\varepsilon > 0$， G 都可以嵌入一个有限表示群 H，使得其 Dehn 函数的上界为 $T(n)^{2+\varepsilon}$，并且 G 在 H中具有有界畸变。

猜想 2.3 的陈述将作为一个拟最优的一般上界，用于有限生成且字问题可判定的群的本质 Dehn 函数；本质 Dehn 函数是这一背景下产生的不变量。进一步的讨论留待该手稿。

3. S-machines and S-graphs

S-机有许多等价的表述。本文采用 [14], 所给出的表述，将其解释为群词的重写系统:

定义 3.1（S-机）。硬件 $\mathcal{H}$是一个有序对（Y， Q），满足： $Y = (Y_i)_{i\in\overline{N}}$是一个由（不一定互不相交的）有限集 Y_i 构成的 N 元组，而 $Q = (Q_i)_{i\in\overline{N+1}}$ 是一个由有限两两不相交集合 Q_i 构成的 $(N+1)$ 元组，且这些集合与 $\bigcup Y_i$也不相交。为方便记号，将 Y 扩展为包含$Y_0 = Y_{N+1} = \emptyset$。集合 $\bigcup Y_i$称为带字母集合， $\bigsqcup Q_i$称为 $\mathcal{H}$的状态字母集合。

在 $\mathcal{H}$ 上的可容许词语言记作 $L_\mathcal{H}$ （如果 $\mathcal{H}$ 的含义可从上下文中明确，则简记为 L），它是由形如 $L_\mathcal{H} = Q_1F(Y_1)Q_2 \dots Q_NF(Y_N)Q_{N+1}$的词组成的集合，其中 $F(Y_i)$ 是 $Y_i \sqcup Y_i^{-1}$ 上自由约化群字的集合。 $\mathcal{H}$ 的一个状态是 $\times_{i\in\overline{N+1}} Q_i$ 的一个元素。每个可容许词都关联着一个状态，只需从该词中删除所有带词即可得到。

对于 l、$r \in \overline{N+1}$，若 $l \le r$、$L^{l,r}_{\mathcal{H}}$ 是 $L_{\mathcal{H}}$ 中以 Q_l 的一个状态字母开头、以 Q_r 的一个状态字母结尾的词的子词集合。因此，若 $r > l+1$，则 $L^{l,r}_{\mathcal{H}} = Q_l F(Y_l) Q_{l+1} \dots F(Y_{r-1}) Q_r$。这个定义扩展到集合 $\left(L^{l,r}_{\mathcal{H}}\right)^+$，即 $L_{\mathcal{H}}$ 中以 $F(Y_{l-1})$ 的一个词开头、以 $F(Y_r)$ 的一个词结尾的词的子词集合，也就是说

$$\left(L^{l,r}_{\mathcal{H}}\right)^+ = F(Y_{l-1}) L^{l,r}_{\mathcal{H}} F(Y_r)$$

S-规则是一种定义在 $L_{\mathcal{H}}$ 上、形式为 $\tau = [U_1 \to V_1, \dots, U_M \to V_M]$ 的重写规则，满足：
(S1) 对每个 $i \in \overline{M}$，存在 $l(i)$ $r(i) \in \overline{N+1}$，使得 $U_i \in L^{l(i),r(i)}_{\mathcal{H}}$；
(S2) 对于 $i < j$，$r(i) < l(j)$；(S3) 对每个 $i \in \overline{M}$，$V_i \in \left(L^{l(i),r(i)}_{\mathcal{H}}\right)^+$。

给定上述 S-规则 τ，对于每个 $i \in \overline{M}$，称 S-规则 $[U_i \to V_i]$ 为 τ 的子规则。对于每个 i，令 $V_i = x_i U_i' y_i$，使得 $x_i \in F(Y_{l-1})$、$y_i \in F(Y_r)$ 且 $U_i' \in L^{l(i),r(i)}_{\mathcal{H}}$。那么，$\tau$ 的逆是由下式给出的 S-规则 τ^{-1}：

$$\tau^{-1} = \left[U_1' \to x_1^{-1} U_1 y_1^{-1}, \dots, U_M' \to x_M^{-1} U_M y_M^{-1}\right]$$

注意到 τ^{-1} 确实是一个 S-规则，并且求逆是在 $L_{\mathcal{H}}$上的 S-规则集合上的对合运算。

一个具有硬件 $\mathcal{H}$（或在 $\mathcal{H}$上）的 S-机器 $\mathcal{S}$ 是 $L_{\mathcal{H}}$ 上的一个重写系统，由一个对称的有限 S-规则集合组成，即 $\tau \in \mathcal{S}$ 当且仅当 $\tau^{-1} \in \mathcal{S}$。

如果每个 U_i 都是 w的子字，则称 S-规则 $\tau = [U_i \to V_i]_i$ 可应用于可容许词 $w \in L_{\mathcal{H}}$。否则，τ 不能应用于 w。

已知 τ 可应用于 w，将 τ 应用于 w，就是同时将 w 中的每个子字 U_i 替换为 V_i，然后对所得的字进行自由约化。注意以下事项：

- 将 τ应用于 w所得的字，记为 $w \cdot \tau$，是 $\mathcal{H}$上的一个可容许词。
- τ可应用于 w 当且仅当 τ^{-1} 可应用于 $w \cdot \tau$；此外，$(w \cdot \tau) \cdot \tau^{-1} = w$，这说明使用“逆”一词是合理的。
- 在将 S-规则应用于可容许词时，自由约化不被视为一个单独的步骤。

S-机器 $\mathcal{S}$的计算是一个序列 $\varepsilon = (w_0, \tau_1, w_1, \dots, \tau_n, w_n)$，满足 $n \ge 0$；其中，每个 w_i 都是 $\mathcal{H}$ 上的可容许词，每个 τ_i 都是 $\mathcal{S}$ 的 S- 规则，并且 $w_i = w_{i-1} \cdot \tau_i$ 对所有 $i \in \overline{n}$ 均成立。序列 $\rho = \rho_\varepsilon = (\tau_1, \dots, \tau_n)$称为 ε 的历史，并称其支持 ε。字w_0 称为 ε的起始词，w_n 称为其结束词；或者也可以说，ε 是一个介于 w_0 和 w_n之间的计算。数值 n 是计算（以及计算路径）的长度，记作 $n = |\varepsilon| = |\rho|$。$w_0$ 与 w_n 之间所有计算构成的集合记作 $\varepsilon(w_0, w_n)$。

对于固定的可容许词 w_0和 S 规则序列 $\rho = (\tau_1, \dots, \tau_n)$，至多存在一个由 ρ 支持且以 w_0开始的计算。若这样的计算存在，则记为$\varepsilon(w_0, \rho) = (w_0, \tau_1, w_1, \dots, \tau_n, w_n)$。为简便起见，使用记号 $w_n = w_0 \cdot \rho$ 来描述 $\varepsilon(w_0, \rho)$。此外，w_n 称为 $\varepsilon(w_0, \rho)$ 的结果，或称为将 ρ 应用于 w_0 的结果。

现在引入一种替代性构造，以生成称为 S-图的对象。这种构造与 S-机器的构造非常相似，后者将在定理 3.4 中详述。

定义 3.2（S-图）。S-图硬件 $\mathcal{H}$（或者，不严格地使用术语时，若上下文清楚，也简称硬件）是一个元组 $(\mathcal{I}, \mathcal{A})$，其中 $\mathcal{I}$ 是一个有限指标集，且 $\mathcal{A} =$

$(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ 是一个由（不一定互不相交的）有限字母表组成的 $\mathcal{I}$元组。值得注意的是，在这种设定下， $\mathcal{A}$ 的作用与 S-机器设定下 Y 的作用相似。

设 $L_i = F(A_i)$ 且 $L_{\mathcal{H}} = \times_{i\in\mathcal{I}} L_i$。通常，为避免产生歧义， $L_{\mathcal{H}}$ 中的下标 $\mathcal{H}$ 会省略。因此， L 的元素称为 L-词；不过，值得明确指出的是， L-词 $w \in L$ 并不是一个词，而是由词组成的 $\mathcal{I}$元组 $w_i \in L_i$，即 $w = (w_i)_{i\in\mathcal{I}}$。

硬件 $\mathcal{H}$ 上的变换 t 是一个函数 $t\colon \mathcal{I} \times \{l, r\} \to \bigcup L_i$，满足对所有 $i \in \mathcal{I}$， $t(i, l)$ $t(i, r)$ $\in L_i$。为简便起见， t 的值也记作 $t(i, l) = t_i^l$ 和 $t(i, r) = t_i^r$。为了体现预期用途，可以将 t 理解为一个函数 $t\colon L \to L$，满足对于 $w = (w_1, \ldots, w_N) \in L$,

$$t(w) = \left(t_i^l w_i t_i^r\right)_{i\in\mathcal{I}},$$

其中 $t^l{}_i w_i t_i^r$ 是将相应的词串接后进行自由约化所得 .

硬件 $\mathcal{H}$ 上的守卫 g 是一个函数 $g\colon \mathcal{I} \to \{\mathrm{NA}\} \cup (\bigcup L_i)$，满足 $g(i) \in \{\mathrm{NA}\} \cup L_i$。正如下文的定义将阐明的那样，值 NA 是一个占位符，表示该守卫在相应索引处“无值”。

变换 t 与硬件 $\mathcal{H}$ 上的守卫 g 组成的有序对 (t, g) 称为作用在 $\mathcal{H}$ 上的动作。 $\mathcal{H}$ 上所有可能动作的集合记作 $\mathrm{ACT}_{\mathcal{H}}$。

给定一个动作 n (t, g) 作用于 $\mathcal{H}$，其逆作用 $(t, g)^{-1} = (t', g')$ 作用于 $\mathcal{H}$，定义如下 :

$$t'(i, l) = \left(t(i, l)\right)^{-1}$$
$$t'(i, r) = \left(t(i, r)\right)^{-1}$$
$$g'(i) = \begin{cases} \mathrm{NA} & \text{if } g(i) = \mathrm{NA}, \\ t_i^l \cdot g(i) \cdot t_i^r & \text{otherwise.} \end{cases}$$

设 $\mathcal{G} = (S, E)$ 是一个有限有向图，可能包含环或重边。假设$\mathcal{G}$ 配备了一个标记函数 Lab: $E \to \mathrm{ACT}_{\mathcal{H}}$，使得每条边都标记有一个 $\mathcal{H}$上的动作。因此，每条边 $e \in E$都可以表示为四元组 (s_1, s_2, t, g)，其中$s_1 = T(e) \in S$是 e的尾， $s_2 = H(e) \in S$是 e的头，而 (t, g) 是动作 $\mathrm{Lab}(e)$。最后，假设 $\mathcal{G}$是对称的，即对于每条 $e = (s_1, s_2, t, g) \in E$，都存在逆边 $e' = (s_2, s_1, t', g') \in E$，使得 $(t', g') = (t, g)^{-1}$。那么， $\mathcal{G}$称为 $\mathcal{H}$上的 S-图。

给定一个 S-图 $\mathcal{G} = (S, E)$，将 S 中的元素称为状态（除了称为顶点之外），以强调 S-图是一种计算模型。定理 3.4 中建立的对应关系将阐明，这一约定的动机在于， S 是 S-机器（或图灵机）状态的自然对应物。

将动作解释为由称为片段的组成部分所定义的内容会很方便。具体而言，给定一个硬件 $\mathcal{H} = (\mathcal{I}, \mathcal{A})$，对每个 $i \in \mathcal{I}$，将左变换片段的集合定义为 $(\mathrm{FRAG}_{\mathcal{H}})_i^{lt} = \{[\mathrm{i} \to w\mathrm{i}] \mid w \in L_i\}$，将右变换片段的集合定义为 $(\mathrm{FRAG}_{\mathcal{H}})_i^{rt} = \{[\mathrm{i} \to \mathrm{i}w] \mid w \in L_i\}$，并将守卫片段的集合定义为 $(\mathrm{FRAG}_{\mathcal{H}})_i^{g} = \{[\mathrm{i} = w] \mid w \in L_i\}$，其中所有集合两两不相交。更一般的术语“片段”用于描述 $\bigsqcup_{i\in\mathcal{I}} \left((\mathrm{FRAG}_{\mathcal{H}})_i^{lt} \sqcup (\mathrm{FRAG}_{\mathcal{H}})_i^{rt} \sqcup (\mathrm{FRAG}_{\mathcal{H}})_i^{g}\right)$中的任意元素。为简单起见，允许用记号 $[\mathrm{i} \to w_1\mathrm{i}w_2]$ 表示片段对 $[\mathrm{i} \to w_1\mathrm{i}]$ $\in (\mathrm{FRAG}_{\mathcal{H}})_i^{lt}$和 $[\mathrm{i} \to \mathrm{i}w_2] \in (\mathrm{FRAG}_{\mathcal{H}})_i^{rt}$。

请注意，对于固定的 $i \in \mathcal{I}$，集合 $(\mathrm{FRAG}_{\mathcal{H}})_i^{lt}$、$(\mathrm{FRAG}_{\mathcal{H}})_i^{rt}$ 和 $(\mathrm{FRAG}_{\mathcal{H}})_i^{g}$ 可分别视为 L_i 的三个（互不相交的）副本，并用某种特定记法区分各副本中的元素。因此，片段集合对应于满足 $i \in \mathcal{I}$ 、 $w \in L_i$ 和 $p \in \{lt, rt, g\}$ 的三元组 (i, w, p) 集合。

对于 $i \in \mathcal{I}$，$(\mathrm{FRAG}_{\mathcal{H}})_i^{lt} \sqcup (\mathrm{FRAG}_{\mathcal{H}})_i^{rt} \sqcup (\mathrm{FRAG}_{\mathcal{H}})_i^{g}$ 的任意元素都称为提及 i 的片段。片段 $[\mathrm{i} \to \mathrm{i}1] \in (\mathrm{FRAG}_{\mathcal{H}})_i^{rt}$ 和 $[\mathrm{i} \to 1\mathrm{i}] \in (\mathrm{FRAG}_{\mathcal{H}})_i^{lt}$ 称为平凡片段，而所有其他提及 i 的片段都称为非平凡片段；注意，按照群论记法，这里

用符号 **1**（而不是 $\emptyset$）表示平凡词。 $\mathcal{H}$ 上所有片段的集合记为 $\mathsf{FRAG}_{\mathcal{H}}$。

若对每一对 $(i,p) \in \mathcal{I} \times \{lt, rt, g\}$，都有 $|F \cap (\mathsf{FRAG}_{\mathcal{H}})_i^p| \leq 1$，则称片段集 $F \subseteq \mathsf{FRAG}_{\mathcal{H}}$ 为有效片段集。此外，若两个有效片段集 F' 和 F'' 仅在平凡片段上有所不同，即对于任意片段 $f \in F' \Delta F''$，都存在 $i \in \mathcal{I}$，使得要么 $f = [\mathbf{i} \to \mathbf{i}1]$，要么 $f = [\mathbf{i} \to 1\mathbf{i}]$，则称它们等价。注意，这一术语定义了有效片段集上的等价关系。

硬件 $\mathcal{H}$ 上的动作 $A = (t, g)$，可用相应的有效片段集 $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(A) \subseteq \mathsf{FRAG}_{\mathcal{H}}$ 来表示，该集合通过以下方式构造：

若 $t(i,l) = w$，则
- $[\mathbf{i} \to w\mathbf{i}] \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}(A)$，
- $[\mathbf{i} \to \mathbf{i}w] \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}(A)$ 当且仅当 $t(i,r) = w$，并且
- $[\mathbf{i} = w] \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}(A)$ 当且仅当 $g(i) = w$。

注意，$\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(A)$ 确实是一个有效片段集。此外，根据此构造，如果 $g(i) = \mathrm{NA}$，那么 $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(A) \cap (\mathsf{FRAG}_{\mathcal{H}})_i^g = \emptyset$。

反过来，有效片段集 $F \subseteq \mathsf{FRAG}_{\mathcal{H}}$ 可与动作 $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}(F) = (t, g)$ 对应，该动作定义在 $\mathcal{H}$ 上，如下所示：

- $t(i,l) = \begin{cases} w & \text{if } [\mathbf{i} \to w\mathbf{i}] \in F \cap (\mathsf{FRAG}_{\mathcal{H}})_i^{lt} \\ 1 & \text{if } F \cap (\mathsf{FRAG}_{\mathcal{H}})_i^{lt} = \emptyset \end{cases}$
- $t(i,r) = \begin{cases} w & \text{if } [\mathbf{i} \to \mathbf{i}w] \in F \cap (\mathsf{FRAG}_{\mathcal{H}})_i^{rt} \\ 1 & \text{if } F \cap (\mathsf{FRAG}_{\mathcal{H}})_i^{rt} = \emptyset \end{cases}$
- $g(i) = \begin{cases} w & \text{if } [\mathbf{i} = w] \in F \cap (\mathsf{FRAG}_{\mathcal{H}})_i^{g} \\ \mathrm{NA} & \text{if } F \cap (\mathsf{FRAG}_{\mathcal{H}})_i^{g} = \emptyset \end{cases}$

容易检查，对于任意一对 F' 和 F'' 属于 $\mathsf{FRAG}_{\mathcal{H}}$ 的等价有效子集，都有 $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}(F') = \mathcal{A}_{\mathcal{H}}(F'')$。此外，如果 A 是作用于 $\mathcal{H}$ 上的一个动作，且 F 是 $\mathsf{FRAG}_{\mathcal{H}}$ 的一个有效子集，那么 $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(A)) = A$ 和 $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}(F))$ 等价于 F。

鉴于这种对应关系，以下将交替使用动作和有效片段集这两个说法。因此，对于硬件 $\mathcal{H}$ 上的任意 S-图 $\mathcal{G}$，如果 e 是 $\mathcal{G}$ 的一条边，且其标记为动作 act_e，那么通常会用一个与 $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(\mathsf{act}_e)$ 等价的有效片段集 F 来表示该标记。这样可以简化 S-图的表述，因为无需丢失任何信息，就能省略部分动作数据。注意，在这种情况下，$F \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{H}}(\mathsf{act}_e)$；因此，为简便起见，使用记号 $f \in e$ 代替 $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}(\mathsf{act}_e)$。

因此，有效片段集 $F = \{[\mathbf{1} \to a\mathbf{1}b], [\mathbf{1} = a], [\mathbf{2} \to \mathbf{2}c]\}$ 可与一个动作对应，其变换 t 满足 $t(1,l) = a$, $t(1,r) = b$, $t(2,l) = 1$，以及 $t(2,r) = c$；其守卫 g 满足 $g(1) = a$ 和 $g(2) = \mathrm{NA}$。然而，为了恰当地表述该动作，还必须描述定义此动作所依据的硬件 $\mathcal{H} = (\mathcal{I}, \mathcal{A})$。有人可能会推断，对于这一特定情况，一个自然的候选是 $\mathcal{I} = \{1, 2\}$, $A_1 = \{a, b\}$，以及 $A_2 = \{c\}$。不过，也有可能是 $\mathcal{I} = \{1, 2, e\}$, $A_1 = A_2 = \{a, b, c\}$，以及 $A_e = \{\delta\}$。

为避免这种歧义，片段和动作的定义略作扩展。具体而言，固定可数集 $\mathcal{I}^*$ 和 $\mathcal{A}^*$，分别表示所有可能指标和所有可能字母，并令 $L^* = F(\mathcal{A}^*)$。此后，对于硬件 $\mathcal{H} = (\mathcal{I}, \mathcal{A})$，约定 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{I}^*$ 的一个（有限）子集，而 $\mathcal{A}$ 是一个由 $\mathcal{A}^*$ 的（有限）子集构成的 $\mathcal{I}$-元组。

类似地，片段定义为满足 $i \in \mathcal{I}^*$、$w \in L^*$ 和 $p \in \{lt, rt, g\}$ 的三元组 (i, w, p)。令 FRAG 为所有可能片段构成的集合，FRAG_i 为由所有具有固定 $i \in \mathcal{I}^*$ 的片段组成的子集，FRAG_i^p 为 FRAG_i 中具有固定 $p \in \{lt, rt, g\}$ 的子集。若有限片段集 F 满足：对所有 $i \in I^*$ 和所有 $p \in \{lt, rt, g\}$，均有 $|F \cap \mathsf{FRAG}_i^p| \leq 1$，则称其为有效片段集。如上所述，

若片段 (i,w,p) 满足 $w=1$ 和 $p\in\{lt,rt\}$，则称其为平凡片段；若两个有效片段集仅在平凡片段上不同，则称它们等价。

设 $\mathcal{H}^*$ 为所有可能的 S-图硬件的集合，即当且仅当 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{I}^*$ 的有限子集，且 $\mathcal{A}=(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$，使得对于所有 $i\in\mathcal{I}$，A_i 都是 $\mathcal{A}^*$的有限子集时，$\mathcal{I},\mathcal{A}\in\mathcal{H}^*$。

在 $\mathcal{H}^*$ 上定义关系 $\leq$如下：对于 $\mathcal{H}_j=(\mathcal{I}_j,\mathcal{A}_j)$，$\mathcal{H}_1\leq\mathcal{H}_2$ 当且仅当 $\mathcal{I}_1\subseteq\mathcal{I}_2$ 且对于所有 $i\in\mathcal{I}_1$，$\mathcal{A}_1(i)\subseteq\mathcal{A}_2(i)$。因此，关系 $\leq$ 是 $\mathcal{H}^*$上的偏序，事实上还是完备交半格。

此外，若硬件 $\mathcal{H}=(\mathcal{I},\mathcal{A})\in\mathcal{H}^*$ 满足对于所有 $(i,w,p)\in F$，$i\in\mathcal{I}$ 且 $w\in F(A_i)$，则称其与有效片段集 F 兼容。因此，对于任意有效片段集 F，都存在唯一的与 F兼容的最小硬件 $\mathcal{H}_F$。特别地，硬件 $\mathcal{H}$ 与 F 兼容，当且仅当 $\mathcal{H}_F\leq\mathcal{H}$。

有效片段集 F可以解释为在 $\mathcal{H}_F$ 上的片段集（因而也是一个动作）。因此，回到动机示例，对于 $F=\{[\mathbf{1}\to a\mathbf{1}b],[\mathbf{1}=a],[\mathbf{2}\to\mathbf{2}c]\}$，隐含的硬件确实是自然的候选项 $\mathcal{H}_F=(\mathcal{I},\mathcal{A})$，其中 $\mathcal{I}=\{1,2\}$、$A_1=\{a,b\}$，且 $A_2=\{c\}$。

然而，在某些情境中，有效片段集 F 用于定义作用于硬件 $\mathcal{H}$ 上的动作 act，而该硬件不一定是 $\mathcal{H}_F$。此时，$\mathcal{H}_F\leq\mathcal{H}$，而 act 被解释为 $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}(F)$。

请注意，若 F' 和 F'' 是两个等价的有效片段集，则通常并不能得出 $\mathcal{H}_{F'}=\mathcal{H}_{F''}$。事实上，$\mathcal{H}_{F'}$和 $\mathcal{H}_{F''}$在 $\leq$下可能不可比较。然而，对于任意两个有效片段集 F'和 F''，都存在唯一的最小硬件 $\mathcal{H}$，使得 $\mathcal{H}_{F'}\leq\mathcal{H}$和 $\mathcal{H}_{F''}\leq\mathcal{H}$，从而 $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}(F')=\mathcal{A}_{\mathcal{H}}(F'')$。

定义 3.3（S-图的计算）。设 (t,g) 是硬件 $\mathcal{H}=(\mathcal{I},\mathcal{A})$ 上的一个动作。如果对于所有 $i\in\mathcal{I}$，$g(i)=\mathrm{NA}$ 或 $g(i)=w_i$，则守卫 g 接受字 $w=(w_i)_{i\in\mathcal{I}}\in L_{\mathcal{H}}$。

给定硬件 $\mathcal{H}$ 上的 S-图 $\mathcal{G}$，称一对 $(w,s)\in L_{\mathcal{H}}\times S_{\mathcal{G}}$ 为 $\mathcal{G}$ 的一个配置。若 $s_1=s$ 且 g 接受 w，则称 $\mathcal{G}$ 的一条边 $e=(s_1,s_2,t,g)$ 适用于配置 (w,s)。在这种情况下，将 e 应用于 (w,s) 的结果是配置 $e(w,s)=(t(w)\ s_2)$（其中，如上所述，w 通过将 t 解释为映射 $L_{\mathcal{H}}\to L_{\mathcal{H}}$ 来定义）。注意，根据应用和逆作用的定义，当且仅当逆边 e^{-1} 适用于应用该边后得到的配置时，边 e 才适用于配置 (w,s)；此外，$e^{-1}(e(w,s))=(w,s)$。

S-图 $\mathcal{G}$ 的一次计算是一个序列

$$\varepsilon=\big((w_0,s_0),e_1,(w_1,s_1),\ldots,e_n,(w_n,s_n)\big)$$

其中 $n\geq0$，并且对于所有 $i\in\overline{n}$，e_i 都是 $\mathcal{G}$ 中一条适用于 $\mathcal{G}$的配置（w_{i-1}，s_{i-1}）的边，满足 e_i（w_{i-1}，s_{i-1}）$=$（w_i，s_i）。

简单来说，一次计算从一个 L-字 w 和一个状态 $s\in S_{\mathcal{G}}$开始，沿着图的边前进，并相应地改变字和状态。

注意，如果 $n=0$，ε 就只是单个配置（w_0，s_0）。此外，根据这一构造，对于每个 $i\in\overline{n}$，$s_{i-1}=T$（e_i）和 $s_i=H$（e_i）。因此，计算 ε 自然对应于 $\mathcal{G}$中的一条路径 $\rho_\varepsilon=e_1$，……，e_n，称为 ε的计算路径。在这种情况下，ρ_ε 被称为支持ε。

配置（w_0，s_0）称为起始配置，而（w_n，s_n）称为 ε的结束配置；或者，ε 称为在（w_0，s_0）和（w_n，s_n）之间的一次计算。数值 n称为计算 ε（以及计算路径 ρ_ε）的长度，记作 $n=|\varepsilon|=|\rho_\varepsilon|$。记号 ε（w_0，s_0，w_n，s_n）用于表示所有在（w_0，s_0）和（w_n，s_n）之间的计算构成的集合。

请注意，对于任意配置 (w_0,s_0) 和任意路径 $\rho=e_1,\ldots,e_n$ in $\mathcal{G}$，至多存在一个由 ρ 支持且起始配置为 (w_0,s_0) 的计算 ε。若这样的计算存在，则其形式为

$$\varepsilon=\big((w_0,s_0),e_1,(w_1,s_1),\ldots,e_n,(w_n,s_n)\big)$$

其中，对每个 $i \in \overline{n}$，$(w_i, s_i) = e_i \dots e_1(w_0, s_0)$。在这种情况下，$\varepsilon$ 的结束配置 (w_n, s_n) 称为 ε 的结果；或者说，(w_n, s_n) 称为将 ρ 应用于 (w_0, s_0) 的结果，记作 $(w_n, s_n) = \rho(w_0, s_0)$，而不是 $e_n \dots e_1(w_0, s_0)$。

若两个 S-图 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}'$ 仅通过重命名状态和重新索引就能相互转换，则称它们同构，记作 $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}'$。换言之，若这两个图的状态之间以及相应硬件的指标集之间存在双射，使它们变得完全相同，则称这两个图同构。

若两个 S-机器 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$ 只需重命名 $\mathcal{S}$硬件中的状态集合就能相互转换，则称它们同构，记作 $\mathcal{S} \cong \mathcal{S}'$。换言之，若 $\mathcal{S}$ 是一个硬件为 $\mathcal{H} = (Y, Q)$、具有 $Y = (Y_i)_{i \in \overline{N}}$ 和 $Q = (Q_i)_{i \in \overline{N+1}}$ 的 S-机器，而 $\mathcal{S}'$ 是一个硬件为 $\mathcal{H}' = (Y', Q')$、具有 $Y' = (Y'_i)_{i \in \overline{N'}}$ 和 $Q' = (Q'_i)_{i \in \overline{N'+1}}$的 S-机器，则当 $N = N'$ 且 Q_i 与 Q'_i 之间存在双射，使 $\mathcal{S}$和 $\mathcal{S}'$ 完全相同时，这两个机器同构。

与 S-图之间的同构不同，S-机器之间的同构并无用处。定理 3.4 后面的示例将进一步阐明这一点。此外，虽然允许重命名字母表 A_i 中的字母（或部分 Y_i 中的带字母）似乎合乎自然，但这种操作不被视为保持同构。这是因为这些字母通常具有固定作用，因此允许这样的重命名只会增加一层卷积，却看不出有什么好处。

设 $\mathcal{H} = (Y, Q)$ 是一个 S-机器硬件，带有 $Y = (Y_i)_{i \in \overline{N}}$ 和 $Q = (Q_i)_{i \in \overline{N+1}}$。通过设定 $\mathcal{I} = \overline{N}$ 和 $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in \overline{N}}$，定义相应的 S-图硬件 $\mathcal{G}(\mathcal{H}) = (\mathcal{I}, \mathcal{A})$，其中$A_i = Y_i$对所有 $i \in \overline{N}$ 均成立。此外，定义集合 $S_{\mathcal{H}}$为 $S_{\mathcal{H}} = \times_{i \in \overline{N+1}} Q_i$。

接着，定义双射 let $\mu_{\mathcal{H}} \colon L_{\mathcal{H}} \to L_{\mathcal{G}(\mathcal{H})} \times S_{\mathcal{H}}$ by

$$\mu_{\mathcal{H}}(q_1 w_1 q_2 \dots w_N q_{N+1}) = \big((w_i)_{i \in \overline{N}}, (q_i)_{i \in \overline{N+1}}\big)$$

反过来，对于具有 $|\mathcal{I}| = N$ 的 S-图硬件 $\mathcal{H} = (\mathcal{I}, \mathcal{A})$，固定一个双射 $\eta \colon \mathcal{I} \to \overline{N}$。令 $\mathcal{G} = (S_{\mathcal{G}}, E_{\mathcal{G}})$ 为 $\mathcal{H}$ 上的一个 S-图。接着，通过令 $Y = (Y_i)_{i \in \overline{N}}$ and $Q = (Q_i)_{i \in \overline{N+1}}$，定义 S-机器硬件 $\mathcal{S}_{\mathcal{G},\eta}(\mathcal{H}) = (Y, Q)$，其中 $Y_i = A_{\eta^{-1}(i)}$ 对所有 $i \in \overline{N}$, $Q_1 = S_{\mathcal{G}}$ 均成立，并且当 $j \in 2, N+1$ 时，Q_j 是单元素集 $\{q_j^*\}$。

接着，定义双射 $\mu_{\mathcal{G},\eta} \colon L_{\mathcal{S}_{\mathcal{G},\eta}(\mathcal{H})} \to L_{\mathcal{H}} \times S_{\mathcal{G}}$，其定义如下：

$$\mu_{\mathcal{G},\eta}(q_1 w_1 q_2 \dots w_N q_{N+1}) = \big((w_{\eta(i)})_{i \in \mathcal{I}}, q_1\big)$$

下面的定理 3.4 建立了 S-机器与 S-图之间的对应关系。定理的表述相当技术化，或许结合紧随其后的例子会更容易理解。

定理 3.4。

(a)（从 S-机器到 S-图）设 $\mathcal{S}$ 是基于硬件 $\mathcal{H}$的 S-机器。那么存在一个基于硬件 $\mathcal{G}(\mathcal{H})$的 S-图 $\mathcal{G}(\mathcal{S}) = (S_{\mathcal{H}}, E)$，使得 $E = \bigsqcup_{\tau \in \mathcal{S}} E_\tau$，并且它在以下意义上“模拟” $\mathcal{S}$：

(i) 对任意 $\mathcal{S}$的计算 $\varepsilon = (w_0, \tau_1, w_1, \dots, \tau_n, w_n)$，存在唯一的计算 $\mathcal{G}(\mathcal{S})$，使得对于所有 $i \in \overline{n}$，$e_i \in E_{\tau_i}$

$$\varphi_{\mathcal{G}(\mathcal{S})}(\varepsilon) = \big(\mu_{\mathcal{H}}(w_0), e_1, \mu_{\mathcal{H}}(w_1), \dots, e_n, \mu_{\mathcal{H}}(w_n)\big)$$

(ii) 对于 $\mathcal{G}(\mathcal{S})$的任意计算 $\delta = \big((w_0, s_0)\ e_1, (w_1, s_1) \dots, e_n, (w_n, s_n)\big)$，存在一个计算

$$\varphi_{\mathcal{S}}(\delta) = \big(\mu_{\mathcal{H}}^{-1}(w_0, s_0), \tau_1, \mu_{\mathcal{H}}^{-1}(w_1, s_1), \dots, \tau_n, \mu_{\mathcal{H}}^{-1}(w_n, s_n)\big)$$

其中 τ_i 是满足 $e_i \in E_{\tau_i}$ 的 $\mathcal{S}$ 的（唯一） S-规则。

(b)（从 S-图到 S-机）设 $\mathcal{G}=(S_{\mathcal{G}},E_{\mathcal{G}})$ 是定义在硬件 $\mathcal{H}=(\mathcal{I},\mathcal{A})$ 上的 S-图，且设 $\eta:\mathcal{I}\to\overline{N}$ 是一个双射。那么，存在定义在硬件$\mathcal{S}_{\mathcal{G},\ \eta}(\mathcal{H})$ 上的 S-机 $\mathcal{S}(\mathcal{G},\eta)$，它按以下意义“模拟” $\mathcal{G}$：

(i) $\mathcal{S}(\mathcal{G},\eta)$ 的 S规则与边 $E_{\mathcal{G}}$ 之间存在双射 ϕ

(ii) 对于 $\mathcal{S}(\mathcal{G},\eta)$ 的任意计算 $\varepsilon=(w_0,\tau_1,w_1,\ldots,\tau_n,w_n)$，存在一个计算

$$\psi_{\mathcal{G},\eta}(\varepsilon)=\big(\mu_{\mathcal{G},\eta}(w_0),\phi(\tau_1),\mu_{\mathcal{G},\eta}(w_1),\ldots,\phi(\tau_n),\mu_{\mathcal{G},\eta}(w_n)\big)$$

of $\mathcal{G}$.

(iii) 对于 $\mathcal{G}$ 的任意计算 $\delta=\big((w_0,s_0)\ e_1,(w_1,s_1)\ldots,e_n,(w_n,s_n)\big)$，存在一个计算

$$\psi_{\mathcal{S}(\mathcal{G},\eta)}(\delta)=\big(\mu^{-1}_{\mathcal{G},\eta}(w_0,s_0),\tau_1,\mu^{-1}_{\mathcal{G},\eta}(w_1,s_1),\ldots,\tau_n,\mu^{-1}_{\mathcal{G},\eta}(w_n,s_n)\big)$$

其中，对于所有 i，$\tau_i=\phi^{-1}(e_i)$。

(c)（部分对偶性）设 $\mathcal{G}'$ 是硬件 $\mathcal{H}=(\mathcal{I},\mathcal{A})$ 上的一个 S-图。那么，对于任意枚举 $\eta\colon\mathcal{I}\to\overline{N}$，$\mathcal{G}(\mathcal{S}(\mathcal{G}',\eta))\cong\mathcal{G}'$。

证明。(a) 设 $\tau=[U_t\to v_t^{l_t-1}V_tv_t^{r_t}]_{t\in\overline{M}}\in\mathcal{S}$，其中对每个 $t\in\overline{M}$，

$$U_t=q_t^{l_t}u_t^{l_t}q_t^{l_t+1}\ldots u_t^{r_t-1}q_t^{r_t},$$
$$V_t=p_t^{l_t}v_t^{l_t}p_t^{l_t+1}\ldots v_t^{r_t-1}p_t^{r_t},$$

使得 $t\in\overline{M}$，$q_t^j,p_t^j\in Q_j$，且 $u_t^j,v_t^j\in F(Y_j)$。令 $I_\tau=\bigsqcup_{i\in\overline{M}}l_t,r_t\subseteq\overline{N+1}$（注意，不相交性由条件 (S2) 得出），并令 $J_\tau=\overline{N+1}-I_\tau$。

注意，对任意 $i\in I_\tau$，存在唯一的 $t(i)\in\overline{M}$，使得 $i\in l_{t(i)},r_{t(i)}$；为简便起见，分别将对应的 $q^i_{t(i)}$ 和 $p^i_{t(i)}$ 记为 q^i_* 和 p^i_*。

定义有效片段集 $F_\tau\subseteq\mathrm{FRAG}^{\mathcal{G}(\mathcal{H})}$ 如下

$$F^{lt}_\tau=\big\{[\mathbf{i}\to(v_t^i)(u_t^i)^{-1}\mathbf{i}]\ \big|\ t\in\overline{M},i\in\overline{l_t,r_t-1}\big\}\sqcup\big\{[\mathbf{r_t}\to v_t^{r_t}\mathbf{r_t}]\ \big|\ t\in\overline{M}\big\}$$
$$F^{rt}_\tau=\big\{[(\mathbf{l_t}-\mathbf{1})\to(\mathbf{l_t}-\mathbf{1})v_t^{l_t-1}]\ \big|\ t\in\overline{M}\big\}$$
$$F^{g}_\tau=\big\{[\mathbf{i}=u_t^i]\ \big|\ t\in\overline{M},i\in\overline{l_t,r_t-1}\big\}$$

然后，令 $(t_\tau,g_\tau)=\mathcal{A}(F_\tau)\in\mathrm{ACT}^{\mathcal{G}(\mathcal{H})}$。

令 $\Theta_\tau=\times_{j\in J_\tau}Q_j$、$\sigma$ 和 ρ 为 I_τ-元组 $\sigma=(q^i_*)_{\ i\in I_\tau}$ 和 $\rho=(p^i_*)_{\ i\in I_\tau}$。那么，对每个 $\theta\in\Theta_\tau$，定义四元组 $e_{\tau,\theta}=\big(\theta\sqcup\sigma,\theta\sqcup\rho,t_\tau,g_\tau\big)$。

最后，定义 E_τ 为四元组 $\{e_{\tau,\theta}\mid\theta\in\Theta_\tau\}$ 的集合，并定义标记有向图 $\mathcal{G}(\mathcal{S})=(S_{\mathcal{H}},E)$，其具有 $E=\bigsqcup_{\tau\in\mathcal{S}}E_\tau$。

令 $e=(s_1,s_2,t_\tau,g_\tau)\in E_\tau$，其中 $\tau\in\mathcal{S}$ 如上所述。由 S-机器的对称性，$\tau^{-1}\in\mathcal{S}$，其中 $\tau^{-1}=[V_t\to(v_t^{l_t-1})^{-1}U_t(v_t^{r_t})^{-1}]_{t\in\overline{M}}$。此外，固定 $\theta\in\Theta_\tau$ 使得 $e=e_{\tau,\theta}$，从而 $s_1=\theta\sqcup\sigma$ 和 $s_2\sqcup\rho$。那么，存在一条边 $e'=e_{\tau^{-1},\theta}\in E$，使得

$$e'=(\theta\sqcup\rho,\theta\sqcup\sigma,t_{\tau^{-1}},g_{\tau^{-1}})=(s_2,s_1,t_{\tau^{-1}},g_{\tau^{-1}})$$

其中 $(t_{\tau^{-1}},g_{\tau^{-1}})=\mathcal{A}(F_{\tau^{-1}})$。

根据构造，如果对于 $i\in\overline{N}$，$g_\tau(i)\neq\mathrm{NA}$，那么存在某个 $t\in\overline{M}$，使得 $g_\tau(i)=u_t^i$，且 $i\in l_t,r_t-\overline{1}$。但此时 $[\mathbf{i}=v_t^i]\in F^g_{\tau^{-1}}$，因此 $g_{\tau^{-1}}(i)=v_t^i=t_\tau(i,l)u_t^it_\tau(i,r)$。类似地，由构造可知，对于所有 $i\in\overline{N}$ 和 $p\in\{l,r\}$，$t_{\tau^{-1}}(i,p)=t_\tau(i,p)^{-1}$。

因此，$(t_{\tau^{-1}},g_{\tau^{-1}})=(t_\tau,g_\tau)^{-1}$，于是 $e'=e^{-1}$。由此，$\mathcal{G}$ 确实是一个 S-图。

$\mathcal{G}$ 模拟 $\mathcal{S}$ 直接由该构造得出。

(b) 对于任意一条边 $e=(s_1,s_2,t,g)\in E_{\mathcal{G}}$，定义相对于 η 的极大守卫区间（简称 mgi）为一个有序对 $(l,r)\in(\overline{N+1})^2$，满足 $l\le r$ 且 l；r 是 $\overline{N+1}$ 的一个极大子集，满足对于所有 $i\in l,r-1$，$g(\eta^{-1}(i))\neq \mathrm{NA}$。然后，令 $\mathrm{MGI}\eta(e)=\{(l_i,r_i)\}_{i\in\overline{M}}$ 为按 l_i 递增顺序列举的所有这些区间构成的集合。

在此设定下，注意，根据构造，对于所有 $i\in\overline{M-1}$，$r_i<l_{i+1}$。事实上，由于极大守卫区间可以是形如 (n,n) 的一对，对于任意 $i\in\overline{N+1}$，存在一个 $j\in\overline{M}$，使得 $i\in l_j,r_j$；因此，对于 $i\in\overline{M-1}$，$r_i+1=l_{i+1}$。

现在，定义 S-规则 $\tau_e=[U_i\to(t^r_{l_i-1})V_i(t^l_{r_i})]_{i\in\overline{M}}$，其中

$$U_i=\gamma_{l_i}\ g_{l_i}\ \gamma_{l_i+1}\ \cdots\ g_{r_i-1}\ \gamma_{r_i},$$
$$V_i=\gamma'_{l_i}\ t^l_{l_i}\ g_{l_i}\ t^r_{l_i}\ \gamma'_{l_i+1}\ t^l_{l_i+1}\ g_{l_i+1}\ \cdots\ g_{r_i-1}\ t^r_{r_i-1}\ \gamma'_{r_i},$$

使得 $\gamma_1=s_1$, $\gamma'_1=s_2$, $\gamma_j=\gamma'_j=q^*_j$ 对于 $j\in 2,\overline{N+1,g_j}=g(\eta^{-1}(j))$，$t^l_j=t(\eta^{-1}(j)\ l)$，以及 $t^r_j=t(\eta^{-1}(j)\ r)$ 对于 $j\in\overline{N}$。

然后令 $\mathcal{S}=\{\tau_e\mid e\in E_{\mathcal{G}}\}$。显然，这建立了一个双射 $\phi\colon\ \mathcal{S}\to E_{\mathcal{G}}$，其定义为 $\phi(\tau_e)=e$。令 $e^{-1}=(s_2,s_1,t',g')$。由于 $g(i)=\mathrm{NA}$ 当且仅当 $g'(i)=\mathrm{NA}$，因此立即可得 $\mathrm{MGI}\eta(e^{-1})=\mathrm{MGI}\eta(e)$。此外，对于所有 $i\in\overline{N}$ 和 $p\in\{l,r\}$，都有 $t'(i,p)=t(i,p)^{-1}$。因此，根据构造，$\tau_e^{-1}=\left[V_i\to(t^r_{l_i-1})^{-1}U_i(t^l_{r_i})^{-1}\right]_{i\in\overline{M}}=\tau_{e^{-1}}\in\mathcal{S}$，从而 $\mathcal{S}$ 是一台 S-机器。

与 (a) 中一样，$\mathcal{S}$ 模拟 $\mathcal{G}$ 这一点可由构造直接得出。

(c) 给定一个定义在硬件 $\mathcal{H}$ 上的 S-机器 $\mathcal{S}$，将 $\mu_{\mathcal{H}}$ 限制在可容许词且带词平凡的情形下，会在 $\mathcal{S}$ 的状态与 $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ 的状态之间诱导出一个双射。

类似地，给定硬件 $\mathcal{H}=(\mathcal{I},\mathcal{A})$ 上的 S-图 $\mathcal{G}$ 以及双射 $\eta\colon\mathcal{I}\to\overline{N}$，将 $\mu_{\mathcal{G},\eta}$ 限制在 $\mathcal{S}_{\mathcal{G},\eta}(\mathcal{H})$ 上由平凡带词组成的可容许词后，便得到 $\mathcal{S}(\mathcal{G},\eta)$ 的状态与 $\mathcal{G}$ 的状态之间的一个双射。

因此，给定一个 S-图 $\mathcal{G}'$，以及其对应硬件的指标集的一个枚举 η，$\mu_{\mathcal{S}_{\mathcal{G}',\eta}(\mathcal{H})}\circ\mu^{-1}_{\mathcal{G}',\eta}$ 便导出一个双射 ω，它将 $\mathcal{G}'$ 的状态与 $\mathcal{G}(\mathcal{S}(\mathcal{G}',\eta))$ 的状态对应起来。

$\mathcal{G}(\mathcal{S}(\mathcal{G}',\eta))$ 的硬件指标集是 $\overline{N}$，因此 η 导出 $\mathcal{G}'$ 的硬件指标集 $\mathcal{I}$ 与 $\mathcal{G}(\mathcal{S}(\mathcal{G}',\eta))$ 的硬件指标集之间的一个双射。

ω 和 η 导出 S-图 $\mathcal{G}'$ 与 $\mathcal{G}(\mathcal{S}(\mathcal{G}',\eta))$ 同构，这直接源于后者的构造。

□

关于定理 3.4，有几点需要说明：
(1) 给定一个 S-图 $\mathcal{G}$，用于构造 S-机器 $\mathcal{S}(\mathcal{G},\eta)$ 的特定枚举 η 通常无关紧要。因此，以下内容中常常忽略该枚举，即用记号 $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ 代替 $\mathcal{S}(\mathcal{G},\eta)$，用 $\mu_{\mathcal{G}}$ 代替 $\mu_{\mathcal{G},\eta}$，等等。(2) 在定理 3.4(a) 中，$\varphi_{\mathcal{S}}$ 和 $\varphi_{\mathcal{G}(\mathcal{S})}$ 互为自然逆映射，因此是 $\mathcal{S}$ 的计算与 $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ 的计算之间的双射。同样，在 (b) 中，$\psi_{\mathcal{G}}$ 和 $\psi_{\mathcal{S}(\mathcal{G})}$ 互为逆映射，因此是 $\mathcal{G}$ 的计算与 $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ 的计算之间的双射。(3) 给定 S-机器硬件 $\mathcal{H}$，自然对应 $\mu_{\mathcal{H}}$ 不依赖于所考虑的、定义在 $\mathcal{H}$ 上的特定 S-机器 $\mathcal{S}$。反过来，在 S-图的情形下，对于定义在 $\mathcal{H}$ 上的不同 S-图 $\mathcal{G}$，以及 $\mathcal{H}$ 的指标集的不同枚举 η，自然对应 $\mu_{\mathcal{G},\eta}$ 的构造也不同。(4) 尽管定理 3.4(c) 展示了这一构造的“部分对偶性”，但下面的例 3.6 将表明，“对偶性”并不成立：如果 $\mathcal{S}'$ 是定义在硬件 $\mathcal{H}=(Y,Q)$ 上的 S-机器，其中 $Y=(Y_i)_{i\in\overline{N}}$ 且 $\eta\colon\ \overline{N}\to\overline{N}$ 是一个双射，那么 $\mathcal{S}'\cong\mathcal{S}(\mathcal{G}(\mathcal{S}')\ \eta)$ 未必成立。

例3.5（从 S-机器到 S-图）。设 $\mathcal{S}$ 是由 S 规则 $\tau_1^{\pm 1}$ 和 $\tau_2^{\pm 1}$ 构成的 S-机器，其中

$$\begin{aligned}\tau_1 =&[p_2'q_2' \to p_2'q_2',\ p_1aq_1r_1 \to \delta^{-1}p_2a^2q_1r_1\delta],\\ \tau_2 =&[p_2 \to p_2a].\end{aligned}$$

仅定义这些规则，还不足以区分带字母和状态字母。事实上，如果 $\mathcal{S}$ 的硬件是 $\mathcal{H} = (Y, Q)$，且 $Y = (Y_i)_{i\in\overline{N}}$ 和 $Q = (Q_i)_{i\in\overline{N+1}}$，那么即使假设对于每个 $i \in \overline{N+1}$，某个来自 Q_i 的字母会出现在某条规则中，也无法确定 N 的值。

不过，可以看出 p_2'、q_2'、p_1、p_2 和 r_1 是状态字母，而 δ 和 a 是带字母。事实上，存在满足 $i+1 < j < k < N$ 的 i、j、$k \in \overline{N+1}$，使得 $p_2' \in Q_i$、$q_2' \in Q_{i+1}$、p_1、$p_2 \in Q_j$、$r_1 \in Q_k$、$\delta \in Y_{j-1} \cap Y_k$ 和 $a \in Y_j$。然而，尽管名称颇具暗示性，仍无法确定 q_1 是状态字母还是带字母。若属于前者，则 $q_1 \in Q_{j+1}$ 和 $k = j+2$；若属于后者，则 $q_1 \in Y_j$ 和 $k = j+1$。

为纠正这一点，假设在这个特定情形下，$N = 5, Q_1 = \{p_2'\}, Q_2 = \{q_2'\}, Q_3 = \{p_1, p_2\}, Q_4 = \{q_1, q_2\}, Q_5 = \{r_1\}$, $Q_6 = \{E\}, Y_1 = \emptyset, Y_2 = \{\delta\}, Y_3 = \{a\}, Y_4 = \{\delta\}$和 $Y_5 = \{\delta\}$。因此，沿用上一段的术语，q_1 是一个状态字母，$i = 1$, $j = 3$和 $k = 5$。

还要注意，逆规则 τ_1^{-1}和 τ_2^{-1}的构成并未明确说明，这将是下文的惯常做法。为清楚起见，这些逆规则如下:

$$\begin{aligned}\tau_1^{-1} =&[p_2'q_2' \to p_2'q_2',\ p_2a^2q_1r_1 \to \delta p_2aq_1r_1\delta^{-1}],\\ \tau_2^{-1} =&[p_2 \to p_2a^{-1}].\end{aligned}$$

现在，通过 $\mathcal{I} = \overline{5} = \{1,2,3,4,5\}$ 和 $\mathcal{A} = (A_i)_{i\in\overline{N}}$定义 S-图硬件 $\mathcal{G}(\mathcal{H}) = (\mathcal{I}, \mathcal{A})$，其中 $A_1 = \emptyset$, $A_2 = \{\delta\}$, $A_3 = \{a\}$, $A_4 = \{\delta\}$和 $A_5 = \{\delta\}$。此外，定义 $\mathcal{S}_\mathcal{H}$ 如下:

$$\begin{aligned}S_\mathcal{H} = \{&(p_2', q_2', p_1, q_1, r_1, E), (p_2', q_2', p_1, q_2, r_1, E),\\ &(p_2', q_2', p_2, q_1, r_1, E), (p_2', q_2', p_2, q_2, r_1, E)\}.\end{aligned}$$

现在，根据定理 3.4 的构造，定义 S-图 $\mathcal{G}(\mathcal{S}) = (\mathcal{S}_\mathcal{H}, E)$，使得 $E = E_{\tau_1} \sqcup E_{\tau_2} \sqcup E_{\tau_1^{-1}} \sqcup E_{\tau_2^{-1}}$，其中这些子集定义如下。

由于在 τ_1、$J_{\tau_1} = \{6\}$ 的定义中，Q_1、...、Q_5 各自都存在一个字母。因此，$|E_{\tau_1}| = |Q_6| = 1$，即存在一条与该规则对应的边 e_{τ_1}。根据构造，这条边为:

$$\begin{aligned}e_{\tau_1} = \Big(&(p_2', q_2', p_1, q_1, r_1, E),\\ &(p_2', q_2', p_2, q_1, r_1, E),\\ &\big\{[\mathbf{2} \to \mathbf{2}\delta^{-1}],\ [\mathbf{3} \to a\mathbf{3}],\ [\mathbf{5} \to \delta\mathbf{5}]\big\},\\ &\{[\mathbf{1} = 1],\ [\mathbf{3} = a],\ [\mathbf{4} = 1]\}\Big).\end{aligned}$$

这里，片段 $[\mathbf{3} \to a\mathbf{3}]$ 由 $u_2^3 = a$ 和 $v_2^3 = a^2$ 得到，其中下标为 2，因为 $p_1aq_1r_1 \to \delta^{-1}p_2a^2q_1r_1\delta$ 是 τ_1 中的第二个子规则；上标为 3，因为相应的词来自 Y_3。

根据标记在此边上的守卫的定义，$\mathcal{G}$ 的计算只有在相关的 L-字 $w = (w_i)_{i\in\overline{5}}$ 满足 $w_1 = w_4 = 1$ 和 $w_3 = 5$时，才能经过e_{τ_1}。在这种情况下，根据变换的定义，如果 $\tau w = (w_i')_{i\in\overline{5}}$，那么 $w_2' = w_2\delta^{-1}$、$w_3' = aw_3 = a^2$以及$w_5' = \delta w_5$。

反过来，τ_2的定义只包含来自 Q_3的状态字母，因此 $J_{\tau_2} = \{1,2,4,5,6\}$。因此，$|E_{\tau_2}| = |Q_1| \cdot |Q_2| \cdot |Q_4| \cdot |Q_5| \cdot |Q_6| = |Q_4| = 2$。

$\Theta_{\tau_2} = \{(p_2', q_2', q_1, r_1, E), (p_2', q_2', q_2, r_1, E)\}$ 中的元素随后可以与 Q_4中的相应元素对应起来，即 $\Theta_{\tau_2} = \{q_1, q_2\}$。按照定理 3.4 的记号，我们称它们为 $E_{\tau_2} = \{e_{2,q_1}, e_{2,q_2}\}$，其中

$$e_{\tau_2,q_1} = \Big((p_2', q_2', p_2, q_1, r_1, E), (p_2', q_2', p_2, q_1, r_1, E), \{[\mathbf{3} \to a\mathbf{3}]\}, \emptyset\Big),$$

$$e_{\tau_2,q_2} = \Big((p_2', q_2', p_2, q_2, r_1, E), (p_2', q_2', p_2, q_2, r_1, E), \{[\mathbf{3} \to a\mathbf{3}]\}, \emptyset\Big).$$

请注意，这些边上标记的动作完全相同；任何由同一规则构造的边对都是如此。此外，该动作的守卫为空，因为 τ_2 没有任何包含多个状态字母的子规则。

逆边由逆规则以类似方式构造，因此 $E_{\tau_1^{-1}} = \{e_{\tau_1^{-1}}\}$ 和$E_{\tau_2^{-1}} = \{e_{\tau_2^{-1},q_1}, e_{\tau_2^{-1},q_2}\}$，其中：

$$e_{\tau_1}^{-1} = e_{\tau_1^{-1}} = \Big((p_2', q_2', p_2, q_1, r_1, E), (p_2', q_2', p_1, q_1, r_1, E), \big\{[\mathbf{2} \to \mathbf{2}\delta],\ [\mathbf{3} \to a^{-1}\mathbf{3}],\ [\mathbf{5} \to \delta^{-1}\mathbf{5}]\big\}, \big\{[\mathbf{1} = 1],\ [\mathbf{3} = a^2],\ [\mathbf{4} = 1]\big\}\Big).$$

$$e_{\tau_2,q_1}^{-1} = e_{\tau_2^{-1},q_1} = \Big((p_2', q_2', p_2, q_1, r_1, E), (p_2', q_2', p_2, q_1, r_1, E), \big\{[\mathbf{3} \to a^{-1}\mathbf{3}]\big\}, \emptyset\Big),$$

$$e_{\tau_2,q_2}^{-1} = e_{\tau_2^{-1},q_2} = \Big((p_2', q_2', p_2, q_2, r_1, E), (p_2', q_2', p_2, q_2, r_1, E), \big\{[\mathbf{3} \to a^{-1}\mathbf{3}]\big\}, \emptyset\Big).$$

边 e_{τ_1} 和 $e_{\tau_1}^{-1}$展现了定理 3.4 构造中的一个特殊之处： e_{τ_1} 中提及索引 3 的片段是 $[\mathbf{3} \to a\mathbf{3}]$ 和 $[\mathbf{3} = a]$，这实际上意味着，应用 e_{τ_1} 时，必须将相应的 L-字在坐标 3 上的值从 a 改为 a^2 。如上所述，变换的片段 $[\mathbf{3} \to a\mathbf{3}]$ 源自定理 3.4 证明中采用的约定：取 $[\mathbf{i} \to (v_t^i)(u_t^i)^{-1}\,\mathbf{i}] \in F_\tau^{lt}$。然而，若采用约定 $[\mathbf{i} \to \mathbf{i}(u_t^i)^{-1}(v_t^i)] \in F_\tau^{lt}$，甚至 $[\mathbf{i} \to (u_t^i)^{-1}\mathbf{i}(v_t^i)] \in F_\tau^{lt}$，则会得到语法形式不同但语义相同的片段。采用前一种约定会得到类似的构造，但采用后一种约定则会产生一个不必要的障碍：对应于 e_{τ_1} 和 $e_{\tau_1}^{-1}$的变换将分别包含片段 $[\mathbf{3} \to a\mathbf{3}a^{-2}]$ 和$[\mathbf{3} \to a^{-2}\mathbf{3}a]$，因此标记这些边的动作将不互为逆动作。

下面的图 1 表示 S-图 $\mathcal{G}(\mathcal{S})$。注意，图中省略了逆边 $e_{\tau_1}^{-1}$, $e_{\tau_2^{-1},q_1}$ 和 $e_{\tau_2^{-1},q_2}$；因此，按照惯例，此类图中只画边或其逆边之一，并默认其对应项存在。

例 3.6（从 S-图到 S-机器）。现在考虑图 2 中所示的 S-图 $\mathcal{G} = (\mathcal{S}_\mathcal{G}, E_\mathcal{G})$，它定义在 S-图硬件 $\mathcal{H} = (\mathcal{I}, \mathcal{A})$ 上，且包含 $\mathcal{I} = \{I, D_1, A, D_2\}$、 $A_A = \{a\}$、$A_I = \emptyset$ 和 $A_{D_1} = A_{D_2} = \{\delta\}$。

请注意，这个 S-图与例3.5中构造的图，即图 1 所示的 $\mathcal{G}(\mathcal{S})$，有相似之处。事实上， $\mathcal{G}$ 可以通过删除对应于 p_1 和 q_2的“孤立”状态、重命名其余状态、移除索引 4，并重命名

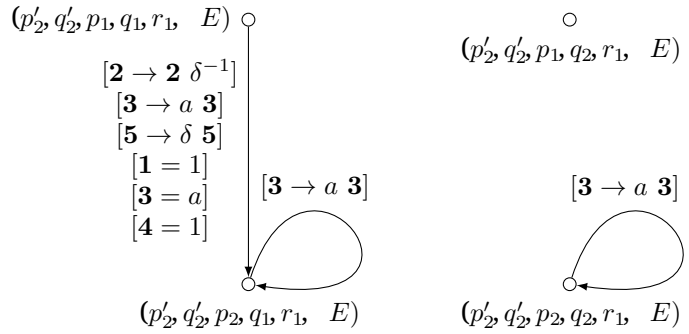


FIGURE 1. S-图 $\mathcal{G}(\mathcal{S})$.

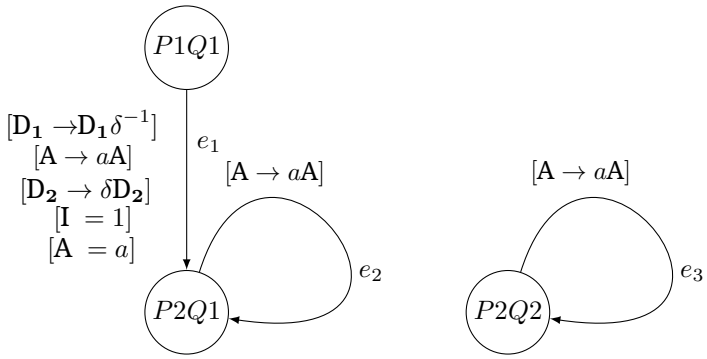


FIGURE 2. S-图 $\mathcal{G}$。

其他指标得到：1 对应于 I，2 对应于 D_1，3 对应于 A，5 对应于 D_2。鉴于 $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ 的构成，这些改动在某种意义上似乎很自然：只有平凡计算会包含这个孤立状态，而任何非平凡计算都不会改变坐标 4 中 L-字的值。至于 $A_1 = \emptyset$，移除索引 1 也很自然；不过，这里保留了该索引，以展示构造 $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ 时出现的一些细微之处。

注意，$\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ 并非同构的 S-图，因为它们的状态之间（或对应硬件的指标集之间）不存在双射。因此，重命名状态和指标虽然保持同构，但移除操作不会。

通过图示定义 S-图时，除非另有明确说明，否则假定图示中的至少一个片段提及所有指标以及字母表中的所有字母。这为 S-图定义了一个“最小”硬件。因此，$\mathcal{H}$ 的构成在图 2 中是隐式定义的。

为使讨论清晰，图 2 明确标出了边 e_1、e_2 和 e_3；实际中通常会省略这些名称。

现在，由于 $|\mathcal{I}| = 4$，必须指定一个双射 $\mathcal{I} \to \overline{4}$，才能按照定理 3.4 的证明构造 $\mathcal{S}(\mathcal{G})$。

首先，定义 η: $\mathcal{I} \to \overline{4}$，使指标的“顺序”与例3.5中的相同，即$\eta(I) = 1$, $\eta(D_1) = 2$, $\eta(A) = 3$ 以及 $\eta(D_2) = 4$，并令 $\mathcal{S}_\eta = \mathcal{S}(\mathcal{G}, \eta)$。因此，$S_{\mathcal{G},\ \eta}(\mathcal{H}) = (Y, Q)$，其中 $Y = (Y_i)_{i\in\overline{4}}$, $Q = (Q_i)_{i\in\overline{5}}$, $Y_1 = A_I = \emptyset$, $Y_2 = Y_4 = A_{D_1} = A_{D_2} = \{\delta\}$, $Y_3 = A_A = \{a\}$,$Q_1 = S_{\mathcal{G}} = \{P1Q1, P2Q1, P2Q2\}$ 以及 $Q_i = \{q_i^*\}$ 对于 $i \in 2, 5$。

根据构造， $\mathcal{S}_\eta$ 的每条 S-规则都精确对应于 $\mathcal{G}$的一条边。因此，

$$\mathcal{S}_\eta = \{\tau_{e_1}, \tau_{e_2}, \tau_{e_3}, \tau_{e_1^{-1}}, \tau_{e_2^{-1}}, \tau_{e_3^{-1}}\}$$

whe对于 $\tau_{e_i}^{-1} = \tau_{e_i^{-1}}$ ，有 $i \in \overline{3}$。为展示这些规则的构造，考虑 τ_{e_1} ：

由于标记 e_1 的变换由提及 I 和 A 的守卫片段组成，因此相对于 η 的极大守卫区间为

$$\mathrm{MGI}_\eta(e_1) = \{(1,2),(3,4),(5,5)\}$$

每个极大守卫区间对应 τ_{e_1} 的一个子规则，因此得到：

$$\tau_{e_1} = \big[P1Q1\ q_2^* \to P2Q1\ q_2^*, \quad q_3^*\ a\ q_4^* \to \delta^{-1}\ q_3^*\ a^2\ q_4^*\ \delta, \quad q_5^* \to q_5^*\big].$$

注意，最后一个子规则可以省略而不改变 $\mathcal{S}_\eta$，因为它仅包含一个状态字母 $q_5^* \in Q_5$，且 Q_5 是单元素集。

由于 e_2 和 e_3 不包含守卫片段，$\mathsf{MGI}_\eta(e_2)$ 和 $\mathsf{MGI}_\eta(e_3)$ 由单点区间构成，即它们是 $\{(i,i)\}_{i\in\overline{5}}$。规则 τ_{e_2} 和 τ_{e_3} 定义如下：

$$\tau_{e_2} = \big[P2Q1 \to P2Q1,\ q_2^* \to q_2^*,\ q_3^* \to q_3^*\ a,\ q_4^* \to q_4^*,\ q_5^* \to q_5^*\big],$$

$$\tau_{e_3} = \big[P2Q2 \to P2Q2,\ q_2^* \to q_2^*,\ q_3^* \to q_3^*\ a,\ q_4^* \to q_4^*,\ q_5^* \to q_5^*\big].$$

正如定理 3.4 的证明中所指出的，对于 $i \in \overline{3}$，由逆边构造出的规则$^{\mathcal{T}_{e_i^{-1}}}$ 对应于逆 S-规则 $\tau_{e_i}^{-1}$。

另一方面，定义枚举 ν: $\mathcal{I}_\mathcal{G} \to \overline{4}$ 由 $\nu(D_1) = 1, \nu(D_2) = 2, \nu(I) = 3, \nu(A) = 4$ 给出，并构造 $\mathcal{S}_\nu = \mathcal{S}(\mathcal{G}, \nu)$。对于 $e \in E_\mathcal{G}$，将 $\mathcal{S}_\nu$ 的相应 S-规则记为 σ_e。那么，在这种情况下，$\mathsf{MGI}_\nu(e_1) = \{(1,1),(2,2),(3,5)\}$，$\mathsf{MGI}_\nu(e_2) = \mathsf{MGI}_\nu(e_3) = \{(i,i)\}_{i\in\overline{5}}$，并且

$$\sigma_{e_1} = \big[P1Q1 \to P2Q1, \quad q_2^* \to \delta^{-1} q_2^* \delta, \quad q_3^* q_4^* a q_5^* \to q_3^* q_4^* a^2 q_5^*\big],$$

$$\sigma_{e_2} = \big[P2Q1 \to P2Q1,\ q_2^* \to q_2^*,\ q_3^* \to q_3^*,\ q_4^* \to q_4^*\ a,\ q_5^* \to q_5^*\big],$$

$$\sigma_{e_3} = \big[P2Q2 \to P2Q2,\ q_2^* \to q_2^*,\ q_3^* \to q_3^*,\ q_4^* \to q_4^*\ a,\ q_5^* \to q_5^*\big].$$

如上所述，对于所有 $i \in \overline{3}$，由构造可得 $\sigma_{e_i^{-1}} = \sigma_{e_i}^{-1}$。

虽然 σ_2 和 σ_3 与 τ_{e_2} 和 τ_{e_3}相似，但 σ_{e_1} 和 τ_{e_1}之间存在一些重大差异。首先，尽管每条规则都由三个子规则组成，但这些子规则所包含的状态字母数量并不相同。事实上， τ_{e_1} 的两个子规则包含带字母，而 σ_{e_1} 只有一个子规则包含带字母。

显然， $\mathcal{S}_\eta$ 和 $\mathcal{S}_\nu$ 并不同构。在某种程度上，这一观察解释了前文关于 S-机同构用途有限的评论。

4. Relations and Relational Algebra

下文中的许多定义和论证都是借助二元关系构造的。本节回顾一些基本定义，以提供关系代数中的实用工具，供后续的许多证明使用，并确定一些记号约定，以简化这一领域中的讨论。

下文中，关系 R 被视为集合 X 上的二元关系，该集合称为 R 的定义域，即 $R \subseteq X^2$。关系 R 称为：

- 对所有 $x \in X$，若 $(x,x) \in R$，则为自反的，
- 对所有 (y,x)，若 $(x,y) \in R$，则为对称的，
- 若对于 $(x,z) \in R$，只要 (x,y) 和 $(y,z) \in R$，便成立，则为传递的，并且
- 若一个关系具有自反性、对称性和传递性，则称为等价关系。

给定定义在 X 上的关系 R，记号 xRy 用来表示 $(x,y) \in R$。R 的逆关系记为 R^{-1}，它是定义在 X 上、由 $R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$ 给出的关系。此外，给定定义域相同的关系 R 和 S，其中定义域为 X，R 与 S 的关系乘积是在 X 上定义的关系，其定义如下：

$$R \circ S = \{(x,z) \mid xRy \text{ and } ySz \text{ for some } y \in X\}$$

作为定义域为 X 的关系集合上的一种操作，关系乘积是结合的，但不满足交换律。关系 R 在 X 上的幂按标准方式定义：

- $R^n = \underbrace{R \circ R \circ \cdots \circ R}_{n \text{ times}}$ if $n > 0$,
- $R^n = \underbrace{R^{-1} \circ R^{-1} \circ \cdots \circ R^{-1}}_{-n \text{ times}}$ if $n < 0$, and
- $R^0 = \mathbb{I}_X$

其中恒等关系 $\mathbb{I}_X$ 是 X 上最小的自反关系，即

$$\mathbb{I}_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$$

In g一般来说，当定义域在上下文中明确时，恒等关系记为 $\mathbb{I}$.

如果 R 是 X 和 $A \subseteq X$上的关系，那么 A 在 R 下封闭，当且仅当对于所有 $(x_1,x_2) \in R$，$x_1 \in A$ 当且仅当 $x_2 \in A$。

给定一个关系 R 在 X 上，R 的自反对称传递闭包，也简称为 rst-闭包，并记作 RSTR 或 R^*，是包含 R 的 X 上的最小等价关系。注意，该闭包总是存在，事实上由 $R^* = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} R^i$ 给出。

引理 4.1. 设 $\{R_j\}_{j \in J}$ 是 X 上的关系族，并假设子集 $A \subseteq X$ 对所有 $j \in J$ 都在 R_j 下封闭。那么对于 $R =$RST $\bigcup_{j \in J} R_j$，A 是 R 的等价类的不交并。

证明。根据构造，对于任意的 $(x_1,x_2) \in R$，存在 $k \in \mathbb{N}, j_1, \ldots, j_k \in J$，以及 $y_0, \ldots, y_k \in X$，使得 $y_0 = x_1$, $y_k = x_2$，并且对所有 $i \in \overline{k}$，$(y_{i-1}, y_i) \in R_{j_i}$ 或 $(y_i, y_{i-1}) \in R_{j_i}$。

那么对所有 $i \in \overline{k}$，由于对于所有 $j \in J$, $y_{i-1} \in A$，A 在 R_j 下封闭当且仅当 $y_i \in A$。因此，$x_1 \in A$ 当且仅当 $x_2 \in A$。特别地，对于任意 $a \in A$，包含 a 的 R 的等价类必为 A 的子集。

□

若 R 是定义在 $X \times Y$ 和 $A_1, A_2 \subseteq X$ 上的关系，则 R 到有序对 (A_1, A_2) 的 X-限制定义为

$$R\big|_{A_1,A_2} = \big\{\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) \in R \mid x_1 \in A_1 \text{ or } x_2 \in A_2\big\}$$

请注意，根据此定义，通常并非总有 $R\big|_{A_1,\ A_2} \subseteq (A_1 \times Y) \times (A_2 \times Y)$。若确实如此，则称 X-限制为真，并称 R 被真地 X-限制到这一对 (A_1, A_2) 上。因此，当且仅当可以将限制定义中的合取词“或”替换为“且”时，R才被真地 X-限制到 (A_1, A_2) 上。

如果 $A = A_1 = A_2$，则 $R\big|_{A_1,\ A_2}$ 简记为 $R\big|_A$。如果限制 $R\big|_A$ 是真限制，则称 R 为真 X限制到 A。因此，R 真限制到 A，当且仅当$A \times Y$在.....下封闭 R。

另一方面，如果 R是定义在 $X \times Y$和 B_1上的关系，且 $B_2 \subseteq Y$，则将 R到有序对 (B_1, B_2) 的 Y限制定义为

$$R^{B_1,B_2} = \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in R \mid y_1 \in B_1 \text{ and } y_2 \in B_2\}$$

请注意，这些限制的定义并不一致，因为 Y-限制必然是 X-限制意义上的"真"限制。这种差异存在的原因是，后文考虑的相关关系将以这样的方式构造：只有当限制是"真"限制时，对第二个坐标的限制才有意义。

与 X-限制一样，如果 $B = B_1 = B_2$，那么 $R^{B_1,\ B_2}$ 就简记为 R^B。

X-限制 对 $R^{B_1,\ B_2}$ 的定义与 R的定义大致相同。因此，对于 A_1， $A_2 \subseteq X$ ，

$$R^{B_1,B_2}\big|_{A_1,A_2} = \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in R^{B_1,B_2} \mid x_1 \in A_1 \text{ or } x_2 \in A_2\}$$

如上所述，若可将"或"替换为"且"，则该限制为真限制；换言之，若$R^{B_1,\ B_2}\big|_{A_1,A_2}$ 包含于 $(A_1 \times B_1) \times (A_2 \times B_2)$ 中。

若 Y_1 和 Y_2 是单元素集，且 $Y_i = \{y_i\}$，那么 R 在 (y_1, y_2) 上的 Y-限制也可以视为 X上的一个关系，即

$$R^{y_1,y_2} = \big\{(x_1, x_2) \in X^2 \mid (x_1, y_1, x_2, y_2) \in R\big\}$$

因此， $R^{y_1,\ y_2}$ 既可解释为 X 上的关系，也可解释为 $X \times Y$上的关系；上下文会清楚表明采用的是哪种解释。因此，

$$R = R^Y = \bigsqcup_{(y_1,y_2)\in Y^2} R^{y_1,y_2}$$

5. Objects、 Operations与 and Counters

设 $\mathcal{G} = (S_\mathcal{G}, E_\mathcal{G})$是硬件 $\mathcal{H}$上的一个 S-图。那么， $\mathcal{G}$的可达关系记作 $\mathsf{REACH}_\mathcal{G}$，它是定义在 $\mathcal{G}$ 的配置上的二元关系，将 $\mathcal{G}$ 某次计算的起始配置与其结束配置关联起来。换言之，

$$\mathsf{REACH}_\mathcal{G} = \{(w_1, s_1, w_2, s_2) \mid \varepsilon(w_1, s_1, w_2, s_2) \neq \emptyset\} \subseteq (L_\mathcal{H} \times S_\mathcal{G})^2$$

若 $(w_1, s_1, w_2, s_2) \in \mathsf{REACH}_\mathcal{G}$，那么配置 (w_2, s_2) 可从 (w_1, s_1) 到达（通过 $\mathcal{G}$的一次计算）。根据 S-图计算的定义，$\mathsf{REACH}_\mathcal{G}$ 是配置集合上的等价关系。

第4节中所述的乘积上的关系的记号约定也适用于 $\mathsf{REACH}_\mathcal{G}$。因此，对于任意 W_1、 $W_2 \subseteq L_\mathcal{H}$， $\mathsf{REACH}_\mathcal{G}$ 在有序对 (W_1, W_2) 上的 $L_\mathcal{H}$-限制是由下式给出的关系：

$$\mathsf{REACH}_\mathcal{G}\big|_{W_1,W_2} = \{(w_1, s_1, w_2, s_2) \in \mathsf{REACH}_\mathcal{G} \mid w_1 \in W_1 \text{ or } w_2 \in W_2\}$$

如果它包含于 $(W_1 \times S_\mathcal{G}) \times (W_2 \times S_\mathcal{G})$，则它是真关系。

此外，对于 s_1、 $s_2 \in S_\mathcal{G}$， $\mathsf{REACH}_\mathcal{G}$ 在 (s_1, s_2) 上的 $S_\mathcal{G}$-限制为

$$\mathsf{REACH}_\mathcal{G}^{s_1,s_2} = \big\{(w_1, w_2) \mid (w_1, s_1, w_2, s_2) \in \mathsf{REACH}_\mathcal{G}\big\} \subseteq L_\mathcal{H} \times L_\mathcal{H}$$

它也被视为语言 $L_\mathcal{H} \times S_\mathcal{G}$ 上的一个关系。因此，这样的 $S_\mathcal{G}$-限制描述了由 $\mathcal{G}$ 的特定状态之间的路径所支持的计算。

请注意，$\mathsf{REACH}_\mathcal{G}^{s_1\ s_2}$ 不一定是自反的、传递的或对称的。

定义 5.1. 设 $\mathcal{G} = (S, E)$ 是硬件 $\mathcal{H} = (\mathcal{I}, \mathcal{A})$ 上的一个 S-图，其底层有向图是（强）连通的。假设存在一个划分 $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\text{ext}} \sqcup \mathcal{I}^{\text{val}} \sqcup \mathcal{I}^{\text{int}}$ 和$s, f \in S$ ，满足以下条件：

(O) 设 $\rho = e_1, \ldots, e_N$ 是 $\mathcal{G}$ 中从 s_1 到 s_2 的一条路径，其中 $s_1, s_2 \in \{s, f\}$。对于 $i \in \mathcal{I}^{\mathrm{int}}$，假设存在一个提及 i 的片段 f，使得对于某个 $j \in \overline{N}$， $f \in e_j$。那么存在 $\underline{l_1, l_2} \in \overline{N}$，使得 $l_1 \leq l_2$，且对所有 $m \in \overline{N} - l_1, l_2$， e_m 中没有片段提及 i。

于是，op $= (\mathcal{G}, \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}, \mathcal{I}^{\mathrm{val}}, \mathcal{I}^{\mathrm{int}}, s, f)$ 称为一种操作。

为简便起见，操作的定义连通分支采用能够表明其与该操作关系的命名方式。因此，操作 op 记作 op $= (\mathcal{G}_{\mathrm{op}}, \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}}, \mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{op}}, \mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}, \mathrm{op}_s, \mathrm{op}_f)$，其中 $\mathcal{G}_{\mathrm{op}} = (S_{\mathrm{op}}, E_{\mathrm{op}})$ 是硬件 $\mathcal{H}_{\mathrm{op}} = (\mathcal{I}_{\mathrm{op}}, \mathcal{A}_{\mathrm{op}})$ 上的一个 S-图，其定义索引集划分为 $\mathcal{I}_{\mathrm{op}} = \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}} \sqcup \mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{op}} \sqcup \mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}$。

此外，将操作 op 与 S-图 $\mathcal{G}_{\mathrm{op}}$视为同一对象会很方便。因此，例如， $\mathcal{G}_{\mathrm{op}}$ 的计算可以称为 op 的计算。

$\mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}}$的元素称为 op 的外部带， $\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{op}}$的元素称为值带，而 $\mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}$ 的元素称为内部带。

操作 op 的外部语言是集合 $L^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}} = \bigtimes_{i \in \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}}} L_i$。类似地，op 的值语言和内部语言分别是集合 $L^{\mathrm{val}}_{\mathrm{op}} = \bigtimes_{i \in \mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{op}}} L_i$ 和 $L^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}} = \bigtimes_{i \in \mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}} L_i$。最后，op 的语言记作 L_{op}，是由 L- 字 $L_{\mathcal{H}_{\mathrm{op}}}$ 构成的集合。因此，$L_{\mathrm{op}} = L^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}} \times L^{\mathrm{val}}_{\mathrm{op}} \times L^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}$。

指定的状态 op_s 和 op_f 分别称为 op 的起始状态和终止状态。子集 $\{\mathrm{op}_s, \mathrm{op}_f\} \subseteq S_{\mathrm{op}}$ 记作 $\mathrm{SF}_{\mathrm{op}}$。因此，条件 (O) 可以重述为对 $\mathcal{G}_{\mathrm{op}}$ 中端点位于 $\mathrm{SF}_{\mathrm{op}}$的路径的限制。

注意，条件 (O) 具有一定程度的对称性：设 $\rho = e_1, \ldots, e_N$是 (O) 的陈述中所述的一条路径，并考虑逆路径 $\rho^{-1} = e_N^{-1}, \ldots, e_1^{-1}$。由于 ρ是从 s_1到 s_2的一条路径，对于 $s_1, s_2 \in \mathrm{SF}_{\mathrm{op}}$, ρ^{-1} 是从 s_2 到 s_1的一条路径，因此也是满足该条件的路径。对于任意$i \in \mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}$以及 $\mathcal{G}_{\mathrm{op}}$的一条边 e，存在一个提及 i 的片段 f，使得 $f \in e$ 当且仅当存在一个提及 i的片段 f'，使得 $f' \in e^{-1}$。因此，存在一个 $j \in \overline{N}$，使得 e_j 包含一个提及 i 的片段，当且仅当 e_j^{-1}也如此；在这种情况下，存在确保 ρ 满足该条件的指标 $l_1, l_2 \in \overline{N}$，等价于存在对应的指标使 ρ^{-1}满足该条件。

当操作由图示定义时，这一观察很有用，因为它能加快验证条件 (O) 的过程。例如，如果验证了从 op_s 到 op_f的任意路径都满足条件 (O)，那么从 op_f 到 op_s的任意路径也满足该条件。

设 ε 是操作 op 在配置 (w_1, s_1) 和 (w_2, s_2) 之间的一次计算。假设 $s_1, s_2 \in \mathrm{SF}_{\mathrm{op}}$ 且 $w_1\big(\mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}\big) = w_2\big(\mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}\big) = (1)^{i \in \mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}}$。那么 ε 称为一次输入输出计算。

定义 5.2。设 op_1、……、op_k 为操作。假设存在一个子集 $\mathcal{I}^{\mathrm{val}} \subseteq \mathcal{I}^*$，使得对于所有 $m \in \overline{k}$，都有 $\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{op}_m} = \mathcal{I}^{\mathrm{val}}$。此外，假设对于所有 $i \in \mathcal{I}^{\mathrm{val}}$ 以及所有$m, n \in k$， $\mathcal{A}_{\mathrm{op}_m}(i) = \mathcal{A}_{\mathrm{op}_n}(i)$。那么，Obj $= (\mathcal{I}^{\mathrm{val}}, \mathrm{op}_1、\ldots\ldots、\mathrm{op}_k)$称为一个对象。

类似于操作的记号约定，任何 Obj 操作的值带集合记作 $\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$，以强调其与该对象的关系。此外，使用记号 op $\in$Obj 表示 op 是定义该对象的操作之一。

为清晰起见，假设任何对象都包含其每个操作的唯一副本。因此，对于不同的对象 Obj_1 和 Obj_2，，不存在操作 op，使得 op $\in \mathrm{Obj}_1$ 且 op $\in \mathrm{Obj}_2$。

请注意，具有单个操作的对象可以与其操作等同，而任何单个操作也可以与这样的对象等同。如果该操作没有值带，则相应的对象称为适当操作。

根据定义，对于任意操作 op，op′ $\in$ Obj， $L^{\mathrm{val}}_{\mathrm{op}} = L^{\mathrm{val}}_{\mathrm{op}'}$。因此，Obj 的值语言（记作$L^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$）定义为其任意操作的值语言。

设 Obj 的初始值为‘平凡’元组 $1^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}} = (1)_{i\in\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}} \in L^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$。在这种情况下，更一般地说，当指标集明确时，这样的平凡元组将简记为 1。

对任意对象 Obj，关联一个（无向）图 $\mathcal{G}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$，其顶点与 $L^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$ 的字相对应，并且当且仅当存在 op $\in$ Obj 以及 op 在一对配置 (w_1, s_1),$(w_2, s_2) \in L_{\mathrm{op}} \times \mathrm{SF}_{\mathrm{op}}$ 之间的输入-输出计算，使得 $w_i\big(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}\big) = v_i$ 对于 $i = 1, 2$ 时，v_1与$v_2 \in L^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$ 之间存在一条边。然后，将 Obj 的值定义为 $\mathrm{VAL}^{\mathrm{Obj}}$，即包含初始值的 $\mathcal{G}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$ 连通分支。

命题 5.3。设 op $\in$ Obj 是一个操作，并令集合 $1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}} = (1)_{i\in\mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}} \in L^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}$。那么，$\mathrm{REACH}^{\mathrm{SF}_{\mathrm{op}}\text{操作}}$在 $L^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}} \times \mathrm{VAL}_{\mathrm{Obj}} \times 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}$上的限制是真正的。

证明。设 $(w_1, s_1, w_2, s_2) \in \mathrm{REACH}^{\mathrm{SF}_{\mathrm{op}}\text{操作}}\big|_V$，其中 $V = L^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}} \times \mathrm{VAL}_{\mathrm{Obj}} \times 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}$。

假设 $w_2 \in V$，并设 ε 是操作 op 在 (w_1, s_1) 与 (w_2, s_2) 之间的一次计算，其支撑路径为 $\rho = e_1, \ldots, e_k$。令

$$\varepsilon = \big((w'_0, s'_0), e_1, (w'_1, s'_1), e_2, \ldots, (w'_{k-1}, s'_{k-1}), e_k, (w'_k, s'_k)\big)$$

其中 $(w_1, s_1) = (w'_0, s'_0)$，且 $(w_2, s_2) = (w'_k, s'_k)$。

固定 $i \in \mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}$。注意，一般而言，如果一条边 $e \in E_{\mathrm{op}}$ 不包含提及某个索引的片段，那么 e 的任何应用都会使相应坐标中的 L 字保持不变。因此，如果对于所有 $j \in \overline{k}$，e_j 都不包含提及 i 的片段，那么 $w_1(i) = w_2(i) = 1$。

否则，条件 (O) 适用于 ρ，也就是说，存在 $l \in \overline{n}$，使得 $[\mathrm{i} = 1] \in e_l$，并且对于所有 $m \in 1, l-1$，e_m 的片段都不提及 i。因此，$w_1(i) = w'_{l-1}(i)$，且 e_l 适用于 $(w'_{l-1}, \overline{s'_{l-1}})$。然而，$e_l$ 的守卫片段蕴含 $w'_{l-1}(i) = 1$，因此 $w_1(i) = 1$。

因此，$w_1\big(\mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}\big) = 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}$，所以 ε 是操作的输入输出计算。根据定义，这意味着在 $\mathcal{G}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$ 中存在一条边连接 $w_1\big(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}\big)$ 和 $w_2\big(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}\big)$。因此，$w_1\big(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}\big) \in \mathrm{VAL}^{\mathrm{Obj}}$，所以 $w_1 \in V$。

反之，若假设 $w_1 \in V$，则利用条件 (O) 的对称性进行类似论证，可推出 $w_2 \in V$。

□

给定一个对象 Obj 和一个操作 op $\in$Obj，op 的自然定义域定义为集合 $\mathrm{ND}_{\mathrm{op}} = L^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}} \times \mathrm{VAL}_{\mathrm{Obj}} \subseteq L^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}} \times L^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$。注意，尽管记号并未体现这一点，自然定义域取决于所考察对象的构成。不过，由于假定 Obj 是满足 op $\in$Obj 的唯一对象，因此不存在歧义。

为方便记号起见，有时将自然定义域扩展为

$$\mathrm{ND}^1_{\mathrm{op}} = \mathrm{ND}_{\mathrm{op}} \times 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}} = L^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}} \times \mathrm{VAL}_{\mathrm{Obj}} \times 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}} \subseteq L_{\mathrm{op}}$$

根据命题 5.3，$\mathrm{REACH}^{\mathrm{SF}_{\mathrm{op}}\text{操作}}$ 在 $\mathrm{ND}^1_{\mathrm{op}}$ 上受到真限制。

定义关系 $\mathrm{IO}^1_{\mathrm{op}} = \mathrm{REACH}^{\mathrm{SF}_{\mathrm{op}}\text{操作}}\big|_{\mathrm{ND}^1_{\mathrm{op}}} \subseteq \big(\mathrm{ND}^1_{\mathrm{op}} \times \mathrm{SF}_{\mathrm{op}}\big)^2$。这里，IO 表示输入-输出，因为其复合由输入-输出计算决定。

然后，定义 $\mathrm{ND}_{\mathrm{op}} \times \mathrm{SF}_{\mathrm{op}}$ 上的关系 $\mathrm{IO}^{\mathrm{op}}$，使得 $(w_1, s_1, w_2, s_2) \in \mathrm{IO}^{\mathrm{op}}$ 当且仅当存在 w'_1, $w'_2 \in \mathrm{ND}^1_{\mathrm{op}}$，使得 $w'_i\big(\mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}} \sqcup \mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}\big) = w_i$ 对于 $i = 1$，2 和 $(w'_1, s_1, w'_2, s_2) \in \mathrm{IO}^1_{\mathrm{op}}$。因此，

$$\mathrm{IO}^{s_1,s_2}_{\mathrm{op}} = \big\{(w_1, w_2) \in \big(\mathrm{ND}_{\mathrm{op}}\big)^2 \mid (w_1 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}, w_2 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}) \in \mathrm{REACH}^{s_1,s_2}_{\mathrm{op}}\big\}$$

对于所有 $s_1, s_2 \in \mathrm{SF}_{\mathrm{op}}$。

注意，由于 $\mathrm{REACH}^{\mathrm{op}}$ 是 $L_{\mathrm{op}} \times S_{\mathrm{op}}$上的等价关系，因此 $\mathrm{IO}^{\mathrm{op}}$ 是 $\mathrm{ND}_{\mathrm{op}} \times \mathrm{SF}_{\mathrm{op}}$上的等价关系。

由于 IOop 是 $\mathsf{ND}_{\mathrm{op}} \times \mathsf{SF}_{\mathrm{op}}$上的关系，因此按照第4节中的定义，定义 SFop-限制 $\mathsf{IO}^{s_1,\ s_2}$操作，其中 $s_1, s_2 \in \mathsf{SF}_{\mathrm{op}}$。为简化记号，将此限制记为 $\mathsf{IO}_{\mathrm{op}}^{s\ f,\ ,}$，若 $s_1 =$ 操作$_s$ 且 $s_2 =$ 操作$_f$。类似地，还有 S-限制 $\mathsf{IO}^{f,\ \ s}_{\mathrm{op}}$、$\mathsf{IO}_{\mathrm{op}}^{s\ s,}$ 和 $\mathsf{IO}_{\mathrm{op}}^{f\ f,}$。

根据 S-图计算的对称性，$(w_1, w_2) \in \mathsf{IO}_{\mathrm{op}}^{s\ f,}$ 当且仅当 $(w_2, w_1) \in \mathsf{IO}^{f,\ \ s}_{\mathrm{op}}$。因此，要理解关系 IOop，只需理解这两个子集中的一个。

此外，平凡计算的存在意味着 $\mathsf{IO}_{\mathrm{op}}^{s\ s,}$ 和 $\mathsf{IO}_{\mathrm{op}}^{f\ f,}$ 都包含 $\mathbb{I}$。

对于任意对象 Obj、任意操作 op $\in$ Obj 以及任意外部带 $a \in \mathcal{I}_{\mathrm{op}}^{\mathrm{ext}}$，若 a 满足以下条件，则称其在 op 中不可变：只要 $(w_1, s_1, w_2, s_2) \in \mathsf{IO}_{\mathrm{op}}$，就有 $w_1(a) = w_2(a)$。

例5.4（复制操作）。对于任意有限子集 $A \subseteq \mathcal{A}^*$，考虑对象 copy^A，它由一个同名操作标识，其关联的 S-图如图3所示。当集合 A 的含义明确时，copy^A 简记为 copy。

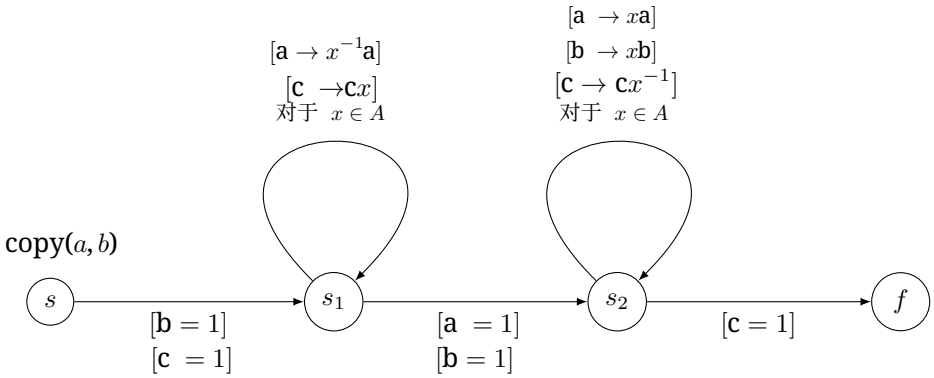


FIGURE 3. 复制操作(a, b)

虽然可以从图的内容推断出 $\mathcal{I}_{\mathrm{copy}} = \{a, b, c\}$，但定义分割 $\mathcal{I}_{\mathrm{copy}} = \mathcal{I}_{\mathrm{copy}}^{\mathrm{ext}} \sqcup \mathcal{I}_{\mathrm{copy}}^{\mathrm{val}} \sqcup \mathcal{I}_{\mathrm{copy}}^{\mathrm{int}}$ 并不一目了然。为了解决这个问题，我们引入一种记号约定，以便高效地表示这些集合。

给定一个对象 Obj 和一个操作 op $\in$ Obj，描绘与 op 相关的 S-图的图形标题为 Obj $[a_1, \ldots, a_k].\mathsf{op}(b_1, \ldots, b_\ell)$，其中 $[a_1, \ldots, a_k]$ 是 $\mathcal{I}_{\mathrm{Obj}}^{\mathrm{val}}$的某种枚举，而 $(b_1, \ldots, b_\ell)$ 是 $\mathcal{I}_{\mathrm{op}}^{\mathrm{ext}}$的某种枚举。如果 $\mathcal{I}_{\mathrm{Obj}}^{\mathrm{val}} = \emptyset$，则省略括号，因此该图记作 Obj.op($\mathcal{I}_{\mathrm{val}}^{\mathrm{ext}}$)。最后，如果 Obj 是一个真操作，则省略对该对象的引用，改用它的唯一操作来标识它。

So, 如 Figure 3 is titled $\mathrm{copy}(a, b)$, it is是一个真操作 tion with $\mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{=_{\mathrm{copy}}}\ \{a, b\}$ and $\mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{=_{\mathrm{copy}}}\ \{c\}$。至于 $\mathcal{A}_{\mathrm{copy}} = \{A_a^{\mathrm{copy}}, A_b^{\mathrm{copy}}, A_c^{\mathrm{copy}}\}$，还需要解释图3中使用的另一种记号。在状态 s_1 和 s_2上的每个环的标签上都写有短语“for $x \in A$”，尽管它并不是相应动作的片段。这个表达表示，该边代表多条尾端和头端与图示边相同的边；在本例中，它规定这些边与 A的元素一一对应，且动作按照图中所示的方式构造。当然，图中还包含为这些边隐式构造的逆边。因此，尽管图示中的图看起来很简单，$\mathcal{G}_{\mathrm{copy}}$ 却由 $4|A| + 6$ 条边组成。

因此，由于 A 的每个字母都会出现在一个提及 $\mathcal{I}_{\mathrm{copy}}$各个指标的片段中，所以可以得出 $A_a^{\mathrm{copy}} = A_b^{\mathrm{copy}} = A_c^{\mathrm{copy}} = A$。

$\mathsf{SF}_{\mathrm{copy}}$中的元素，即起始状态和终止状态 copy_s 和 copy_f，在图3中分别简记为 s 和 f。在下文中，当

通过图示定义操作时，通常遵循这一标准约定，因为它们所属的操作是显而易见的。不过，这意味着当存在多个操作时，会有多个顶点标记为 s ，也会有多个顶点标记为 f，因此值得指出的是，这些标记相同的状态并不视为同一状态。

按照这些约定，并且已理解 copy 的构成，现在可以验证 copy 满足条件 (O)，因而是一个定义良好的操作。注意，尾位于 $\mathrm{SF}_{\mathrm{copy}}$ 中的 copy 边只有两条：图 3 中所示的边 $e = (s, s_1, \text{动作})$，以及其逆在图 3 中所示的边 $e' = (f, s_2, \text{动作}')$。因此，对于 $\mathrm{SF}_{\mathrm{copy}}$ 中元素之间的任意路径 $\rho = e_1, \ldots, e_N$，必有 $e_1, e_N^{-1} \in \{e, e'\}$。但根据图示中 e 和 e' 的定义，立即可得 $[\mathsf{c} = 1] \in e$ 且 $[\mathsf{c} = 1] \in e'$。因此，条件 (O) 得到满足。

在本例中引入的记号 $\mathsf{Obj}[a_1, \ldots, a_k].$操作$(b_1, \ldots, b_\ell)$ 中，值带和外部带的枚举使得能够高效地重命名这些带。因此，在 copy 的例子中，给定指标 $i, j \in \mathcal{I}^*$，$\mathsf{copy}^A(i, j)$ 表示图 3 中的图，其中 a 重命名为 i，b 重命名为 j，并且当 $c = i$ 或 $c = j$ 时，c 重命名为 c'（以保持内部带和外部带互不相交）。此外，如果 $i = x$ 或 $j = x$，则图 3 中用于表示 A 的任意字母的不定元 x 可能需要重命名。采用这一记号后，注意 $\mathsf{copy}(a, b) \neq \mathsf{copy}(b, a)$；下方图 4 给出了 copy^A 的示例。

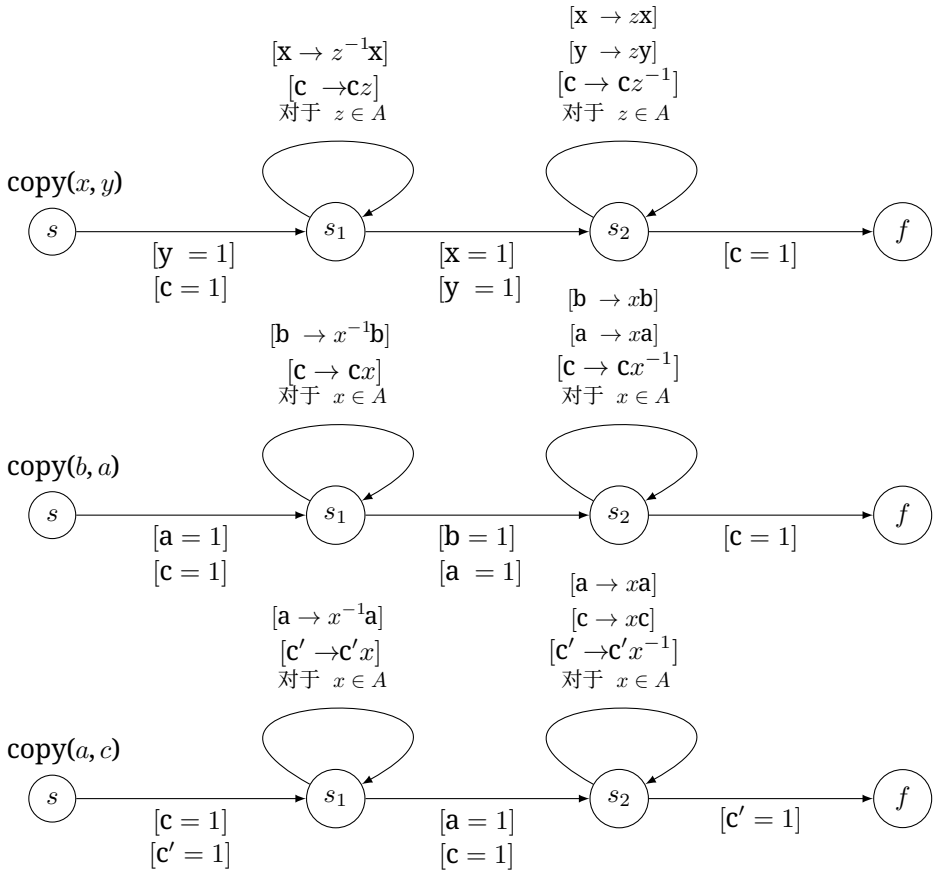


FIGURE 4. 操作 $\mathsf{copy}(x, y)$、$\mathsf{copy}(b, a)$ 和 $\mathsf{copy}(a, c)$。

此外，为简便起见，在提及字 $v \in L^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$ 时，v 的坐标将按枚举顺序列出，即 $v = (v_1, \ldots, v_k)$，其中对于所有 $i \in \overline{k}$，$v_i = v(a_i)$。类似地，对于任意

$w \in L_{\mathrm{op}}^{\mathrm{ext}}$, $w = (w_1, \ldots, w_\ell)$，其中对于所有 $i \in \overline{\ell}$， $w_i = w(b_i)$。因此，就 copy 而言，元素 $w \in L_{\mathrm{copy}}^{\mathrm{ext}}$ 记作 $w = (w_a, w_b)$，其中 $w_a = w(a)$ 且 $w_b = w(b)$。

引理 5.5。设 ε 是 copy $= \mathrm{copy}^A(a,b)$ 在配置 (w_1, t_1) 与 (w_2, t_2) 之间的一次计算。对于 $i = 1, 2$，集合 $w_i = (w_i^a, w_i^b, w_i^c)$，其中 $w_i^j = w_i(j)$ 对于 $j \in \mathcal{I}_{\mathrm{copy}}$。

(1) 假设 $t_1 = \mathrm{copy}_s$。若 $w_1^b \neq 1$ 或 $w_1^c \neq 1$，则 $w_1 = w_2$ 且 $t_1 = t_2$(2) $w_1^c w_1^a = w_2^c w_2^a$(3) 若 $t_1 \in \{s_2, \mathrm{copy}_f\}$ 且 $w_1^a \neq w_1^b$，则 $t_2 \in \{s_2, \mathrm{copy}_f\}$ 且 $w_2^a \neq w_2^b$。此外，在这种情况下 $\left(w_1^a\right)^{-1} w_1^b = \left(w_2^a\right)^{-1} w_2^b$。

证明。

(1) 令 $n = |\varepsilon|$，并假设 $n > 0$。那么， ε 的计算路径为 $\rho_\varepsilon = e_1, \ldots, e_n$，因此 e_1 可应用于 (w_1, t_1)。特别地，由于 $t_1 = \mathrm{copy}_s$， e_1 必须是以 copy_s 为尾的唯一一条边。但由于这条边的守卫片段为 $[\mathsf{b} = 1]$ 和 $[\mathsf{c} = 1]$，这意味着 $w_1^b = w_1^c = 1$。

因此，若 $w_1^b \neq 1$ 或 $w_1^c \neq 1$，则 $n = 0$，所以 ε 是平凡计算。

(2) 设 (v_1, p_1) 是 copy 的一个配置，并设 e 是一条可应用于 (v_1, p_1) 的边。令 $(v_2, p_2) = e(v_1, p_1)$，并按陈述中的定义令 $v_i = (v_i^a, v_i^b, v_i^c)$。那么，只需证明 $v_1^c v_1^a = v_2^c v_2^a$。

如果 e 没有变换片段，这显然成立，因此只需假设 e 是在 s_1 或 s_2处的一个环。但此时存在 $x \in A \cup A^{-1}$ 使得 $v_2^a = x^{-1} v_1^a$ 且 $v_2^c = v_1^c x$。因此， $v_2^c v_2^a = v_1^c v_1^a$。

(3) 与 (2) 中一样，设 (v_1, p_1) 是一个配置，设 e 是适用于 (v_1, p_1) 的一条边，并令 $(v_2, p_2) = e(v_1, p_1)$，其中 $v_i = (v_i^a, v_i^b, v_i^c)$ 对于 $i = 1, 2$。假设 $p_1 \in \{s_2, \mathrm{copy}_f\}$。

如果 e 不包含变换片段，那么 $v_1^a = v_2^a$ 且 $v_1^b = v_2^b$，因此立即有$\left(v_1^a\right)^{-1} v_1^b = \left(v_2^a\right)^{-1} v_2^b$。否则， e必须是位于 s_2处的一个环；但此时存在 $x \in A \cup A^{-1}$使得 $v_2^a = x v_1^a$ 且 $v_2^b = x v_1^b$，因此同样有 $\left(v_2^a\right)^{-1} v_2^b = \left(v_1^a\right)^{-1} v_1^b$。

记 $\varepsilon = \big((u_0, q_0)\ e_1, (u_1, q_1)\ e_2, \ldots, e_n, (u_n, q_n)\big)$ 为 $n \geq 0, (u_0, q_0) = (w_1, t_1)$，以及 $(u_n, q_n) = (w_2, t_2)$。令 $m \in \{0, \ldots, n\}$ 为满足 $q_m \in \{s_2, \mathrm{copy}_f\}$ 的最大索引。

假设 $m < n$。那么对所有 $i \in \overline{m+1}$， e_i 的尾是 s_2 或 copy_f，因此上述论证得出 $\left(u_i^a\right)^{-1} u_i^b = \left(w_1^a\right)^{-1} w_1^b$。特别地，由于 $w_1^a \neq w_1^b$，所以 $u_m^a \neq u_m^b$。但尾位于 $\{s_2, \mathrm{copy}_f\}$ 且头位于 $\{s_1, \mathrm{copy}_s\}$ 的边只有一条，即从 s_2 到 s_1的边 e，其守卫片段为 $[\mathsf{a} = 1]$ 和 $[\mathsf{b} = 1]$。因此，由于 $u_m^a \neq u_m^b$ 且 $q_m \in \{s_2, \mathrm{copy}_f\}$， e 不适用于 (u_m, q_m)。于是， $e_{m+1} \neq e$，所以 $q_{m+1} \in \{s_2, \mathrm{copy}_f\}$，这与$m$的选取矛盾。

Thus, $m = n$, and so $t_2 \in \{s_2, \mathrm{copy}_f\}$ and $\left(w_2^a\right)^{-1} w_2^b = \left(w_1^a\right)^{-1} w_1^b$, implying $w_2^a \neq w_2^b$.

□

引理 5.6. 设 copy $= \mathrm{copy}^A(a,b)$。那么关系 $\mathsf{IO}^{\mathrm{copy}}$ 如下：

$$\mathsf{IO}_{\mathrm{copy}}^{s,s} = \mathsf{IO}_{\mathrm{copy}}^{f,f} = \mathbb{I};$$
$$\mathsf{IO}_{\mathrm{copy}}^{s,f} = \big\{\big((w,1),(w,w)\big) \mid w \in F(A)\big\}.$$

特别地，在 $\mathrm{copy}(a,b)$ 中，外部带 a 是不可变的。

证明。设 $(w_1, w_2) \in \mathsf{IO}_{\mathrm{copy}}^{\sigma\tau}$，对于 $\sigma, \tau \in \{s, f\}$，并记 $w_i = (w_i^a, w_i^b)$ 为 $i = 1, 2$，其中$w_i^j = w_i(j)$ 对于 $j \in \mathcal{I}_{\mathrm{copy}}^{\mathrm{ext}}$。因此，存在一次 copy 的计算 ε，其发生在配置 $(w_1^a, w_1^b, 1, \mathrm{copy}_\sigma)$ 和 $(w_2^a, w_2^b, 1, \mathrm{copy}_\tau)$ 之间。

根据引理 5.5(2)， $w_1^a = w_2^a$，因此 a 是不可变的。

假设 $\sigma = \tau = s$。如果 $w_1^b \neq 1$ 或 $w_2^b \neq 1$，那么引理 5.5(1) 和 S-图计算的对称性意味着 $w_1 = w_2$。否则，$w_1^b = w_2^b = 1$，因此同样有 $w_1 = w_2$。因此，$\mathsf{IO}^{s\,s}_{\mathrm{copy}} = \mathbb{I},$ 。

接下来，假设 $\sigma = \tau = f$。若 $w_i^b \neq w_i^a$对于某个 $i = 1, 2$ 成立，则由引理 5.5(3)可知 $\left(w_1^a\right)^{-1} w_1^b = \left(w_2^a\right)^{-1} w_2^b$；但 $w_1^a = w_2^a$，这意味着 $w_1^b = w_2^b$，因此 $w_1 = w_2$。否则，$w_1^b = w_1^a = w_2^a = w_2^b$，因此同样有 $w_1 = w_2$。所以，$\mathsf{IO}^{f\,f}_{\mathrm{copy}} = \mathbb{I},$ 。

最后，假设 $\sigma = s$和 $\tau = f$。由引理 5.5(1) 和 (3)，$w_1^b = 1$和 $w_2^b = w_2^a$。因此，$\mathsf{IO}^{s\,f}_{\mathrm{copy}} \subseteq \big\{(, (w, 1), (w, w)\big) \mid w \in F(A)\big\}$。

F对于相反的包含关系，将 $\mathsf{copy}^A(a, b)$ 的边记作：

- e_1 是从 copy_s 到 s_1 的边
- $e_{1,\ x}$ 是位于 s_1 、对应于 $x \in A$ 的环
- e_t 是从 s_1 到 s_2 的边
- $e_{2,\ x}$ 是位于 s_2 、对应于 $x \in A$ 的环
- e_2 是从 s_2 到 copy^f 的边
- 所有其他边均表示为上述某条边的逆

固定 $w \in F(A)$，并令 $w = x_1^{\delta_1} \dots x_n^{\delta_n}$ 满足 $x_i \in A$ 和 $\delta_i \in \{\pm 1\}$。然后，考虑 copy 中的路径：

$$\rho_w = e_1, e_{1,x_1}^{\delta_1}, \dots, e_{1,x_n}^{\delta_n}, e_t, e_{2,x_n}^{\delta_n}, \dots, e_{2,x_1}^{\delta_1}, e_2$$

因此，只需检查是否存在一个由 ρ_w 支持的计算 ε_w，其初始配置为 $((w, 1), \mathsf{copy}_s)$，终止配置为 $((w, w), \mathsf{copy}^f)$。

□

请注意，上文并未明确提及 $\mathsf{IO}^{f}_{,\mathrm{copy}^{\,s}}$。这是因为，如前所述，输入输出关系的对称性允许我们从任意对象的操作 op 的 $\mathsf{IO}^{s\,f}_{\mathrm{op}\,,}$ 推出 $\mathsf{IO}^{f}_{,\mathrm{op}^{\,s}}$。在本例中，这一关系明确表示为：

$$\mathsf{IO}^{f,s}_{\mathrm{copy}} = \big\{\big((w, w), (w, 1)\big) \mid w \in F(A)\big\}$$

通俗地说，引理 5.6 指出，从 $\mathsf{copy}(a, b)$ 的起始状态到终止状态的任何计算，都会将带 a 的内容复制到最初为空的带 b 上。相应地，从终止状态到起始状态的任何计算，都必须以带 a 和 b 的内容相同为前提；此时，计算会擦除带 b 上的字。

虽然 copy 展示了一种有用的适当操作，但它并未揭示包含值带或多个操作的对象的复杂性。下文将对此加以补充，并定义一类同时包含值带和多个操作的对象。这类对象将在后续论证中发挥重要作用，也确实会在改进 [14] 界的核心创新中扮演重要角色。

定义 5.7. 设 $\mathcal{C} = \big(\mathcal{I}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{val}},\ \mathsf{op}_1, \mathsf{op}_2\big)$ 是一个对象，且 $\mathcal{I}_{\mathsf{op}_1}^{\mathrm{ext}} = \mathcal{I}_{\mathsf{op}_2}^{\mathrm{ext}} = \emptyset$。假设存在 $\mathcal{C}$ 的值的一个枚举 $\mathsf{VAL}_{\mathcal{C}} = \{v_i\}_{i=0}^{\infty}$，满足 v_0 是初始值，并且关系 $\mathsf{IO}^{\mathsf{op}_1}$ 和 $\mathsf{IO}^{\mathsf{op}_2}$ 定义如下：

$$\begin{aligned}
&\mathsf{IO}^{s,s}_{\mathrm{op}_j} = \mathsf{IO}^{f,f}_{\mathrm{op}_j} = \mathbb{I};\\
&\mathsf{IO}^{s,f}_{\mathrm{op}_1} = \big\{(v_i, v_{i+1}) \mid i \geq 0\big\};\\
&\mathsf{IO}^{s,f}_{\mathrm{op}_2} = \big\{(v_i, v_i) \mid i \geq 1\big\}.
\end{aligned}$$

那么，$\mathcal{C}$ 称为一个计数器。

在这种情况下，操作 op_1 和 op_2 分别记作 inc 和 check，称为计数器 $\mathcal{C}$ 的递增操作和正性检查操作。

通俗地说，若某个 inc 的输入输出计算的计算路径从 inc_s 到 inc_f，那么它会使值增加 1（前提是值带中的内容最初表示一个值）。因此，这种计算称为递增操作，或简称递增。由此可知，这种计算的逆本质上会使值减少 1，因此称为递减操作，或简称递减。

同样，若检查操作的计算路径介于 check_s和 check_f 之间，则其输入输出计算返回相同的值，只要该值不是初始值。因此，这种计算称为正性检查。与递增操作不同，由于逆计算发挥相同的本质作用，术语上不作区分。

值得强调的是，尽管命名约定如此，“递增”和“检查”并不代表特定的操作，而是代表各种操作对；这些操作对构成一个对象，其值满足定义中的条件。然而，由于没有明确构造出这类操作对的示例，因此从先验角度看，无法确定该定义所描述的对象类是否非空。

另一方面，请注意，根据其定义，集合 $\mathrm{VAL}_{\mathcal{C}}$ 在以下两种意义上与输入输出关系相容：

(1) 给定 $w_1, w_2 \in L_{\mathcal{C}}^{\mathrm{val}}$和 $p, q \in \{s, f\}$，$(w_1, w_2) \in$ 输入输出$^{p,\ q}$递增 $\cup$ 输入输出$^{p,\ q}$检查，当且仅当$w_2 \in \mathrm{VAL}_{\mathcal{C}}$时，$w_1 \in \mathrm{VAL}_{\mathcal{C}}$。(2) 对任意 $n \in \mathbb{N} - \{0\}$，v_n，均可通过反复应用递增操作从 v_0 得到。

此外，请注意，关系 $\mathrm{IO}_{\mathrm{inc}}$ 和 $\mathrm{IO}_{\mathrm{check}}$ 分别是 $\mathrm{VAL}_{\mathcal{C}} \times \mathrm{SF}_{\mathrm{inc}}$和 $\mathrm{VAL}_{\mathcal{C}} \times \mathrm{SF}_{\mathrm{check}}$上的等价关系。因此，先验上也没有理由认为由“计数器”一词描述的对象类是空的。

下面的例子开始消除这种歧义，因为它给出了一个构造，稍后将证明它是一个计数器。

例5.8（计数器）。考虑由图 5 所示的两个操作组成的对象 $\mathrm{Counter}_0$。姑且不拘泥于术语，这些操作分别命名为 check 和 inc；不难看出，这样命名是因为 $\mathrm{Counter}_0$ 是一个计数器，且这两个操作的功能正如其名称所示。

尽管上述描述引入了 $\mathrm{Counter}_0$，，仍有必要检查它是否确实是一个对象。

正如图中的记号 $\mathrm{Counter}_0[a]$ 所示，该对象有一条记作 a 的值带。此外，记号 check() 和 inc() 表明，这两个操作都没有外部带。因此，这些操作中使用的所有其他索引都表示内部带，所以 $\mathcal{I}_{\mathrm{check}}^{\mathrm{int}} = \mathcal{I}_{\mathrm{inc}}^{\mathrm{int}} = \{b, c, d\}$。

对于操作 $\in$ {检查、递增}，令 $\mathcal{A}_{\mathrm{op}} = (A_i^{\mathrm{op}})_{i \in \mathcal{I}_{\mathrm{op}}}$ 为由图 5 指定的最小硬件所给出的操作字母表集合。观察可知，在每个图中，片段中出现的 $\mathcal{A}^*$ 的唯一字母是 δ，并且每个指标至少有一个提及它的片段使用了这个字母。因此，$A_a^{\mathrm{op}} = A_b^{\mathrm{op}} = A_c^{\mathrm{op}} = A_d^{\mathrm{op}} = \{\delta\}$。特别地，$A_a^{\mathrm{check}} = A_a^{\mathrm{inc}}$，因此 $\mathrm{Counter}_0$ 是一个对象，当且仅当每个图都满足条件 (O)。

L引理 5.9。对应于检查和递增的 S-图满足条件 (O *).*

证明。设 $\rho = e_1, \ldots, e_N$ 是检查中从 s_1 到 s_2 的一条路径，其中 $s_1, s_2 \in \mathrm{SF}_{\mathrm{check}}$。此外，令 $i \in \{b, c, d\}$，并假设存在 $j \in \overline{N}$，使得 e_j 含有一个提及 i 的片段。由 (O) 的对称性，只需证明：若 $m \in \overline{N}$ 是使得 e_m 含有一个提及 i 的片段的最小指标，那么 e_m 包含片段 $[\mathrm{i} = 1]$。

假设 $s_1 =$ 检查$_s$。那么，e_1 必定是尾为检查$_s$的唯一边。因此，e_1 包含守卫片段 $[\mathrm{b} = 1]$ 和 $[\mathrm{c} = 1]$，所以只需假设 $i = d$。注意，检查中的任何包含提及 d 的片段的边，其尾都是 s_4、s_5或 s_6。该结构的

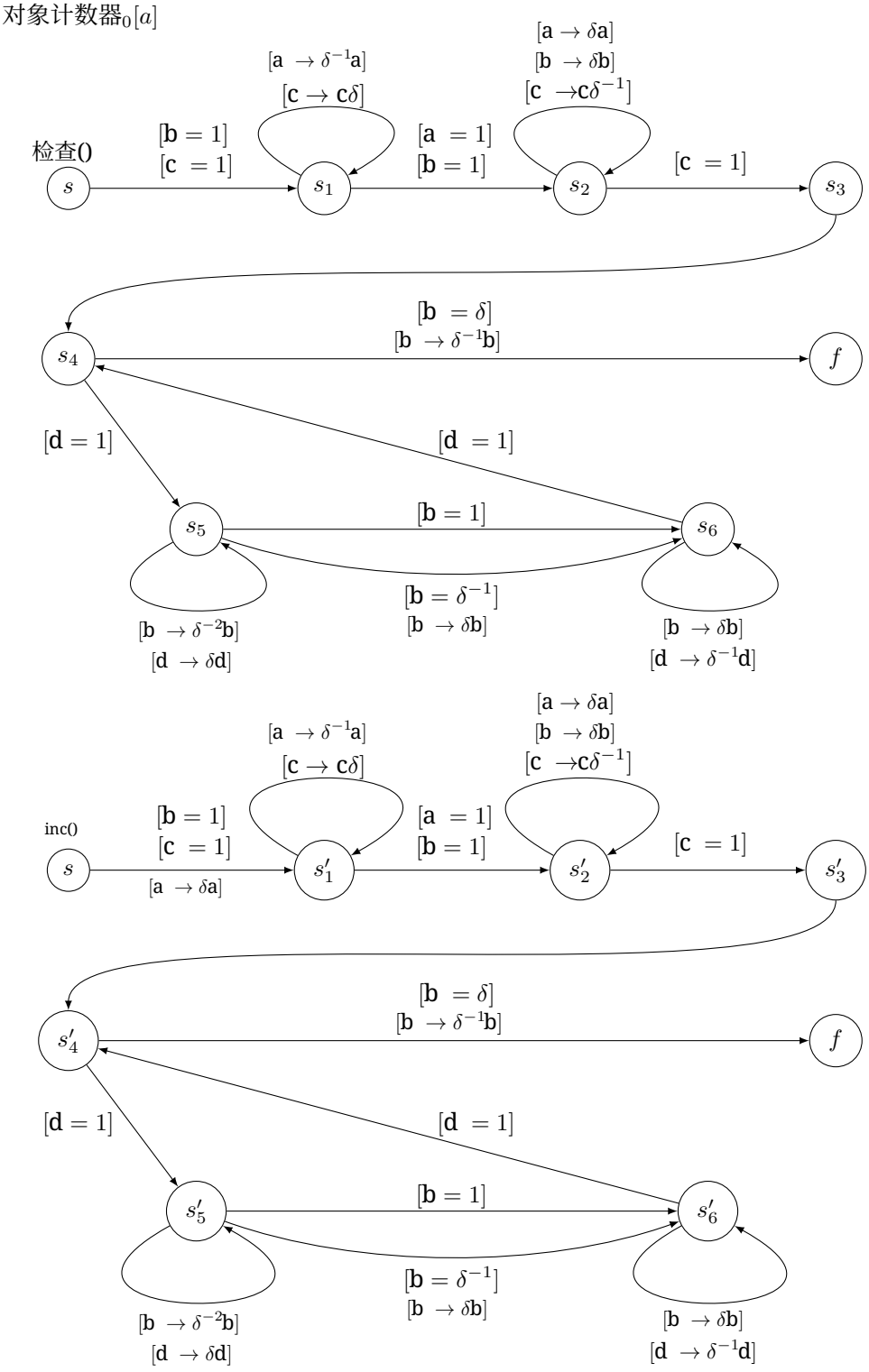


FIGURE 5. 一个计数器对象计数器$_0[a]$。

图由此可知， e_m 必须具有尾 s_4；但满足这一条件的仅有两条边，它们都包含守卫片段 $[\mathsf{d}=1]$。

反过来，假设 $s_1=$ 检查f。那么，边 e_1 必须包含守卫片段 $[\mathsf{b}=1]$，因此只需假设 $i\in\{c,d\}$。如果 $i=d$，那么同样， e_m 必须具有尾 s_4，因而必须包含守卫片段 $[\mathsf{d}=1]$；如果 $i=c$，则类似的论证可知， e_m具有尾 s_3，因而包含守卫片段 $[\mathsf{c}=1]$。

因此，检查满足条件 (O)。对于递增，注意到这两个图之间唯一的差异是变换 $[\mathsf{a}\to\delta\mathsf{a}]$，它包含在尾为 inc_s 的边上（以及逆边上对应的变换片段）；而且，由于 a 不是内部的，同样的论证表明条件 (O) 得以满足。

□

现在，虽然引理 5.9 表明 $\mathsf{Counter}_0$ 是一个对象，但要验证它是一个计数器，还需要充分理解其操作的 IO 关系。为此，采用与引理 5.5 和引理 5.6 的证明中类似的论证，可以证明 $\mathrm{VAL}_{\mathrm{Counter}_0}=\{\delta^i\mid i\geq 0\}$，并且对于所有 i，令 $v_i=\delta^i$，则 $\mathrm{IO}_{\mathrm{check}}$ 和 $\mathrm{IO}_{\mathrm{inc}}$ 满足定义 5.7 所规定的性质。

然而请注意，由 $\{\mathsf{check}_s,s_1,s_2,s_3\}$ 诱导的 check 子图，实际上与图3中 $A=\{\delta\}$ 对应的 $\mathsf{copy}^A(a,b)$ 几乎完全相同，而 inc 的对应子图只在一个片段上有所不同。类似地，由 $\{s_4,s_5,s_6,\mathsf{check}_f\}$ 诱导的 check 子图，实际上与由 $\{s_4',s_5',s_6',\mathsf{inc}_f\}$ 诱导的 inc 子图几乎完全相同，并且可以将它们视为某个其他适当操作。因此，充分理解与这些“互补”子图对应的操作，实际上就能描述 $\mathrm{IO}_{\mathrm{check}}$ 和 $\mathrm{IO}_{\mathrm{inc}}$。

这些观察表明，对于这些特定操作，按照引理 5.5 和引理 5.6 的方式处理其 IO 关系或许是多余的。因此，证明将推迟到有更高效的工具可用时再进行。取而代之的是，首先引入 S-图的一种推广，其构造显然源自这个动机示例。从这些装置发展出的术语将有助于更简洁地表示所关注的对象，并使论证更加精练；后文重新考察本例中类似操作的 IO 关系时便会看到这一点。

6. S^*-graphs and Objects of Higher degree

回忆一下， $\mathcal{H}^*$ 表示所有可能的 S-图硬件；对于任意 $\mathcal{H}\in\mathcal{H}^*$，$\mathsf{ACT}_{\mathcal{H}}$ 表示 $\mathcal{H}$ 上所有动作的集合。

令 $\mathsf{ACT}_0=\bigsqcup_{\mathcal{H}\in\mathcal{H}^*}\mathsf{ACT}_{\mathcal{H}}$ 表示所有可能硬件上的全部动作构成的集合。类似地，令 SGRAPH_0 表示所有 S-图构成的集合，OP_0 表示所有操作构成的集合，而 OBJ_0表示所有可能硬件上的全部对象构成的集合。

今后，ACT_0 中的元素称为 0 度动作。同样，SGRAPH_0, OP_0, 和 OBJ_0 中的元素分别称为 S-图、0 阶操作和 0 阶对象。

下面的定义 6.1–6.5 定义任意度的实例、动作、 S-图、操作和对象。因此，对于任意 $n\geq 0$, 定义度为 n 的实例集合 INST_n。同样，对于 $n\geq 1$，分别定义所有度为 n的动作集合 ACT_n、度为 n 的 S- 图集合 SGRAPH_n、度为 n 的操作集合 OP_n，以及度为 n 的对象集合 OBJ_n。

正如 Obj_0 的元素由 op_0, 的元素构成，而 op_0, 的元素又由 SGRAPH_0, 的元素构成，SGRAPH_0, 的元素再由 act_0, 的元素构成，对任意度的定义也是以迭代方式逐步建立的。为便于进行这一构建，对所有 $n\geq 0$，定义 $\mathsf{inst}_n'=\bigsqcup_{j\in 0,\ n}\mathsf{inst}_j$。因此，当且仅当对所有 $0\leq j\leq n$, inst_j 都有定义时，inst_n' 才有定义。集合 act_n'、SGRAPH_n'、op_n'和 Obj_n' 也以类似方式定义。

定义 6.1（实例）。固定 $n \geq 0$，并假设 inst'_{n-1}、act'_n、SGRAPH'_n、op'_n和 Obj'_n 均已定义。

设 $\mathsf{Obj} \in \mathsf{OBJ}_n$，并假设 $\mu\colon \mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}} \to \mathcal{I}^*$ 是一个单射。那么，二元组 $\mathsf{inst} = (\mathsf{Obj}\ \mu)$ 称为一个 n 度实例。在这种情况下，单射 μ 记作 $\mu^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}$，称为 inst 的值带重命名映射，而其像记作 $\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}$。

请注意，若 Obj 是一个 0 阶对象，则指标集 $\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$ 已在上一节中定义。对于更高阶对象，$\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$ 起着类似的作用，并将在下面的定义 6.5 中迭代定义。

定义 6.2（动作）。固定 $n \geq 0$，并假设 ACT'_n、SGRAPH'_n、OP'_n、OBJ'_n 和 INST'_n均已定义。

设 $\mathsf{inst} = (\mathsf{Obj}\ \mu^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}) \in \mathsf{INST}_n$，且 $\mathsf{op} \in \mathsf{OP}_m$，满足 $\mathsf{op} \in \mathsf{Obj}$。假设 $\nu\colon \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}} \to \mathcal{I}^*$是一个单射，且其像与 $\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}$不相交。那么，三元组 $\mathsf{act} = (\mathsf{inst}, \mathsf{op}\ \nu)$ 称为一个在硬件 $\mathcal{H}_{\mathrm{op}}$ 上的 $n+1$ 度动作。在这种情况下，单射 ν 记作 $\mu^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{act}}$，称为 act 的外部带重命名映射，而其像记作 $\mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{act}}$。

注意，如果 $n = 0$（或者实际上，如果 Obj 是一个 0 阶对象），那么根据第 5 节的定义可知，Obj 由 0 阶操作组成，其中任意 $\mathsf{op} \in \mathsf{Obj}$ 都被视为硬件 $\mathcal{H}_{\mathrm{op}} = (\mathcal{I}_{\mathrm{op}}, \mathcal{A}_{\mathrm{op}})$ 上的一个 0 阶 S-图，且 $\mathcal{I}_{\mathrm{op}}$ 可以划分为外部带、值带和内部带的集合。根据下文的定义 6.4 和 6.5，高阶对象和操作也以类似方式构造：度为 $n+1$的对象由一组度数至多为 $n+1$ 的操作组成，这些操作由该度数的 S-图构造而成。因此，上文中隐含地假定了 $m \leq n$。

设 $\mathsf{act} = (\mathsf{inst}, \mathsf{op}\ \mu^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{act}}) \in \mathsf{ACT}_{n+1}$ and $i \in \mathcal{I}^*$。如果 $i \in \mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}} \sqcup \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{act}}$，则称 act 提及 i。如果 $i \in \mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}$，则 i 被提及为 inst 的一个值；如果 $i \in \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{act}}$，则 i 被提及为一个变量。此外，如果 op 中的 $\left(\mu^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}}\right)^{-1}(i)$ 是不可变的，则 i 被提及为一个不可变变量。与上文一样，0 阶操作的不可变外部带已在上一节定义，而高阶操作的不可变外部带将在下文定义。

注意，提及索引 i 的动作概念 $\mathsf{act} \in \mathsf{ACT}_0$ 已在前文定义。为使术语一致，在这种情况下，若 act 提及 i，则称其将 i 作为变量；若 act 中提及 i 的任意片段都是守卫或平凡片段，则称 i 是不可变变量。

与 0 阶操作类似，任意度的操作 op 都有一个关联的外部语言 $L^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}} = \bigtimes_{i \in \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}}} F(\mathcal{A}_{\mathrm{op}}(i))$。同样，高阶对象 Obj 有一个关联的带语言 $L^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$，对于任意 $\mathsf{op} \in \mathsf{Obj}$，该语言由 $\bigtimes_{i \in \mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}} F(\mathcal{A}_{\mathrm{op}}(i))$ 给出。

因此，对于 $\mathsf{act} = (\mathsf{inst}, \mathsf{op}\ \mu^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{act}}) \in \mathsf{ACT}_{n+1}$，带重命名映射自然扩展为语言映射，即单射 $\mu^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{act}}\colon L^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}} \to \bigtimes_{i \in \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{act}}} F(\mathcal{A}^*)$ 和 $\mu^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}\colon L^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}} \to \bigtimes_{i \in \mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}} F(\mathcal{A}^*)$，它们由重新索引给出。这些映射的像分别记为 $L^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{act}}$ 和 $L^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}$。

因此，$L^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}} = \bigtimes_{i \in \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{act}}} F\left(\mathcal{A}_{\mathrm{op}}\left((\mu^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{act}})^{-1}(i)\right)\right)$，$L^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}$也同理。

定义 6.3（S-图）。固定 $n \geq 0$，并假设 ACT'_{n+1}、SGRAPH'_n、OP'_n、OBJ'_n 和 INST'_n 已定义。

设 $\mathcal{H} = (\mathcal{I}, \mathcal{A})$ 是一个 S-图硬件，且 INST 是 INST'_n 的有限子集，使得 $\mathsf{INST} \cap \mathsf{INST}_n \neq \emptyset$。此外，设 $\mathcal{G} = (S, E)$ 是一个有限有向图，其中可能包含平行边和环，并配备标记函数 $\mathsf{Lab}\colon E \to \mathsf{ACT}'_{n+1}$。因此，每条边 $e \in E$ 都可识别为三元组 (s_1, s_2, act)，其中 $t(e) = s_1$，$h(e) = s_2$，且 $\mathsf{Lab}(e) = \mathsf{act}$。

$\mathcal{G}$ 的 0-动作集合是 $\mathsf{ACT}^0_{\mathcal{G}} = \mathsf{Lab}(E) \cap \mathsf{ACT}_0$，，也就是说，是标记 $\mathcal{G}$ 中度为 0 的边的动作集合。反过来，$\mathcal{G}$ 的正动作集合取为 $\mathsf{ACT}_{\mathcal{G}} = \mathsf{Lab}(E) - \mathsf{ACT}^0_{\mathcal{G}}$。

假设满足以下条件：

(1) 若 act $=$(inst, op $\mu_{\text{act}}^{\text{ext}}$) $\in$ACT$_{\mathcal{G}}$，则 inst $\in$INST。(2) 若 inst $\in$ INST，则 $\mathcal{I}_{\text{inst}}^{\text{val}} \subseteq \mathcal{I}$。(3) 对所有 $e \in E$，若 Lab(e) 是作用于硬件 $\mathcal{H}_e \in \mathcal{H}^*$上的动作，则 $\mathcal{H}_e \leq \mathcal{H}$；当 Lab($e$) $\in$ ACT$_{\mathcal{G}}^0$ 时等号成立。(4) 若 $e=(s_1, s_2,$ act) $\in E$ 且 act $\in$ACT$_{\mathcal{G}}^0$，则 $e^{-1}=(s_2, s_1,$ act$^{-1}) \in E$。(5) 若 inst$_1$,inst$_2 \in$ INST，且满足 inst$_1 \neq$ inst$_2$,，则 $\mathcal{I}_{\text{inst}_1}^{\text{val}} \cap \mathcal{I}_{\text{inst}_2}^{\text{val}} = \emptyset$。(6) 对于 inst $\in$ INST、act $\in$ ACT$_{\mathcal{G}} \cup$ACT$_{\mathcal{G}}^0$ 以及 $i \in \mathcal{I}^*$，若 $i \in \mathcal{I}_{\text{inst}}^{\text{val}}$ 且 act 将 i 作为变量提及，则 act 将 i 作为不可变变量提及。

于是，$\mathcal{G}$称为在 ($\mathcal{H}$, INST) 上度为 $n+1$ 的 S-图。在这种情况下，实例集合 INST 记为 INST$_{\mathcal{G}}$，以表示它与 $\mathcal{G}$ 的关系。

请注意，如果允许 INST$_{\mathcal{G}} = \emptyset$，定义 3.2 中度为 0 的 S-图的定义与此处的定义相符。也就是说，当且仅当满足条件 (3) 和 (4) 时，$\mathcal{G} = (S, E)$ 是硬件 $\mathcal{H}$ 上的 S-图（度为 0）；其他所有条件均自动满足。因此，为保持一致性，以下将此作为度为 0 的 S-图的定义。

与前几节的记号一致，若标记边 e 的动作提及索引 i，则称度为 $n+1$ 的 S-图中的边 e 提及索引 i。

上面的条件 (2) 和 (3) 描述了硬件与度为 $n+1$ 的 S-图之间的“兼容性”，类似于例 3.6 中讨论的硬件与 0 阶动作之间的兼容性。因此，由于 $\mathcal{H}^*$ 关于偏序 $\leq$ 构成完备交半格，对于任意 $\mathcal{G} \in$ SGRAPH^{n+1}，都存在与 ACT$_{\mathcal{G}} \cup$ACT$_{\mathcal{G}}^0 \cup$INST$_{\mathcal{G}}$ 兼容的最小硬件 $\mathcal{H}_{\mathcal{G}} = (\mathcal{I}_{\mathcal{G}}, \mathcal{A}_{\mathcal{G}})$；也就是说，当且仅当 $\mathcal{H}_{\mathcal{G}} \leq \mathcal{H}$ 时，$\mathcal{G}$ 是在 ($\mathcal{H}$, INST$_{\mathcal{G}}$) 上的 S-图。在以图示方式定义任意度的 S-图 $\mathcal{G}$ 时，会明确给出 INST$_{\mathcal{G}}$，而硬件则隐含地取为 $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}$。然而请注意，与前几节中度为 0 的图相比，这种隐式定义对于高阶 S-图在视觉上不够清晰，因为构成 $\mathcal{I}_{\mathcal{G}}$ 和 $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ 的某些索引和字母可能隐藏在引用 $\mathcal{G}$ 的正动作的边中。

注意，对于任意 $\mathcal{G} \in$SGRAPH^{n+1}，INST$_{\mathcal{G}}$ 中的一个实例可用于定义 ACT$_{\mathcal{G}}$中的多个动作。这简化了记号和表述，使我们能够在多种情境中引用特定对象，而不必每次都以不同方式重新命名它。

此外，INST$_{\mathcal{G}}$ 中的实例不必用于定义 ACT$_{\mathcal{G}}$中的任何动作。不过，这样的实例仍须满足条件 (2)、(5) 和 (6)。允许 INST$_{\mathcal{G}}$ 包含此类实例，将有助于处理高阶对象（见引理 7.10）。

最后请注意，正度的 S-图不再是对称的，因为由正度动作标记的边没有逆。这是因为从计算的角度来说，这条边将充当自身的逆。不过，当任意度的 S-图 $\mathcal{G}$ 以图示呈现时，如果画出一条边 $e=(s_1, s_2,$ act)，其中 act $\in$ACT$_{\mathcal{G}}^0$，则不会画出 e^{-1}，因为根据 (4)，它的存在已被隐含假定。

定义 6.4（操作）。固定 $n \geq 0$，并假设 ACT$'_{n+1}$、SGRAPH$'_{n+1}$、OP$'_n$、OBJ$'_n$ 和 INST$'_n$ 已定义。

设 $\mathcal{G}=(S, E)$ 是一个度为 $n+1$ 的 S-图，定义在 ($\mathcal{H}$, INST$_{\mathcal{G}}$) 上，用于 $\mathcal{H}=(\mathcal{I}, \mathcal{A})$，且其底层有向图是连通的。

对于所有满足 act $\in$ACT$_{\mathcal{G}}$ 的 $e=(s_1, s_2,$ act) $\in E$，将 e 的形式逆定义为三元组 $e^{-1}=(s_2, s_1,$ act)。在这种情况下，e^{-1} 的尾是 $t(e^{-1}) = s_2$，头是 $h(e^{-1}) = s_1$。此外，当且仅当 e 提及索引 i 时，e^{-1} 也提及该索引。

$\mathcal{G}$中的扁平化路径是由边和形式逆 $\rho = e_1, \ldots\ldots, e_N$ 组成的序列，使得对所有 $i \in \overline{N-1}$，$h(e_i) = t(e_{i+1})$。在这种情况下，如果 e_j 是 $j \in \overline{N}$ 的形式逆，则将 e_j^{-1} 设为 E 中使得 e_j 为其形式逆的唯一边；否则，按自然方式定义 e_j^{-1}。于是，$\rho^{-1} = e_N^{-1}, \ldots\ldots, e_1^{-1}$也是一条扁平化路径，称为 ρ的逆扁平化路径。

假设存在 s、$f \in S$ 以及一个满足以下条件的划分 $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\mathrm{ext}} \sqcup \mathcal{I}^{\mathrm{val}} \sqcup \mathcal{I}^{\mathrm{int}}$：

(O) 设 $\rho = e_1, \ldots, e_N$ 是 $\mathcal{G}$ 中一条从 s_1 到 s_2 的扁平化路径，其中 $s_1, s_2 \in \{s, f\}$。对于 $i \in \mathcal{I}^{\mathrm{int}}$，假设存在 $j \in \overline{N}$，使得 e_j 提及 i。那么存在 $l_1, l_2 \in \overline{N}$，满足 $l_1 \leq l_2$，使得 $\mathsf{Lab}(e_{l_1})$、$\mathsf{Lab}(e_{l_2}) \in \mathsf{ACT}_0$, $[\mathsf{i} = 1] \in e_{l_1} \cap \underline{e_{l_2}^{-1}}$，并且对于所有 $m \in \overline{N} - l_1, l_2$，$e_m$ 都不提及 i。

此外，假设对于所有 $\mathsf{inst} \in \mathsf{INST}_{\mathcal{G}}$，都有 $\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}} \subseteq \mathcal{I}^{\mathrm{val}} \sqcup \mathcal{I}^{\mathrm{int}}$。

那么，$\mathsf{op} = (\mathcal{G}, \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}, \mathcal{I}^{\mathrm{val}}, \mathcal{I}^{\mathrm{int}}, s, f)$ 称为度为 $n+1$ 的操作。

与 0 阶操作一样，op 的定义连通分支采用能够表明其与 op 关系的方式命名，即 $\mathsf{op} = (\mathcal{G}_{\mathrm{op}}, \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}}, \mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{op}}, \mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}, \mathsf{op}_s, \mathsf{op}_f)$，其中 $\mathcal{G}_{\mathrm{op}} = (S_{\mathrm{op}}, E_{\mathrm{op}})$ 是在 $(\mathcal{H}_{\mathrm{op}}, \mathsf{INST}_{\mathrm{op}})$ 上取的，适用于 $\mathcal{H}_{\mathrm{op}} = (\mathcal{I}_{\mathrm{op}}, \mathcal{A}_{\mathrm{op}})$。

高阶操作的记号和命名约定大多沿用为 0 阶操作所定义的约定；例如，子集 $\{\mathsf{op}_s, \mathsf{op}_f\} \subseteq S_{\mathrm{op}}$ 记为 $\mathsf{SF}_{\mathrm{op}}$，而构成 $\mathcal{I}_{\mathrm{op}}$ 划分的子集 $\mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}}$、$\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{op}}$ 和 $\mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}$ 被称为 op 的外部带、值带和内部带。

然而，一个值得注意的例外是不可变外部带的定义。与 0 阶操作一样，这些带的定义依赖于相应 S-图的 $n+1$ 度计算。因此，关于哪些外部带是不可变的讨论被推迟到下一节（见定义 7.13）。

然而，高阶 S-图的定义中的条件 (6) 依赖于不可变带，因此，为本节主要定义中的迭代步骤，必须先定义不可变带。目前，只需将度为 $n+1$ 的操作 op 的不可变带集合取为某个任意子集 $\mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}}$，便可解决这一问题；尽管这掩盖了不可变带的重要性，但足以满足迭代步骤的需要，而且很快就会加以完善。

最后，请注意这里的条件 (O) 定义与定义 5.1 中的定义有所不同。首先，此处对边提及某个索引这一概念作了推广，因为正度动作可以标记边。此外，这里要求标记 e_{l_1} 和 e_{l_2} 的动作度为 0；对于 0 阶操作而言，这一要求无需赘述。最后，此处图的“路径”是扁平化路径，它们是实际路径在技术上的推广，其用途将在定义 7.1 中显现。

综上所述，定义 5.1 中给出的条件 (O) 可以视为此处所给条件的一个特例，因此这些条件被赋予了相同的名称。此外，能够对扁平化路径求逆，使得此处也具有上一节所确立的同等程度的“对称性”。

定义 6.5（对象）。固定 $n \geq 0$，并假设 ACT'_{n+1}、SGRAPH'_{n+1}、OP'_{n+1}、OBJ'_n 和 INST'_n 已定义。

设 op_1、.....、$\mathsf{op}_k \in \mathsf{OP}'_{n+1}$，其中 $\mathsf{op}_m \in \mathsf{OP}_{n+1}$ 对某个 $m \in \overline{k}$ 成立。假设存在子集 $\mathsf{INST} \subseteq \mathsf{INST}'_n$ 和 $\mathcal{I}^{\mathrm{val}} \subseteq \mathcal{I}^*$，使得 $\mathsf{INST}^{\mathrm{op}_j} = \mathsf{INST}$ 且对所有 $j \in \overline{k}$，$\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{op}_j} = \mathcal{I}^{\mathrm{val}}$ 均成立。此外，假设对所有 $i \in \mathcal{I}^{\mathrm{val}}$，$\mathcal{A}_{\mathrm{op}_m}(i) = \mathcal{A}_{\mathrm{op}_\ell}(i)$ 对所有 m、$\ell \in \overline{k}$ 均成立。

于是，$\mathsf{Obj} = (\mathcal{I}^{\mathrm{val}}, \mathsf{INST}, \mathsf{op}_1, \ldots, \mathsf{op}_k)$ 被称为一个 $n+1$ 阶对象。

与 0 阶对象一样，使用记号 $\mathsf{op} \in \mathsf{Obj}$ 表示 op 是构成 Obj 的操作之一。此外，对象 Obj 的值带集合（本例中为 $\mathcal{I}^{\mathrm{val}}$）记作 $\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$，以强调它与该对象的关系。同样，定义对象 Obj 的实例集合 INST 记作 $\mathsf{INST}^{\mathrm{Obj}}$。

注意，定义 5.2 中给出的 0 阶对象的定义与此处的定义一致，只要允许 $\mathsf{INST}_{\mathrm{Obj}} = \emptyset$。因此，与 0 阶 S-图一样，为保持一致性，今后将此作为 0 阶对象的定义。

此外，与 0 阶对象一样，假定度为 $n+1$ 的对象包含其每种操作的唯一副本。因此，对于不同的对象 $\mathrm{Obj}_1, \mathrm{Obj}_2 \in \mathrm{OBJ}'_{n+1}$，不存在这样的操作 $\in \mathrm{OP}'_{n+1}$，使得 op $\in \mathrm{Obj}_1$ 且 op $\in \mathrm{Obj}_2$。

由单个操作组成的对象 Obj 与该操作等同；如果此外还满足 $\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}} = \emptyset$，则称其为真操作。

最后，定义 $\mathrm{INST}^* = \bigsqcup \mathrm{INST}_n$、$\mathrm{ACT}^* = \bigsqcup \mathrm{ACT}_n$、$\mathrm{SGRAPH}^* = \bigsqcup \mathrm{SGRAPH}_n$、$\mathrm{OP}^* = \bigsqcup \mathrm{OP}_n$ 和 $\mathrm{OBJ}^* = \bigsqcup \mathrm{OBJ}_n$。特别地，任何 $\mathcal{G} \in \mathrm{SGRAPH}^*$ 都称为 S^*-图。反过来，稍作术语上的滥用，ACT*、OP*、OBJ* 和 INST^* 的元素分别简称为动作、操作、对象和实例。

注意，S^*-图 $\mathcal{G}$ 的度比 $\mathrm{INST}_{\mathcal{G}}$ 中实例的最大度大一。类似地，一个对象的度是其某个操作的最大度，而这与定义该操作的 S^*-图的度相同。然而，实例的度与定义它的对象的度相同，而动作的度则比构造它所依据的实例的度大一。因此，若 Obj $\in \mathrm{OBJ}_n$、inst $= (\mathrm{Obj}\ \mu^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}})$，且对于某个 op $\in$ Obj，有 act $= (\mathrm{inst}, \mathrm{op}\ \mu^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{act}})$，那么即使 op $\in \mathrm{OP}_m$ 对于 $m < n$，act $\in \mathrm{ACT}_{n+1}$ 仍成立。

S^*-图、操作或对象的确切度通常并不重要，其存在只是为了辅助迭代定义。

为简化通过图示定义 S^*-图的过程，我们采用了与 0 阶对象所用命名约定类似的约定。

首先，对于任意对象 Obj $\in \mathrm{OBJ}^*$，记号 $\mathrm{Obj}[a_1, \ldots, a_k]$ 表示 $\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$ 中元素的一个固定枚举。此外，对于任意操作 op $\in \mathrm{OP}^*$，记号 $\mathrm{op}(c_1, \ldots, c_\ell)$ 表示 $\mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}}$ 中元素的一个固定枚举。

随后，通过图示定义任意 S^*-图 $\mathcal{G}$ 时，会在图上方明确列出 $\mathrm{INST}_{\mathcal{G}}$ 的元素，并用方括号标明相关值带重命名映射的定义。因此，对于任意对象 Obj $= \mathrm{Obj}[a_1, \ldots, a_k]$，图上方会出现记号‘inst is $\mathrm{Obj}[b_1, \ldots, b_k]$’，表示 inst $= \big(\mathrm{Obj}\ \mu^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}\big) \in \mathrm{INST}_{\mathcal{G}}$，且对所有 $i \in \overline{k}$，都有 $\mu^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}(a_i) = b_i$。

此外，对于 Obj 的任意操作 op $= \mathrm{op}(c_1, \ldots, c_\ell)$，若其实例为 $= (\mathrm{Obj}\mu^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}})$，则使用记号 $\mathrm{inst.op}(d_1, \ldots, d_\ell)$ 表示由 $\mu^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{act}}(c_j) = d_j$ for all $j \in \overline{\ell}$ 给出的动作 act $= (\mathrm{inst}, \mathrm{op}\ \mu^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{act}})$。

在特定情况下，为了稍微简化记号，若 Obj 是由操作 op 给出的真操作，并且存在实例 $\in \mathrm{INST}_{\mathcal{G}}$，使得 inst $= (\mathrm{Obj}\mu^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}})$，那么如果在构造 $\mathrm{ACT}_{\mathcal{G}}$ 的动作时会用到 Obj，则可在声明 $\mathrm{INST}_{\mathcal{G}}$ 的元素时省略 Obj。此外，相应的动作可以简单地记作 $\mathrm{op}(d_1, \ldots, d_\ell)$，省略对实例的引用。

定义图示给出的对象 Obj $\in \mathrm{OBJ}^*$ 时，也采用类似的约定。例如，$\mathrm{INST}^{\mathrm{Obj}}$ 的元素（可能省略某些真操作）以与上文大致相同的方式，列在定义 Obj 操作的图上方。

由图示定义的对象示例见下文例6.6。具体而言，先构造一个 0 阶对象 Obj_0，再用它构造一个由单个操作组成的 1 阶对象 Obj_1。因此，既然上一节已说明如何理解 0 阶操作的不可变外部带，那么定义 6.4 中对不可变外部带的定义不够具体也不会造成歧义，这个示例因而是自洽的。

例6.6（高阶对象）。下图6展示了上文介绍的对象 $\mathrm{Obj}_0[a]$ 和 $\mathrm{Obj}_1[d']$。

对象 Obj_0 由两个操作 check0 和 inc2 组成，图中各画出一条边。记号 check0() 和 inc2() 表明，这两个操作都不包含外部带。因此，由于这些操作中任意一条边的动作标记都只包含一个提及值带的片段

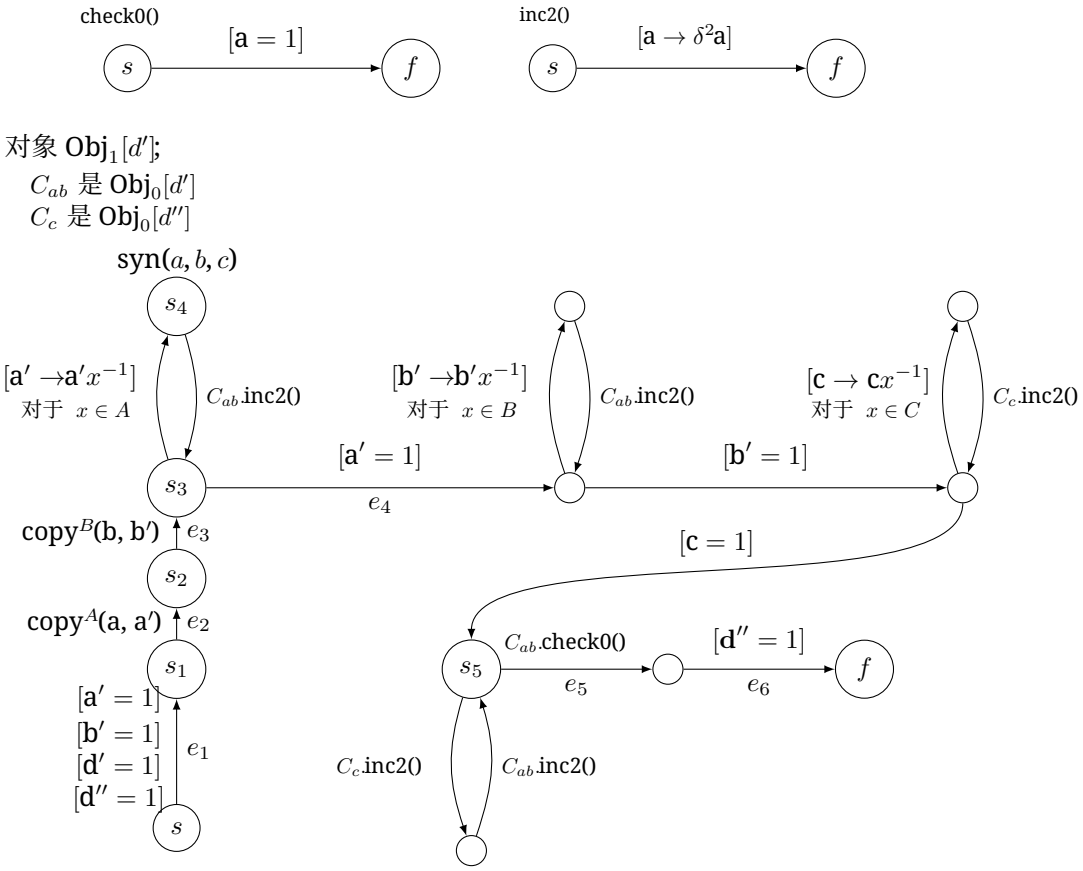


FIGURE 6. 由操作 check0()、inc2() 和 syn(a,b,c) 构成的对象 $\mathsf{Obj}_0[a]$ 和 $\mathsf{Obj}_1[d']$ 。

$\mathcal{I}_{\mathrm{check0}} = \mathcal{I}_{\mathrm{inc2}} = \mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}_0} = \{a\}$，所以条件 (O) 对每个操作都显然成立，因此它们确实都是 0 阶操作。

不过，更微妙的是与这些操作对应的字母表的构成。各个图的最小硬件会生成字母表 $\mathcal{A}_{\mathrm{check0}}(a) = \emptyset$ 和$\mathcal{A}_{\mathrm{inc2}}(a) = \{\delta\}$；然而，对象的定义要求这些字母表相同。为此，对于由图示给出的对象，通常认为与值带对应的字母表是满足与所有定义操作的图兼容性的最小集合。因此，$\mathcal{A}_{\mathrm{check0}}(a) = \{\delta\}$ 尽管 δ 并未出现在它的任何一条边上。

这些图的简单构成使得可以直接计算 Obj_0，的 IO 关系，从而得到 VAL$_{\mathrm{Obj}_0} = \{\delta^{2k} \mid k\in\mathbb{Z}\} \subsetneq L^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}_0}$。

对象 $\mathsf{Obj}_1[d']$ 由单个操作 syn(a,b,c) 组成，其名称旨在表明，此例的目的只是说明语法。为便于参考，图6中标出了 $\mathcal{G}_{\mathrm{syn}}$ 的一些边。按照惯例， $\mathcal{G}_{\mathrm{syn}}$ 是在硬件 $\mathcal{H}_{\mathrm{syn}} = (\mathcal{I}_{\mathrm{syn}}, \mathcal{A}_{\mathrm{syn}})$ 上取的，其中 $\mathcal{I}_{\mathrm{syn}} = \{a,b,c,a',b',d',d''\}$。此外，命名表明 $\mathcal{I}_{\mathrm{syn}} = \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{syn}} \sqcup \mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}_1} \sqcup \mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{syn}}$ 满足 $\mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{syn}} = \{a,b,c\}$、 $\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}_1} = \{d'\}$ 和 $\mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{syn}} = \{a',b',d''\}$。

集合 $\mathrm{INST}^{\mathrm{Obj}_1}$ 由四个实例组成，且它们的度均为 0：两个由 copy 的不同版本构造，另两个由 Obj_0 构造。不过，由于对于任意定义有限字母表，copy 都是适当操作，因此声明中只列出了后两种实例。如声明所示，C_{ab} 是通过将 Obj_0 的值带重命名为值带 d' 而形成的，而 C_c 则是将其重命名为 d'' 而形成的。因此，定义 6.3 的条件 (6) 要求，$\mathcal{G}_{\mathrm{syn}}$ 中任何动作并非由这些实例之一构成的边，要么不提及 d' 或 d''，要么将其作为不可变变量提及。但这类边只有 $e_1^{\pm 1}$ 和 $e_6^{\pm 1}$，它们各自都标记了一个仅由守卫片段构成的 0 阶动作。因此，由于条件 (5) 也得到满足，$\mathcal{G}_{\mathrm{syn}}$ 确实是一个度为 1 的 S-图。

接下来，注意到 d' 是一个值，而 d'' 是 Obj_1 的内部带。因此，按照定义 6.4 的要求，值带重命名映射 $\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{C_{ab}} = \{d'\}$ 和 $\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{C_c} = \{d''\}$的像都包含在 $\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}_1} \sqcup \mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{syn}}$ 中。因此，要验证 syn 确实是一个操作，只需证明满足条件 (O)。

与例5.4中的类似讨论一样，设 $\rho = e'_1,\ldots,e'_N$ 是一个扁平化路径，其中$t(e'_1) \in \mathrm{SF}^{\mathrm{syn}}$，并假设存在 $j \in \overline{N}$ 使得 e'_j 提及 $i \in \mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{syn}}$。那么，只需证明对于最小的 $m \in \overline{N}$ （使得 e'_m 提及 i），e'_m 由一个包含片段 $[\mathrm{i} = 1]$的 0 阶动作标记。

如果 $t(e'_1) = \mathrm{syn}_s$，那么 $e'_1 = e_1$；但此时对于每个 $i \in \mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{syn}}$，$e_1$ 提及 i，并且被标记为包含片段 $[\mathrm{i} = 1]$的 0 阶动作。同样地，如果 $t(e'_1) = \mathrm{syn}_f$，那么 $e'_1 = e_6^{-1}$，因此当 $i = d''$时也能得到相同的结论。现在假设 $t(e'_1) = \mathrm{syn}_f$ 且 $i = a'$。令$S' = \{\mathrm{syn}_s、\ s_1、\ s_2、\ s_3、\ s_4\}$，设 $\mathcal{G}'$ 为由 $S_{\mathrm{syn}} - S'$诱导的 $\mathcal{G}_{\mathrm{syn}}$ 的子图。由于没有一条 $\mathcal{G}'$的边提及 a'，ρ 必定经过 S'的一个顶点。但此时 $e'_m = e_4^{-1}$，它再次被标记为包含片段 $[\mathrm{a}' = 1]$的 0 阶动作。类似的论证可推出关于 $i = b'$的类似结果。

因此，syn 是一个 1 阶操作，所以 Obj_1 是一个 1 阶对象。由于 Obj_1 由单个操作组成，因此可以将其视为 syn；然而，由于它包含一条值带，Obj_1并不是适当操作。

根据上文讨论的提及 d' 的 $\mathcal{G}_{\mathrm{syn}}$ 边的构成，$\mathcal{A}_{\mathrm{syn}}(d')$ 必须与 Obj_0, 中各操作对应的字母表相同，即

$$\mathcal{A}_{\mathrm{syn}}(d') = \mathcal{A}_{\mathrm{check0}}(a) = \mathcal{A}_{\mathrm{inc2}}(a) = \{\delta\}$$

类似地，$\mathcal{A}_{\mathrm{syn}}(d'') = \{\delta\}$。

进一步分析与其余指标相关的边可得，字母表为$\mathcal{A}_{\mathrm{syn}}(a) = \mathcal{A}_{\mathrm{syn}}(a') = A$, $\mathcal{A}_{\mathrm{syn}}(b) = \mathcal{A}_{\mathrm{syn}}(b') = B$，以及 $\mathcal{A}_{\mathrm{syn}}(c) = C$。然而，并未说明集合 A、B和 C 的构成。确实，虽然可以推断它们各自都是 $\mathcal{A}^*$的有限子集，但不同的子集选择会产生不同的图。与复制操作一样，可以通过将定义集合添加到操作名称中来解决这一问题，例如 $\mathrm{syn}^{A,\ B,\ C}$。不过，由于这只是一个用于演示语法的示例，这里假定A、B和 C 是某些固定的任意子集。

现在，$\mathcal{G}_{\mathrm{syn}}$ 的几个特征表明条件 (O) 存在一些冗余，说明它可以适当放宽：

- 首先，边 e_5 本质上表示一个 0 阶动作，其中仅包含守卫片段 $[\mathrm{d}' = 1]$。鉴于同一片段包含在 e_1 上，d' 本质上满足条件 (O)，并且其作用方式与内部带相同。然而，由于条件 (O) 要求将实际片段写在边上，d' 不能作为 syn 的内部带。

- 其次，尽管动作标记 e_1 中包含的守卫 $[\mathrm{a}' = 1]$ 对于强制满足（O）是必要的，但它似乎是多余的，因为标记 e_2 的复制操作$\mathrm{copy}^A(a, a')$要求

$a' = 1$ 进行输入-输出计算。事实上，对于给定 e_3标签的守卫[b′ = 1] ，也可以作出同样的判断。实际情况确实如此：省略这些守卫不会显著改变 $\mathcal{G}_{\mathrm{syn}}$ 可能进行的计算（见第7节）。

不过，尽管存在这些冗余，定义 6.4 中给出的 (O) 形式仍因易于验证而被采用。

类似地，注意 e_2 和 e_3 的动作本质上彼此独立。因此，将动作和更高度的 S^*-图推广为可将两者写在同一条边上的形式，似乎是自然的扩展，从而简化图。不过，这样做会使相应的定义更加繁复，带来的益处却不足以证明这种严谨处理是合理的。

最后，虽然目前尚未定义 S^*-图的计算，但这里还是提到了 syn 的 IO 关系，原因有二：首先，这为接下来的计算定义提供了动机；其次，这也为读者提供了一个例子，可在读完接下来的定义后进行练习。

非正式地说，从 syn_s 遍历到 s_5 时，该操作会统计写在带 a、 b 和 c 上的字的总度，同时始终保持写在前两条带上的字不变，并擦除写在最后一条带上的字。只有当前两者之和等于最后一者时，计算才能继续到 syn^f 。

确切地说，$\mathrm{ND}^{\mathrm{syn}}$ 是由满足以下条件的四元组 $w = (w(a)\ w(b)\ w(c), 1)$ 构成的集合： $w(a) \in F(A)$, $w(b) \in F(B)$， $w(c) \in F(C)$，且 $w(d') = 1$。现在，定义 σ：令 $\sigma(w) = \sum \varepsilon_i$，其中 $w = a_1^{\varepsilon_1} \dots a_n^{\varepsilon_n}$满足 $a_i \in \mathcal{A}^*$ 和 $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$。于是，二元组 $(w_1, w_2) \in (\mathrm{ND}^{\mathrm{syn}})^2$ 是 $\mathrm{IO}^{s\,f}_{\mathrm{syn}}$ 中的一个元素，当且仅当：

- $w_2(c) = 1$,
- $w_1(a) = w_2(a)$,
- $w_1(b) = w_2(b)$，且
- $\sigma(w_1(a)) + \sigma(w_1(b)) = \sigma(w_1(c))$

此外， a 和 b 是 syn 的不可变外部带，而 c 不是。

7. S^*-GRAPH COMPUTATIONS

在讨论 S^*-图的计算定义之前，首先引入有向图中路径的另一种推广。这些新路径将为度大于 0 的 S-图计算提供所需的基础。

定义 7.1（一般路径）设 $\mathcal{G} = (S_{\mathcal{G}}, E_{\mathcal{G}})$ 是 S^*-图，满足 $\mathsf{sf}_1, \mathsf{sf}_2 \in \{\hat{}s、\ \hat{}f\}$，且 $e = (s_1, s_2, \text{动作}) \in E_{\mathcal{G}}$。

在这种情况下， e' 的尾，记为 $t(e')$，若 $\mathsf{sf}_1 = \hat{}s$ ，则取为 s_1 ；若 $\mathsf{sf}_1 = \hat{}f$，则取为 s_2 。类似地， e' 的头 $h(e')$，若 $\mathsf{sf}_2 = \hat{}s$，则为 s_1 ；若 $\mathsf{sf}_2 = \hat{}f$，则为 s_2。

$\mathcal{G}$ 中的一般路径是一列一般边 $\rho = e'_1、\ \dots\dots、\ e'_k$，满足 $h(e'_i) = t(e'_{i+1})$，其中$i \in \overline{k-1}$。

非正式地说，一般边是 $\mathcal{G}$ 中的一条边，并带有遍历方向：有序对$\hat{}\ \hat{}\ (\hat{}s, f)$表示从尾到头遍历，$(f, \hat{}s)$表示从头到尾遍历，$(\hat{}s, \hat{}s)$表示在尾部形成一个环$\hat{}\ \hat{}$，而$(f, f)$表示在头部形成一个环。

若 $\mathcal{G} = (S_{\mathcal{G}}, E_{\mathcal{G}})$是硬件 $\mathcal{H}$上的一个度为0的 S-图，则 $\mathcal{G}$的图语言记作$\mathrm{GL}_{\mathcal{G}}$，定义为语言 $L_{\mathcal{H}}$。根据此定义， $\mathcal{G}$的配置集合可与$\mathrm{GL}_{\mathcal{G}} \times S_{\mathcal{G}}$等同。

令 $n \geq 0$。那么，对所有 $\mathcal{G} \in \mathsf{SGRAPH}_n$ 和$\mathsf{Obj} \in \mathsf{OBJ}_n$，考虑以下概念：

(A[n]) 图语言 $\mathrm{GL}_{\mathcal{G}}$，(B[$n$]) $\mathcal{G}$ 的计算，(C[n]) $\mathrm{GL}_{\mathcal{G}} \times S_{\mathcal{G}}$ 上的等价关系 $\mathrm{REACH}_{\mathcal{G}}$ ，(D[n]) 值 $\mathrm{VAL}_{\mathrm{Obj}} \subseteq L^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$,

(E$[n]$) 任意操作 $\in$Obj 的自然定义域 ND$_{\mathrm{op}}$，(F$[n]$) 任意操作 $\in$ Obj 在 ND$_{\mathrm{op}} \times$SF$_{\mathrm{op}}$ 上的等价关系 IO$_{\mathrm{op}}$，以及 (G$[n]$) 任意操作 $\in$Obj 的不可变外部带。

注意，(A$[0]$) 已在上文定义，而 (B$[0]$)–(G$[0]$) 则在第3节和第5节中定义。

定义 7.2–7.13 将这些概念扩展到任意度，并以与第6节主要定义大致相同的方式迭代构造它们。

定义 7.2（图语言）。固定 $n \geq 0$，并假设对于所有 $m \leq n$，(A$[m]$)–(G$[m]$) 均已定义。

令 $\mathcal{G} = (S_{\mathcal{G}}, E_{\mathcal{G}})$ 为一个在 $(\mathcal{H}, \mathrm{INST}_{\mathcal{G}})$ 上、对于 $\mathcal{H} = (\mathcal{I}, \mathcal{A})$ 的度为 $n+1$ 的 S-图。然后，定义 $\mathcal{I}^*_{\mathcal{G}} = \mathcal{I} - \bigsqcup_{\mathrm{inst} \in \mathrm{INST}_{\mathcal{G}}} \mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}$ 以及 $L^*_{\mathcal{G}} = \bigtimes_{i \in \mathcal{I}^*_{\mathcal{G}}} F(\mathcal{A}(i))$。此外，对于任意 inst $= (\mathrm{Obj}\ \mu^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}) \in \mathrm{INST}_{\mathcal{G}}$，令 $\mathrm{VAL}_{\mathrm{inst}} = \mu^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}(\mathrm{VAL}^{\mathrm{Obj}})$，其中 $\mathrm{VAL}^{\mathrm{Obj}}$ 是 Obj $\in \mathrm{OBJ}'_n$ 的值集合，其定义见定义 7.8。

接着，将 $\mathcal{G}$ 的图语言 $\mathrm{GL}_{\mathcal{G}}$ 定义为 $L_{\mathcal{H}}$ 的子集，其中包含所有满足以下条件的字 w：对于任意 inst $\in \mathrm{INST}_{\mathcal{G}}$，$w(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}) \in \mathrm{VAL}_{\mathrm{inst}}$，即

$$\mathrm{GL}_{\mathcal{G}} = L^*_{\mathcal{G}} \times \bigtimes_{\mathrm{inst} \in \mathrm{INST}_{\mathcal{G}}} \mathrm{VAL}_{\mathrm{inst}}$$

换句话说，值带重命名映射的不相交像分别与相应对象的值带相对应，并且只关注这样的 L-词：它们在这些坐标中的内容构成值。正如将在后续定义中详细说明的那样，这实质上确保了图语言中的词对应于用于构造标记 $\mathcal{G}$ 的边的操作的自然定义域中的词。

$\mathrm{GL}_{\mathcal{G}} \times S_{\mathcal{G}}$ 的元素称为 $\mathcal{G}$ 的配置。

定义 7.3（计算）。固定 $n \geq 0$，并假设对于所有 $m \leq n$，(A$[m]$)–(G$[m]$) 均已定义。注意，此时定义 7.2 定义了 (A$[n+1]$)。

设 $\mathcal{G} = (S_{\mathcal{G}}, E_{\mathcal{G}})$ 是一个关于 $(\mathcal{H}, \mathrm{INST}_{\mathcal{G}})$、度为 $n+1$ 的 S-图，其中 $\mathcal{H} = (\mathcal{I}, \mathcal{A})$。对于任意 act $\in \mathrm{ACT}_{\mathcal{G}} \cup \mathrm{ACT}^0_{\mathcal{G}}$，在 $L_{\mathcal{H}} \times \{\hat{s}, \hat{f}\}$ 上定义语言输入输出关系 $\mathrm{LIO}_{\mathrm{act}}$ 如下：

- 若动作 $\in \mathrm{ACT}_0$，则对于动作 $= (t, g)$，

$$\begin{aligned}
\mathrm{LIO}^{\hat{s},\hat{s}}_{\mathrm{act}} &= \mathrm{LIO}^{\hat{f},\hat{f}}_{\mathrm{act}} = \mathbb{I}, \\
\mathrm{LIO}^{\hat{s},\hat{f}}_{\mathrm{act}} &= \{(w, tw) \mid w \in L_{\mathcal{H}},\ g \text{ accepts } w\}, \\
\mathrm{LIO}^{\hat{f},\hat{s}}_{\mathrm{act}} &= \{(w, t'w) \mid w \in L_{\mathcal{H}},\ g' \text{ accepts } w\},
\end{aligned}$$

  对于 $(t', g') = (t, g)^{-1}$。

- 若动作 $\in \mathrm{ACT}_{\mathcal{G}}$，则令动作 $=$(实例，操作 μextact)，其中实例 $=$(Obj μvalinst) $\in \mathrm{INST}_{\mathcal{G}}$。令 $\mathcal{I}$动作 $= \mathcal{I}$ extact $\sqcup\, \mathcal{I}$valinst，并定义 μ动作：Lextop $\times L$valObj $\to L_{\mathcal{H}}(\mathcal{I}$动作) 为由 μ动作 $= \mu$extact $\sqcup\, \mu$valinst 给出的双射。此外，令 λ操作：$\{\hat{s}, \hat{f}\} \to$ SFop 为由 λ操作($\hat{s}$) $=$操作 s 和 λ操作($\hat{f}$) $=$操作 f 给出的双射。于是，对于任意 w_1、$w_2 \in L_{\mathcal{H}}$ 和 p、$q \in \{\hat{s}, \hat{f}\}$，当且仅当以下条件成立时，定义 $(w_1, w_2) \in \mathrm{LIO}^{p,q}$ 动作：

  (i) $w_1(\mathcal{I}_{\mathcal{G}} - \mathcal{I}_{\mathrm{act}}) = w_2(\mathcal{I}_{\mathcal{G}} - \mathcal{I}_{\mathrm{act}})$

  (ii) $(\mu^{-1}_{\mathrm{act}}(w_1(\mathcal{I}_{\mathrm{act}})), \mu^{-1}_{\mathrm{act}}(w_2(\mathcal{I}_{\mathrm{act}}))) \in \mathrm{IO}^{\lambda_{\mathrm{op}}(p)\ \lambda_{\mathrm{op}}(q)}$ 操作

引理 7.4. 设动作 $\in \mathrm{ACT}_{\mathcal{G}} \cup \mathrm{ACT}^0_{\mathcal{G}}$。

(1) 关系 $\mathrm{LIO}_{\mathrm{act}}$ 在 $\mathrm{GL}_{\mathcal{G}}$ 上是真正的 $L_{\mathcal{H}}$-受限。

(2) 对所有 $w_1, w_2 \in L_{\mathcal{H}}$，$(w_1, w_2) \in \mathrm{LIO}^{\hat{s},f}$ 动作 当且仅当 $(w_2, w_1) \in \mathrm{LIO}^{f,\hat{s}}$ 动作。

(3) $\mathrm{LIO}_{\mathrm{act}}$ 是传递的。

证明。(1) 设 $(w_1, w_2) \in \mathrm{LIO}^{p,q}$，动作，其中 $p, q \in \{\hat{}s, \hat{}f\}$。只需证明，对于任意实例 $\in \mathrm{INST}_{\mathcal{G}}$,$w_1(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}) \in \mathrm{VAL}_{\mathrm{inst}}$ 当且仅当 $w_2(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}) \in \mathrm{VAL}_{\mathrm{inst}}$。

假设动作 $\in \mathrm{ACT}_0$。那么，对于任意实例 $\in \mathrm{INST}_{\mathcal{G}}$ 和 $i \in \mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}$，动作必须将 i 作为不可变变量提及。因此，$w_1(i) = w_2(i)$，于是 $w_1\big(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}\big) = w_2\big(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}\big)$。

反过来，假设动作 $\in \mathrm{ACT}_{\mathcal{G}}$，并令实例$_0 \in \mathrm{INST}_{\mathcal{G}}$ 满足 act $=$(实例$_0$,操作 $\mu^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{act}}$)，其中实例$_0 =$(Obj $\mu^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}_0}$)。那么实例$_0 \in \mathrm{INST}'_n$，使得对于某个 $m \in \overline{n}$，Obj $\in \mathrm{OBJ}_m$。

令实例 $\in \mathrm{INST}_{\mathcal{G}} - \{$实例$_0\}$ 和 $i \in \mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}$。如果动作没有提及 i，那么上面的条件 (i) 意味着 $w_1(i) = w_2(i)$。否则，定义 6.3 的条件 (6) 意味着动作将 i 作为不可变变量提及，即 $(\mu^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{act}})^{-1}(i)$ 在操作 op 中是不可变的。因此，定义 7.13 中 (G$[m]$) 的定义意味着 $w_1(i) = w_2(i)$。因此，$w_1\big(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}\big) = w_2\big(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}\big)$。

此外，(ii) 蕴含 $\mathcal{G}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$ 中存在一条边，连接分别对应于 $(\mu^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}_0})^{-1}(w_1(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}_0}))$ 和 $(\mu^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}_0})^{-1}(w_2(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}_0}))$ 的顶点（见定义 7.8），因此 $w_1\big(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}_0}\big) \in \mathrm{VAL}^{\mathrm{inst}_0}$ 当且仅当 $w_2\big(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}_0}\big) \in \mathrm{VAL}^{\mathrm{inst}_0}$。

(2) 若动作 $\in$A CT_0, ，则根据逆作用 (t', g') 的定义，结论成立。

否则，存在 inst $=$(Obj $\mu^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}$) $\in \mathrm{INST}_{\mathcal{G}}$ 以及操作 $\in$Obj，使得动作 $=$(inst, op $\mu^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{act}}$)。与 (1) 中一样，存在 $m \in \overline{n}$，使得 Obj $\in \mathrm{OBJ}_m$ 且 op $\in$Obj。因此，根据 (F$[m]$) 的定义 7.11，结论成立，其中 $\mathrm{IO}^{\mathrm{op}}$ 被证明是一个等价关系。

(3) 的证明类似。

□

由引理 7.4(1) 可知，真限制 $\mathrm{LIO}_{\mathrm{act}}\big|_{\mathrm{GL}_{\mathcal{G}}}$ 记作 $\mathrm{IO}_{\mathrm{act}}$。

现在，对于 $\mathcal{G}$ 的任意泛型边 $e' =$(sf$_1$,sf$_2$, e)，若其具有 $e =$(s_1, s_2, 动作) $\in E_{\mathcal{G}}$，则定义 $\mathrm{IO}_{e'}$ 为 GL$_{\mathcal{G}} \times \{t(e')\ h(e')\}$ 上的关系，由下式给出

$$\mathrm{IO}_{e'} = \big\{(w_1, t(e'), w_2, h(e')) \mid (w_1, \mathrm{sf}_1, w_2, \mathrm{sf}_2) \in \mathrm{IO}_{\mathrm{act}}\big\}.$$

于是，$\mathcal{G}$ 的泛型计算是一个序列

$$\varepsilon = \big((w_0, s_0), e'_1, (w_1, s_1), e'_2, \ldots, e'_m, (w_m, s_m)\big)$$

它由交替出现的配置 $(w_i, s_i) \in \mathrm{GL}_{\mathcal{G}} \times S_{\mathcal{G}}$ 和泛型边 e'_i 组成，并且对所有 $i \in \overline{m}$,$t(e'_i) = s_{i-1}$, $h(e'_i) = s_i$，以及 $(w_{i-1}, s_{i-1}, w_i, s_i) \in \mathrm{IO}^{e'_i}$，均成立。

与 0 阶 S-图上的计算一样，m 可以为 0，此时计算仅为配置 (w_0, s_0)。

非正式地说，泛型计算的运行方式与第 3 节所定义的计算相似，不同之处在于，沿着标记有正动作的边行进时，会执行某些内部计算。这种内部计算不一定会直接从尾到头进行，也可能沿相反方向行进，或绕着某个端点形成环。因此，一般边的必要性就更加明显了；对于任意操作 op，$\mathrm{IO}^{s\ s}_{\mathrm{op}}$，可能严格大于 $\mathrm{IO}^{s\ f}_{\mathrm{op}} \circ$，$\mathrm{IO}^{f}$，$^{s}_{\mathrm{op}}$。

此处使用“泛型”一词，仅仅是为了与前几节讨论的度为 0 的 S-图的计算相区别。为保持记号统一，度为 0 的 S-图的泛型计算，按类似于度为 $n+1$ 的 S-图的定义方式来定义。然而，只需将计算中的任意边 e 替换为泛型边 $(\hat{}s, f, e)$，度为 0 的 S-图的任何计算都可以视为泛型计算。

引理 7.5. 设 $\mathcal{G}$ 是一个 0 阶 S-图。则对于每个泛型计算

$$\varepsilon = \big((w_0, s_0), e'_1, (w_1, s_1), e'_2, \ldots, e'_m, (w_m, s_m)\big)$$

$\mathcal{G}$的，存在 存在一次计算 $\delta = \big((v_0, t_0)\ e''_1, (v_1, t_1)\ e''_2, \ldots, e''_k, (v_k, t_k)\big)$，属于 $\mathcal{G}$，使得：

(1) $k \le m$，(2) $(v_0, t_0) = (w_0, s_0)$ 且 $(v_k, t_k) = (w_m, s_m)$，以及
(3) 对所有 $i \in \overline{m}$，都存在一个 $j \in \overline{k}$，使得 $(w_i, s_i) = (v_j, t_j)$。

证明。对于所有 $i \in \overline{m}$，令 $e'_i = (\mathrm{sf}_i, \mathrm{sf}'_i, e_i)$，其中 sf_i、$\mathrm{sf}'_i \in \{\hat{}s, \hat{}f\}$ 和 $e_i \in E_{\mathcal{G}}$。

假设存在 i，使得 $\mathrm{sf}_i = \mathrm{sf}'_i = \hat{}s$。那么 $s_{i-1} = t(e'_i) = h(e'_i) = s_i$，且 $\hat{}\hat{}(w_{i-1}, w_i) \in \mathrm{IO}^s$，$s$ 动作 $= \mathbb{I}$，因此 $(w_{i-1}, s_{i-1}) = (w_i, s_i)$。结果是，删除 e'_i 并合并这些配置，可在不影响其余 ε 构成的情况下简化 m。如果存在 i，使得 $\mathrm{sf}_i = \mathrm{sf}'_i = \hat{}f$，则也可以进行类似的删除。

因此，不失一般性，可以假设对于所有 $i \in \overline{m}$，$\mathrm{sf}_i \neq \mathrm{sf}'_i$。
$\hat{}$ 现在，对于所有 $i \in \overline{m}$，令 $\alpha_i = 1$ if $\mathrm{sf}_i = \hat{}s$ and $\alpha_i = -1$ if $\mathrm{sf}_i = f$。然后，考虑序列 $\delta = ((w_0, s_0)\ e_1^{\alpha_1}, (w_2, s_2)\ e_2^{\alpha_2}, \ldots, e_k^{\alpha_k}, (w_k, s_k))$。根据动作 $\in \mathrm{ACT}_0$ 的关系 $\mathrm{IO}_{\mathrm{act}}$ 的定义，δ 是满足该陈述的 $\mathcal{G}$ 的计算。

□

根据引理 7.5，0 阶 S-图的泛型计算可视为该图的计算。因此，以下内容中大多省略“泛型”这一限定。

给定一个计算 $\varepsilon = ((w_0, s_0)\ e'_1, (w_1, s_1)\ e'_2, \ldots, e'_m, (w_m, s_m))$，以下术语沿用上一节中用于类似目的的说法：

- 在 $\mathcal{G}$ 中的通常路径 $\rho = e'_1, \ldots, e'_m$ 称为 ε 的计算路径。
- 称计算路径 ρ 支持 ε。
- (w_0, s_0) 称为 ε 的起始配置，而 (w_m, s_m) 称为结束配置。
- ε 称为在 (w_0, s_0) 与 (w_m, s_m) 之间的计算。
- ε（以及计算路径 ρ）的长度为 m，用记号 $m = |\varepsilon| = |\rho|$ 表示。

此外，两个配置 (w_1, s_1) 和 (w_2, s_2) 之间所有计算构成的集合记为$\varepsilon(w_1, s_1, w_2, s_2)$。

然而，与 0 阶 S-图不同，给定一个配置 (w_0, s_0) 和一条一般路径 ρ in$\mathcal{G}$，通常存在多个不同的计算由 ρ 支持，且其起始配置为 (w_0, s_0)。事实上，这些计算中任意两个都不必具有相同的结束配置。

给定一个操作 $\in \mathrm{OP}'_{n+1}$，操作的一次计算（即 $\mathcal{G}_{\mathrm{op}}$ 的一次计算）称为输入-输出计算，若它发生在配置 (w_1, s_1) 和 (w_2, s_2) 之间，且满足 $s_1, s_2 \in \mathrm{SF}_{\mathrm{op}}$and $w_1(\mathcal{I}_{\mathrm{op}}^{\mathrm{int}}) = w_2(\mathcal{I}_{\mathrm{op}}^{\mathrm{int}}) = 1_{\mathrm{op}}^{\mathrm{int}}$。

定义 7.6（可达关系）。固定 $n \ge 0$，并假设已对所有 $m \le n$ 定义了 $(\mathrm{A}[m])$–$(\mathrm{G}[m])$。注意，此时定义 7.2 和 7.3 定义了 $(\mathrm{A}[n+1])$ 和 $(\mathrm{B}[n+1])$ 这两个概念。

设 $\mathcal{G} = (S_{\mathcal{G}}, E_{\mathcal{G}})$ 是一个度为 $n+1$ 的 S-图。那么，$\mathcal{G}$ 的可达关系记作 $\mathrm{REACH}_{\mathcal{G}}$，它是定义在 $\mathcal{G}$ 配置上的关系，将任意计算的起始配置与结束配置联系起来。因此，

$$\mathrm{REACH}_{\mathcal{G}} = \left\{(w_1, s_1, w_2, s_2) \in (\mathrm{GL}_{\mathcal{G}} \times S_{\mathcal{G}})^2 \mid \varepsilon(w_1, s_1, w_2, s_2) \neq \emptyset\right\}$$

如果 $(w_1, s_1, w_2, s_2) \in \mathrm{REACH}_{\mathcal{G}}$，那么 (w_2, s_2) 可以从 (w_1, s_1) 出发（通过 $\mathcal{G}$ 的一次计算）到达。

Lem引理 7.7. 对于 $\mathcal{G} \in \mathrm{SGRAPH}_{n+1}$，$\mathrm{REACH}_{\mathcal{G}}$ 是 $\mathrm{GL}_{\mathcal{G}} \times S_{\mathcal{G}}$ 上的一个等价关系 .

证明。注意，自反性由长度为 0 的计算得出，而传递性显然成立，因此只需证明对称性。

令 $\varepsilon = ((w_0, s_0)\ e'_1, (w_1, s_1)\ e'_2, \ldots, e'_m, (w_m, s_m))$ 为 $\mathcal{G}$的任意计算。对于每个 $i \in \overline{m}$，令 $e'_i = (\mathrm{sf}_i, \mathrm{sf}'_i, e_i)$，其中 $\mathrm{sf}_i, \mathrm{sf}'_i \in \{\hat{}s, \hat{}f\}$ 以及 $e_i \in E_{\mathcal{G}}$。然后，定义 $e''_i = (\mathrm{sf}'_i, \mathrm{sf}_i, e_i)$。引理 7.4(2)由此推出，对于所有 i，$(w_i, s_i, w_{i-1}, s_{i-1}) \in \mathrm{IO}^{e''_i}$，因此存在一个“逆计算”

$$\varepsilon^{-1} = \left((w_m, s_m), e''_m, \ldots, e''_2, (w_1, s_1), e''_1, (w_0, s_0)\right)$$

因此，$(w_0, s_0, w_m, s_m) \in \mathrm{REACH}_{\mathcal{G}}$ 意味着 $(w_m, s_m, w_0, s_0) \in \mathrm{REACH}_{\mathcal{G}}$，所以 $\mathrm{REACH}_{\mathcal{G}}$ 是对称的。

□

第 5 节中的大部分其余术语也适用于度为 $n+1$ 的 S-图的可达关系。

请注意，下文的定义 7.8–7.11 与第 3 节中的对应定义几乎完全相同；第 3 节为 0 阶操作和对象定义了类似术语。

定义 7.8（对象的值）。固定 $n \geq 0$，并假设对于所有 $m \leq n$，(A$[m]$)–(G$[m]$) 均已定义。请注意，定义 7.2–7.6 随即定义了 (A$[n+1]$)–(C$[n+1]$) 的概念。

令 $\mathrm{Obj} \in \mathrm{OBJ}^{n+1}$，并将 Obj 的初始值定义为 $1^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}} = (1)_{i \in \mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}} \in L^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$。

令 $\mathcal{G}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$ 为一个（无向）图，其顶点与 $L^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$ 中的词一一对应，并且当且仅当存在 $\mathrm{op} \in \mathrm{Obj}$，以及 op 在配置 (w_1, s_1) 与 (w_2, s_2) 之间存在输入输出计算 $\in \mathrm{GL}_{\mathrm{op}} \times \mathrm{SF}_{\mathrm{op}}$，使得对于 $i = 1, 2$，有 $w_i(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}) = v_i$ 时，存在一条连接 v_1 和 $v_2 \in L^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$ 的边。然后将 Obj 的值记为 $\mathrm{VAL}^{\mathrm{Obj}}$，定义为包含初始值的 $\mathcal{G}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$ 的连通分支。

定义7.9（运算的自然定义域）。固定 $n \geq 0$，并假设对所有 $m \leq n$，(A$[m]$)–(G$[m]$) 均已定义。注意，定义 7.2–7.8 随后将此扩展为定义 (A$[n+1]$)–(D$[n+1]$) 这些概念。

于是，对任意 $\mathrm{Obj} \in \mathrm{OBJ}^{n+1}$ 以及任意操作 $\mathrm{op} \in \mathrm{Obj}$，op 的自然定义域由 $\mathrm{ND}_{\mathrm{op}} = L^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}} \times \mathrm{VAL}^{\mathrm{Obj}}$ 给出。

与第 5 节一样，记号 $\mathrm{ND}^{\mathrm{op}}$ 隐去了定义域的复合依赖于对象 Obj 这一事实。不过，与该情形一样，假设 Obj 是满足 $\mathrm{op} \in \mathrm{Obj}$ 的唯一对象，即可避免任何潜在的歧义。

为简化记号，扩展自然定义域记为 $\mathrm{ND}^1_{\mathrm{op}} = \mathrm{ND}_{\mathrm{op}} \times 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}} \subseteq L_{\mathrm{op}^\circ}$

引理 7.10。设 $\mathrm{Obj} \in \mathrm{OBJ}^{n+1}$ 且 $\mathrm{op} \in \mathrm{Obj}$。

(1) $\mathrm{ND}^1_{\mathrm{op}} \subseteq \mathrm{GL}^{\mathrm{op}}$(2) $\mathrm{REACH}^{\mathrm{SF}_{\mathrm{op}}}$操作 被真地限制在 $\mathrm{ND}^1_{\mathrm{op}}$ 上。

证明。(1) 首先注意，操作 $\in \mathrm{OP}'_{n+1}$，因此根据定义 7.2 可以理解 $\mathrm{GL}^{\mathrm{op}} = \mathrm{GL}^{\mathcal{G}_{\mathrm{op}}}$。令 $w \in \mathrm{ND}^1_{\mathrm{op}}$，并固定一个实例 $\mathrm{inst} \in \mathrm{INST}^{\mathrm{Obj}}$。于是只需证明 $w(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}) \in \mathrm{VAL}_{\mathrm{inst}^\circ}$

由于 $w(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}) \in \mathrm{VAL}^{\mathrm{Obj}}$，存在 $(v_0, \varepsilon_1, v_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, v_k)$，其中 $v_0 = 1^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$ 且 $v_k = w(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}})$，使得对于所有 $i \in \overline{k}$，ε_i 都是操作 $_i \in \mathrm{Obj}$ 在满足 $u_i(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}) = v_{i-1}$ 和 $w_i(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}) = v_i$ 的配置 (u_i, s_i) 与 (w_i, t_i) 之间的一次输入输出计算。

设 $\mathcal{I}^{\mathrm{valval}}_{\mathrm{inst}} = \mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}} \cap \mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}^\circ}$。那么，由于 $\mathrm{inst} \in \mathrm{INST}^{\mathrm{Obj}}$，对所有 $\mathrm{op}_0 \in \mathrm{Obj}$ 都有 $\mathrm{inst} \in \mathrm{INST}^{\mathrm{op}_0}$，因此 $\mathcal{I}^{\mathrm{valint}}_{\mathrm{inst}} = \mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}} - \mathcal{I}^{\mathrm{valval}}_{\mathrm{inst}} \subseteq \mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}_0^\circ}$。

由于 ε_k 是一个输入输出计算，$w_k \in \mathrm{GL}^{\mathrm{op}_k}$ 且 $w_k(\mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}_k}) = 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}_k}$。特别地，这意味着 $w_k(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}) \in \mathrm{VAL}_{\mathrm{inst}}$ 且 $w_k(\mathcal{I}^{\mathrm{valint}}_{\mathrm{inst}}) = (1)^{i \in \mathcal{I}^{\mathrm{valint}}_{\mathrm{inst}}}$。

此外，$w_k(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}) = v_k = w(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}})$，因此 $w_k(\mathcal{I}^{\mathrm{valval}}_{\mathrm{inst}}) = w(\mathcal{I}^{\mathrm{valval}}_{\mathrm{inst}})$。但是 $w \in \mathrm{ND}^1_{\mathrm{op}}$，所以也有 $w(\mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}) = 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}$，即 $w(\mathcal{I}^{\mathrm{valint}}_{\mathrm{inst}}) = (1)_{i \in \mathcal{I}^{\mathrm{valint}}_{\mathrm{inst}}} = w_k(\mathcal{I}^{\mathrm{valint}}_{\mathrm{inst}})$。因此，

$$w(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}) = w(\mathcal{I}^{\mathrm{valval}}_{\mathrm{inst}} \sqcup \mathcal{I}^{\mathrm{valint}}_{\mathrm{inst}}) = w_k(\mathcal{I}^{\mathrm{valval}}_{\mathrm{inst}} \sqcup \mathcal{I}^{\mathrm{valint}}_{\mathrm{inst}}) = w_k(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}}) \in \mathrm{VAL}_{\mathrm{inst}}$$

(2) 设 $\varepsilon = \big((w_0, s_0)\ e'_1, (w_1, s_1)\ e'_2, \ldots, e'_m, (w_m, s_m)\big)$ 是 op 的一次计算，其中 $s_0, s_m \in \mathrm{SF}_{\mathrm{op}}$。将支撑 ε 的一般路径记为 $\rho' = e'_1, e'_2, \ldots, e'_{m^\circ}$

对于所有 $i \in \overline{m}$，令 $e'_i = (\mathrm{sf}_i, \mathrm{sf}'_i, e_i)$ 对应于 $e_i \in E_{\mathrm{op}}$。如果 $\mathrm{Lab}(e_i) \in \mathrm{ACT}_0$,，则存在一条逆边 $e_i^{-1} \in E_{\mathrm{op}}$；否则，令 e_i^{-1} 为 e_i 的形式逆。然后，将 q_i 定义为 $\mathcal{G}_{\mathrm{op}}$ 中的路径如下：

- 若 $\mathrm{sf}_i = \mathrm{sf}'_i = \hat{}s$，则令 $q_i = e_i, e_i^{-1}$
- 若 $\mathrm{sf}_i = \mathrm{sf}'_i = \hat{}f$，则令 $q_i = e_i^{-1}, e_i$
- 若 $\mathrm{sf}_i = \hat{}s$ 且 $\mathrm{sf}'_i = \hat{}f$，则令 $q_i = e_i$
- 若 $\mathrm{sf}_i = \hat{}f$ 且 $\mathrm{sf}'_i = \hat{}s$，则令 $q_i = e_i^{-1}$

由此，$fl(\rho') = q_1, \ldots, q_m$ 是从 s_0 到 s_m 的操作中的一条扁平化路径，称为 ρ 的扁平化。因此，$fl(\rho')$ 满足条件 (O) 的限制。

因此，与命题 5.3 的证明一样，可得 $w_0 \in \mathrm{ND}^1_{\mathrm{op}}$ 当且仅当 $w_m \in \mathrm{ND}^1_{\mathrm{op}}$。□

定义 7.11（IO 关系）。固定 $n \geq 0$，并假设对于所有 $m \leq n$，(A[m])–(G[m]) 均已定义。注意，定义 7.2–7.9 随后定义了 (A[$n+1$])–(E[$n+1$]) 的概念。

令 $\mathrm{Obj} \in \mathrm{OBJ}^{n+1}$，且 $\mathrm{op} \in \mathrm{Obj}$。然后，令 $\mathrm{IO}^1_{\mathrm{op}} = \mathrm{REACH}^{\mathrm{SF}_{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{op}}\big|_{\mathrm{ND}^1_{\mathrm{op}}}$。由引理 7.10，$\mathrm{IO}^1_{\mathrm{op}}$ 是 $\mathrm{ND}^1_{\mathrm{op}} \times \mathrm{SF}^{\mathrm{op}}$ 上的一个关系。

通过设定 $(w_1, s_1, w_2, s_2) \in \mathrm{IO}^{\mathrm{op}}$ 当且仅当存在 $w'_1, w'_2 \in \mathrm{ND}^1_{\mathrm{op}}$ 使得对于 $i = 1$，2 和 $(w'_1, s_1, w'_2, s_2) \in \mathrm{IO}^1_{\mathrm{op}}$，定义 $\mathrm{ND}_{\mathrm{op}} \times \mathrm{SF}^{\mathrm{op}}$ 上的关系 $\mathrm{IO}^{\mathrm{op}}$。因此，对于任意 $s_1, s_2 \in \mathrm{SF}^{\mathrm{op}}$,

$$\mathrm{IO}^{s_1,s_2}_{\mathrm{op}} = \left\{(w_1, w_2) \in \left(\mathrm{ND}_{\mathrm{op}}\right)^2 \mid (w_1 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}, w_2 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}) \in \mathrm{REACH}^{s_1,s_2}_{\mathrm{op}}\right\}$$

因此，以下结论可由引理 7.7 立即得出：

引理 7.12. 对于任意 $\mathrm{Obj} \in \mathrm{OBJ}^{n+1}$ 以及任意操作 $\in \mathrm{Obj}$，$\mathrm{IO}^{\mathrm{op}}$ 是 $\mathrm{ND}_{\mathrm{op}} \times \mathrm{SF}^{\mathrm{op}}$ 上的等价关系。

最后，回顾一下：第6节的定义中给出的不可变外部带的定义性质较为任意。现在，我们利用本节中发展出的工具对此加以澄清。

定义 7.13（不可变带）。固定 $n \geq 0$，并假设对于所有 $m \leq n$，(A[m])–(G[m]) 均已定义。注意，定义 7.2–7.11 随后定义了概念 (A[$n+1$])–(F[$n+1$])。

对于任意对象 $\mathrm{Obj} \in \mathrm{OBJ}^{n+1}$ 以及任意操作 $\mathrm{op} \in \mathrm{Obj}$，若对于任意 $(w_1, s_1, w_2, s_2) \in \mathrm{IO}^{\mathrm{op}}$，$w_1(a) = w_2(a)$，则称外部带 $a \in \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}}$ 在 op 中不可变。

本节余下部分的目标是通过计算一些示例 S^*-图的值和 IO 关系来说明这些定义。不过，首先要介绍一些工具，以便高效地进行这类论证（无论是在本节还是在后续各节中）。

设 $\mathcal{G} = (S_{\mathcal{G}}, E_{\mathcal{G}})$ 是一个 S^*-图。对于任意 $e \in E_{\mathcal{G}}$，令 $g(e)$ 为由 e 构造出的四条泛型边所组成的集合，即 $g(e) = \{(\mathrm{sf}_1, \mathrm{sf}_2, e) \mid \mathrm{sf}_1, \mathrm{sf}_2 \in \{\hat{}s, \hat{}f\}\}$。然后，令 IO_e 为 $\mathrm{GL}_{\mathcal{G}} \times S_{\mathcal{G}}$ 上由 $\mathrm{IO}_e = \bigcup_{e' \in g(e)} \mathrm{IO}_{e'}$ 给出的关系。

Lem引理 7.14. 对于任意 S*-图 $\mathcal{G} = (S_{\mathcal{G}}, E_{\mathcal{G}})$，$\mathrm{REACH}_{\mathcal{G}}$ 是 $\bigcup$ 的 rst-闭包 $\bigcup_{e \in E_{\mathcal{G}}} \mathrm{IO}_e$.

证明. 设 $U = \bigcup \mathrm{IO}_e$，且 U^* 是 U 的 rst-闭包。

对于任意 $e \in E_{\mathcal{G}}$，$(w_1, s_1, w_2, s_2) \in \mathrm{IO}_e$ 当且仅当存在一条一般边 $e' \in g(e)$，使得 $(w_1, s_1, w_2, s_2) \in \mathrm{IO}_{e'}$。但这当且仅当 $\big((w_1, s_1)\ e', (w_2, s_2)\big)$ 是 $\mathcal{G}$ 的一次计算，也就是说 $(w_1, s_1, w_2, s_2) \in \mathrm{REACH}_{\mathcal{G}}$。因此，$U \subseteq \mathrm{REACH}_{\mathcal{G}}$，所以引理 7.7 蕴含 $U^* \subseteq \mathrm{REACH}_{\mathcal{G}}$。

反过来，设 $\varepsilon = \big((w_0, s_0)\ e'_1, (w_1, s_1)\ e'_2, \ldots, e'_m, (w_m, s_m)\big)$ 是 $\mathcal{G}$ 的一次计算。那么，对于所有 $i \in \overline{m}$，令 $e_i \in E_{\mathcal{G}}$ 和 $\mathrm{sf}_i, \mathrm{sf}'_i \in \{\hat{}s, \hat{}f\}$ 满足 $e'_i = (\mathrm{sf}_i, \mathrm{sf}'_i, e_i)$。因此，$(w_{i-1}, s_{i-1}, w_i, s_i) \in \mathrm{IO}_{e_i}$，即 $(w_{i-1}, s_{i-1}, w_i, s_i) \in U$ 对所有 i 都成立。于是，由传递性可得 $(w_0, s_0, w_m, s_m) \in U^*$。

□

设 Obj $\in$ OBJ*，op $\in$ Obj，且 C 是 op 的任意配置集合。对于任意 $T \subseteq S_{\mathrm{op}}$，定义配置集合 $C^T = C \cap$(广义线性群$_{\mathrm{op}} \times T$)。当 T 是 SF$^{\mathrm{op}}$ 中的单元素集时，相应地使用更简单的记号 C^s 或 C^f。

然后，令 $C^1_{\mathsf{IO}} = C^{\mathrm{SF}_{\mathrm{op}}} \cap \left(\mathrm{ND}^1_{\mathrm{op}} \times S_{\mathrm{op}}\right)$，并通过 $(w,s) \in C_{\mathsf{IO}}$ 当且仅当 $(w \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}, s) \in C^1_{\mathsf{IO}}$ 来定义 $C_{\mathsf{IO}} \subseteq \mathrm{ND}_{\mathrm{op}} \times \mathrm{SF}^{\mathrm{op}}$。

引理 7.15。令 Obj $\in$ OBJ*，并令 op $\in$ Obj。

(1) 对于 REACH$^{\mathrm{op}}$ 的任意等价类 C，C_{IO} 要么为空，要么是 IO$^{\mathrm{op}}$ 的一个等价类。(2) 对于 IO$^{\mathrm{op}}$ 的任意等价类 Q，存在唯一的 REACH$^{\mathrm{op}}$ 的等价类 C，使得 $Q = C_{\mathsf{IO}}$。

证明。(1) 假设存在 $(w_1, s_1) \in C_{\mathsf{IO}}$。那么 $(w_1 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}, s_1) \in C^1_{\mathsf{IO}} \subseteq C$.

然后，对于任意 $(w_2, s_2) \in \mathrm{ND}_{\mathrm{op}} \times \mathrm{SF}^{\mathrm{op}}$，引理 7.10 表明 $(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s_1,\ s_2\text{操作}}$ 当且仅当

$$(w_1 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}, w_2 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}) \in \mathsf{REACH}^{s_1,s_2}_{\mathrm{op}}$$

但由于 C 是 REACH$^{\mathrm{op}}$的一个等价类，$(w_1 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}, w_2 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}) \in \mathrm{REACH}^{s_1,\ s_2\text{操作}}$ 当且仅当 $(w_2 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}, s_2) \in C$，而这当且仅当 $(w_2, s_2) \in C_{\mathsf{IO}}$。

因此，$C_{\mathsf{IO}} = \{(w_2, s_2) \in \mathrm{ND}_{\mathrm{op}} \times \mathrm{SF}_{\mathrm{op}} \mid (w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s_1,\ s_2\text{操作}}\}$，即包含 (w_1, s_1) 的 IO$^{\mathrm{op}}$等价类。

(2) 设 $(w_1, s_1) \in Q$，并设 $C \subseteq \mathrm{GL}_{\mathrm{op}} \times S_{\mathrm{op}}$ 是 REACH$^{\mathrm{op}}$ 中包含 $(w_1 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}, s_1)$ 的等价类。

那么 $(w_2, s_2) \in C_{\mathsf{IO}}$ 当且仅当 $(w_2 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}, s_2) \in C$，因此当且仅当

$$(w_1 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}, w_2 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}) \in \mathsf{REACH}^{s_1,s_2}_{\mathrm{op}}$$

但如上所述，当且仅当 $(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s_1,\ s_2\text{操作}}$，最后这个条件才成立；因此，当且仅当 $(w_2, s_2) \in Q$。于是，$C_{\mathsf{IO}} = Q$。

此外，对于任意满足 $D_{\mathsf{IO}} = Q$ 的 REACH$^{\mathrm{op}}$ 等价类 D，有 $(w_1, s_1) \in D_{\mathsf{IO}}$，这意味着 $(w_1 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}, s_1) \in D$。然而，$D \cap C \neq \emptyset$，因此 $D = C$。

□

命题 7.16。设 Obj $\in$ OBJ*，且 op $\in$ Obj。假设 $\{C_j\}_{j\in J}$ 是 $\mathrm{GL}_{\mathrm{op}} \times S_{\mathrm{op}}$ 上的一个（不一定互不相交的）子集族，使得

(1) 对所有 $j \in J$，C_j 在每个 $e \in E_{\mathrm{op}}$ 的 IO$_e$ 下封闭；(2) $\bigcup_{j\in J} C_j \supseteq \mathrm{ND}^1_{\mathrm{op}} \times \mathrm{SF}_{\mathrm{op}}$。

那么 $\mathrm{IO}_{\mathrm{op}} \subseteq \bigcup_{j\in J} \left(C_{j,\ \mathsf{IO}}\right)$，其中 $C_{j,\ \mathsf{IO}} = \left(C_j\right)$对所有 均为 IO。

证明。假设对于某些 $s_1, s_2 \in \mathrm{SF}_{\mathrm{op}}$，有 $(u_1, u_2) \in \mathrm{IO}^{s_1,\ s_2\text{操作}}$。那么，对于 $w_i = u_i \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}$对于 $i = 1,2$，存在一个在 (w_1, s_1) 和 (w_2, s_2) 之间的操作输入输出计算。将这样的计算记作 $\left((w'_0, s'_0)\ e'_1, (w'_1, s'_1)\ e'_2, \ldots, e'_m, (w'_m, s'_m)\right)$，即使得 $(w'_0, s'_0) = (w_1, s_1)$ 且 $(w'_m, s'_m) = (w_2, s_2)$。

对于所有 $i \in \overline{m}$，令 sf$_i$、sf$'_i \in \{\hat{}s, \hat{}f\}$，并令 $e_i \in E_{\mathrm{op}}$ 满足 $e'_i =$(sf$_i$, sf$'_i$, e_i)。那么，对于所有 $i \in \overline{m}$，$(w'_{i-1}, s'_{i-1}, w'_i, s'_i) \in \mathrm{IO}_{e_i}$。因此，(1) 意味着，对于任意 $i \in \overline{m}$ 和 $j \in J$，$(w'_{i-1}, s'_{i-1}) \in C_j$ 当且仅当 $(w'_i, s'_i) \in C_j$。

因此，对于任意 $j \in J$，$(w_1, s_1) \in C_j$ 当且仅当 $(w_2, s_2) \in C_j$。此外，由于根据构造$w_1 \in \mathrm{ND}^1_{\mathrm{op}}$，假设 (2) 蕴含存在 $k \in J$，使得 $(w_1, s_1) \in C_k$。因此，

(w_1, s_1)、$(w_2, s_2) \in C_k$。但是，对于 $i = 1$，2，有 $w_i \in \mathsf{ND}^1_{\mathrm{op}}$ 和 $s_i \in \mathsf{SF}_{\mathrm{op}}$，因此 (w_1, s_1)、$(w_2, s_2) \in C^1_k$，IO。于是，(u_1, s_1)、$(u_2, s_2) \in C_k$，IO。

□

命题 7.17. 设 Obj $\in$ OBJ* and $V \subseteq L^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$。假设对于所有 op $\in$ Obj，都存在一个由广义线性群 $_{\mathrm{op}} \times S_{\mathrm{op}}$, $\mathcal{C}_{\mathrm{op}} = \{C_{j,\mathrm{op}}\}_{j \in J_{\mathrm{op}}}$的子集构成的族，使得：

(1) 对所有 $j \in J_{\mathrm{op}}$, $C_{j,\ \mathrm{op}}$ 在每个 $e \in E_{\mathrm{op}}$ 的输入输出计算下封闭；(2) $\bigcup_{j \in J_{\mathrm{op}}} C^{\mathsf{SF}_{\mathrm{op}}}_j$，操作 $= \widehat{V}_{\mathrm{op}} \times \mathsf{SF}_{\mathrm{op}}$，其中 $\widehat{V}_{\mathrm{op}} = L^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}} \times V \times 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}} \subseteq L_{\mathrm{op}}$。

那么 $\mathsf{VAL}_{\mathrm{Obj}} \cap V = \emptyset$ 或 $\mathsf{VAL}_{\mathrm{Obj}} \subseteq V$。

证明。对于任意 $v_1, v_2 \in L^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$，在 $\mathcal{G}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$ 中 v_1 与 v_2 之间存在一条边，当且仅当存在 op $\in$ Obj，以及 op 在 (w_1, s_1) 与 (w_2, s_2) 之间的一个输入输出计算，使得$w_i\big(\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}\big) = v_i$ 对于 $i = 1$，2。

与命题 7.16 的证明一样，(1) 表明，对于任意 $j \in J_{\mathrm{op}}$，$(w_1, s_1) \in C_{j,\ \mathrm{op}}$ 当且仅当$\widehat{\ }$ $(w_2, s_2) \in C_{j,\ \mathrm{op}}$。但由 (2) 可知，$(w_i, s_i) \in C_{j,\ \mathrm{op}}$ 当且仅当 $w_i \in V_{\mathrm{op}}$，也就是说，当且仅当$v_i \in V$。

因此，V 是 $\mathcal{G}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$ 的连通分支的不交并，所以该结论由 $\mathsf{VAL}_{\mathrm{Obj}}$ 的定义得出。

□

回想定义 5.7，度为 0 的对象被定义为计数器，当且仅当它包含两个度为 0 的操作，且对象的值与其操作的 IO 关系满足某些限制。这个定义可以自然地推广到任意度的对象：

定义 7.18。令 Obj $\in$ Obj* 为一个由两个操作组成的对象，这两个操作分别记为 inc 和 check，且不含外部带。假设存在一个枚举 $\mathsf{VAL}_{\mathrm{Obj}} = \{v_i\}^{\infty}_{i=0}$，满足$v_0 = 1^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}$：

$$
\begin{aligned}
\mathsf{IO}^{s,s}_{\mathrm{inc}} &= \mathsf{IO}^{f,f}_{\mathrm{inc}} = \mathbb{I};\\
\mathsf{IO}^{s,s}_{\mathrm{check}} &= \mathsf{IO}^{f,f}_{\mathrm{check}} = \mathbb{I};\\
\mathsf{IO}^{s,f}_{\mathrm{inc}} &= \big\{(v_i, v_{i+1}) \mid i \geq 0\big\};\\
\mathsf{IO}^{s,f}_{\mathrm{check}} &= \big\{(v_i, v_i) \mid i \geq 1\big\}.
\end{aligned}
$$

于是 Obj 被称为计数器。

注意，如果 Obj $\in$ $\mathsf{OBJ}_{0,}$，那么此定义与定义 5.7 一致 .

回想一下，在例5.8中，曾提出并研究了一个 0 阶对象，记作 $\mathsf{Counter}_0[a]$。当时声称该对象是一个计数器，但未给出证明。虽然命题7.16和7.17使得证明这一论断成为可能，但这里省略该证明。

取而代之的是，构造一个新对象，记作 $\mathsf{Counter}_1[a]$。将证明该对象是一个计数器（见引理 7.23），而且其设计要简单得多。然而，正如下一节将进一步阐述的那样，该对象实际上对应于 $\mathsf{Counter}_{0,}$，而这种简洁的表示展现了 S^*-图的优势。

例 7.19。设 $\mathsf{Counter}_1[a]$ 为图7所示的对象。按照惯例（并滥用记号），其两个操作分别记为 检查 和 递增，且二者都没有外部带。

由于在介绍操作之前没有声明任何实例，$\mathsf{INST}_{\mathrm{Counter}_1}$ 仅由标记检查和递增图中各边的真操作组成。这里，这些操作就是检查$_{>0}$，它也是图中展示的一个真操作。

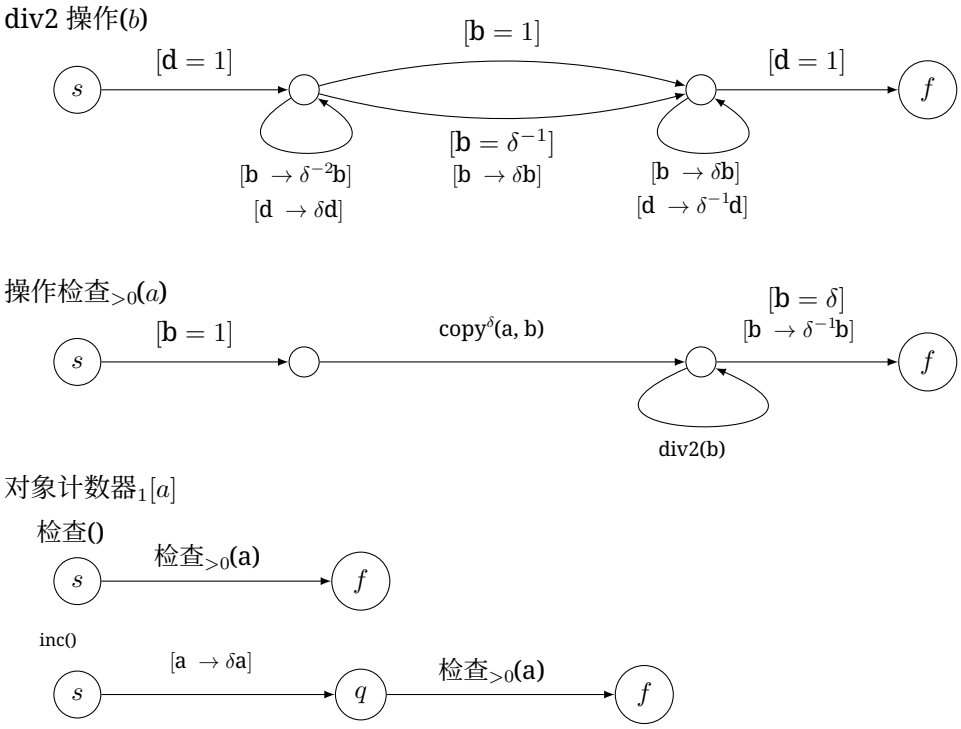


FIGURE 7. 计数器对象$_1[a]$ 是一个计数器。

显然，要理解计数器$_1$, ，首先应关注真操作检查$_{>0}$。与计数器$_1$, 一样，INST$^{\text{check}_{>0}}$ 由标记其各边的真操作组成，即 copy 和 div2。不过，copy 已经研究过了（参见例5.4），而 div2 尚未研究，因此也在图中展示。于是，讨论从 div2 操作开始。

由于每条边的动作标记都是由片段构成的，div2 是一个 0 阶真操作。记号 div2(b) 表示 $\mathcal{I}^{\text{ext}}_{\text{div2}} = \{b\}$ ，且用于标记边的动作中的其余指标必须是内部的。因此， $\mathcal{I}^{\text{int}}_{\text{div2}} = \{d\}$。最后，由于图上的片段中出现的 $\mathcal{A}^*$ 的唯一字母是 δ，而且这个字母既出现在提及 b 的片段中，也出现在提及 d 的片段中， $\mathcal{A}_{\text{div2}}(b) = \mathcal{A}_{\text{div2}}(d) = \{\delta\}$。

容易验证 div2 满足条件 (O)，因为尾部为 div2_s 或 div2_f 的两条边仅包含守卫片段 $[\mathrm{d} = 1]$。

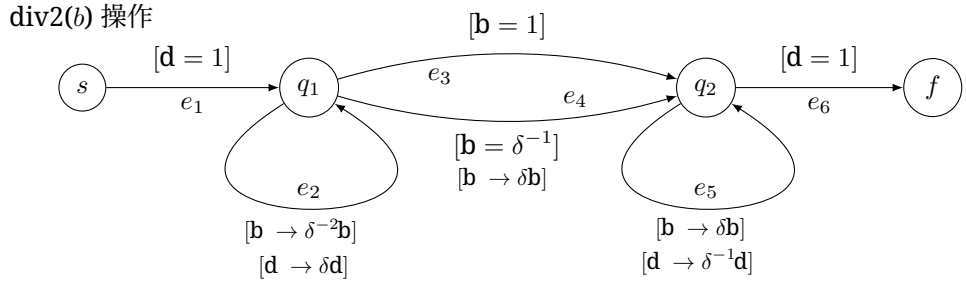
最后，为了清晰起见，将广义线性群 $_{\text{div2}} = L_{\mathcal{H}_{\text{div2}}}$ 的元素记为 $w = (w(b)\ w(d))$，即约定有序对的第一个坐标表示 b 坐标。因此，对于所有 s_1、 $s_2 \in \in \text{SF}_{\text{div2}}$，关系 IO$^{s_1,\ s_2\text{div2}}$ 由满足以下条件的有序对 $(w_1, w_2) \in F(\delta)^2$ 组成：存在 div2 从配置 $((w_1, 1)\ s_1)$ 到 $((w_2, 1)\ s_2)$ 的一次计算。

注意，由于 div2 是一个度为 0 的 S-图，IO$_{\text{div2}}$ 的计算方式与前几节（例如引理 5.6）非常相似。不过，下面将改用本节中开发的工具来处理它，以展示这些工具的有效性，并为后续关于 S^*- 图的类似论证提供蓝图。

引理 7.20. 关系 $\mathsf{IO}_{\mathrm{div2}}$ 如下:

$$\begin{aligned}
\mathsf{IO}^{s,s}_{\mathrm{div2}} &= \left\{(\delta^{2j-\alpha}, \delta^{2j-\beta}) \mid j \in \mathbb{Z},\ \alpha, \beta \in \{0,1\}\right\};\\
\mathsf{IO}^{s,f}_{\mathrm{div2}} &= \left\{(\delta^{2j-\alpha}, \delta^{j}) \mid j \in \mathbb{Z},\ \alpha \in \{0,1\}\right\};\\
\mathsf{IO}^{f,f}_{\mathrm{div2}} &= \left\{(\delta^{j}, \delta^{j}) \mid j \in \mathbb{Z}\right\},
\end{aligned}$$

证明。为便于参考，下面复制了 div2 的图，并标注了部分顶点和边。



对于所有 $j \in \mathbb{Z}$，定义 $C_j \subseteq \mathsf{GL}_{\mathrm{div2}} \times S_{\mathrm{div2}}$ 如下:

$$\begin{aligned}
C_j^{s} &= \left\{(\delta^{2j-\alpha}, 1) \mid \alpha \in \{0,1\}\right\},\\
C_j^{q_1} &= \left\{(\delta^{2j-2i-\alpha}, \delta^{i}) \mid i \in \mathbb{Z},\ \alpha \in \{0,1\}\right\},\\
C_j^{q_2} &= \left\{(\delta^{j-i}, \delta^{i}) \mid i \in \mathbb{Z}\right\},\\
C_j^{f} &= \left\{(\delta^{j}, 1)\right\}.
\end{aligned}$$

For 任意 $j \in \mathbb{Z}$ 和 $k \in \overline{6}$，不难检查 C_j 在 IO_e下封闭 $_k$:

(1) 假设 $(w_1, w_2) \in \mathsf{IO}_{e_1}^{s_1\ s_2}$, 。若 $s_1 = s_2$，则 $(w_1, s_1) = (w_2, s_2)$。否则，不失一般性地假设 $s_1 = \mathsf{div2}_s$，即 $(w_1, w_2) \in \mathsf{IO}_{e_1}^{s\ q_1}$, 。那么，对于 $(t, g) = \mathsf{Lab}(e_1)$，$g$ 接受 w_1 和 $w_2 = tw_1$。但此时 $w_1(d) = 1$ 和 $w_2 = w_1$。因此，$(w_2, s_2) \in C_j$当且仅当 $w_1(b) = w_2(b) = \delta^{2j-\alpha}$ 对某个 $\alpha \in \{0,1\}$成立，而这当且仅当 $(w_1, s_1) \in C_j$。

(2) 假设 $(w_1, w_2) \in \mathsf{IO}_{e_2}^{s_1\ s_2}$, 。那么 $s_1 = s_2 = q_1$。此外，如果 $w_1 = (\delta^m, \delta^n)$，那么存在 $\ell \in \{-1, 0, 1\}$，使得 $w_2 = (\delta^{m-2\ell}, \delta^{n+\ell})$。但此时 $w_1 \in C_j^{q_1}$当且仅当$w_2 \in C^{q_1}$ $_j$.

(3) 假设 $(w_1, w_2) \in \mathsf{IO}_{e_3}^{s_1\ s_2}$, 。与 (1) 中一样，不失一般性，可以假设$s_1 = q_1$ 且 $s_2 = q_2$。那么，根据 $\mathsf{Lab}(e_3)$ 的定义可知，$w_1(b) = 1$ 且 $w_2 = w_1$。因此，$(w_2, s_2) \in C_j$ 当且仅当 $w_1(d) = w_2(d) = j$，而这当且仅当 $(w_1, s_1) \in C_j$。 (4) 假设 $(w_1, w_2) \in \mathsf{IO}_{e_4}^{s_1\ s_2}$, 。与 (3) 中一样，可以假设 $s_1 = q_1$ 且 $s_2 = q_2$。那么，$w_1(b) = \delta^{-1}$、$w_2(b) = 1$，且 $w_1(d) = w_2(d)$。但这再次意味着，$(w_1, s_1) \in C_j$ 当且仅当 $(w_2, s_2) \in C_j$。 (5) 假设 $(w_1, w_2) \in \mathsf{IO}_{e_5}^{s_1\ s_2}$, 。与 (2) 中一样，这意味着 $s_1 = s_2 = q_2$，并且如果 $w_1 = (\delta^m, \delta^n)$，那么对某个 $\ell \in \{-1, 0, 1\}$，有 $w_2 = (\delta^{m-\ell}, \delta^{n+\ell})$。但 $(\delta^\alpha, \delta^\beta) \in C_j^{q_2}$当且仅当 $\alpha + \beta = j$，因此 $(w_1, s_1) \in C_j$ 当且仅当 $(w_2, s_2) \in C_j$。 (6) 假设 $(w_1, w_2) \in \mathsf{IO}_{e_6}^{s_1\ s_2}$, 。与 (1) 中一样，不失一般性，可以假设 $s_1 = q_2$ 且 $s_2 = \mathsf{div2}_f$；此时，动作标记 e_6 意味着 $w_1(d) = 1$ 且 $w_2 = w_1$。因此，$(w_2, s_2) \in C_j$ 当且仅当 $w_1(b) = w_2(b) = \delta^j$，而这当且仅当 $(w_1, s_1) \in C_j$。

由于 div2 的所有边都标记为 0 阶动作，因此每条未画出的边都隐含着一条逆边。然而，与任何标记为 0 阶动作的边一样，对所有 $k \in \overline{6}$，$\mathrm{IO}^{e_k^{-1}} = \mathrm{IO}_{e_k}^{-1}$，因此，对所有 $j \in \mathbb{Z}$，C_j 也在 $\mathrm{IO}^{e_k^{-1}}$ 下封闭。

此外，注意到

$$\mathrm{ND}^1_{\mathrm{div2}} \times \mathrm{SF}_{\mathrm{div2}} = \left\{((\delta^i, 1), \mathrm{sf}) \mid i \in \mathbb{Z},\ \mathrm{sf} \in \{\mathrm{div2}_s, \mathrm{div2}_f\}\right\} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} (C_j^s \cup C_j^f)$$

因此，子集族 $\{C_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 满足命题 7.16 中列出的假设，因此 $\mathrm{IO}_{\mathrm{div2}} \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \left(C_j,\ \mathrm{IO}\right)^2$。注意，按此构造，集合 $U = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \left(C_j,\ \mathrm{IO}\right)^2$ 恰好由陈述中所描述的那些有序对组成。因此，只需展示 div2 的输入输出计算，从而推出反向包含关系。

引理 7.12 意味着 $\mathrm{IO}_{\mathrm{div2}}$ 是 $\mathrm{ND}_{\mathrm{div2}} \times \mathrm{SF}_{\mathrm{div2}}$ 上的等价关系。因此，由于任意 $(w_1, \mathrm{div2}_f, w_2, \mathrm{div2}_f) \in U$ 都满足 $w_1 = w_2$，根据自反性，$(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{f,\ f\,\mathrm{div2}}$。

固定 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\tau \in \{\pm 1\}$。那么，路径 $e_1, (e_2^\tau)^n, e_3, (e_5^\tau)^n, e_6$ 在 div2 中（其中 e^n 表示由环 e 重复 n 次组成的子路径）支持一个计算 $\varepsilon_{n,\ \tau}$，其端点为 $((\delta^{2\tau n}, 1), \mathrm{div2}_s)$ 和 $((\delta^{\tau n}, 1), \mathrm{div2}_f)$。类似地，路径 $e_1, (e_2^\tau)^n, e_4, (e_5^\tau)^n, e_6$ 支持一个计算 $\varepsilon'_{n,\ \tau}$，其端点为 $((\delta^{2\tau n - 1}, 1), \mathrm{div2}_s)$ 和 $((\delta^{\tau n}, 1), \mathrm{div2}_f)$。

因此，对于所有 $j \in \mathbb{Z}$ 和 $\alpha \in \{0, 1\}$，$(\delta^{2j-\alpha}, \delta^j) \in \mathrm{IO}^{s,\ f\,\mathrm{div2}}$。根据对称性，任何满足 $s_1 \neq s_2$ 的 $(w_1, s_1, w_2, s_2) \in U$ 都满足 $(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s_1,\ s_2\mathrm{div2}}$。

最后，对于 $(w_1, \mathrm{div2}_s, w_2, \mathrm{div2}_s) \in U$，存在 $j \in \mathbb{Z}$ 和 $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$，使得 $w_1 = \delta^{2j-\alpha}$ 和 $w_2 = \delta^{2j-\beta}$。但是，此时 $(w_1, \delta^j) \in \mathrm{IO}^{s,\ f\,\mathrm{div2}}$ 且 $(\delta^j, w_2) \in \mathrm{IO}^{f,\ s\,\mathrm{div2}}$，因此根据传递性，$(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s,\ s\,\mathrm{div2}}$。

□

引理 7.20 的证明是以下关于操作的 IO 关系的证明的典型例子：系统地选择满足命题 7.16 假设的集合 C_j，然后展示能够推出该陈述的输入输出计算。由于该证明是模板，因此特别注意阐述细节，尤其是检查每个 C_j 都在每条边的 IO 关系下封闭。不过，由于检查这种闭包通常很直接，所以下文通常会省略这些细节。

现在已经计算出 $\mathrm{IO}_{\mathrm{div2}}$，接下来回到适当操作的检查$_{>0}$。为便于表示，当该操作用作下标时，记为 ch$>$0，即 $\mathcal{G}_{\mathrm{ch}>0}$ 是定义在 $(\mathcal{H}_{\mathrm{ch}>0}, \mathrm{INST}_{\mathrm{ch}>0})$ 上的一个 S^*-图，其中 $\mathcal{H}_{\mathrm{ch}>0} = (\mathcal{I}_{\mathrm{ch}>0}, \mathcal{A}_{\mathrm{ch}>0})$。

记号 $\mathsf{check}_{>0}(a)$ 表示 $\mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{ch}>0} = \{a\}$，且所有其余指标均为内部指标，即 $\mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{ch}>0} = \{b\}$。注意，div2 和 copy 的内部指标都不出现在 $\mathcal{I}_{\mathrm{ch}>0}$ 中，尽管 div2 和 copy 会标记边。

组成标记 $\mathsf{check}_{>0}$ 的边的 0 度动作的片段，立即蕴含 $\delta \in \mathcal{A}_{\mathrm{ch}>0}(b)$。又由于 $\mathcal{A}_{\mathrm{div2}}(b) = \{\delta\}$ 且 $\mathcal{A}_{\mathrm{copy}}(a) = \mathcal{A}_{\mathrm{copy}}(b) = \{\delta\}$，因此可得 $\mathcal{A}_{\mathrm{ch}>0}(a) = \mathcal{A}_{\mathrm{ch}>0}(b) = \{\delta\}$。

同样，由于尾位于 $\mathrm{SF}_{\mathrm{ch}>0}$ 中的任意边都标记着一个包含守卫片段 $[\mathfrak{b} = 1]$ 的 0 阶动作，因此很容易验证检查$_{>0}$ 满足条件 (O)。

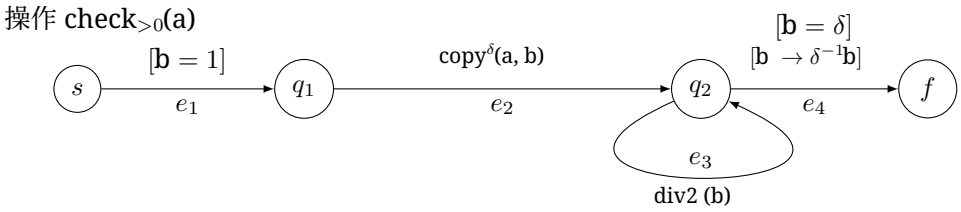
此外，与 div2 采用的约定类似，将广义线性群$_{\mathrm{ch}>0} = L_{\mathcal{H}_{\mathrm{ch}>0}}$的元素记作 $w = (w(a)\ w(b))$，即使第一个坐标表示 a-坐标。因此，对于所有$s_1, s_2 \in \mathrm{SF}_{\mathrm{ch}>0}$，$\mathrm{IO}^{s_1,\ s_2\mathrm{ch}>0}$ 的元素是形如 $(w_1, w_2) \in F(\delta)^2$ 的有序对，其中存在一个从 $((w_1, 1)\ s_1)$ 到 $((w_2, 1)\ s_2)$ 的 $\mathsf{check}_{>0}$ 计算。

引理 7.21。关系 $\mathsf{IO}_{\mathrm{ch}>0}$ 如下：

$$\begin{aligned}\mathsf{IO}^{s,s}_{\mathrm{ch}>0} &= \mathsf{IO}^{f,f}_{\mathrm{ch}>0} = \mathbb{I};\\ \mathsf{IO}^{s,f}_{\mathrm{ch}>0} &= \left\{(\delta^i, \delta^i) \mid i \geq 1\right\},\end{aligned}$$

特别地，a 在 $\mathsf{check}_{>0}(a)$ 中是不可变的。

证明。与引理 7.20 的证明一样，下面重现了 $\mathsf{check}_{>0}$ 的图，并添加了一些标签以便于证明。



定义子集 $C_1, C_2, C_3 \subseteq \mathsf{GL}_{\mathrm{ch}>0} \times S_{\mathrm{ch}>0}$ 如下：

$$\begin{aligned}C_1^s = C_1^{q_1} = C_1^f &= \{(\delta^i, 1) \mid i \geq 1\}\\ C_1^{q_2} &= \{(\delta^i, \delta^j) \mid i, j \geq 1\}\\ C_2^s = C_2^{q_1} &= \emptyset,\\ C_2^{q_2} &= \left\{(\delta^i, \delta^j) \mid i \leq 0, j \geq 1\right\},\\ C_2^f &= \left\{(\delta^i, 1) \mid i \leq 0\right\}\\ C_3^s = C_3^{q_1} &= \{(\delta^i, 1) \mid i \leq 0\}\\ C_3^{q_2} &= \{(\delta^i, \delta^j) \mid i, j \leq 0\}\\ C_3^f &= \emptyset\end{aligned}$$

与引理 7.20 的证明一样，要证明对于所有 $e \in E_{\mathrm{ch}>0}$，每个 C_j 在 IO_e 下封闭，只需证明对于所有 $k \in \overline{4}$，它在 IO_{e_k} 下封闭。

对于所有 $m \in \mathbb{Z}$，令 $\widehat{m} \in \mathbb{Z}$ 和 $r_m \in \{0, 1\}$ 为满足 $m = 2\widehat{m} - r_m$ 的唯一整数。然后，定义集合 $D(m) = \left\{\widehat{m}, 2\widehat{m} - \alpha, 4\widehat{m} - 2r_m - \alpha \mid \alpha \in \{0, 1\}\right\}$。注意，$D(m) \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$ 当且仅当 $m \in \mathbb{N} - \{0\}$。

根据边上 IO 关系的定义，$(w_1, w_2) \in \mathsf{IO}^{s_1\, s_2}_{e_3}$，当且仅当 $s_1 = s_2 = q_2$，$w_1(a) = w_2(a)$，且 $(w_1(b)\ w_2(b)) \in \mathsf{IO}^{\mathsf{sf}_1,\ \mathsf{sf}_2\mathrm{div2}}$ 对某个 $\mathsf{sf}_1, \mathsf{sf}_2 \in \{s, f\}$ 成立。因此，对于 $w_1 = (\delta^n, \delta^m)$，引理 7.20 意味着 $(w_1, w_2) \in \mathsf{IO}^{q_2\, q_2}_{e_3}$，当且仅当对某个 $\ell \in D(m)$，$w_2 = (\delta^n, \delta^\ell)$ 成立。由此，每个 C_j 都在 IO_{e_3} 下封闭。

对于所有其他 k，每个 C_j 在 IO_{e_k} 下的闭包可通过类似的论证得出。例如，对于 $k = 2$，用引理 5.6 替代引理 7.20，即可得到类似的证明。

此外，请注意，

$$\mathrm{ND}^1_{\mathrm{ch}>0} \times \mathrm{SF}_{\mathrm{ch}>0} = \{((\delta^i, 1), \mathrm{sf}) \mid i \in \mathbb{Z},\ \mathrm{sf} \in \mathrm{SF}_{\mathrm{ch}>0}\} = \bigcup_{j \in \overline{3}} (C_j^s \cup C_j^f)$$

因此，可以将命题 7.16 应用于 $\{C_j\}_{j=1}^3$，从而得到 $\mathsf{IO}_{\mathrm{ch}>0} \subseteq \bigcup_{j \in \overline{3}} \left(C_{j,\mathsf{IO}}\right)^2$。与引理 7.20 的证明一样，集合 $U = \bigcup_{j \in \overline{3}} \left(C_{j,\mathsf{IO}}\right)^2$ 恰好由陈述中描述的那些有序对组成，因此只需展示 $\mathsf{check}_{>0}$ 的输入输出计算，以推出反向包含关系。

注意，对于所有满足 $s_1 = s_2$ 的 $(w_1, s_1, w_2, s_2) \in U$，都有 $w_1 = w_2$，因此根据自反性，$(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s_1,s_2}\mathrm{ch}_{>0}$。

固定 $m \geq 1$，并令 $\rho_k = e'_1, e'_2, (e'_3)^k$ 为 $\mathsf{check}_{>0}$ 中由取 $e'_i = (\hat{}s, \hat{}f, e_i)$ 给出的路径，并且 $(e'_3)^k$ 表示一般路径 $e'_3, \ldots, e'_3$（k 次）。

于是，由引理 5.6 和 7.20，ρ_k 支持如下形式的计算：

$$\big((\delta^m, 1, (\mathrm{ch}_{>0})_s), e'_1, (\delta^m, 1, q_1), e'_2, (\delta^m, \delta^m, q_2), e'_3, (\delta^m, \delta^{\ell_1}, q_2), e'_3, \ldots e'_3, (\delta^m, \delta^{\ell_k}, q_2)\big)$$

其中，对所有 $i \in \overline{k}$，令 $\ell_0 = m$, $\ell_i = \lceil \ell_{i-1}/2 \rceil$。

因此，对所有 $i \in \overline{k}$，令 $r = \lceil \log_2(m) \rceil$, $1 \leq \ell_i \leq 2^{\max(r-i,0)}$。特别地，假设 $k \geq r$，则 ρ_k 支持在 $(\delta^m, 1, (\mathsf{check}_{>0})_s)$ 和 (δ^m, δ, q_2) 之间的一次计算。

但是 $((\delta^m, \delta), (\delta^m, 1)) \in \mathrm{IO}^{q_2\ f}_{e_4}$。因此，对于 $e'_4 = (\hat{}s, \hat{}f, e_4)$，一般路径 ρ_r, e'_4 支持一个输入输出计算 ε_m，其连接了 $(\delta^m, 1, (\text{检查}_{>0})_s)$ 与 $(\delta^m, 1, (\text{检查}_{>0})_f)$。

因此，$(\delta^m, \delta^m) \in \mathrm{IO}^{s,\ f}\mathrm{ch}_{>0}$，所以根据对称性有 $U \subseteq \mathrm{IO}_{\mathrm{ch}_{>0}}$。

□

尽管上面对引理 7.21 的证明与引理 7.20 的证明类似，但利用一个简单的观察可以将其简化：

引理 7.22。设 $\mathsf{Obj} \in \mathsf{OBJ}^*$、操作 $\in \mathsf{Obj}$，且有 $i \in \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}}$。假设对于所有 $\mathsf{act} \in \mathsf{ACT}_{\mathrm{op}} \cup \mathsf{ACT}^0_{\mathrm{op}}$，act 要么不提及 i，要么将 i作为不可变变量提及。那么 i在操作中是不可变的。

证明。根据假设，对于 op 的任意一般边 e' of op and $t_1, t_2 \in \{t(e')\ h(e')\}$，$(u'_1, u'_2) \in \mathrm{IO}^{t_1\ t_2}_{e'}$，意味着 $u'_1(i) = u'_2(i)$。因此，对于两个配置 (w'_1, s'_1) 和 (w'_2, s'_2) 之间 op 的任意计算，$w'_1(i) = w'_2(i)$。

因此，由于关系 $(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s_1,\ s_2}\mathrm{op}$ 意味着存在一个介于 $(w_1 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}, s_1)$ 和 $(w_2 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}, s_2)$ 之间的计算，i 必须是 op 中的不可变变量。

□

因此，由于 $\mathsf{check}_{>0}$ 中唯一提及 a 的边是 e_2，且引理 5.6 意味着 $\mathsf{Lab}(e_2)$ 将 a 作为不可变变量提及，所以对于所有 $s_1, s_2 \in \mathrm{SF}_{\mathrm{ch}>0}$，$\mathrm{IO}^{s_1,s_2}\mathsf{ch}_{>0} \subseteq \mathbb{I}$。自反性随即意味着 $\mathrm{IO}^{s,s}\ \mathsf{ch}_{>0} = \mathrm{IO}^{f,f}\ \mathsf{ch}_{>0} = \mathbb{I}$，存在 ε_m 意味着对于所有 $m \geq 1$，$(\delta^m, \delta^m) \in \mathrm{IO}^{s,f}\ \mathsf{ch}_{>0}$；而 C_2 在 IO_{e_k} 下的闭包意味着对于所有 $m \leq 0$，$(\delta^m, \delta^m) \notin \mathrm{IO}^{s,f}\ \mathsf{ch}_{>0}$。

这类论证有助于简化操作的 IO 关系计算，不过只能在特定情况下使用。

最后，在充分理解 $\mathsf{check}_{>0}$ 和 div2 之后，我们将注意力转回图7所示的对象计数器$_1$。与 $\mathsf{check}_{>0}$的表示惯例类似，当用作下标时，$\mathsf{Counter}_1$ 记作 $\mathcal{C}_1$。

记号 $\mathsf{Counter}_1[a]$ 表示 $\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathcal{C}_1} = \{a\}$。此外，记号 check() 和 inc() 表示 $\mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{check}} = \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{inc}} = \emptyset$。最后，check 或 inc 的边上提到的唯一索引是 a，因此 $\mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{check}} = \mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{inc}} = \emptyset$。于是，inc 和 check 都平凡地满足条件 (O)。

由于 $\mathcal{A}_{\mathrm{ch}>0}(a) = \{\delta\}$，在 $\mathcal{A}^*$ 中，check 或 inc 的边上提到的字母表中的唯一字母是 δ。因此，$\mathcal{A}_{\mathcal{C}_1}(a) = \mathcal{A}_{\mathrm{check}}(a) = \mathcal{A}_{\mathrm{inc}}(a) = \{\delta\}$。

引理 7.23。对象计数器$_1[a]$ 是一个计数器。

Proof. Let $V = \{\delta^i\}_{i=0}^{\infty} \subseteq F(\mathcal{A}_{\mathcal{C}_1}(a))$. So, $\widehat{V}_{\mathrm{inc}} = \widehat{V}_{\mathrm{check}} = V$.

定义配置集合 $C_{i,\ \mathrm{check}} \subseteq \mathbf{GL}_{\mathrm{check}} \times S_{\mathrm{check}}$ 对于 $i \in \overline{3}$ 如下：

$$C^s_{1,\mathrm{check}} = C^f_{1,\mathrm{check}} = \{\delta^i\}_{i=1}^{\infty}$$
$$C^s_{2,\mathrm{check}} = C^f_{3,\mathrm{check}} = \emptyset$$
$$C^f_{2,\mathrm{check}} = C^s_{3,\mathrm{check}} = \{1\}$$

根据引理 7.21，$C_{i,\ \mathrm{check}}$ 在 $\mathbf{IO}_e$ 下对唯一的 $e \in E_{\mathrm{check}}$封闭。此外，

$$\bigcup_{i\in\overline{3}} C^{\mathrm{SF}_{\mathrm{check}}}_{i,\mathrm{check}} = \{(\delta^i, \mathrm{sf}) \mid i \geq 0,\ \mathrm{sf} \in \mathrm{SF}_{\mathrm{check}}\} = \widehat{V}_{\mathrm{check}} \times \mathrm{SF}_{\mathrm{check}}$$

接下来，定义配置集合 $C_{j,\ \mathrm{inc}} \subseteq \mathbf{GL}_{\mathrm{inc}} \times S_{\mathrm{inc}}$，其中 $j \geq 0$：

$$C^s_{j,\mathrm{inc}} = \{\delta^j\}$$
$$C^q_{j,\mathrm{inc}} = C^f_{j,\mathrm{inc}} = \{\delta^{j+1}\}$$

进一步，定义 $C_{-1,\ \mathrm{inc}} = \{(\mathbf{1}, \text{递增}f)\} \subseteq \mathbf{GL}_{\mathrm{inc}} \times S_{\mathrm{inc}}$。

于是，再次利用引理 7.21，可以直接验证：对于所有 $j \geq -1$、$C_{j,\ \mathrm{inc}}$ 对所有边 $e \in E_{\mathrm{inc}}$在 $\mathbf{IO}_e$ 下封闭。此外，再次

$$\bigcup_{j=-1}^{\infty} C^{\mathrm{SF}_{\mathrm{inc}}}_{j,\mathrm{inc}} = \{(\delta^i, \mathrm{sf}) \mid i \geq 0,\ \mathrm{sf} \in \mathrm{SF}_{\mathrm{inc}}\} = \widehat{V}_{\mathrm{inc}} \times \mathrm{SF}_{\mathrm{inc}}$$

因此，命题 7.17 的假设均已满足。所以，由于 $\delta^0 = 1^{\mathrm{val}}_{\mathcal{C}_1} \in \mathbf{VAL}_{\mathcal{C}_1} \cap V$，$\mathbf{VAL}_{\mathcal{C}_1} \subseteq V$。

现在，设 e_1 和 e_2 是 inc 的边，使得 $t(e_1) = \mathrm{inc}_s$, $h(e_1) = t(e_2) = q$，且 $h(e_2) = \mathrm{inc}_f$。接着，令 $e'_k = (\hat{}s, \hat{}f, e_k)$ 对于 $k = 1, 2$。

由此可知，对于任意 $i \geq 0$，inc 中的一般路径 e'_1, e'_2 支持 inc 在 $(\delta^i, \mathrm{inc}_s)$ 和 $(\delta^{i+1}, \mathrm{inc}_f)$ 之间的输入输出计算ε_i。因此，$\mathcal{G}^{\mathrm{val}}_{\mathcal{C}_1}$ 中存在一条边，连接 δ^i 和 δ^{i+1}，与 ε_i 相对应。于是，对于任意满足 $n \geq 1$ 的 $\delta^n \in V$，$\mathcal{G}^{\mathrm{val}}_{\mathcal{C}_1}$ 中存在一条路径，连接$1^{\mathrm{val}}_{\mathcal{C}_1}$和 δ^n，且该路径对应于 $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n-1}$。因此，$V = \mathbf{VAL}_{\mathcal{C}_1}$。

现在，固定由 $v_i = \delta^i$（对所有 $i \in \mathbb{N}$）给出的自然枚举 $\mathbf{VAL}_{\mathcal{C}_1} = \{v_i\}_{i=0}^{\infty}$。由引理 7.21 可立即得出，$\mathbf{IO}^s_{,\ s\ \text{检查}} = \mathbf{IO}^f_{,\ f\ \text{检查}} = \mathbb{I}$，并且 $\mathbf{IO}^s_{,\ f\ \text{检查}} = \{(v_i, v_i) \mid i \geq 1\}$。

此外，注意到

$$\mathrm{ND}_{\mathrm{inc}} \times \mathrm{SF}_{\mathrm{inc}} = \mathbf{VAL}_{\mathrm{inc}} \times \mathrm{SF}_{\mathrm{inc}} = \bigcup_{j=-1}^{\infty} C^{\mathrm{SF}_{\mathrm{inc}}}_{j,\mathrm{inc}} = \bigcup_{j=-1}^{\infty} (C_{j,\mathrm{inc}})_{\mathbf{IO}}$$

因此，由于每个 $C_{j,\ \mathrm{inc}}$ 对每个 $e \in E_{\mathrm{inc}}$ 都在 $\mathbf{IO}_e$ 下封闭，$\{C_{j,\mathrm{inc}}\}$ 满足命题 7.16 的假设，即 $\mathbf{IO}_{\mathrm{inc}} \subseteq \bigcup (C_{j,\ \mathrm{inc}})^2_{\mathbf{IO}} = \bigcup (C^{\mathrm{SF}_{\mathrm{inc}}}_{j\ ,\ \text{递增}})^2_{\mathbf{IO}}$。

对于任意 $j \geq -1$、$C^s_{j,\ \mathrm{inc}}$ 和 C^f_j，递增至多是单元素集。因此，由自反性可得，$\mathbf{IO}^s$,$_s$ 递增 $= \mathbf{IO}^f$,$_f$ 递增 $= \mathbb{I}$。此外，对于 $j \geq 0$、$C^s_{j,\ \mathrm{inc}} \times C^f_j$，递增 $= \{(v_j, v_{j+1})\}$，而 $C^s_{-1,\mathrm{inc}} \times C^f_{-1}$ 递增 $= \emptyset$。因此，上文所述的计算 ε_i 意味着 $\mathbf{IO}^s$,$_f$ 递增 $= \{(v_i, v_{i+1}) \mid i \geq 0\}$。

因此，$\mathbf{Counter}_1$ 的值以及 check 和 inc 的 IO 关系符合计数器定义的要求。

□

8. Expansions

由于定理 1.1 的证明需要构造一个满足某些性质的 S-machine，因此由定理 3.4 可知，只需构造一个满足其他一些性质的 S^*-graph $\mathcal{G}$（这些性质将在第 10 节中详细讨论）。然而，为了应用定理 3.4 的对应关系，$\mathcal{G}$ 必须是一个 0 阶的 S-graph。因此，尽管更高阶的 S-graph 可以被理解为高效的工具，但仍需在它们与 0 阶的 S-graph 之间建立某种联系。这个缺口通过一个称为展开的过程得以弥合。

S^*-图、操作和对象的展开按度迭代定义。为便于说明这一构造的术语，首先定义一个更一般的过程。

定义 8.1。固定 $n \geq 0$，并假设映射三元组 $\mathcal{E}^n_G : \mathrm{SGRAPH}'_n \to \mathrm{SGRAPH}_0, \mathcal{E}^n_{\mathrm{OP}} : \mathrm{OP}'_n \to \mathrm{OP}_0$, 和 $\mathcal{E}^n_{\mathsf{OBJ}} : \mathrm{OBJ}'_n \to \mathrm{OBJ}_0$ 满足以下性质：

(1) 设 $\mathcal{G} = (S_{\mathcal{G}}, E_{\mathcal{G}})$ 是一个在 $(\mathcal{H}_{\mathcal{G}}, \mathrm{INST}_{\mathcal{G}})$ 上、针对 $\mathcal{H}_{\mathcal{G}} = (\mathcal{I}_{\mathcal{G}}, \mathcal{A}_{\mathcal{G}})$ 的度至多为 n 的 S-图。那么 $\mathcal{E}^n_G(\mathcal{G}) = (S_{\mathcal{G}_\mathcal{E}}, E_{\mathcal{G}_\mathcal{E}})$ 是一个在 $\mathcal{H}_{\mathcal{G}_\mathcal{E}} = (\mathcal{I}_{\mathcal{G}_\mathcal{E}}, \mathcal{A}_{\mathcal{G}_\mathcal{E}})$ 上的 S-图（0 阶），使得 $S_{\mathcal{G}} \subseteq S_{\mathcal{G}_\mathcal{E}}$，$\mathcal{H}_{\mathcal{G}} \leq \mathcal{H}_{\mathcal{G}_\mathcal{E}}$，并且对所有 $i \in \mathcal{I}_{\mathcal{G}}$，$\mathcal{A}_{\mathcal{G}_\mathcal{E}}(i) = \mathcal{A}_{\mathcal{G}}(i)$。(2) 对于每个度至多为 n 的操作 op，$\mathcal{E}^n_{\mathrm{OP}}(\mathrm{op}) = \mathrm{op}_\mathcal{E}$ 是一个 0 阶操作，使得 $\mathcal{G}_{\mathrm{op}_\mathcal{E}} = \mathcal{E}^n_G(\mathcal{G}_{\mathrm{op}})$，$\mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}_\mathcal{E}} = \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}}, \mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{op}_\mathcal{E}} = \mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{op}}$，$(\mathrm{op}_\mathcal{E})_s = \mathrm{op}_s$，以及 $(\mathrm{op}_\mathcal{E})_f = \mathrm{op}_f$。(3) 对于每个度至多为 n 的对象 $\mathrm{Obj} = (\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}, \mathrm{INST}_{\mathrm{Obj}}, \mathrm{op}_1, \ldots, \mathrm{op}_k)$，$\mathcal{E}^n_{\mathsf{OBJ}}(\mathrm{Obj})$ 是一个 0 阶对象，使得 $\mathcal{E}^n_{\mathsf{OBJ}}(\mathrm{Obj}) = (\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}, \mathcal{E}^n_{\mathrm{OP}}(\mathrm{op}_1) \ldots, \mathcal{E}^n_{\mathrm{OP}}(\mathrm{op}_k))$。

那么，三元组 $(\mathcal{E}^n_G, \mathcal{E}^n_{\mathrm{OP}}, \mathcal{E}^n_{\mathsf{OBJ}})$ 称为广义 n-展开映射。

现在，将 EXP^0_G、$\mathrm{EXP}^0_{\mathrm{OP}}$ 和 $\mathrm{EXP}^0_{\mathsf{OBJ}}$ 分别定义为 SGRAPH_0, OP_0, 和 OBJ_0,上的恒等映射。注意，$(\mathrm{EXP}^0_G, \mathrm{EXP}^0_{\mathrm{OP}}, \mathrm{EXP}^0_{\mathsf{OBJ}})$ 是广义 0-展开映射。

定义 8.2。固定 $n \geq 0$，并假设 $(\mathrm{EXP}^n_G, \mathrm{EXP}^n_{\mathrm{OP}}, \mathrm{EXP}^n_{\mathsf{OBJ}})$ 是广义 n-展开映射。

设 $\mathcal{G} = (S_{\mathcal{G}}, E_{\mathcal{G}})$ 是一个关于 $(\mathcal{H}_{\mathcal{G}}, \mathrm{INST}_{\mathcal{G}})$、度为 $n+1$ 的 S-图，且满足 $\mathcal{H}_{\mathcal{G}} = (\mathcal{I}_{\mathcal{G}}, \mathcal{A}_{\mathcal{G}})$。将 $E^0_{\mathcal{G}}$ 定义为 $E_{\mathcal{G}}$ 的边的子集，当且仅当 $\mathrm{Lab}(e) \in \mathrm{ACT}^0_{\mathcal{G}}$ 时，该子集由 $e \in E^0_{\mathcal{G}}$ 给出。

对于 $e \in E_{\mathcal{G}} - E^0_{\mathcal{G}}$，令 $\mathrm{Lab}(e) = (\mathrm{inst}_e, \mathrm{op}_e, \mu^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{Lab}(e)})$。那么，由于 $\mathrm{op}_e \in \mathrm{OP}'_n$，存在操作 $\mathrm{op}^{\mathrm{exp}}_e = \mathrm{EXP}^n_{\mathrm{OP}}(\mathrm{op}_e)$。固定一个单射 μ^{int}_e: $\mathcal{I}^{\mathrm{int}}$ 操作$^{\mathrm{exp}}_e \to \mathcal{I}^*$，其像 $\mathcal{I}^{\mathrm{int}}_e$与 $\mathcal{I}_{\mathcal{G}}$ 不相交。此外，假设对于不同的 e_1、$e_2 \in E_{\mathcal{G}} - E^0_{\mathcal{G}}$，有 $\mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{e_1} \cap \mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{e_2} = \emptyset$。于是，$\mu^{\mathrm{int}}_e$ 称为 e 的内部带重命名映射。

令 $\mathcal{I}^{\mathrm{inv}}_{\mathcal{G}} = \bigsqcup_{e \in E_{\mathcal{G}} - E^0_{\mathcal{G}}} \mathcal{I}^{\mathrm{int}}_e$，并定义硬件 $\mathcal{H}^{\mathrm{exp}}_{\mathcal{G}} = (\mathcal{I}^{\mathrm{exp}}_{\mathcal{G}}, \mathcal{A}^{\mathrm{exp}}_{\mathcal{G}})$ 如下：$\mathcal{I}^{\mathrm{exp}}_{\mathcal{G}} = \mathcal{I}_{\mathcal{G}} \sqcup \mathcal{I}^{\mathrm{inv}}_{\mathcal{G}}$，

对所有 $i \in \mathcal{I}_{\mathcal{G}}$，$\mathcal{A}^{\mathrm{exp}}_{\mathcal{G}}(i) = \mathcal{A}_{\mathcal{G}}(i)$；并且对所有满足 $e \in E_{\mathcal{G}} - E^0_{\mathcal{G}}$ 的 $i \in \mathcal{I}^{\mathrm{int}}_e$，$\mathcal{A}^{\mathrm{exp}}_{\mathcal{G}}(i) = \mathcal{A}_{\mathrm{op}^{\mathrm{exp}}_e}((\mu^{\mathrm{int}}_e)^{-1}(i))$。注意，$\mathcal{H}_{\mathcal{G}} \leq \mathcal{H}^{\mathrm{exp}}_{\mathcal{G}}$。子集 $\mathcal{I}^{\mathrm{inv}}_{\mathcal{G}} = \mathcal{I}^{\mathrm{exp}}_{\mathcal{G}} - \mathcal{I}_{\mathcal{G}}$ 称为 $\mathcal{H}^{\mathrm{exp}}_{\mathcal{G}}$ 的不可见带集合。

为使记号统一，对于任意 $\mathcal{G}_0 \in \mathrm{SGRAPH}_0$, ，规定 $\mathcal{G}_0$ 的不可见带集合为 $\mathcal{I}^{\mathrm{inv}}_{\mathcal{G}_0} = \emptyset$。

现在，将 e 的边带重命名映射定义为 $\mu_e = \mu^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{Lab}(e)} \sqcup \mu^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}_e} \sqcup \mu^{\mathrm{int}}_e$。令 $\mathcal{H}_e = (\mathcal{I}_e, \mathcal{A}_e)$ 为满足 $\mathcal{H}_e \leq \mathcal{H}^{\mathrm{exp}}_{\mathcal{G}}$ 和 $\mathcal{I}_e = \mathcal{I}_{\mathrm{Lab}(e)} \sqcup \mathcal{I}^{\mathrm{int}}_e$ 的硬件，即使得 $\mathcal{I}_e$ 是 μ_e 的像。然后，令 $\mathcal{G}_e$ 为通过应用 μ_e 得到的 $\mathcal{G}_{\mathrm{op}^{\mathrm{exp}}_e}$ 的副本，也就是修改定义动作标记每条边的片段，将任意索引 i 替换为 $\mu_e(i)$。因此，$\mathcal{G}_e$ 是硬件 $\mathcal{H}_e$ 上的一个 S-图（度为 0），其顶点集与 $\mathrm{op}^{\mathrm{exp}}_e$ 的顶点集相同。然而，由于 $\mathcal{H}_e \leq \mathcal{H}^{\mathrm{exp}}_{\mathcal{G}}$，$\mathcal{G}_e$ 被解释为 $\mathcal{H}^{\mathrm{exp}}_{\mathcal{G}}$ 上的一个 S-图。

按如下方式构造自然数集上的 S-图 $\mathcal{G}_{\mathrm{exp}} = (S^{\mathrm{exp}}_{\mathcal{G}}, E^{\mathrm{exp}}_{\mathcal{G}})$（0 阶）：

- $S_{\mathcal{G}} \subseteq S_{\mathrm{EXP}\,\mathcal{G}}$
- 对于任意 $e = (s_1, s_2, \text{动作}) \in E^0_{\mathcal{G}}$，构造边 $e' = (s_1, s_2, \text{动作}') \in E_{\mathrm{EXP}\,\mathcal{G}}$，其中动作′是将动作解释为作用于 $\mathcal{H}_{\mathrm{EXP}\,\mathcal{G}}$ 上的动作。

• 对于任意 $e=(s_1,s_2,\text{动作})\in E_{\mathcal{G}}-E^0_{\mathcal{G}}$，将 $\mathcal{G}_e$ 粘贴到图中，分别将起始状态和终止状态与 s_1 和 s_2 识别。通过此粘贴得到的 $\mathcal{G}_{\text{EXP}}$ 的子图记为 $\mathcal{G}'_e$。

然后定义 $\text{EXP}^{n+1}_G(\mathcal{G})=\mathcal{G}_{\exp}$。

最后，通过设定 $\text{EXP}^{n+1}_G\big|_{\text{SGRAPH}'_n}=\text{EXP}^n_G$，将其扩展为 $\text{EXP}^{n+1}_G:\text{SGRAPH}'_{n+1}\to\text{SGRAPH}_0$。

根据为 $\mathcal{G}\in\text{SGRAPH}_{n+1}$ 构造 $\mathcal{G}_{\exp}=\text{EXP}^{n+1}_G(\mathcal{G})$ 的过程，$E^0_{\mathcal{G}}$ 的每条边都对应于 $E^{\exp}_{\mathcal{G}}$ 的一条边。$E^{\exp}_{\mathcal{G}}$ 的这条对应边称为 $\mathcal{G}_{\exp}$ 的真边。对于任意不是真边的边$e'\in E^{\exp}_{\mathcal{G}}$，存在 $e\in E_{\mathcal{G}}-E^0_{\mathcal{G}}$，使得 e' 是 $\mathcal{G}'_e$ 的一条边。在这种情况下，e' 称为 e 的展开边。

注意，前面的观察验证了以下关于 $\mathcal{G}_{\exp}\in\text{SGRAPH}_0$ 的断言：对于任意边$e'=(s_1,s_2,\text{act})\in E^{\exp}_{\mathcal{G}}$，

• 动作 $\in\text{ACT}_{\mathcal{H}_{\text{展开}\mathcal{G}}}$ 通过构造；

• 如果 e'是真状态，则根据定义 6.3 的条件 (4)，存在一条真边 $(s_2,s_1,\text{动作}^{-1})\in E_{\text{展开}\mathcal{G}}$；并且

• 如果 $e'\in\mathcal{G}'_e$，则它源自 $\mathcal{G}_e$ 的一条边，根据定义 3.2，该边在 $\mathcal{G}_e$ 中必须有一个逆，因此 $(e')^{-1}\in E_{\text{展开}\mathcal{G}}$。

对于任意 $s\in S^{\exp}_{\mathcal{G}}-S_{\mathcal{G}}$，存在 $e\in E_{\mathcal{G}}-E^0_{\mathcal{G}}$ 使得 s 源自 $\mathcal{G}_e$的一个状态。在此情况下，将 s称为 e的展开状态。$S^{\exp}_{\mathcal{G}}$ 的所有其他元素称为正常状态。

设 $\mathcal{G}'$ 为从 $\mathcal{G}_{\exp}$ 中删除所有真边后得到的图。则 $\mathcal{G}'$ 由孤立的正常状态以及连通子图 $\mathcal{G}'_e$组成，这些连通子图分别与 $E_{\mathcal{G}}-E^0_{\mathcal{G}}$相对应。注意，对于任意互异的 e_1、$e_2\in E_{\mathcal{G}}-E^0_{\mathcal{G}}$，$\mathcal{G}'_{e_1}\cap\mathcal{G}'_{e_2}\subseteq S_{\mathcal{G}}$。

此外，若 $e=(s_0,s_0,\text{动作})\in E_{\mathcal{G}}-E^0_{\mathcal{G}}$是一个环，则 $\mathcal{G}'_e$与 $\mathcal{G}_e$不同构，因为与 op_e 的起始状态和终止状态对应的顶点被粘合在一起。于是，存在一个满射 $\pi_e:\mathcal{G}_e\to\mathcal{G}'_e$，它保持状态和边，且其在 $\mathcal{G}_e$ –SF^{op_e} 上的限制是一个保标签双射，并满足 $\pi_e((\text{op}_e)_s)=\pi_e((\text{op}_e)_f)=s_0$。

为保持一致性，若 $e=(s_1,s_2,\text{动作})\in E_{\mathcal{G}}-E^0_{\mathcal{G}}$，则定义 $\pi_e:\mathcal{G}_e\to\mathcal{G}'_e$为如下保标签双射：将 op_e 的起始顶点和终止顶点分别映射到 s_1 和 s_2。

引理 8.3. 设 $\mathcal{G}\in\text{SGRAPH}_{n+1}$，并令 $\mathcal{G}_{\exp}=\text{EXP}^{n+1}_G(\mathcal{G})$。设 $e=(s'_1,s'_2,\text{动作}_e)\in E_{\mathcal{G}}-E^0_{\mathcal{G}}$，其中动作$_e=(\text{inst}_e,\text{op}_e,\mu^{\text{ext}}_{\text{act}_e})$。那么，对于 $\mathcal{G}'_e$中的任意路径 $\rho'=e'_1,\dots,e'_m$，若对所有 $i\in\overline{m-1}$都有 $h(e'_i)\notin\{s'_1,s'_2\}$，则 $\mathcal{G}_e$中的边序列 $\rho=e_1,\dots,e_m$满足对所有 $j\in\overline{m}$都有 $\pi_e(e_j)=e'_j$，且构成一条路径，使得对所有 $i\in\overline{m-1}$都有 $h(e_i)\notin\text{SF}^{\text{op}_e}$。此外，$t(e_1)\in\text{SF}^{\text{op}_e}$当且仅当$t(e'_1)\in\{s'_1,s'_2\}$；$h(e_m)\in\text{SF}^{\text{op}_e}$当且仅当 $h(e'_m)\in\{s'_1,s'_2\}$；并且对所有$j\in\overline{m}$，都有 $\text{Lab}(e_j)=\text{Lab}(e'_j)$。

在这种情况下，ρ 称为 ρ'的提升。

证明。由于 π_e 是 $\mathcal{G}_e$ 与 $\mathcal{G}'_e$的边集之间的保标签双射，因此对每个 $j\in\overline{m}$，令$e_j=\pi_e^{-1}(e'_j)$，则 $\rho=e_1,\dots,e_m$是$\mathcal{G}_e$中的一条路径，且对所有 $j\in\overline{m}$，$\text{Lab}(e_j)=\text{Lab}(e'_j)$。此外，对于 $\mathcal{G}_e$的任意顶点 s，当且仅当 $s\in\text{SF}^{\text{op}_e}$时，$\pi_e(s)\in\{s'_1,s'_2\}$。

因此，对于 $i\in\overline{m-1}$，由于 $\pi_e(h(e_i))=h(e'_i)$，故 $h(e_i)\notin\text{SF}^{\text{op}_e}$。此外，当且仅当 $\pi_e(t(e_1))=t(e'_1)\in\{s'_1,s'_2\}$时，$t(e_1)\in\text{SF}^{\text{op}_e}$；对于 $h(e_m)$和 $h(e'_m)$，结论类似。

□

设 $\rho=e_1,\dots,e_N$ 是 $\mathcal{G}_{\exp}$ 中的一条路径，其中对所有 $i\in\overline{N}$，都有 $s_0=t(e_1)$ 和 $s_i=h(e_i)$。假设 s_0 和 s_N 是正常状态。若极大子集 $k,\ell\subseteq\overline{N}$ 满足对每个 $i\in k,\ell-1$，$\overline{s_i}$ 都不是正常状态，则称其为极大展开区间。存在一种极大展开区间的顺序 $(k_1,\ell_1,\dots,k_t,\ell_t)$，使得 $k_1=1$，$\ell_t=N$，且对所有 $i\in\overline{t-1}$，都有 $k_{i+1}=\ell_i+1$。

此外，对每个 $n \in \overline{N}$，存在唯一的 $j(n) \in \overline{t}$，使得 $n \in k_{j(n)}, \ell_{j(n)}$。根据构造，对 $m, n \in \overline{N}$，$m \leq n$ 蕴含 $j(m) \leq j(n)$。

对于 $i \in \overline{t}$，如果 e_{k_i} 是真边，则 $k_i = \ell_i$。在这种情况下，对于构造 e_{k_i} 所依据的 $\mathcal{G}$ 的边 e，定义 $\mathcal{G}$ $e'_{k_i,\ell_i} = (\hat{}s, \hat{}f, e)$ 的一般边。

否则，存在 $e = (s'_1, s'_2$,动作$e) \in E_{\mathcal{G}} - E^0_{\mathcal{G}}$ 使得对于每个 $n \in k_i, \ell_i$，e_n 都是 e 的一条展开边。于是，ρ 的子路径 $\rho_{k_i,\ell_i} = e_{k_i}, \ldots, e_{\ell_i}$ 称为 ρ 的一条扩展子路径，并且是 $\mathcal{G}'_e$ 中的一条路径。因此，$s_{k_i-1}, s_{\ell_i} \in \{s'_1, s'_2\}$。若 $s'_1 \neq s'_2$，则定义 $\mathcal{G}$ 的一般边$e'_{k_i,\ell_i} = (\mathrm{sf}_1$,sf2, $e)$，其中 $\mathrm{sf}_1 = \hat{}s$ 当且仅当 $s_{k_i-1} = s'_1$，并且 $\mathrm{sf}_2 = \hat{}s$ 当且仅当$s_{\ell_i} = s'_1$。反之，若 $s'_1 = s'_2$，则令 $e'_{k_i,\ell_i} = (\mathrm{sf}_1$,sf2, $e)$，使得 sf_1 和 sf_2 是 s, f 的任意选择。

于是，泛型边序列 $\rho' = e'_{k_1,\ \ell_1}, e'_{k_2,\ \ell_2}, \ldots, e'_{k_{t-1},\ \ell_{t-1}}, e'_{k_t,\ \ell_t}$ 是 $\mathcal{G}$ 中的一条一般路径，其中对所有 $i \in \overline{t}$，$t(e'_{k_i,\ \ell_i}) = s_{k_i-1}$ 且 $h(e'_{k_i,\ \ell_i}) = s_{\ell_i}$。在这种情况下，$\rho'$ 称为 ρ 的一般约化。注意，一般约化并不唯一：如果 e 是 $\mathcal{G}$ 中的一个环，并且 ρ 包含一条扩展子路径 $\rho_{k,\ \ell}$，该子路径包含在 $\mathcal{G}'_e$ 中，那么 ρ' 的一般边 $e'_{k,\ \ell}$ 可以取任意方向。

定义 8.4。固定 $n \geq 0$，并假设 $(\mathrm{EXP}^n_G, \mathrm{EXP}^n_{\mathrm{OP}}, \mathrm{EXP}^n_{\mathsf{OBJ}})$ 是一个广义 n-展开映射。

对于操作 $\in \mathrm{OP}_{n+1}$，按定义 8.2 中的构造定义 $\mathcal{G}^{\exp}_{\mathrm{op}} = \mathrm{EXP}^{n+1}_G(\mathcal{G}_{\mathrm{op}})$。特别地，此时 $\mathcal{G}^{\exp}_{\mathrm{op}} = (S^{\exp}_{\mathrm{op}}, E^{\exp}_{\mathrm{op}})$ 是一个基于硬件 $\mathcal{H}^{\exp}_{\mathrm{op}} = (\mathcal{I}^{\exp}_{\mathrm{op}}, \mathcal{A}^{\exp}_{\mathrm{op}})$ 的 0 阶 S-图，其中有 $S_{\mathrm{op}} \subseteq S^{\exp}_{\mathrm{op}}$ 和 $\mathcal{H}_{\mathrm{op}} \leq \mathcal{H}^{\exp}_{\mathrm{op}}$。

令 $\mathcal{I}^{\mathrm{ext}} = \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}}$、$\mathcal{I}^{\mathrm{val}} = \mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{op}}$ 和 $\mathcal{I}^{\mathrm{int}} = \mathcal{I}^{\exp}_{\mathrm{op}} - (\mathcal{I}^{\mathrm{ext}} \sqcup \mathcal{I}^{\mathrm{val}}) = \mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}} \sqcup \mathcal{I}^{\mathrm{inv}}_{\mathrm{op}}$。因此，$\mathcal{I}^{\mathrm{int}}$ 包含 $\mathcal{G}^{\exp}_{\mathrm{op}}$ 的所有新（不可见）带。

引理 8.5. 对于上述操作 $\in \mathrm{OP}_{n+1}$，$\mathrm{op}^{\exp} = (\mathcal{G}^{\exp}_{\mathrm{op}}, \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}, \mathcal{I}^{\mathrm{val}}, \mathcal{I}^{\mathrm{int}}, \mathrm{op}_s, \mathrm{op}_f)$ 是一个 0 阶操作。

证明。根据假设，$\mathcal{G}_{\mathrm{op}}$ 的底层图以及每个 $e \in E_{\mathrm{op}} - E^0_{\mathrm{op}}$ 对应的 $\mathcal{G}'_e$ 的底层图都是连通的，因此通过构造，$\mathcal{G}^{\exp}_{\mathrm{op}}$ 是（强）连通的。因此，只需证明条件 (O) 得到满足。

令 $\rho = e_1, \ldots, e_N$ 是 $\mathcal{G}^{\exp}_{\mathrm{op}}$ 中连接 s_0、$s_N \in \mathrm{SF}_{\mathrm{op}}$ 的一条路径，并固定 $i \in \mathcal{I}^{\mathrm{int}}$。如命题 5.3 和引理 7.10 的证明所示，只需假设存在 $m \in \overline{N}$ 使得 e_m 提及 i，并证明对于最小的 m，$[\mathrm{i} = 1] \in e_m$。

令 $\rho' = e'_{k_1,\ell_1}, \ldots, e'_{k_t,\ell_t}$ 为 ρ 的任意一般约化，并对所有$j \in \overline{t}$设定 $e'_{k_j,\ell_j} = (\mathrm{sf}_j, \mathrm{sf}'_j, e'_j)$。然后，设 $\rho'' = fl(\rho')$，即 ρ'' 是 ρ' 的扁平化（见引理 7.10 的证明）。因此，$\rho'' = q_1, \ldots, q_t$，其中每个 q_j 都是 ρ'' 的一个子路径，仅由（扁平化后的）边 e'_j 和 $(e'_j)^{-1}$ 构成。

假设 $i \in \mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}$。那么对于任意提及 i 的 e_n，若 $n \in \overline{N}$，则有以下情况之一：

- e_n 是真边，此时 $e'_{j(n)}$ 是 E^0 的边，它由该边经由操作 构造而来，或者
- e_n 是 $e'_{j(n)} \in E_{\text{操作}} - E^0_{\text{操作}}$ 的一条展开边。

在第一种情况下，使用相同的片段来定义 $\mathrm{Lab}(e_n)$ 和 $\mathrm{Lab}(e'_{j(n)})$，因此 $e'_{j(n)}$ 也提及 i。在第二种情况下，$i \in \mathcal{I}_{e'_{j(n)}}$ 和 $\mathcal{I}^{\mathrm{inv}}_{\mathrm{op}} \cap \mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}} = \emptyset$，因此 $e'_{j(n)}$ 提及 i。

特别地，由于一条边提及某个索引，当且仅当它的（形式）逆也提及该索引，因此 ρ'' 包含一条提及 i 的边。令 $r \in \overline{t}$ 为使得 $(e'_r)^{\pm 1}$ 提及 i 的最小索引。由于 $(e'_{j(m)})^{\pm 1}$ 提及 i，可得 $r \leq j(m)$。

由于 ρ'' 是 $\mathcal{G}_{\mathrm{op}}$ 中连接 s_0 和 s_N 的扁平化路径，因此它受到定义 6.4 中条件 (O) 的约束。所以，q_r 的第一条边标记为一个 0 阶动作，并且包含 $[\mathrm{i} = 1]$。因此，$e'_r \in E^0_{\mathrm{op}}$。根据一般约化的构造，存在 $n \in \overline{N}$ 这样的。

ˆ， $k_r = \ell_r = n$ 和 $e'_{k_r,\ \ell_r} =$(ˆs, f, e'_r)。扁平化的构造接着意味着$q_r = e'_{r^\circ}$ 特别是， $j(n) = r$ ，且 e_n 由 e'_r构造而成，因此提及了 i。但接着， $m \le n$意味着 $j(m) \le r$，从而 $m = n$。因此， $[\mathbf{i} = 1] \in e_{m^\circ}$

因此，只需假设，对于某条展开边 $e =$(s'_1, s'_2, 动作$_e$)， $i \in \mathcal{I}_e^{\mathrm{int}}$。根据内部带重命名映射的像互不相交，凡是提及 i 的 $\mathcal{G}_{\mathrm{op}}^{\mathrm{exp}}$ 中的边都必须包含在 $\mathcal{G}'_e$ 中。因此，对于 $j = j(m)$，有 $e'_j = e$ 。

那么，$\rho_{k_j,\ \ell_j}$ 是 $\mathcal{G}'_e$ 中的一条路径，其中对所有 $r \in k_j, \ell_j - 1$， $t(e_{k_j})\ h(e_{\ell_j}) \in \{s'_1, s'_2\}$ 且 $h(e_r) \notin \overline{\{s'_1, s'_2\}}$。因此，由引理 8.3 可得 $\rho_{k_j,\ \ell_j}$ 在 $\mathcal{G}_e$ 中的一个提升 $\rho_j = e''_{k_j}, \dots, e''_{\ell_j}$，使得 $t(e''_{k_j})\ h(e''_{\ell_j}) \in \mathrm{SF}_{\mathrm{op}_e}$。

但应用 μ_e^{-1}, ρ_j 对应于 op$_e$ 中 SF$_{\mathrm{op}_e}$ 元素之间的一条路径。因此，由于 inst$_e \in$INST$'_n$，可以将条件 (O) 应用于 op$_e$，从而 $[\mu_{\mathbf{e}}^{-1}\mathbf{(i)} = 1] \in e''_m$ ，因为 $i \in \mathcal{I}_e^{\mathrm{int}}$。因此， $[\mathbf{i} = 1] \in e_{m^\circ}$

□

与前面的约定类似， $\mathcal{I}_{\mathrm{op}}^{\mathrm{exp}}$ 的定义分割记作 $\mathcal{I}_{\mathrm{op}_{\mathrm{exp}}}^{\mathrm{ext}} \sqcup \mathcal{I}_{\mathrm{op}_{\mathrm{exp}}}^{\mathrm{val}} \sqcup \mathcal{I}_{\mathrm{op}_{\mathrm{exp}}}^{\mathrm{int}}$。其他术语也以类似方式表示；例如，不可见带集合 $\mathcal{I}_{\mathrm{op}}^{\mathrm{exp}} - \mathcal{I}_{\mathrm{op}}$ 记作$\mathcal{I}_{\mathrm{op}}^{\mathrm{inv}}$。

如上所述，对所有 op $\in$OP$_{n+1}$ ，定义 EXP^{n+1} 操作 (op) $=$ op$^{\mathrm{exp}}$ 。最后，将此定义扩展为映射 EXP^{n+1} 操作 : OP$'_{n+1} \to$ OP$_0$ ，并令 EXP^{n+1} 操作 $\big|_{\mathrm{OP}'_n} =$ EXP$^n_{\mathrm{OP}^\circ}$

定义 8.6. 固定 $n \ge 0$ ，并假设 (EXP^n_G, EXP$^n_{\mathrm{OP}}$, EXP$^n_{\mathsf{OBJ}}$) 是一个广义 n-展开映射。

对于 Obj $=$($\mathcal{I}_{\mathrm{Obj}}^{\mathrm{val}}$, INST$^{\mathrm{Obj}}$, 操作$_1$, . . . ,操作$_k$) $\in$ OBJ$_{n+1}$，定义

$$\mathsf{EXP}^{n+1}_{\mathsf{OBJ}}(\mathrm{Obj}) = (\mathcal{I}_{\mathrm{Obj}}^{\mathrm{val}}, \mathsf{EXP}^{n+1}_{\mathrm{OP}}(\mathrm{op}_1), \dots, \mathsf{EXP}^{n+1}_{\mathrm{OP}}(\mathrm{op}_k))$$

由引理 8.5，EXP^{n+1} OBJ(Obj) $\in$OBJ$_{0^\circ}$

最后，通过令 EXP^{n+1} OBJ$\big|_{\mathsf{OBJ}'_n} =$ EXP$^n_{\mathsf{OBJ}}$，将其扩展为 EXP^{n+1} OBJ : OBJ$'_{n+1} \to$ OBJ$_0$ 。

下面的结论可直接由定义和引理 8.5 得出:

命题 8.7. 对任意 $n \ge 0$，三元组 (EXP$^{n+1}_G$, EXP^{n+1} 操作 ,EXP^{n+1} OBJ) 是一个广义 $(n+1)$-展开映射。

根据命题 8.7，存在映射 EXP$_G$: SGRAPH* $\to$ SGRAPH$_0$ ，其定义为：对任意满足 $\mathcal{G} \in$ SGRAPH$_n$ 的 $n \ge 0$ ，有 EXP$_G(\mathcal{G}) =$ EXP$^n_G(\mathcal{G})$。因此，根据这些映射的构造，对所有 $m \ge n$，均有 EXP$_G(\mathcal{G}) =$ EXP$^m_G(\mathcal{G})$。类似地，还存在相应的映射 EXP$_{\mathrm{OP}}$: OP$^* \to$ OP$_0$ 和 EXP$_{\mathsf{OBJ}}$: OBJ$^* \to$OBJ$_{0^\circ}$

稍微滥用一下记号，三元组 (EXP$_G$,EXP$_{\mathrm{OP}}$,EXP$_{\mathsf{OBJ}}$) 中的每个元素都简称为 EXP，并称为展开映射；具体指哪个映射由上下文决定。

例 8.8。下面的图 8 展示了图6 中操作 syn(a, b, c) 的度为 1 $\mathcal{G}$ 的 S-图的展开 $\mathcal{G}_{\mathrm{exp}} =$EXP($\mathcal{G}$)。为便于参考，四个展开状态用阴影标出。

注意，对于任意操作 $\in$ Obj$_0$, $\mathcal{I}_{\mathrm{op}}^{\mathrm{int}} = \emptyset$ 和 $S_{\mathrm{op}} =$ SF$_{\mathrm{op}}$。因此，这种边的展开既不会引入新的带，也不会引入新的状态。

反过来，展开任何对应于复制操作的边，都会产生展开状态和不可见带。事实上，由于 $|S_{\mathrm{copy}} - \mathrm{SF}_{\mathrm{copy}}| = 2$ 和 $|\mathcal{I}_{\mathrm{copy}}^{\mathrm{int}}| = 1$，每条这样的边都会增加两个新状态和一条新带。因此，

$$\mathcal{I}_{\mathcal{G}} = \{a, b, c, a', b', d', d''\} \subsetneq \mathcal{I}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{exp}} = \{a, b, c, a', b', d', d'', c_a, c_b\}$$

这个例子也可以理解为对象 Obj$_1[d']$ 的展开；该对象是只有一个操作 EXP(syn) 的对象 EXP(Obj$_1$)。 $\mathcal{I}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{exp}}$ 中由 $\mathcal{I}_{\mathcal{G}}$ 产生的带，其分类方式与 Obj$_1$，中相同，而任何新增的带（此处为不可见带 c_a 和 c_b）都必然是内部的。

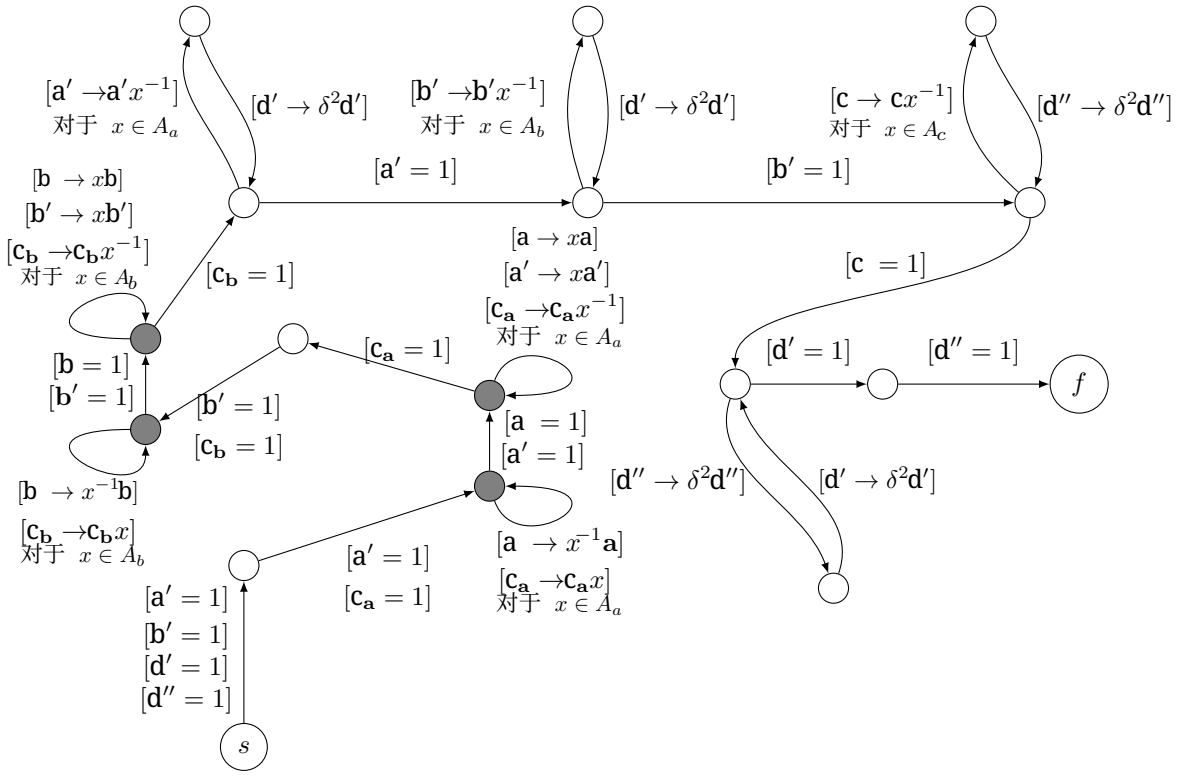


FIGURE 8. S[1]-图 $\mathcal{G}$ 的展开 $\mathcal{G}_{\exp}$，该图定义于图6中。

注意，度为 2 的对象 $\mathsf{Counter}_1[a]$ 的展开（参见例 7.19）与 0 阶对象 $\mathsf{Counter}_0[a]$（参见例5.8）相似。不过，两者之间有一些细微差异。例如，例5.8 中操作 $\mathsf{check}_{>0}$ 的唯一边 e 满足 $t(e) = (\mathsf{check}_{>0})_s$，并包含守卫片段 $[\mathsf{b} = 1]$ 和 $[\mathsf{c} = 1]$；而这些片段在例 7.19 中对应操作的展开里，分别出现在不同的边上。尽管存在这些差异，这些图仍以一种特定的方式相关联。

为在更基础的框架下描述这种关系，下面的定理 8.10 建立了 S^*-图的计算与其展开的计算之间的对应关系。首先，引理 8.9 讨论一个基本情形。

引理 8.9。设 $\mathcal{G} \in \mathsf{SGRAPH}^*$, $e = (s_1, s_2, \text{动作}_e) \in E_{\mathcal{G}} - E^0_{\mathcal{G}}$，且动作$_e$ = (实例$_e$, 操作$_e$, $\mu^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{act}_e}$)。

(1) 设 $\varepsilon = \big((w_0, t_0)\ e_1, (w_1, t_1)\ e_2, \ldots, e_m, (w_m, t_m)\big)$ 是 EXP(操作$_e$) 的一个计算。那么对于每个 $w \in L_{\mathcal{H}^{\exp}_{\mathcal{G}}}$，都存在一个计算

$$\sigma_w(\varepsilon) = \big((w'_0, \pi_e(t_0)), e'_1, (w'_1, \pi_e(t_1)), e'_2, \ldots, e'_m, (w'_m, \pi_e(t_m))\big)$$

属于 EXP($\mathcal{G}$)，使得对于所有 $j \in 0, m$，$w'_j = \mu_e(w_j) \sqcup w(\mathcal{I}^{\exp}_{\mathcal{G}} \overline{-\mathcal{I}_e})$。

(2) 设 $\delta = \big((w'_0, t'_0)\ e'_1, (w'_1, t'_1)\ e'_2, \ldots, e'_m, (w'_m, t'_m)\big)$ 是 EXP($\mathcal{G}$) 的一次计算，使得计算路径 $\rho' = e'_1, \ldots, e'_m$ 是 $\mathcal{G}'_e$ 中的一条路径，且对 $i \in \overline{m-1}$ 有 $h(e'_i) \notin S_{\mathcal{G}}$。那么存在一次计算

$$\tau(\delta) = \big((w_0, t_0), e_1, (w_1, t_1), e_2, \ldots, e_m, (w_m, t_m)\big)$$

EXP(op$_e$) 的....., 使得 $w'_j(\mathcal{I}_e) = \mu_e(w_j)$、$w'_i(\mathcal{I}^{\exp}_{\mathcal{G}} - \mathcal{I}_e) = w'_j(\mathcal{I}^{\exp}_{\mathcal{G}} - \mathcal{I}_e)$，且 $\pi_e(t_j) = t'_j$对所有 $\overline{i, j \in 0, m}$ 均成立。

证明。(1) 根据构造，存在一个双射 ζ_e，将 EXP(op$_e$) 的边集合映射到 $\mathcal{G}_e$ 的边集合：对任意片段应用 μ_e，然后解释所得动作，使其作用于 $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}^{\exp}$。因此，对于任意 $v, v' \in L_{\mathcal{H}_{\mathrm{op}_e}^{\exp}}$，EXP(op$_e$) 存在计算 $((v,s)\ e_0, (v',s'))$，当且仅当对于任意 $w \in L_{\mathcal{H}_{\mathcal{G}}^{\exp}}$，存在一个计算

$$\big((\mu_e(v) \sqcup w(\mathcal{I}_{\mathcal{G}}^{\exp} - \mathcal{I}_e), s), \zeta_e(e_0), (\mu_e(v') \sqcup w(\mathcal{I}_{\mathcal{G}}^{\exp} - \mathcal{I}_e), s')\big)$$

属于 EXP($\mathcal{G}$)。此外，对于任意计算 $((u,t)\ e_0', (u',t'))$ 属于 $\mathcal{G}_e$，存在一个计算

$$\big((u, \pi_e(t)), \pi_e(e_0'), (u', \pi_e(t'))\big)$$

属于 $\mathcal{G}_{e^\circ}'$

因此，对于所有 $i \in \overline{m}$，令 $e_i' = \pi_e(\zeta_e(e_i))$，存在一个满足该陈述的 EXP($\mathcal{G}$) 计算 $\sigma_w(\varepsilon)$。

(2) 由于对于所有 $i \in \overline{m-1}$，$h(e_i') \notin S_{\mathcal{G}}$，由引理 8.3，存在 ρ' 的一个提升 $\rho'' = e_1'', \ldots, e_m''$。因此，$\rho''$ 是 $\mathcal{G}_e$ 中的一条路径，且对于所有 $j \in \overline{m}$，Lab(e_j'') = Lab(e_j')。因此，存在一个计算

$$\tau'(\delta) = \big((w_0', t_0), e_1'', (w_1', t_1), e_2'', \ldots, e_m'', (w_m', t_m)\big)$$

属于 $\mathcal{G}_e$，使得 $\pi_e(t_i) = t_i'$ 对所有 $i \in 0, m$ 均成立。

由于 $\mathcal{G}_e$ 的任意一条边都标记为由 FRAG$^{\mathcal{H}_e}$ 的片段构造的动作，因此对所有 $i, j \in 0, m$，$w_i'(\mathcal{I}_{\mathcal{G}}^{\exp} - \mathcal{I}_e) = w_j'(\mathcal{I}_{\mathcal{G}}^{\exp} - \mathcal{I}_e)$ 均成立。因此，令 $w_i = \mu_e^{-1}(w_i'(\mathcal{I}_e))$ 且 $e_j = \zeta_e^{-1}(e_j'')$ 对所有 $i \in 0, m$ 和 $j \in \overline{m}$ 均成立，则存在满足该陈述的计算 $\tau(\delta)$。□

对于任意 $\mathcal{G} \in$ SGRAPH*，将平凡不可见词定义为 $1_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}} = (1)^{i \in \mathcal{I}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}}}$。类似地，对于任意 op $\in$ OP*，令 $1_{\mathrm{op}}^{\mathrm{inv}} = (1)^{i \in \mathcal{I}_{\mathrm{op}}^{\mathrm{inv}}}$。

定理 8.10。设 $\mathcal{G} \in$ SGRAPH* 且 Obj $\in$ OBJ*。令 $\mathcal{G}_{\exp} = \mathrm{EXP}(\mathcal{G})$。则：

(a) $\mathrm{REACH}_{\mathcal{G}_{\exp}}^{S_{\mathcal{G}}}$ 真地受限于 $L_{\mathcal{H}_{\mathcal{G}}^{\exp}}$ 广义线性群$_{\mathcal{G}} \times 1_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}}$。(b) 对于 $\mathcal{G}_{\exp}$ 的任意计算 $\delta = ((w_0, s_0)\ e_1, (w_1, s_1)\ e_2, \ldots, e_m, (w_m, s_m))$，若 $(w_0, s_0), (w_m, s_m) \in$(广义线性群$_{\mathcal{G}} \times 1_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}}) \times S_{\mathcal{G}}$，则存在一个计算

$$\eta(\delta) = \big((w_0', s_0'), e_1', (w_1', s_1'), e_2', \ldots, e_\ell', (w_\ell', s_\ell')\big)$$

$\mathcal{G}$ 的计算，其中 $w_0 = w_0' \sqcup 1_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}}$，$w_m = w_\ell' \sqcup 1_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}}$，$s_0 = s_0'$，$s_m = s_\ell'$ 和 $\rho' = e_1', \ldots, e_\ell'$ 是 $\rho = e_1, \ldots, e_m$ 的一般约化。

(c) 假设 $\mathcal{G}$ 的一个计算为 $\delta = ((w_0', s_0')\ e_1', (w_1', s_1'))$，且对于某个 $\mathrm{sf}_0, \mathrm{sf}_1 \in \{\hat{s}, \hat{f}\}$，有 $e_1' = (\mathrm{sf}_0, \mathrm{sf}_1, e)$，并且 $e =$(t$_0$, t$_1$, 动作$_e$) $\in E_{\mathcal{G}} - E_{\mathcal{G}}^0$。那么对于 动作$_e$ =(实例$_e$, 操作$_e$, $\mu_{\mathrm{act}_e}^{\mathrm{ext}}$),

$$(\mu_{\mathrm{act}_e}^{-1}(w_0'(\mathcal{I}_{\mathrm{act}_e})), \mu_{\mathrm{act}_e}^{-1}(w_1'(\mathcal{I}_{\mathrm{act}_e}))) \in \mathsf{IO}_{\mathsf{EXP}(\mathrm{op}_e)}^{\lambda_e(\mathrm{sf}_0), \lambda_e(\mathrm{sf}_1)}$$

其中 $\lambda_e = \lambda_{\mathrm{op}_e}$。此外，对于任意输入输出计算

$$\varepsilon = \big((w_0'', s_0''), e_1'', (w_1'', s_1''), e_2'', \ldots, e_m'', (w_m'', s_m'')\big)$$

属于 EXP(op$_e$) 且满足

$$(w_0'', s_0'') = (\mu_{\mathrm{act}_e}^{-1}(w_0'(\mathcal{I}_{\mathrm{act}_e})) \sqcup 1_{\mathsf{EXP}(\mathrm{op}_e)}^{\mathrm{int}}, \lambda_e(\mathrm{sf}_0))$$
$$(w_m'', s_m'') = (\mu_{\mathrm{act}_e}^{-1}(w_1'(\mathcal{I}_{\mathrm{act}_e})) \sqcup 1_{\mathsf{EXP}(\mathrm{op}_e)}^{\mathrm{int}}, \lambda_e(\mathrm{sf}_1))$$

存在一个计算

$$\kappa_\delta(\varepsilon) = \big((w_0, s_0), e_1, (w_1, s_1), e_2, \ldots, e_m, (w_m, s_m)\big)$$

满足 $\mathcal{G}_{\exp}$ 使得 $(w_0, s_0) = (w_0' \sqcup 1_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}}, s_0')$、$(w_m, s_m) = (w_1' \sqcup 1_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}}, s_1')$，并且

$$w_j = \mu_e(w_j'') \sqcup w_0'(\mathcal{I}_{\mathcal{G}} - \mathcal{I}_{\mathrm{act}_e}) \sqcup (1)_{i \in \mathcal{I}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}} - \mathcal{I}_e^{\mathrm{int}}}$$

对所有 $j \in \overline{0,m}$。

(d) 对于 $\mathcal{G}$ 的任意一次计算 $\delta = \big((w_0', s_0')\ e_1', (w_1', s_1')\ e_2', \ldots, e_\ell', (w_\ell', s_\ell')\big)$，存在一次计算

$$\nu(\delta) = \big((w_0, s_0), e_1, (w_1, s_1), e_2, \ldots, e_m, (w_m, s_m)\big)$$

$\mathcal{G}_{\mathrm{ex}}$ 的p 使得 $(w_0, s_0), (w_m, s_m) \in$ (广义线性群$_{\mathcal{G}} \times 1_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}}$) $\times S_{\mathcal{G}}$, $w_0 = w_0' \sqcup 1_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}}$, $w_m = w_\ell' \sqcup 1_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}}$, $s_0 = s_0'$，以及 $s_m = s_\ell'$。

(e) $\mathsf{VAL}^{\mathsf{EXP}(\mathrm{Obj})} = \mathsf{VAL}^{\mathrm{Obj}}$. (f) 对任意 op $\in$ Obj，$\mathsf{REACH}^{\mathrm{SF}_{\mathrm{op}}}$ $\mathsf{EXP}(\mathrm{op})$ 均被真地 $L_{\mathcal{H}_{\mathrm{op}}^{\mathrm{exp}}}$-限制于 $\mathsf{ND}_{\mathrm{op}}^1 \times 1_{\mathrm{op}}^{\mathrm{inv}}$。(g) 对任意 op $\in$ Obj，$\mathsf{IO}^{\mathsf{EXP}(\mathrm{op})} = \mathsf{IO}_{\mathrm{op}}$。

证明。注意，若 $\mathcal{G} \in \mathsf{SGRAPH}_0$, ，则 (a)–(d) 由构造和引理 7.4 得出。同样，若 $\mathsf{Obj} \in \mathsf{OBJ}_0$, ，则 (e)–(g) 由构造和引理 7.10 得出。

现在固定 $n \geq 0$，假设这些陈述对所有 S-图以及度至多为 n 的对象均成立，并设 $\mathcal{G} \in \mathsf{SGRAPH}^{n+1}$ 且 $\mathsf{Obj} \in \mathsf{OBJ}^{n+1}$。

(a) 设 $\delta = \big((w_0, s_0)\ e_1, \ldots, e_m, (w_m, s_m)\big)$ 是 $\mathcal{G}_{\exp}$ 的一次计算，且 $s_0, s_m \in S_{\mathcal{G}}$。由引理 7.7，$\mathsf{REACH}^{\mathcal{G}_{\exp}}$ 是一个等价关系，因此不失一般性，可假设对所有 $i \in \overline{m-1}$ 均有 $s_i \notin S_{\mathcal{G}}$。

假设 e_1 是一条真边。则存在 $e_1' = (s_0, s_1, \text{动作}) \in E_{\mathcal{G}}^0$，使得 e_1 由 e_1' 构造而成。因此 $s_1 \in S_{\mathcal{G}}$，从而 $m = 1$。此外，根据构造，$w_0(\mathcal{I}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}}) = w_1(\mathcal{I}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}})$，且 $(w_0(\mathcal{I}_{\mathcal{G}})\ w_1(\mathcal{I}_{\mathcal{G}})) \in \mathsf{LIO}^{\hat{s},\ f_{\text{动作}}}$。因此，根据引理 7.4，$w_0(\mathcal{I}_{\mathcal{G}}) \in$ 广义线性群$_{\mathcal{G}}$ 当且仅当 $w_1(\mathcal{I}_{\mathcal{G}}) \in$ 广义线性群$_{\mathcal{G}}$，从而 $w_0 \in$ 广义线性群$_{\mathcal{G}} \times 1_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}}$ 当且仅当 $w_1 \in$ 广义线性群 $_{\mathcal{G}} \times 1_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}}$。

否则，$\rho = e_1, \ldots, e_m$ 是 $\mathcal{G}_e'$ 中的一条路径，其中某个 $e = (s_1', s_2', \text{动作}_e) \in E_{\mathcal{G}} - E_{\mathcal{G}}^0$ 满足 $s_0, s_m \in \{s_1', s_2'\}$。令动作$_e$ = (实例$_e$,操作$_e$, $\mu_{\mathrm{act}_e}^{\mathrm{ext}}$)。

根据引理 8.9(2)，存在 $\mathsf{EXP}(\mathrm{op}_e)$ 的一个计算 $\tau(\delta)$，其起点和终点配置分别为 $(\mu_e^{-1}(w_0(\mathcal{I}_e))\ t_0)$ 和 $(\mu_e^{-1}(w_m(\mathcal{I}_e))\ t_m)$，使得 $\pi_e(t_j) = s_j$ 对 $j \in \{0, m\}$成立。由于 $s_j \in \{s_1', s_2'\}$，可得 $t_j \in \mathrm{SF}_{\mathrm{op}_e}$，因此

$$(\mu_e^{-1}(w_0(\mathcal{I}_e)), \mu_e^{-1}(w_m(\mathcal{I}_e))) \in \mathsf{REACH}_{\mathsf{EXP}(\mathrm{op}_e)}^{\mathrm{SF}_{\mathrm{op}_e}}$$

于是，由于 $\mathsf{inst}_e \in \mathsf{INST}_n'$，可以对其应用归纳假设，因此 (f) 意味着 $\mu_e^{-1}(w_0(\mathcal{I}_e)) \in \mathsf{ND}_{\mathrm{op}_e}^1 \times 1_{\mathrm{op}_e}^{\mathrm{inv}}$ 当且仅当 $\mu_e^{-1}(w_m(\mathcal{I}_e)) \in \mathsf{ND}_{\mathrm{op}_e}^1 \times 1_{\mathrm{op}_e}^{\mathrm{inv}}$。

设 $\mathsf{GL}_e = L_{\mathrm{act}_e}^{\mathrm{ext}} \times \mathsf{VAL}_{\mathrm{inst}_e} \times 1_e^{\mathrm{int}}$，其中 $1_e^{\mathrm{int}} = (1)_{i \in \mathcal{I}_e^{\mathrm{int}}}$。那么，将 μ_e 限制到 $\mathsf{ND}_{\mathrm{op}_e}^1 \times 1_{\mathrm{op}_e}^{\mathrm{inv}}$ 上可定义一个与 GL_e的双射。因此，$w_0(\mathcal{I}_e) \in \mathsf{GL}_e$ 当且仅当 $w_m(\mathcal{I}_e) \in \mathsf{GL}_e$。但由于标记 $\mathcal{G}_e'$ 的一条边的任何动作都是由 $\mathsf{FRAG}^{\mathcal{H}_e}$ 中的元素构造而成，

$$w_0(\mathcal{I}_{\mathcal{G}}^{\exp} - \mathcal{I}_e) = w_m(\mathcal{I}_{\mathcal{G}}^{\exp} - \mathcal{I}_e)$$

因此，当且仅当 $w_0 \in$ 广义线性群$_{\mathcal{G}} \times 1_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}}$时，$w_m \in$ 广义线性群$_{\mathcal{G}} \times 1_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}}$。

(b) 假设对所有 $i \in \overline{m-1}$ 都有 $s_i \notin S_{\mathcal{G}}$。如果 e_1 是一条真边，那么 $s_1 \in S_{\mathcal{G}}$，使得 $m = 1$。此外，对于构造 e_1 所依据的边 $e_1' \in E_{\mathcal{G}}^0$，$t(e_1') = s_0$、$h(e_1') = s_1$，且 $(w_0(\mathcal{I}_{\mathcal{G}})\ w_1(\mathcal{I}_{\mathcal{G}})) \in \mathsf{IO}_{e_1'}^{s_0\ s_1}$，。

因此，$\eta(\delta) = \big((w_0(\mathcal{I}_{\mathcal{G}})\ s_0), (\hat{s}, \hat{f}, e_1'), (w_1(\mathcal{I}_{\mathcal{G}})\ s_1)\big)$ 是满足该陈述的 $\mathcal{G}$ 计算。

否则， ρ 是 $\mathcal{G}'_e$ 中的一条路径，其中某个 $e=(s''_1, s''_2, \mathrm{act}_e)\in E_{\mathcal{G}}-E^0_{\mathcal{G}}$。与(a)中一样， $\mathcal{G}'_e$ 的构造意味着 $w_0(\mathcal{I}^{\exp}_{\mathcal{G}}-\mathcal{I}_e)=w_m(\mathcal{I}^{\exp}_{\mathcal{G}}-\mathcal{I}_e)$。此外，根据假设， $w_0(\mathcal{I}^{\mathrm{int}}_e)=1^{\mathrm{int}}_e=w_m(\mathcal{I}^{\mathrm{int}}_e)$，因此 $w_0(\mathcal{I}_{\mathcal{G}}-\mathcal{I}_{\mathrm{act}_e})=w_m(\mathcal{I}_{\mathcal{G}}-\mathcal{I}_{\mathrm{act}_e})$。

令 $\mathrm{act}_e=(\mathrm{inst}_e, \mathrm{op}_e, \mu^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{act}_e})$，引理 8.9(2) 得到一个在配置 $(\mu_e^{-1}(w_0(\mathcal{I}_e))\ t_0)$ 和 $(\mu_e^{-1}(w_m(\mathcal{I}_e))\ t_m)$ 之间、关于 $\mathsf{EXP}(\mathrm{op}_e)$ 的计算 $\tau(\delta)$，使得 $\pi_e(t_j)=s_j$ 对于 $j\in\{0,m\}$。此外，由构造可知 $s_0, s_m\in\{s''_1, s''_2\}$，因此 $t_0, t_m\in \mathsf{SF}_{\mathrm{op}_e}$。由于 $w_j(\mathcal{I}^{\mathrm{int}}_e)=1^{\mathrm{int}}_e$ 对于 $j\in\{0,m\}$，可知 $\tau(\delta)$ 是关于 $\mathsf{EXP}(\mathrm{op}_e)$ 的输入-输出计算。

但是 $w_j\in \mathsf{GL}_{\mathcal{G}}\times 1^{\mathrm{inv}}_{\mathcal{G}}$ 对于 $j\in\{0,m\}$，因此 $w_j(\mathcal{I}_e)\in \mathsf{GL}_e$。此外，由于 $\mathrm{inst}_e\in \mathrm{INST}'_n$，可以应用归纳假设，因此 (e) 得出 $\mu_e^{-1}(w_j(\mathcal{I}_e))\in \mathsf{ND}^1_{\mathrm{op}_e}\times 1^{\mathrm{inv}}_{\mathcal{G}}=\mathsf{ND}^1_{\mathsf{EXP}(\mathrm{op}_e)}$。于是，根据 $\tau(\delta)$ 的存在性以及 (g)，

$$(\mu^{-1}_{\mathrm{act}_e}(w_0(\mathcal{I}_{\mathrm{act}_e})), \mu^{-1}_{\mathrm{act}_e}(w_m(\mathcal{I}_{\mathrm{act}_e})))\in \mathsf{IO}^{t_0,t_m}_{\mathsf{EXP}(\mathrm{op}_e)}=\mathsf{IO}^{t_0,t_m}_{\mathrm{op}_e}$$

根据定义，这意味着 $(w_0(\mathcal{I}_{\mathcal{G}})\ w_m(\mathcal{I}_{\mathcal{G}}))\in \mathsf{IO}_{\lambda_e^{-1}(t_0)\ \lambda_e^{-1}(t_m)\ \text{动作}_e}$。

因此，令 $e'=(\lambda_e^{-1}(t_0)\ \lambda_e^{-1}(t_m)\ e)$，则 $\eta(\delta)=\big((w_0(\mathcal{I}_{\mathcal{G}})\ t(e'))\ e',\ (w_m(\mathcal{I}_{\mathcal{G}})\ h(e'))\big)$ 是 $\mathcal{G}$ 的一次计算。

如果 e 是一个环，那么 $s_0=s''_1=s''_2=s_m$。因此， $s_0=t(e')=h(e')=s_m$，且 e' 是 ρ 的一般约化。

反过来，假设 $s''_1\neq s''_2$。那么， π_e 是双射，因此 $t_j=\pi_e^{-1}(s_j)$。如果 $s_0=s''_1$，那么 $t_0=(\text{操作}_e)s$，因此 $\lambda_e^{-1}(t_0)=\hat{}s$；但于是 $t(e')=s_0$。类似地，如果 $s_0=s''_2$，那么 $t_0=(\text{操作}_e)f$，$\lambda_e^{-1}(t_0)=\hat{}f$，且 $t(e')=s_0$。类似的论证表明， $h(e')=s_m$，并且 e' 是 ρ 的一般约化。

因此， $\eta(\delta)$满足该陈述。

现在假设存在 $i\in\overline{m-1}$ 使得 $s_i\in S_{\mathcal{G}}$。令 k_1 为满足条件的最小索引，上述论证便得出构造：存在 $\mathcal{G}$ 的一个计算 $\delta'_1=\big((w_0(\mathcal{I}_{\mathcal{G}})\ s_0)\ e'_1, (w_{k_1}(\mathcal{I}_{\mathcal{G}})\ s_{k_1})\big)$，使得 e'_1 是 ρ的子路径 $e_1,\ldots,e_{k_1}$ 的一般约化。~~若随后存在~~$i\in k_1+1, m-1$ 使得 $s_i\in S_{\mathcal{G}}$，那么令 k_2 为满足条件的最小索引，便存在 $\mathcal{G}$ 的一个计算 $\delta'_2=\big((w_{k_1}(\mathcal{I}_{\mathcal{G}})\ s_{k_1})\ e'_2, (w_{k_2}(\mathcal{I}_{\mathcal{G}})\ s_{k_2})\big)$，使得 e'_2 是$e_{k_1+1},\ldots,e_{k_2}$的一般约化。如此迭代，便存在 $\ell\geq 1$，使得对于任意$i\in k_\ell+1, m-1$，都有 $s_i\notin S_{\mathcal{G}}$。但是

$$\eta(\delta)=\delta'_1,\ldots,\delta'_\ell=\big((w_0(\mathcal{I}_{\mathcal{G}}), s_0), e'_1, (w_{k_1}(\mathcal{I}_{\mathcal{G}}), s_{k_1}), e'_2, \ldots, e'_\ell, (w_m(\mathcal{I}_{\mathcal{G}}), s_m)\big)$$

是满足该陈述的 $\mathcal{G}$ 的一次计算。

(c) 根据计算的定义，$(w'_0, s'_0, w'_1, s'_1)\in \mathsf{IO}^{e'_1}$。

因此， $s'_0=t(e'_1)$、 $s'_1=h(e'_1)$ 和 $(w'_0, w'_1)\in \mathsf{IO}^{\mathrm{sf}_0,\ \mathrm{sf}_1\text{动作}_e}$。因此， $w'_0(\mathcal{I}_{\mathcal{G}}-\mathcal{I}_{\mathrm{act}_e})=w'_1(\mathcal{I}_{\mathcal{G}}-\mathcal{I}_{\mathrm{act}_e})$，并且

$$(\mu^{-1}_{\mathrm{act}_e}(w'_0(\mathcal{I}_{\mathrm{act}_e})), \mu^{-1}_{\mathrm{act}_e}(w'_1(\mathcal{I}_{\mathrm{act}_e})))\in \mathsf{IO}^{\lambda_e(\mathrm{sf}_0),\lambda_e(\mathrm{sf}_1)}_{\mathrm{op}_e}$$

由于 $\mathrm{inst}_e\in \mathrm{INST}'_n$，可以应用归纳假设，因此 (g) 意味着 $\mathsf{IO}^{\mathrm{op}_e}=\mathsf{IO}_{\mathsf{EXP}(\mathrm{op}_e)}$。于是，$(\mu^{-1}_{\mathrm{act}_e}(w'_0(\mathcal{I}_{\mathrm{act}_e}))\ \mu^{-1}_{\mathrm{act}_e}(w'_1(\mathcal{I}_{\mathrm{act}_e})))\in \mathsf{IO}^{\lambda_e(\mathrm{sf}_0)\ \lambda_e(\mathrm{sf}_1)\ \mathsf{EXP}(\mathrm{op}_e)}$。

现在，设 ε 是陈述中所述的一次输入输出计算。

注意，对于 $j\in\{0,1\}$， $\mu^{-1}_{\mathrm{act}_e}(w'_j(\mathcal{I}_{\mathrm{act}_e}))\sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathsf{EXP}(\mathrm{op}_e)}=\mu_e^{-1}(w'_j(\mathcal{I}_{\mathrm{act}_e})\sqcup 1^{\mathrm{int}}_e)$。

因此，令 $w=w'_0\sqcup 1^{\mathrm{inv}}_{\mathcal{G}}$，由引理 8.9(1)可得一个 $\mathcal{G}_{\exp}$ 的计算

$$\sigma_w(\varepsilon)=\big((w_0, s_0), e_1, (w_1, s_1), e_2, \ldots, e_m, (w_m, s_m)\big)$$

使得对于所有 $j\in 0, m$， $s_0=\pi_e(\lambda(\mathsf{sf}_0))$、 $s_m=\pi_e(\lambda(\mathsf{sf}_1)$，并且 $w_j=\mu_e(w''_j)\sqcup w(\mathcal{I}^{\exp}_{\mathcal{G}}-\mathcal{I}_e)$。

由于 $w\ \mathcal{I}^{\mathrm{inv}}_{\mathcal{G}})=1^{\mathrm{inv}}_{\mathcal{G}}$和 $w(\mathcal{I}_{\mathcal{G}})=w'_0, w(\mathcal{I}^{\exp}_{\mathcal{G}}-\mathcal{I}_e)=w'_0(\mathcal{I}_{\mathcal{G}}-\mathcal{I}_{\mathrm{act}_e})\sqcup(1)^{i\in\mathcal{I}^{\mathrm{inv}}_{\mathcal{G}}-\mathcal{I}^{\mathrm{int}}_e}$。因此 ，
(

$$w_j=\mu_e(w''_j)\sqcup w'_0(\mathcal{I}_{\mathcal{G}}-\mathcal{I}_{\mathrm{act}_e})\sqcup(1)_{i\in\mathcal{I}^{\mathrm{inv}}_{\mathcal{G}}-\mathcal{I}^{\mathrm{int}}_e}$$

对所有 $j \in \overline{0,m}$。特别是，由于 $w_0'(\mathcal{I}_{\mathcal{G}} - \mathcal{I}_{\mathrm{act}_e}) = w_1'(\mathcal{I}_{\mathcal{G}} - \mathcal{I}_{\mathrm{act}_e})$,

$$w_0 = \mu_e(w_0'') \sqcup w_0'(\mathcal{I}_{\mathcal{G}} - \mathcal{I}_{\mathrm{act}_e}) \sqcup (1)_{i \in \mathcal{I}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}} - \mathcal{I}_e^{\mathrm{int}}}$$

$$w_m = \mu_e(w_m'') \sqcup w_1'(\mathcal{I}_{\mathcal{G}} - \mathcal{I}_{\mathrm{act}_e}) \sqcup (1)_{i \in \mathcal{I}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}} - \mathcal{I}_e^{\mathrm{int}}}$$

注意，$w_0'' = \mu_{\mathrm{act}_e}^{-1}(w_0'(\mathcal{I}_{\mathrm{act}_e})) \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathsf{EXP}(\mathrm{op}_e)} = \mu_e^{-1}(w_0'(\mathcal{I}_{\mathrm{act}_e}) \sqcup 1_e^{\mathrm{int}})$，因此得出结论$\mu_e(w_0'') = w_0'(\mathcal{I}_{\mathrm{act}_e}) \sqcup 1_e^{\mathrm{int}}$。类似地，$\mu_e(w_m'') = w_1'(\mathcal{I}_{\mathrm{act}_e}) \sqcup 1_e^{\mathrm{int}}$。

因此，由于 $(1)_{i \in \mathcal{I}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}} - \mathcal{I}_e^{\mathrm{int}}} \sqcup 1_e^{\mathrm{int}} = 1_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}}$, $w_0 = w_0' \sqcup 1_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}}$以及 $w_m = w_1' \sqcup 1_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}}$。

现在假设 $\mathsf{sf}_0 = \hat{}s$。那么 $s_0' = t(e_1') = t_0$ 且 $\lambda_e(\mathsf{sf}_0) = (\mathrm{op}_e)s$。因此，$\pi_e(\lambda_e(\mathsf{sf}_0)) = t_0$，并且 $\hat{}$ 因此 $\pi_e(\lambda_e(\mathsf{sf}_0)) = s_{0^\circ}'$。类似地，若 $\mathsf{sf}_0 = f$，则 $s_0' = t(e_1') = t_1$ 且 $\lambda_e(\mathsf{sf}_0) = (\mathrm{op}_e)f$，从而$\pi_e(\lambda_e(\mathsf{sf}_0)) = t_1 = s_{0^\circ}'$。类似的论证表明，$\pi_e(\lambda_e(\mathsf{sf}_1)) = s_{1^\circ}'$。

因此，$\kappa_\delta(\varepsilon) = \sigma_w(\varepsilon)$ 满足该陈述

$\hat{}$ (d) 假设 $\ell = 1$，并令 $e_1' = (\mathsf{sf}_0, \mathsf{sf}_1, e)$，其中 $\mathsf{sf}_0, \mathsf{sf}_1 \in \{\hat{}s、\ f\}$ 和 $e \in E\ \mathcal{G}$.

如果 $e \in E_{\mathcal{G}} - E_{\mathcal{G}}^0$，那么对于 $e = (t_0, t_1, \text{动作}_e)$，其中 动作$_e$ =(实例$_e$, 操作$_e$, $\mu_{\mathrm{act}_e}^{\mathrm{ext}}$)，由 (c) 可知，存在一个计算 ε，它是 EXP(操作$_e$) 在 $(\mu_e^{-1}(w_0'(\mathcal{I}_{\mathrm{act}_e}) \sqcup 1_e^{\mathrm{int}})\ \lambda_{\mathrm{op}_e}(\mathsf{sf}_0))$ 和 $(\mu_e^{-1}(w_1'(\mathcal{I}_{\mathrm{act}_e}) \sqcup 1_e^{\mathrm{int}})\ \lambda_{\mathrm{op}_e}(\mathsf{sf}_1))$ 之间的计算。但于是 $\kappa_\delta(\varepsilon)$ 是一个满足该陈述的 $\mathcal{G}_{\mathrm{exp}}$ 的计算。

否则，$e \in E_{\mathcal{G}}^0$。令 $e_1 \in E_{\mathcal{G}}^{\mathrm{exp}}$ 为由 e 产生的真边。如果 $\mathsf{sf}_0 = \mathsf{sf}_1$, ，那么 $w_0' = w_1'$，因此 $\nu(\delta)$ 可以取为空配置。反过来，如果 $\mathsf{sf}_0 \neq \mathsf{sf}_1$, ，那么令 $\alpha \in \{\pm 1\}$，其中 $\alpha = 1$ 当且仅当 $\mathsf{sf}_0 = \hat{}s$，并定义 $\nu(\delta) = ((w_0' \sqcup 1_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}}, s_0')\ e_1^{\alpha}, (w_1' \sqcup 1_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}}, s_1'))$。无论哪种情况，$\nu(\delta)$ 都是满足该陈述的 $\mathcal{G}_{\mathrm{exp}}$ 的一次计算。

现在假设 $\ell \geq 1$。那么对于每个$i \in \overline{\ell}$，上述论证都会产生一个 ε_i 从$\mathcal{G}_{\mathrm{exp}}$的计算，它连接（$w_{i-1}' \sqcup 1_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}}$，$s_{i-1}'$）与（$w_i' \sqcup 1_{\mathcal{G}}^{\mathrm{inv}}$，$s_i'$）。令 ρ_i为支撑 ε_i的路径，则可得 $\rho = \rho_1$，....., ρ_ℓ 支撑着一个满足该陈述的计算 ν（δ）。

（e）注意，对于任意操作 $\in \in$Obj和 $i \in \mathcal{I}_{\mathrm{Obj}}^{\mathrm{val}}$，$\mathcal{I}_{\mathsf{EXP}(\mathrm{Obj})}^{\mathrm{val}} = \mathcal{I}_{\mathrm{Obj}}^{\mathrm{val}}$ 以及 $\mathcal{A}_{\mathsf{EXP}(\mathrm{op})}(i) = \mathcal{A}_{\mathrm{op}}(i)$。因此，$\mathcal{G}_{\mathsf{EXP}(\mathrm{Obj})}^{\mathrm{val}}$ 与 $\mathcal{G}_{\mathrm{Obj}}^{\mathrm{val}}$ 的顶点集之间存在一个自然双射：将$\mathcal{G}_{\mathsf{EXP}(\mathrm{Obj})}^{\mathrm{val}}$ 中对应于 $v \in L_{\mathrm{Obj}}^{\mathrm{val}}$ 的顶点映射到它在 $\mathcal{G}_{\mathrm{Obj}}^{\mathrm{val}}$中的类似顶点。

对于 $\mathcal{G}_{\mathrm{Obj}}^{\mathrm{val}}$的一条边（$v_1$，$v_2$），存在操作 $\in \in$Obj以及该操作的一个输入输出计算 δ，它连接配置（w_1', s_1'）与（w_2'，s_2'），使得对于 $i = 1$，有 $w_i'(\mathcal{I}_{\mathrm{Obj}}^{\mathrm{val}}) = v_i$。但由（d）可得EXP(op)的一个输入输出计算 ν（δ），它连接配置（w_1，s_1）与（w_2，s_2），使得$s_i = s_i'$，并且对于 $i = 1$，有 $w_i(\mathcal{I}_{\mathrm{Obj}}^{\mathrm{val}}) = v_i$。因此，（$v_1$，$v_2$）是 $\mathcal{G}_{\mathsf{EXP}(\mathrm{Obj})}^{\mathrm{val}}$的一条边。

同理，对于 $\mathcal{G}^{\mathrm{val}}$ 的任意一条边（v_1，v_2）$_{\mathsf{EXP}(\mathrm{Obj})}$，则 (b) 蕴含（$v_1$，$v_2$）是 $\mathcal{G}_{\mathrm{Obj}}^{\mathrm{val}}$的一条边。

因此，$\mathcal{G}_{\mathrm{Obj}}^{\mathrm{val}}$ 和$\mathcal{G}_{\mathsf{EXP}(\mathrm{Obj})}^{\mathrm{val}}$ 是同构图，所以包含$1_{\mathrm{Obj}}^{\mathrm{val}}$ 的连通分支在两者中相同。

(f) 设 δ 是 EXP(op) 中从（w_1，s_1）到（w_2，s_2）的一次计算，且 s_1，$s_2 \in \mathsf{SF}_{\mathrm{op}}$。则 (a) 蕴含 $w_1 \in \mathsf{GL}_{\mathrm{op}} \times 1_{\mathrm{op}}^{\mathrm{inv}}$ 当且仅当 $w_2 \in \mathsf{GL}_{\mathrm{op}} \times 1_{\mathrm{op}}^{\mathrm{inv}}$。因此，由于引理 7.10(1) 蕴含 $\mathsf{ND}_{\mathrm{op}}^1 \subseteq \mathsf{GL}_{\mathrm{op}}$，只需假设 w_1，$w_2 \in \mathsf{GL}_{\mathrm{op}} \times 1_{\mathrm{op}}^{\mathrm{inv}}$，并证明 $w_1(\mathcal{I}_{\mathrm{op}}) \in \mathsf{ND}_{\mathrm{op}}^1$ 当且仅当 $w_2(\mathcal{I}_{\mathrm{op}}) \in \mathsf{ND}_{\mathrm{op}}^1$。

但根据 (b)，存在操作 op 在配置 $(w_1(\mathcal{I}_{\mathrm{op}})\ s_1)$ 与 $(w_2(\mathcal{I}_{\mathrm{op}})\ s_2)$ 之间的输入输出计算 $\eta(\delta)$，因此该结论由引理 7.10(2) 得出。

(g) 根据 (e)，$\mathsf{ND}^{\mathsf{EXP}(\mathrm{op})} = \mathsf{ND}^{\mathrm{op}}$。此外，注意到 $1_{\mathrm{op}}^{\mathrm{int}} \sqcup 1_{\mathrm{op}}^{\mathrm{inv}} = 1_{\mathsf{EXP}(\mathrm{op})^\circ}^{\mathrm{int}}$

对于任意 $(w_1, w_2) \in \mathsf{IO}_{\mathrm{op}}^{s\ f}$，根据定义，存在一个在配置 $(w_1 \sqcup 1_{\mathrm{op}}^{\mathrm{int}}, \mathrm{op}s)$ 和 $(w_2 \sqcup 1_{\mathrm{op}}^{\mathrm{int}}, \mathrm{op}f)$ 之间关于 op 的计算 δ。根据 (d)，继而存在一个在配置 $(w_1 \sqcup 1_{\mathsf{EXP}(\mathrm{op})}^{\mathrm{int}}, \mathrm{op}s)$ 和 $(w_2 \sqcup 1_{\mathsf{EXP}(\mathrm{op})}^{\mathrm{int}}, \mathrm{op}f)$ 之间关于 EXP(op) 的计算$\nu(\delta)$。因此，

$(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s,f}_{\mathsf{EXP}(\mathrm{op})}$。对输入输出计算所支持路径的其他可能端点作类似论证，便可推出 $\mathrm{IO}_{\mathrm{op}} \subseteq \mathrm{IO}^{\mathsf{EXP}(\mathrm{op})}$。

反向包含关系则可通过类似的论证得出，只需用 (b) 替代 (d)。

□

9. Complexity

定理 1.1 的目标是展示一种 S-机器，它在某种意义上能高效地进行计算。机器的这种效率概念由其复杂度函数量化。本节将回顾这些函数的定义，随后把它们扩展到 0 阶 S-图，最后扩展到 S^*-图。

不过，首先要为一类特定函数引入多个二元关系，该类函数包含所有相关函数。

定义 9.1. 非递减函数 $f\colon \mathbb{N} \to [0,\infty)$ 称为增长函数。在增长函数上定义二元关系 $\preceq$：当且仅当存在常数 a、$c > 0$ 和 $b \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，均有 $f \preceq g$ $f(n) \leq a g(bn) + c$。注意，该条件等价于存在单个常数 $C \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，均有 $f(n) \leq C g(Cn) + C$。

那么，$\preceq$ 是增长函数集合上的预序，因此存在一个等价关系$\sim$，定义为：当且仅当 $f \sim g$ 且 $f \preceq g$ 时成立。增长函数 f 和 g 称为 $\sim$-等价，当且仅当 $f \sim g$。

因此，$n^3 \sim 5n^3 + 3n^2 + 7$ 和 $e^n \sim 2^{10n}$，而 $n^2 \precneqq n^2 \log n \precneqq n^{2.01}$ 和 $2^n \precneqq n^n \precneqq 2^{n^2}$。

请注意，这一定义与 [14], 中的等价定义略有不同；后者还在 $\preceq$的定义右侧包含了一个任意线性项。这里用 $\preceq_1$ 表示这个预序，用 $\sim_1$表示相应的等价关系。因此，0、$n^{1/2}$ 和 n 并非$\sim$-等价，但它们是 $\sim_1$-等价的。

然而，请注意，对于满足 $n \preceq f$ 的增长函数集合 f，$\sim$ 和 $\sim_1$ 是一致的。此外，对于任意增长函数 f 和 g，$f \preceq_1 g$ 当且仅当 $\max(f,n) \preceq \max(g,n)$。

这些预序和等价以自然的方式扩展到增长函数的有限元组。例如，对于增长函数对 (f_1, f_2) 和 (g_1, g_2)，有 $(f_1, f_2) \preceq (g_1, g_2)$ 当且仅当 $f_1 \preceq g_1$ 和 $f_2 \preceq g_2$。

定义 9.2（S-机器复杂度）。设 $\mathcal{S}$ 是硬件为 $\mathcal{H} = (Y, Q)$ 的 S-机器，其中 $Y = (Y_i)_{i \in \overline{N}}$ 且 $Q = (Q_i)_{i \in \overline{N+1}}$。对于所有 $i \in \overline{N+1}$，固定元素 q_i^s、$q_i^f \in Q_i$，使得存在 $j \in \overline{N+1}$ 满足 $q_j^s \neq q_j^f$。此外，固定一个索引 $i^* \in \overline{N}$。则四元组 $(\mathcal{S}, i^*, (q_i^s)_{i \in \overline{N+1}}, (q_i^f)_{i \in \overline{N+1}})$ 称为一个识别 S-机器。

在这种情况下，状态 $(q_i^s)_{i \in \overline{N+1}}$ 和 $(q_i^f)_{i \in \overline{N+1}}$ 分别称为识别 S-机的起始状态和终止状态。此外，i^* 称为它的输入带。

通常，识别 S-机被视为由其定义的 S-机，并默认指定了起始状态、终止状态和输入带。此外，从此处起，所有 S-机都视为识别机。

For 任意 $w \in L(Y_{i^*})$，与 w 对应的 $\mathcal{S}$ 的输入词是可容许词

$$I(w) = q_1^s w_1 q_2^s w_2 \dots w_N q_{N+1}^s$$

使得若 $i = i^*$，则 $w_i = w$；否则为 $w_i = 1$。此外，$\mathcal{S}$ 的接受词是可容许词 $W_{ac} = q_1^f q_2^f \dots q_{N+1}^f$。

$\mathcal{S}$所识别的语言记作 $L_{\mathcal{S}}$，它是 $F(Y_{i^*})$ 的子集，并且满足：$w \in L_{\mathcal{S}}$当且仅当存在一个计算 ε_w，其计算对象为 $\mathcal{S}$，且发生在可容许词 $I(w)$ 与 W_{ac}之间。在此情形下，ε_w 称为 w 的接受计算。

对于任意一个 S-机器的计算 $\varepsilon = (w_0, \tau_1, w_1, \ldots, \tau_n, w_n)$，将 $[\varepsilon]$ 记作序列 $(w_0, \ldots, w_n)$。记号 $w' \in [\varepsilon]$ 表示，对于某个 $i \in 0,\ w' = w_i\ n$。然后，定义：

- ε 的时间记为 $\mathsf{tm}(\varepsilon) = |\varepsilon| = n$,
- ε 的空间记为 $\mathsf{sp}(\varepsilon) = \max\{|w'| \mid w' \in [\varepsilon]\}$, 且
- ε 的面积记为 $\mathsf{ar}(\varepsilon) = \sum_{w' \in [\varepsilon]} |w'|$

对于 $w \in L_{\mathcal{S}},\ w$ 的时间记为 $\mathsf{tm}_{\mathcal{S}}(w)$，定义为 w 任一接受计算所需的最短时间。类似地，w 的空间 $\mathsf{sp}_{\mathcal{S}}(w)$ 和面积 $\mathsf{ar}_{\mathcal{S}}(w)$ 分别定义为 w 接受计算所需的最小空间和面积。请注意，w 的某个接受计算即使达到这些值中的任意一个，也不一定能达到其他值。

于是，$\mathcal{S}$ 的时间复杂度 $\mathsf{TM}_{\mathcal{S}}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 定义为

$$\mathsf{TM}_{\mathcal{S}}(n) = \max\big\{\mathrm{tm}_{\mathcal{S}}(w) \mid w \in L_{\mathcal{S}},\ |w| \le n\big\}$$

其中，空集合的最大值规定为 0。$\mathsf{SP}_{\mathcal{S}}$ 空间复杂度和 $_{\mathcal{S}}$ 面积复杂度的定义类似。根据定义，这三者都是增长函数。

最后，给定两个增长函数 f 和 g，如果对于所有满足 $|w| \le n$的 $w \in L_{\mathcal{S}}$，都存在 w 的一个接受计算 ε，使得 $\mathsf{tm}_{\mathcal{S}}(\varepsilon) \le f(n)$ 且 $\mathsf{sp}_{\mathcal{S}}(\varepsilon) \le g(n)$，则称 $\mathcal{S}$ 的时间-空间复杂度至多为 (f, g)。在这种情况下，称 (f, g) 是 $\mathsf{TMSP}_{\mathcal{S}}$的一个上界，记作 $\mathsf{TMSP}_{\mathcal{S}} \le (f, g)$。

此外，如果 f'和 g'是满足 $(f, g) \sim (f', g')$ 的增长函数，则称 (f', g') 是 $\mathsf{TMSP}_{\mathcal{S}}$的一个渐近上界，记作 $\mathsf{TMSP}_{\mathcal{S}} \preceq (f', g')$。类似地，如果 $\mathsf{TMSP}_{\mathcal{S}} \le (f, g)$ 且 $(f, g) \sim_1 (f', g')$，则 $\mathsf{TMSP}_{\mathcal{S}} \preceq_1 (f', g')$。

定义 9.3（对象复杂度）。设 $\mathcal{G} \in \mathsf{SGRAPH}^*$ 是在 $(\mathsf{INST}_{\mathcal{G}}, \mathcal{H}_{\mathcal{G}})$ 上的一个 S-图，且具有$\mathcal{H}_{\mathcal{G}} = (\mathcal{I}_{\mathcal{G}}, \mathcal{A}_{\mathcal{G}})$。那么，令

$$\varepsilon = \big((w_0, s_0), e_1, (w_1, s_1), e_2, \ldots, e_m, (w_m, s_m)\big)$$

是 $\mathsf{EXP}(\mathcal{G})$ 的一次计算。与 S-机计算的类似结果类似，令 $[\varepsilon]$ 为 $L_{\mathcal{H}_{\mathcal{G}}^{\exp}}$-字序列 $(w_0, w_1, \ldots, w_m)$，并用记号 $w' \in [\varepsilon]$ 表示，对于某些 $i \in 0, m$，有 $w' = w_i$。

那么，令 $|w'| = \sum_{i \in \mathcal{I}_{\mathcal{G}}^{\exp}} |w'(i)|$ 对任意 $L_{\mathcal{H}_{\mathcal{G}}^{\exp}}$-字 w'，定义：

- ε 的时间为 $\mathsf{tm}_{\mathcal{G}}(\varepsilon) = |\varepsilon| = n$,
- ε 的空间为 $\mathsf{sp}_{\mathcal{G}}(\varepsilon) = \max\{|w'| \mid w' \in [\varepsilon]\}$，并且
- ε 的面积为 $_{\mathcal{G}}(\varepsilon) = \sum_{w' \in [\varepsilon]} |w'|$。

设 $\mathsf{Obj} \in \mathsf{OBJ}^*$，且 $\mathsf{op} \in \mathsf{Obj}$。那么，如果 ε 是 $(w_1, w_2) \in \mathsf{IO}^{s_1,\ s_2}{}_{\mathrm{op}}$ 之间的输入-输出计算，就称 ε 实现了 $(w_1, w_2) \in \mathsf{IO}^{s_1,\ s_2}{}_{\mathrm{op}}$。类似地，如果 ε是 $(w_1, w_2) \in \mathsf{IO}^{s_1,\ s_2}{}_{\mathrm{op}}$之间的 $\mathsf{EXP}(\mathrm{op})$ 输入-输出计算，就称 $\varepsilon\,\mathsf{EXP}$ 实现了 $(w_1, w_2) \in \mathsf{IO}^{s_1,\ s_2}{}_{\mathrm{op}}$。注意，根据定理 8.10(g)，$\mathsf{IO}_{\mathrm{op}} = \mathsf{IO}^{\mathsf{EXP}(\mathrm{op})}$，因此，关系 $(w_1, w_2) \in \mathsf{IO}^{s_1,\ s_2}{}_{\mathrm{op}}$ 成立，当且仅当存在一个实现它的计算；进一步，当且仅当存在一个 EXP 实现它的计算。

所有 EXP 实现 $(w_1,\ w_2) \in \mathsf{IO}^{s_1,\ s_2}$操作 的计算集合记作 $\mathsf{EXP}^{\mathsf{IO}}_{\mathrm{op}}(w_1,\ s_1,\ w_2,\ s_2)$。请注意，根据前面定义的记号，

$$\mathsf{EXP}^{\mathsf{IO}}_{\mathrm{op}}(w_1, s_1, w_2, s_2) = \varepsilon_{\mathsf{EXP}(\mathrm{op})}(w_1 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathsf{EXP}(\mathrm{op})}, s_1, w_2 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathsf{EXP}(\mathrm{op})}, s_2)$$

那么，对于 $(w_1, w_2) \in \mathsf{IO}^{s_1,\ s_2}$操作，$(w_1, s_1, w_2, s_2)$ 的时间定义为

$$\mathrm{tm}_{\mathrm{op}}(w_1, s_1, w_2, s_2) = \min\{\mathrm{tm}_{\mathrm{op}}(\varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathsf{EXP}^{\mathsf{IO}}_{\mathrm{op}}(w_1, s_1, w_2, s_2)\}$$

那么，操作的时间复杂度是由 $\mathsf{TM}^{\mathrm{op}}:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 给出的函数

$$\mathsf{TM}_{\mathrm{op}}(n)=\max\{\mathrm{tm}_{\mathrm{op}}(w_1,s_1,w_2,s_2)\mid(w_1,w_2)\in\mathsf{IO}_{\mathrm{op}}^{s_1,s_2},\ |w_1|,|w_2|\le n\}$$

op 的空间复杂度和面积复杂度 $\mathsf{SP}^{\mathrm{op}}$ and $\mathsf{AR}^{\mathrm{op}}$ 的定义类似。根据定义，三个函数 $\mathsf{TM}^{\mathrm{op}}$、$\mathsf{SP}^{\mathrm{op}}$ 和 $\mathsf{AR}^{\mathrm{op}}$ 都是增长函数。

给定一对增长函数 f and g，若对于任意 $(w_1,w_2)\in\mathsf{IO}^{s_1,\ s_2}_{\mathrm{op}}$ 使得 $|w_1|,|w_2|\le n$，都存在 $\varepsilon\in\mathsf{EXP}^{\mathsf{IO}}_{\mathrm{op}}(w_1,s_1,w_2,s_2)$ 满足 $\mathrm{tm}^{\mathrm{op}}(\varepsilon)\le f(n)$ 且 $\mathrm{sp}^{\mathrm{op}}(\varepsilon)\le g(n)$，则 op 的时间 - 空间复杂度至多为 (f,g)。此时，称 (f,g) 是 $\mathsf{TMSP}^{\mathrm{op}}$ 的一个上界，记作 $\mathsf{TMSP}_{\mathrm{op}}\le(f,g)$。

此外，对于增长函数 $f'$and g'，记号 $\mathsf{TMSP}_{\mathrm{op}}\preceq(f',g')$ 表示存在增长函数 $f$and g，使得 $\mathsf{TMSP}_{\mathrm{op}}\le(f,g)$ 且 $(f,g)\sim(f',g')$。类似地，$\mathsf{TMSP}_{\mathrm{op}}\preceq_1(f',g')$ 表示存在增长函数 $f$and g，使得 $\mathsf{TMSP}_{\mathrm{op}}\le(f,g)$ 且 $(f,g)\sim_1(f',g')$。

如果对于所有操作 $\in\mathsf{Obj}$ 都有 $\mathsf{TMSP}_{\mathrm{op}}\le(f,g)$，则称 (f,g) 是 $\mathsf{TMSP}^{\mathrm{Obj}}$ 的一个上界，记作 $\mathsf{TMSP}_{\mathrm{Obj}}\le(f,g)$。如上所述，记号 $\mathsf{TMSP}_{\mathrm{Obj}}\preceq(f',g')$（分别为 $\mathsf{TMSP}_{\mathrm{Obj}}\preceq_1(f',g')$）表示存在 $\mathsf{TMSP}^{\mathrm{Obj}}$ 的一个上界 (f,g)，使得 $(f',g')\sim(f,g)$（分别为 $(f',g')\sim_1(f,g)$）。

给定一个对象 $\mathsf{Obj}\in\mathsf{OBJ}^*$ 和操作 $\in\mathsf{Obj}$，四元组 $(w_1,s_1,w_2,s_2)\in\mathsf{IO}^{\mathrm{op}}$ 被称为本质的，当且仅当满足以下任一条件：

- $s_1=$操作$_s$ 和 $s_2=$操作$_f$，或
- $s_1=s_2$ 和 $w_1\ne w_2$,

下面的陈述将研究对象的时间-空间复杂度，归结为研究 EXP 实现本质四元组的计算的复杂度。

引理 9.4. 设 $\mathsf{Obj}\in\mathsf{OBJ}^*$ 和 f,g 为增长函数，且对所有 $n\in\mathbb{N}$都有 $g(n)\ge n$。那么，$\mathsf{TMSP}_{\mathrm{Obj}}\le(f,g)$ 当且仅当对于任意 $\mathrm{op}\in\mathsf{Obj}$ 和本质的 $(w_1,s_1,w_2,s_2)\in\mathsf{IO}^{\mathrm{op}}$，都存在一个 EXP 实现计算 $\varepsilon\in\mathsf{EXP}^{\mathsf{IO}}_{\mathrm{op}}(w_1,s_1,w_2,s_2)$，满足 $\mathrm{tm}^{\mathrm{op}}(\varepsilon)\le f(n)$ 且 $\mathrm{sp}^{\mathrm{op}}(\varepsilon)\le g(n)$，其中 $n=\max(|w_1|,|w_2|)$。

证明. 根据定义，该陈述的充分性是显然的。

对于必要性，设 $(w_1,w_2)\in\mathsf{IO}^{s_1,s_2}$操作，使得 (1) 和 (2) 均不成立。

若 $s_1=s_2$，则 $w_1=w_2$，因此存在一个空计算 $\varepsilon\in\mathsf{EXP}^{\mathsf{IO}}_{\mathrm{op}}(w_1,s_1,w_2,s_2)$。结果是，对于 $n=\max(|w_1|,|w_2|)$，$\mathrm{tm}^{\mathrm{op}}(\varepsilon)=0\le f(n)$ 且 $\mathrm{sp}^{\mathrm{op}}(\varepsilon)=n\le g(n)$。

否则，$s_1=\mathrm{op}_f$ 且 $s_2=\mathrm{op}_s$。于是，根据引理 7.4(2)，$(w_2,w_1)\in\mathsf{IO}^{s\ f}_{\mathrm{op}}$，。根据假设，存在一个计算 $\varepsilon\in\mathsf{EXP}^{\mathsf{IO}}_{\mathrm{op}}(w_2,s_2,w_1,s_1)$，满足以下界：对于 $n=\max(|w_2|,|w_1|)$，$\mathrm{tm}^{\mathrm{op}}(\varepsilon)\le f(n)$ 且 $\mathrm{sp}^{\mathrm{op}}(\varepsilon)\le g(n)$。

但是，令 $\varepsilon=\big((w_0',s_0')\ e_1,(w_1',s_1')\ e_2,\dots,e_m,(w_m',s_m')\big)$，便可推出 t

$$\varepsilon^{-1}=\big((w_m',s_m'),e_m^{-1},\dots,e_2^{-1},(w_1',s_1'),e_1,(w_0',s_0')\big)$$

是一个 EXP 实现（w_1,w_2）$\in\mathsf{IO}^{s_1,\ s_2}$操作 并满足 $\mathrm{tm}^{\mathrm{op}}(\varepsilon^{-1})=\mathrm{tm}^{\mathrm{op}}(\varepsilon)\le f(n)$，且 $\mathrm{sp}^{\mathrm{op}}(\varepsilon^{-1})=\mathrm{sp}^{\mathrm{op}}(\varepsilon)\le g(n)$。

□

作为一个实际示例，引理 9.5 给出了上一节构造并研究的特定（真）操作的复杂度界的两种具体计算。

引理 9.5。

(1) $\mathsf{TMSP}_{\mathrm{div2}}\preceq(n,n)$。（2）对于任意 $A\subseteq\mathcal{A}^*$，对于

$\mathsf{copy}=\mathsf{copy}^A$，$\mathsf{TMSP}_{\mathrm{copy}}\preceq(n,n)$。

证明。回顾一下，0 阶操作的展开就是其自身。特别地，对于 0 阶操作，实现计算与 EXP 实现计算是等价的。因此，根据引理 9.4 和预序的定义，为了证明 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{op}} \preceq (n, n)$，只需找到 $C > 0$，使得对于任意本质四元组 $(w_1, s_1, w_2, s_2) \in \mathrm{IO}_{\mathrm{op}}$，存在一个 ε 的操作计算，使其位于配置 $(w_1 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}, s_1)$ 与 $(w_2 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}}, s_2)$ 之间，并满足 $\mathsf{tm}^{\mathrm{op}}(\varepsilon), \mathsf{sp}^{\mathrm{op}}(\varepsilon) \leq C \max(|w_1|, |w_2|) + C$。

(1) 设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\tau \in \{\pm 1\}$。那么，在引理 7.20 的证明中构造的计算 $\varepsilon_{n,\tau}$ 是 $((\delta^{2\tau n}, 1), \mathrm{div2}_s)$ 与 $((\delta^{\tau n}, 1), \mathrm{div2}_f)$ 之间的输入输出计算。根据构造，

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n,\tau} = \big((u_0, \mathrm{div2}_s), e_1, (u_{1,0}, q_1), e_2^\tau, (u_{1,1}, q_1), e_2^\tau, \ldots, e_2^\tau, (u_{1,n}, q_1),\\ e_3, (u_{2,0}, q_2), e_5^\tau, (u_{2,1}, q_2), e_5^\tau, \ldots, e_5^\tau, (u_{2,n}, q_2), e_6, (u_3, \mathrm{div2}_f)\big)\end{aligned}$$

因此，$\mathsf{tm}_{\mathrm{div2}}(\varepsilon_{n,\tau}) = 2n + 3$。

根据 $\mathsf{Lab}(e_1)$ 的定义，$u_{1,0} = u_0 = (\delta^{2\tau n}, 1)$。接着，动作 $\mathsf{Lab}(e_2)$ 的定义意味着，对于所有 $i \in \overline{n}$，$u_{1,i} = (\delta^{2\tau(n-i)}, \delta^{\tau i})$，因此 $|u_{1,i}| = 2n - i \leq 2n$。特别地，$u_{1,n} = (1, \delta^{\tau n})$，因此根据 $\mathsf{Lab}(e_3)$ 的定义，$u_{2,0} = u_{1,n}$。于是，对于所有 $i \in \overline{n}$，$u_{2,i} = (\delta^{\tau i}, \delta^{\tau(n-i)})$，因此 $|u_{2,i}| = n \leq 2n$。最后，$\mathsf{Lab}(e_3)$ 的定义给出 $u_3 = u_{2,n} = (\delta^{\tau n}, 1)$。因此，$\mathsf{sp}_{\mathrm{div2}}(\varepsilon_{n,\tau}) = 2n$。

类似地，对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\tau \in \{\pm 1\}$，计算 $\varepsilon'_{n,\tau}$ 是配置 $((\delta^{2\tau n - 1}, 1), \mathrm{div2}_s)$ 与 $((\delta^{\tau n}, 1), \mathrm{div2}_f)$ 之间的输入输出计算。根据构造，

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{n,\tau} = \big((u'_0, \mathrm{div2}_s), e_1, (u'_{1,0}, q_1), e_2^\tau, (u'_{1,1}, q_1), e_2^\tau, \ldots, e_2^\tau, (u'_{1,n}, q_1),\\ e_4, (u'_{2,0}, q_2), e_5^\tau, (u'_{2,1}, q_2), e_5^\tau, \ldots, e_5^\tau, (u'_{2,n}, q_2), e_6, (u'_3, \mathrm{div2}_f)\big)\end{aligned}$$

因此，$\mathsf{tm}_{\mathrm{div2}}(\varepsilon'_{n,\tau}) = 2n + 3$。

如上所述，动作 $\mathsf{Lab}(e_1)$ 和 $\mathsf{Lab}(e_2)$ 的定义意味着，对于所有 $i \in \overline{n}$，$u'_{1,0} = u'_0 = (\delta^{2\tau n - 1}, 1)$ 且 $u'_{1,i} = (\delta^{2\tau(n-i)-1}, \delta^i)$。特别地，由于 $u'_{1,n} = (\delta^{-1}, \delta^{\tau n})$，$\mathsf{Lab}(e_4)$ 的定义得出 $u'_{2,0} = (1, \delta^{\tau n})$。如上所述，这意味着对于 $i \in \overline{n}$，$u'_{2,i} = (\delta^{\tau i}, \delta^{\tau(n-i)})$，因此 $u'_{2,n} = u'_3 = (\delta^{\tau n}, 1)$。

因此，对于任意 $i \in \overline{n}$，$|u'_{1,\,i}| = |2(n-i) - 1| + i \leq 2(n-i) + 1 + i = 2n - i + 1$。因此，由于 $|u'_{2,\,i}| = n$ 对所有 $i \in \overline{n}$ 都成立，可得 $\mathsf{sp}_{\mathrm{div2}}(\varepsilon'_{n,\,\tau}) \leq 2n + 1$。

现在，假设 $(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s,\,f\,\mathrm{div2}}$，使得 $w_1 = \delta^m$ 对 $m \in \mathbb{Z}$ 成立。那么存在 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\tau \in \{\pm 1\}$，使得以下两种情况之一成立：

- $m = 2\tau n$，此时 $w_2 = \delta^{\tau n}$；或者
- $m = 2\tau n - 1$，此时 $w_2 = \delta^{\tau n}$。

在第一种情况下，$|m| = 2n$，因此 $\varepsilon_{n,\,\tau} \in \varepsilon^{\mathsf{IO}}_{\mathrm{div2}}(w_1, \mathrm{div2}_s, w_2, \mathrm{div2}_f)$ 并满足

$$\begin{aligned}\mathrm{tm}_{\mathrm{div2}}(\varepsilon_{n,\tau}) &= 2n + 3 = |m| + 3\\ \mathrm{sp}_{\mathrm{div2}}(\varepsilon_{n,\tau}) &= 2n = |m|\end{aligned}$$

在第二种情况下，$|m| \geq 2n - 1$，因此 $\varepsilon'_{n,\,\tau} \in \varepsilon^{\mathsf{IO}}_{\mathrm{div2}}(w_1, \mathrm{div2}_s, w_2, \mathrm{div2}_f)$ 并满足

$$\begin{aligned}\mathrm{tm}_{\mathrm{div2}}(\varepsilon'_{n,\tau}) &= 2n + 3 \leq |m| + 4\\ \mathrm{sp}_{\mathrm{div2}}(\varepsilon'_{n,\tau}) &\leq 2n + 1 \leq |m| + 2\end{aligned}$$

因此，对于任意 $(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s,\,f\,\mathrm{div2}}$，存在一个 div2 在配置 $(w_1 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{div2}}, \mathrm{div2}_s)$ 和 $(w_2 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{div2}}, \mathrm{div2}_f)$ 之间的计算 ε，使得 $\mathsf{tm}_{\mathrm{div2}}(\varepsilon) \leq |w_1| + 4$ 且 $\mathsf{sp}_{\mathrm{div2}}(\varepsilon) \leq |w_1| + 2$。

现在假设 $(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s_1,\,s_2\mathrm{div2}}$ 满足 $s_1 = s_2$ 且 $w_1 \neq w_2$。根据引理 7.20，$s_1 = s_2 = \mathrm{div2}_s$ 且 $\{w_1, w_2\} = \{\delta^{2\tau n}, \delta^{2\tau n - 1}\}$，其中某些 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\tau \in \{\pm 1\}$。但于是 $(w_i, \delta^{\tau n}) \in \mathrm{IO}^{s,\,f\,\mathrm{div2}}$ 对于

$i \in \{1,2\}$，因此如上所述，存在输入-输出计算 ε_i，它们介于 $(w_i \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{div2}}, \mathrm{div2}_s)$ 与 $(\delta^{\tau n} \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{div2}}, \mathrm{div2}_f)$ 之间，并满足 $\mathrm{tm}_{\mathrm{div2}}(\varepsilon_i) \le |w_i| + 4$ 且 $\mathrm{sp}_{\mathrm{div2}}(\varepsilon_i) \le |w_i| + 2$。

因此，令 ρ_i 为支撑 ε_i 的路径，则拼接路径 $\rho_1 \rho_2^{-1}$ 支撑一个计算 $\varepsilon \in \varepsilon^{\mathsf{IO}}_{\mathrm{div2}}(w_1, \mathrm{div2}_s, w_2, \mathrm{div2}_s)$，满足：

$$\mathrm{tm}_{\mathrm{div2}}(\varepsilon) = \mathrm{tm}_{\mathrm{div2}}(\varepsilon_1) + \mathrm{tm}_{\mathrm{div2}}(\varepsilon_2) \le 2\max(|w_1|, |w_2|) + 8$$
$$\mathrm{sp}_{\mathrm{div2}}(\varepsilon) = \max(\mathrm{sp}_{\mathrm{div2}}(\varepsilon_1), \mathrm{sp}_{\mathrm{div2}}(\varepsilon_2)) \le \max(|w_1|, |w_2|) + 2$$

因此，参数 $C = 8$ 蕴含 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{div2}} \preceq (n, n)$。

(2) 由引理 5.6 可知 $\mathrm{IO}^{s\,s}_{\mathrm{copy}} = \,, \mathrm{IO}^{f\,f}_{\mathrm{copy}} = \mathbb{I}, \,$，任何本质四元组都必须具有形式 $(w_1, \mathrm{copy}_s, w_2, \mathrm{copy}_f)$。因此，只需找到 $C > 0$，使得对于任意 $(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s\,f}_{\mathrm{copy}}, \,$，都存在一个 copy 的计算 ε，其连接 $(w_1 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{copy}}, \mathrm{copy}_s)$ 和 $(w_2 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{copy}}, \mathrm{copy}_f)$，并满足

$$\mathrm{tm}_{\mathrm{copy}}(\varepsilon), \mathrm{sp}_{\mathrm{copy}}(\varepsilon) \le C\max(|w_1|, |w_2|) + C$$

由引理 5.6，对任意 $(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s\,f}_{\mathrm{copy}}, \,$，存在 $w \in F(A)$，使得 $w_1 = (w, 1)$ 且 $w_2 = (w, w)$。令 $w = a_1^{\delta_1} \dots a_n^{\delta_n}$ 满足 $a_i \in \mathcal{A}$ 且 $\delta_i \in \{\pm 1\}$。然后，如引理 5.6 的证明所示，存在一个形式如下的实现计算 ε_w：

$$\varepsilon_w = \big((u_0, \mathrm{copy}_s), e_1, (u_{1,0}, s_1), e_{1,x_1}^{\delta_1}, (u_{1,1}, s_1), e_{1,x_2}^{\delta_2}, \dots, e_{1,x_n}^{\delta_n}, (u_{1,n}, s_1),$$
$$e_t, (u_{2,0}, s_2), e_{2,x_n}^{\delta_n}, (u_{2,1}, s_2), \dots, e_{2,x_1}^{\delta_1}, (u_{2,n}, s_2), e_2, (u_3, \mathrm{copy}_f)\big)$$

因此，$\mathrm{tm}^{\mathrm{copy}}(\varepsilon_w) = 2n + 3$。

根据 $\mathrm{Lab}(e_1)$ 的定义，$u_{1,0} = u_0 = (w, 1, 1)$。对于 $x \in \mathcal{A}$，$\mathrm{Lab}(e_{1,x})$ 的构成方式意味着，对所有 $j \in \overline{n-1}$，均有 $u_{1,j} = (v'_j, 1, v_j)$，其中 $v_j = x_1^{\delta_1} \dots x_j^{\delta_j}$ 且 $v'_j = x_{j+1}^{\delta_{j+1}} \dots x_n^{\delta_n}$。特别地，$u_{1,n} = (1, 1, w)$，因此根据 $\mathrm{Lab}(e_t)$ 的定义，$u_{2,0} = (1, 1, w)$。接着，根据 $\mathrm{Lab}(e_{2,x})$ 的定义，对于 $j \in \overline{n-1}$，有 $u_{2,j} = (v'_{n-j}, v'_{n-j}, v_{n-j})$，从而 $u_{2,n} = (w, w, 1)$。因此，$\mathrm{Lab}(e_2)$ 意味着 $u_3 = (w, w, 1)$。

由于 $|v_j| + |v'_j| = n$ 对所有 $j \in \overline{n-1}$，$|u_0| = |u_{1,\,i}| = |u_{2,\,0}| = n$ 对所有 $i \in \overline{n}$。此外，$|u_{2,\,j}| = n + |v'_{n-j}| \le 2n$ 对所有 $j \in \overline{n-1}$。因此，由于 $|u_{2,\,n}| = |u_3| = 2n$，可得 $\mathrm{sp}^{\mathrm{copy}}(\varepsilon_w) = 2n$。

因此，通过参数选择 $C = 3$，该命题得证。

□

前几节构造的对象和操作还有其他例子，例如例 7.19 中构造的 $\mathrm{check}_{>0}$ 和 inc()；它们的复杂度界对后续构造很有用。不过，这些界的证明稍后再给出。

这是因为这些例子都是正度的对象和操作，因此它们的复杂度界在某种程度上取决于低度对象和操作的复杂度界。例如，$\mathrm{check}_{>0}$ 由 div2 和 copy 构造而成，并将它们用作实例，因此其展开包含由 div2 和 copy 的图产生的子图。

因此，首先构造估算函数，以建立对象复杂度与其实例复杂度之间的联系，从而使后续论证能够绕过扩张。

定义 9.6（估计复杂度）。设 $\mathrm{Obj} \in \mathrm{OBJ}^*$。对每个实例 $\in \mathrm{INST}^{\mathrm{Obj}}$，固定一对增长函数 $\mathcal{F}_{\mathrm{inst}} = (f_{\mathrm{inst}}, g_{\mathrm{inst}})$。那么，由这些函数对组成的元组 $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_{\mathrm{inst}})^{\mathrm{inst} \in \mathsf{INST}_{\mathrm{Obj}}}$ 称为 Obj 的估计集。

设 δ 是由一条（一般）边构成的一般路径支撑的操作 $\in \mathrm{Obj}$ 的一次计算。记 $\delta = \big((w_0, s_0)\ e', (w_1, s_1)\big)$，其中 $e' = (\mathrm{sf}_0, \mathrm{sf}_1, e)$，且 $e = (s'_0, s'_1, \text{动作} e) \in E_{\mathrm{op}}$。则定义 δ 关于 $\mathcal{F}$ 的估计时间和估计空间，分别记为 $\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\delta)$ 和 $\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\delta)$，如下：

- 若 动作$_e \in$ ACT$_0$，则 $\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}$操作$(\delta) = 1$，且 $\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}$操作$(\delta) = \max(|w_0|, |w_1|)$。
- 若动作$_e \in$ ACT操作，则对于动作$_e =$(实例$_e$, 操作$_e, \mu_{\mathrm{extact}_e}$),

$$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\delta) = f_{\mathrm{inst}_e}(M_e)$$
$$\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\delta) = g_{\mathrm{inst}_e}(M_e) + |w_0(\mathcal{I}_{\mathrm{op}} - \mathcal{I}_{\mathrm{act}_e})|$$

其中 $M_e = \max(|w_0(\mathcal{I}_{\mathrm{act}_e})|, |w_1(\mathcal{I}_{\mathrm{act}_e})|)$。

现在，设 $\varepsilon = \big((w_0, s_0)\ e'_1, (w_1, s_1)\ e'_2, \ldots, e'_m, (w_m, s_m)\big)$ 是操作的任意非空计算。操作的计算 $\varepsilon(i) = \big((w_{i-1}, s_{i-1})\ e'_i, (w_i, s_i)\big)$ 随后称为 i 的第 ε 个子计算。注意，对于每个 i，由于 $|\varepsilon(i)| = 1$，$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon(i))$ 和 $\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon(i))$ 已在上文定义。据此，关于 $\mathcal{F}$ 的 ε 的估计时间和估计空间分别定义为 $\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon) = \sum_{i \in \overline{m}} \mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon(i))$ 和 $\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon) = \max_{i \in \overline{m}} \mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon(i))$。

最后，给定 op 的一个空计算 $\varepsilon = (w_0, s_0)$，定义 $\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon) = 0$ 以及 $\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon) = |w_0|$。注意，在这种情况下，$\varepsilon$ 可以视为 EXP(op) 的一次计算，因此 $\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon) = \mathrm{tm}_{\mathrm{op}}(\varepsilon)$ 且 $\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon) = \mathrm{sp}_{\mathrm{op}}(\varepsilon)$。

相对于估计集合 $\mathcal{F}$，op 的估计时间和估计空间复杂度函数的定义方式与实际复杂度函数大致相同。特别地，如果 f 和 g 是一对增长函数，且对于所有满足 $|w_1|, |w_2| \leq n$ 的 $(w_1, s_1, w_2, s_2) \in \mathrm{IO}_{\mathrm{op}}$，都存在 op 的一次计算 ε，实现 $(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s_1, s_2}\mathrm{op}$，并满足 $\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon) \leq f(n)$ 和 $\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon) \leq g(n)$，那么称 op 相对于 $\mathcal{F}$ 的估计时间 - 空间复杂度至多为 (f, g)。在这种情况下，(f, g) 称为 $\mathrm{TMSP}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}$ 的一个上界，记作 $\mathrm{TMSP}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}} \preceq (f, g)$。此外，如果存在 $\mathrm{TMSP}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}$ 的一个上界 (f, g)，使得 $(f, g) \sim (f', g')$，则称这对增长函数 (f', g') 是 $\mathrm{TMSP}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}$ 的渐近上界，记作 $\mathrm{TMSP}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}} \preceq (f', g')$。

最后，若一对增长函数（f, g）是 $\mathrm{TMSP}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{Obj}}$ 的上界，记作 $\mathrm{TMSP}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{Obj}} \preceq (f, g)$，则对所有 op $\in$ Obj，均有 $\mathrm{TMSP}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}} \preceq (f, g)$。类似地，若（$f', g'$）是 $\mathrm{TMSP}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{Obj}}$ 的渐近上界，记作 $\mathrm{TMSP}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{Obj}} \preceq (f', g')$，则对所有 op $\in$ Obj，均有 $\mathrm{TMSP}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}} \preceq (f', g')$。

命题 9.7. 设 $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_{\mathrm{inst}})^{\mathrm{inst} \in \mathsf{INST}_{\mathrm{Obj}}}$ 是 Obj $\in$ OBJ* 的一个估计集。对于所有 inst $\in \mathrm{INST}^{\mathrm{Obj}}$，令 inst $= (\mathrm{Obj}_{\mathrm{inst}}, \mu^{\mathrm{val}}_{\mathrm{inst}})$，令 $\mathcal{F}_{\mathrm{inst}} = (f_{\mathrm{inst}}, g_{\mathrm{inst}})$，并将 $\mathrm{TMSP}^{\mathrm{Obj}_{\mathrm{inst}}}$ 简记为 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{inst}}$。

(1) 假设对于所有 inst $\in \mathrm{INST}^{\mathrm{Obj}}$，$\mathcal{F}_{\mathrm{inst}}$ 是 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{inst}}$ 的上界。那么对于任意计算 $\delta = \big((w_0, s_0)\ e'$，若 op $\in$ Obj 的 $(w_1, s_1)\big)$，则存在一个 EXP(op) 的计算 ε，其发生在 $(w_0 \sqcup 1^{\mathrm{inv}}_{\mathrm{op}}, s_0)$ 与 $(w_1 \sqcup 1^{\mathrm{inv}}_{\mathrm{op}}, s_1)$ 之间，并满足 $\mathrm{tm}_{\mathrm{op}}(\varepsilon) \leq \mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\delta)$ 且 $\mathrm{sp}_{\mathrm{op}}(\varepsilon) \leq \mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\delta)$。(2) 如果对于所有 inst $\in \mathrm{INST}^{\mathrm{Obj}}$，$\mathcal{F}_{\mathrm{inst}}$ 是 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{inst}}$ 的上界，那么 $\mathrm{TMSP}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{Obj}} \leq (f, g)$ 蕴含 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{Obj}} \leq (f, g)$。(3) 假设对于所有 inst $\in \mathrm{INST}^{\mathrm{Obj}}$，$\mathrm{TMSP}_{\mathrm{inst}} \preceq \mathcal{F}_{\mathrm{inst}}$ 且 $f_{\mathrm{inst}} \neq 0$。进一步，假设存在增长函数 $\{\phi_{\mathrm{inst}}, \psi_{\mathrm{inst}}\}_{\mathrm{inst} \in \mathsf{INST}_{\mathrm{Obj}}}$，使得对于任意 $c, n \in \mathbb{N}$，$\psi_{\mathrm{inst}} \neq 0$，$f_{\mathrm{inst}}(cn) \leq \phi_{\mathrm{inst}}(c) f_{\mathrm{inst}}(n)$，并且 $g_{\mathrm{inst}}(cn) \leq \psi_{\mathrm{inst}}(c) g_{\mathrm{inst}}(n)$。那么 $\mathrm{TMSP}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{Obj}} \preceq (f, g)$ 蕴含 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{Obj}} \preceq (f, g)$。

证明。(1) 令 $e' = (\mathrm{sf}_0, \mathrm{sf}_1, e)$ 对于 $e = (t_0, t_1,$ 动作$) \in E_{\mathrm{op}}$。

假设 $e \in E^0_{\mathrm{op}}$。若 $\mathrm{sf}_0 = \mathrm{sf}_1$，，则 $w_0 = w_1$ 且 $s_0 = s_1$，因此在 $(w_0 \sqcup 1^{\mathrm{inv}}_{\mathrm{op}}, s_0)$ 和 $(w_1 \sqcup 1^{\mathrm{inv}}_{\mathrm{op}}, s_1)$ 之间存在一个 EXP(op) 的空计算 ε。在这种情况下，$\mathrm{tm}_{\mathrm{op}}(\varepsilon) = 0 < 1 = \mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\delta)$，且 $\mathrm{sp}_{\mathrm{op}}(\varepsilon) = |w_0 \sqcup 1^{\mathrm{inv}}_{\mathrm{op}}| = |w_0| = \mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\delta)$。否则，若 $\mathrm{sf}_0 =$，则令 $\alpha = 1$ ˆs；若 $\mathrm{sf}_0 = f$，则令 ˆ$\alpha = -1$。于是，根据构造，存在一个计算

$$\varepsilon = \big((w_0 \sqcup 1^{\mathrm{inv}}_{\mathrm{op}}, s_0), (e'')^{\alpha}, (w_1 \sqcup 1^{\mathrm{inv}}_{\mathrm{op}}, s_1)\big)$$

属于 EXP(op)，其中 e'' 是由 e 构造的真边。在这种情况下，

$$\mathrm{tm}_{\mathrm{op}}(\varepsilon) = 1 = \mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\delta)$$
$$\mathrm{sp}_{\mathrm{op}}(\varepsilon) = \max(|w_0 \sqcup 1^{\mathrm{inv}}_{\mathrm{op}}|, |w_1 \sqcup 1^{\mathrm{inv}}_{\mathrm{op}}|) = \max(|w_0|, |w_1|) = \mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\delta)$$

因此，只需假设 $e \in E_{\mathrm{op}} - E^0_{\mathrm{op}}$。令 act $=$(inst, op$_e$, $\mu^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{act}}$)，由定理 8.10(c)可知

$$(\mu^{-1}_{\mathrm{act}}(w_0(\mathcal{I}_{\mathrm{act}})), \mu^{-1}_{\mathrm{act}}(w_1(\mathcal{I}_{\mathrm{act}}))) \in \mathsf{IO}^{\lambda_{\mathrm{op}_e}(\mathrm{sf}_0), \lambda_{\mathrm{op}_e}(\mathrm{sf}_1)}_{\mathsf{EXP}(\mathrm{op}_e)}$$

因此，根据假设，$\mathcal{F}_{\mathrm{inst}}$ 是 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{inst}}$ 的上界，故存在一个 EXP(op$_e$)的计算

$$\gamma = \big((w'_0, s'_0), e'', (w'_1, s'_1), e'', \ldots, e'', (w'_m, s'_m)\big)$$

在配置 $(w'_0, s'_0) = \big(\mu^{-1}_{\mathrm{act}}(w_0(\mathcal{I}_{\mathrm{act}})) \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathsf{EXP}(\mathrm{op}_e)}, \lambda_{\mathrm{op}_e}(\mathrm{sf}_0)\big)$ 与配置 $(w'_m, s'_m) = \big(\mu^{-1}_{\mathrm{act}}(w_1(\mathcal{I}_{\mathrm{act}})) \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathsf{EXP}(\mathrm{op}_e)}, \lambda_{\mathrm{op}_e}(\mathrm{sf}_1)\big)$ 之间；该计算满足 $\mathrm{tm}^{\mathrm{op}_e}(\gamma) \le f_{\mathrm{inst}}(M)$，且对于 $M = \max(|w'_0|, |w'_m|)$，$\mathrm{sp}^{\mathrm{op}_e}(\gamma) \le g_{\mathrm{inst}}(M)$。

注意到 $|w'_0| = |\mu^{-1}_{\mathrm{act}}(w_0(\mathcal{I}_{\mathrm{act}}))| = |w_0(\mathcal{I}_{\mathrm{act}})|$ 并且类似地，$|w'_m| = |w_1(\mathcal{I}_{\mathrm{act}})|$。因此可得，$M = \max(|w_0(\mathcal{I}_{\mathrm{act}})|, |w_1(\mathcal{I}_{\mathrm{act}})|)$。

定理 8.10(c) 进而给出一个计算

$$\varepsilon = \kappa_\delta(\gamma) = \big((u_0, \sigma_0), e'''_1, (u_1, \sigma_1), e'''_2, \ldots, e'''_m, (u_m, \sigma_m)\big)$$

属于 EXP(op)，使得 $(u_0, \sigma_0) = (w_0 \sqcup 1^{\mathrm{inv}}_{\mathrm{op}}, s_0)$，$(u_m, \sigma_m) = (w_1 \sqcup 1^{\mathrm{inv}}_{\mathrm{op}}, s_1)$，一个

$$u_j = \mu_e(w'_j) \sqcup w_0(\mathcal{I}_{\mathrm{op}} - \mathcal{I}_{\mathrm{act}}) \sqcup (1)_{i \in \mathcal{I}^{\mathrm{inv}}_{\mathrm{op}} - \mathcal{I}^{\mathrm{int}}_e}$$

对所有 $j \in 0, m$ 均成立。

注意到 $|u_j| = |\mu_e(w'_j)| + |w_0(\mathcal{I}_{\mathrm{op}} - \mathcal{I}_{\mathrm{act}})| = |w'_j| + |w_1(\mathcal{I}_{\mathrm{op}} - \mathcal{I}_{\mathrm{act}})|$ 对所有 $j \in 0, m$ 均成立。因此，

$$\mathrm{tm}_{\mathrm{op}}(\varepsilon) = m = \mathrm{tm}_{\mathrm{op}_e}(\gamma) \le f_{\mathrm{inst}}(M) = \mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\delta)$$
$$\mathrm{sp}_{\mathrm{op}}(\varepsilon) = \max_{j \in \overline{0,m}} |u_j| \le g_{\mathrm{inst}}(M) + |w_1(\mathcal{I}_{\mathrm{op}} - \mathcal{I}_{\mathrm{act}_i})| = \mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\delta)$$

(2) 设 $(w_1, s_1, w_2, s_2) \in \mathrm{IO}^{\mathrm{op}}$，其中 op $\in$ Obj。则对于 $n = \max(|w_1|, |w_2|)$，存在一个计算

$$\delta = \big((w'_0, s'_0), e_1, (w'_1, s'_1), e_2, \ldots, e_m, (w'_m, s'_m)\big)$$

实现满足 $\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\delta) \le f(n)$ 且 $\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\delta) \le g(n)$ 的 $(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s_1, s_2}$操作。

若 δ 为空，则 $\mathrm{tm}^{\mathrm{op}}(\delta) \le f(n)$ 且 $\mathrm{sp}^{\mathrm{op}}(\delta) \le g(n)$。因此，可以假设 δ 非空。由 (1)，对所有 $i \in \overline{m}$，存在一条在 $(w'_{i-1} \sqcup 1^{\mathrm{inv}}_{\mathrm{op}}, s'_{i-1})$ 与 $(w'_i \sqcup 1^{\mathrm{inv}}_{\mathrm{op}}, s'_i)$ 之间的 EXP(op) 计算 ε_i，使得 $\mathrm{tm}^{\mathrm{op}}(\varepsilon_i) \le \mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\delta(i))$ 且 $\mathrm{sp}^{\mathrm{op}}(\varepsilon_i) \le \mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\delta(i))$。

令 ρ_i 为支撑 ε_i 的 EXP(op) 路径。那么，$\rho_1, \ldots, \rho_m$ 是一条支撑 EXP(op) 计算 ε 的路径，该计算位于 $(w_1 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathsf{EXP}(\mathrm{op})}, s_1)$ 与 $(w_2 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathsf{EXP}(\mathrm{op})}, s_2)$ 之间，并满足

$$\mathrm{tm}_{\mathrm{op}}(\varepsilon) = \sum_{i \in \overline{m}} \mathrm{tm}_{\mathrm{op}}(\varepsilon_i) \le \sum_{i \in \overline{m}} \mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\delta(i)) = \mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\delta) \le f(n)$$
$$\mathrm{sp}_{\mathrm{op}}(\varepsilon) = \max_{i \in \overline{m}} \mathrm{sp}_{\mathrm{op}}(\varepsilon_i) \le \max_{i \in \overline{m}} \mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\delta(i)) = \mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\delta) \le g(n)$$

因此，$\mathrm{TMSP}_{\mathrm{op}} \le (f, g)$。

(3) 对于所有实例 $\in \mathrm{INST}^{\mathrm{Obj}}$，设 $\mathcal{F}'_{\mathrm{inst}} = (f'_{\text{实例}}\ g'_{\mathrm{inst}})$ 是一对增长函数，使得 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{inst}} \le \mathcal{F}'_{\mathrm{inst}}$ 且 $\mathcal{F}'_{\text{实例}} \sim \mathcal{F}_{\mathrm{inst}}$。那么，$\mathcal{F}' = (\mathcal{F}'_{\text{实例}})_{\mathrm{inst} \in \mathsf{INST}_{\mathrm{Obj}}}$ 是 Obj 的估计集。

类似地，设 f' 和 g' 是增长函数，使得 TMSP $\mathcal{F}_{\mathrm{bj}} \le (f', g')$ 和 $(f', g') \sim (f, g)$】【。

根据预序的定义以及关于 f_{inst} 和 ψ_{inst}的假设，存在一个常数$C \in \mathbb{N}$，使得对于所有实例 $\in \mathsf{INST}^{\mathrm{Obj}}$,

- $f'_{\text{实例}}(n) \leq C f_{\text{实例}}(Cn) + C$ 对于所有 $n \in \mathbb{N}$,
- $g'_{\text{实例}}(n) \leq C g_{\text{实例}}(Cn) + C$ 对于所有 $n \in \mathbb{N}$,
- $f_{\text{实例}}(n) > 0$ 对于所有 $n \geq C$，且
- $\psi_{\text{实例}}(n) > 0$ 对于所有 $n \geq C$。

此外，由于增大 C 的值不会影响这些条件是否成立，因此不失一般性地，可以假设 $C \geq 1$ 且 $\psi_{\text{inst}}(n) \geq C^{-1}$ 对于所有 $n \geq C$。

设 $\delta = \big((w_0, s_0)\ e', (w_1, s_1)\big)$ 是某个 Obj 的操作 $\in$ 的一次计算。此外，设 $e' = (\mathsf{sf}_0, \mathsf{sf}_1, e)$ 对于 $e = (t_0, t_1, \text{动作}) \in E_{\text{op}}$。

I若 f $e \in E^0_{\text{op}}$，则 $\mathsf{tm}^{\mathcal{F}}_{\text{op}}(\delta) = 1 = \mathsf{tm}^{\mathcal{F}'}{}_{\text{操作}}(\delta)$，且 $\mathsf{sp}^{\mathcal{F}}_{\text{op}}(\delta) = \max(|w_0|, |w_1|) = \mathsf{sp}^{\mathcal{F}'}{}_{\text{操作}}(\delta)$。

否则，设动作 $= (\text{实例}, \text{操作}_e, \mu^{\text{ext}}_{\text{act}})$。于是，对于 $M = \max(|w_0(\mathcal{I}_{\text{act}})|, |w_1(\mathcal{I}_{\text{act}})|)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{tm}^{\mathcal{F}'}_{\text{op}}(\delta) &= f'_{\text{inst}}(M) \leq C f_{\text{inst}}(CM) + C \leq C\phi_{\text{inst}}(C) f_{\text{inst}}(M) + C \\ &\leq C\phi_{\text{inst}}(C)\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\text{op}}(\delta) + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{sp}^{\mathcal{F}'}_{\text{op}}(\delta) &= g'_{\text{inst}}(M) + |w_0(\mathcal{I}_{\text{op}} - \mathcal{I}_{\text{act}})| \leq C g_{\text{inst}}(CM) + C + |w_0(\mathcal{I}_{\text{op}} - \mathcal{I}_{\text{act}})| \\ &\leq C\psi_{\text{inst}}(C)\big(g_{\text{inst}}(M) + |w_0(\mathcal{I}_{\text{op}} - \mathcal{I}_{\text{act}})|\big) + C \leq C\psi_{\text{inst}}(C)\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\text{op}}(\delta) + C\end{aligned}$$

因此，对于 $D = C\max^{\text{inst} \in \mathsf{INST}_{\mathrm{Obj}}}(\phi_{\text{inst}}(C)\ \psi_{\text{inst}}(C), 1)$，则 $\mathsf{tm}^{\mathcal{F}'}{}_{\text{操作}}(\delta) \leq D\mathsf{tm}^{\mathcal{F}}_{\text{op}}(\delta) + D$ 且 $\mathsf{sp}^{\mathcal{F}'}{}_{\text{操作}}(\delta) \leq D\mathsf{sp}^{\mathcal{F}}_{\text{op}}(\delta) + D$。

现在，设 $(w_0, s_0, w_1, s_1) \in \mathsf{IO}_{\text{op}}$，其中某个操作 $\in \mathsf{Obj}$。于是，由于 $\mathsf{TMSP}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{Obj}} \leq (f', g')$，存在一个计算

$$\varepsilon = \big((w'_0, s'_0), e'_1, (w'_1, s'_1), e'_2, \ldots, e'_m, (w'_m, s'_m)\big)$$

实现 $(w_0, w_1) \in \mathsf{IO}^{s_0,\ s_1\text{操作}}$，且满足界 $\mathsf{tm}^{\mathcal{F}}_{\text{op}}(\varepsilon) \leq f'(n)$ 和 $\mathsf{sp}^{\mathcal{F}}_{\text{op}}(\varepsilon) \leq g'(n)$，其中$n = \max(|w_1|, |w_2|)$

假设存在 $i, j \in \overline{0, m}$，使得 $(w'_i, s'_i) = (w'_j, s'_j)$。不失一般性地假设 $i \leq j$，则存在一个计算

$$\varepsilon' = \big((w'_0, s'_0), e'_1, \ldots, (w'_i, s'_i), e'_{j+1}, (w'_{j+1}, s'_{j+1}), \ldots, (w'_m, s'_m)\big)$$

连接 (w'_0, s'_0) 与 (w'_m, s'_m)，且满足 $\mathsf{tm}^{\mathcal{F}}_{\text{op}}(\varepsilon') \leq \mathsf{tm}^{\mathcal{F}}_{\text{op}}(\varepsilon)$ 和 $\mathsf{sp}^{\mathcal{F}}_{\text{op}}(\varepsilon') \leq \mathsf{sp}^{\mathcal{F}}_{\text{op}}(\varepsilon)$。因此，不失一般性地，可以假设 ε 的配置彼此不同。

那么，上述界意味着:

$$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}'}_{\text{op}}(\varepsilon) = \sum_{i \in \overline{m}} \mathrm{tm}^{\mathcal{F}'}_{\text{op}}(\varepsilon(i)) \leq \sum_{i \in \overline{m}} (D\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\text{op}}(\varepsilon(i)) + D) = D\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\text{op}}(\varepsilon) + Dm \tag{9.1}$$

$$\mathrm{sp}^{\mathcal{F}'}_{\text{op}}(\varepsilon) = \max_{i \in \overline{m}} \mathrm{sp}^{\mathcal{F}'}_{\text{op}}(\varepsilon(i)) \leq \max_{i \in \overline{m}} (D\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\text{op}}(\varepsilon(i)) + D) = D\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\text{op}}(\varepsilon) + D \tag{9.2}$$

对于每个 $i \in \mathcal{I}_{\text{op}}$，令 $L^C_i = \{w \in F(\mathcal{A}_{\text{op}}(i)) : |w| < C\}$。由于每个字母表都是有限的，因此对于每个 i，L^C_i 都是有限的。令 $K_i = |L^C_i|$ 和 $K = |S_{\text{op}}| \cdot \prod_{i \in \mathcal{I}_{\text{op}}} K_i$。

现在，对于每个满足 $\ell < r$ 的 ℓ、$r \in \overline{0, m}$，令 $\gamma_{\ell,r} = \big((w'_\ell, s'_\ell)\ e'_{\ell+1}, \ldots, e'_r, (w'_r, s'_r)\big)$。因此，$\gamma_{\ell,r}$ 的子计算与 ε 的子计算 $\varepsilon(\ell+1) \ldots, \varepsilon(r)$ 一致。

假设 $r - \ell \geq K$。对于每个 $j \in \overline{\ell + 1, r}$，令 $e'_j = (\mathsf{sf}_j, \mathsf{sf}'_j, e_j)$，其中 $e_j = (t_j, t'_j, \text{动作}_j) \in E_{\text{op}}$。

如果对于某个 j 有 $e_j \in E^0_{\text{op}}$，则 $\mathsf{tm}^{\mathcal{F}}_{\text{op}}(\gamma_{\ell,\ r}) \geq \mathsf{tm}^{\mathcal{F}}_{\text{op}}(\varepsilon(j)) = 1$。

否则，假设动作$_j = (\text{实例}_j,\ \text{操作}_j,\ \mu^{\text{ext}}_{\text{act}_j}) \in \text{动作}_{\text{op}}$ 对每个 j 并令$\mathcal{I}_{\ell,r} = \bigcup_{j \in \overline{\ell+1, r}} \mathcal{I}_{\text{act}}{}_j$.

对于任意 $i \in \mathcal{I}_{\mathrm{op}} - \mathcal{I}_{\ell,\ r}$ 以及 $\overline{j \in \ell+1}, r,\ i \notin \mathcal{I}_{\mathrm{act}_j}$。因此，对于任意 $\overline{j \in \ell, r}$, $w_j(i) = w_0(i)$，从而 $w_j(\mathcal{I}_{\mathrm{op}} - \mathcal{I}_{\ell,\ r}) = w_0(\mathcal{I}_{\mathrm{op}} - \mathcal{I}_{\ell,\ r})$。

接下来，假设对每个 $i \in \mathcal{I}_{\ell,\ r}$ 以及 $j \in \ell, r,\ w_j(\overline{i}) \in L_i^C$。那么，对每个 $j \in \ell, r$, $w_j \in (\times_{\overline{i \in \mathcal{I}_{\ell,\ r}}} L_i^C) \sqcup w_0(\mathcal{I}_{\mathrm{op}} - \mathcal{I}_{\ell,\ r})$。由于 ε 的每个配置都互不相同，因此可得 $r - \ell + 1 \leq K$，从而产生矛盾。

因此，存在 $i \in \mathcal{I}_{\ell,\ r}$ 以及 $j \in \overline{\ell, r}$，使得 $|w_j(i)| \geq C$。结果是，存在 $k \in \ell+1, r$ 使得 $\overline{i \in \mathcal{I}_{\mathrm{act}_k}}$。假设 $k > j$，令 $p \in j+1, k$ 为满足 $i \in \mathcal{I}_{\mathrm{act}_p}$ 的最小索引。则 $w_{p-1}(i) = w_j(i)$，因此 $|w_{p-1}(\mathcal{I}_{\mathrm{act}_p})| \geq C$。在这种情况下，$\mathrm{tm}_{\mathrm{op}}^{\mathcal{F}}(\varepsilon(p)) \geq f_{\mathrm{inst}_p}(C)$。同理，若 $k \leq j$，则令 $q \in k, j$ 为满足 $i \in \mathcal{I}_{\mathrm{act}_q}$ 的最大索引，于是 $w_q(i) = w_j(i)$，因此再次有 $\mathrm{tm}_{\mathrm{op}}^{\mathcal{F}}(\varepsilon(q)) \geq f_{\mathrm{inst}_q}(C)$。

因此，对于 $\omega = \min^{\mathrm{inst} \in \mathsf{INST}_{\mathrm{Obj}}}(f_{\mathrm{inst}}(C), 1)$，只要 $r - \ell \geq K$，$\mathrm{tm}_{\mathrm{op}}^{\mathcal{F}}(\gamma_{\ell,r}) \geq \omega$。因此，令 $y = \lfloor m/K \rfloor$，对于任意 $z \in \overline{y}$，$\mathrm{tm}_{\mathrm{op}}^{\mathcal{F}}(\gamma_{(z-1)K, zK}) \geq \omega$。由此，$\mathrm{tm}_{\mathrm{op}}^{\mathcal{F}}(\varepsilon) \geq \omega y \geq \omega(m/K - 1)$。

因此，$m \leq \omega^{-1} K \mathrm{tm}_{\mathrm{op}}^{\mathcal{F}}(\varepsilon) + K$。于是，结合 (9.1)，存在一个充分大的 $E \in \mathbb{N}$，使得

$$\mathrm{tm}_{\mathrm{op}}^{\mathcal{F}'}(\varepsilon) \leq E \mathrm{tm}_{\mathrm{op}}^{\mathcal{F}}(\varepsilon) + E \leq E f'(n) + E$$

该界以及 (9.2) 中的界进而推出 $\mathrm{TMSP}^{\mathcal{F}'}{}_{\mathrm{Obj}} \preceq (f'', g'')$，其中增长函数 f'' 和 g'' 由 $f''(n) = E f'(n) + E$ 以及 $g''(n) = D g'(n) + D$ 给出，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。由 (2) 可知，$\mathrm{TMSP}_{\mathrm{Obj}} \preceq (f'', g'')$。

但是 $(f'', g'') \sim (f', g') \sim (f, g)$，因此 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{Obj}} \preceq (f, g)$。

□

在实际应用中，命题 9.7 的 (3) 部分有助于计算 $\mathrm{TMSP}^{\mathrm{Obj}}$ 的渐近上界，因为它将这一过程简化为计算每种操作的计算的估计复杂度（而非其展开），只需使用一个简单的估计集，该估计集是每个实例的时间-空间复杂度的渐近上界。下面的例子展示了这一用法。

引理 9.8。

(a) $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{ch}>0} \preceq (n, n)$。

（b）$\mathrm{TMSP}_{Counter_1} \preceq (n, n)$。

证明。(a) 注意，$\mathrm{INST}_{\mathrm{ch}>0}$ 由 copy^{δ} 的一个实例和 $\mathsf{div2}$ 的一个实例组成。分别将这两个实例命名为 copy 和 $\mathsf{div2}$，令 $\mathcal{F}$ 为检查$_{>0}$ 的估计集，该集合由 $\mathcal{F}_{\mathrm{copy}} = \mathcal{F}_{\mathrm{div2}} = (n, n)$ 给出。根据引理 9.5，对于 $\mathsf{inst} \in \mathrm{INST}_{\mathrm{ch}>0}$，有 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{inst}} \preceq \mathcal{F}_{\mathrm{inst}}$。此外，对所有 $n \in \mathbb{N}$，取 $\phi_{\mathrm{inst}}(n) = \psi_{\mathrm{inst}}(n) = n$，即可立即得出命题 9.7(3) 的假设均已满足。因此，只需证明 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{ch}>0}^{\mathcal{F}} \preceq (n, n)$。

固定 $n \in \mathbb{N}$，并令 $(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s_1, s_2 \mathrm{ch}>0}$，使得 $|w_1|, |w_2| \leq n$。

若 $s_1 = s_2$，则存在一个实现 $(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s_1, s_2 \mathrm{ch}>0}$ 的空计算 ε，使得平凡界 $\mathrm{tm}_{\mathrm{ch}>0}^{\mathcal{F}}(\varepsilon) = 0 \leq n$ 和 $\mathrm{sp}_{\mathrm{ch}>0}^{\mathcal{F}}(\varepsilon) = |w_1| \leq n$ 成立。

现在，假设 $s_1 = (\text{检查}_{>0})_s$ 且 $s_2 = (\text{检查}_{>0})_f$。根据引理 7.21，存在 $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ 使得 $w_1 = \delta^m = w_2$。此外，存在一个计算 ε_m，实现 $(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s_1, s_2 \mathrm{ch}>0}$，使得：

$$\varepsilon_m = \big((\delta^m, 1, (\mathrm{ch}_{>0})_s), e_1', (\delta^m, 1, q_1), e_2', (\delta^m, \delta^m, q_2), e_3', (\delta^m, \delta^{\ell_1}, q_2), e_3', \dots$$
$$\dots, e_3', (\delta^m, \delta^{\ell_{r_m - 1}}, q_2), e_3', (\delta^m, \delta, q_2), e_4', (\delta^m, 1, (\mathrm{ch}_{>0})_f)\big)$$

其中 $e_4' = (\hat{s}, f, e_4)$，$r_m = \lceil \log_2(m) \rceil$，并且令 $\ell_0 = m$ 和 $\ell_{r_m} = 1$，对所有 $i \in \overline{r_m}$ 均成立。

由于 $e_1, e_4 \in E_{\mathrm{ch}>0}^0$ 可得：

- $\mathrm{tm}^{\mathcal{F}_{\mathrm{ch}>0}}(\varepsilon_m(1)) = \mathrm{tm}^{\mathcal{F}_{\mathrm{ch}>0}}(\varepsilon_m(r+3)) = 1$,
- $\mathrm{sp}^{\mathcal{F}_{\mathrm{ch}>0}}(\varepsilon_m(1)) = m$，并且
- 间隔$^{\mathcal{F}_{\mathrm{ch}>0}}(\varepsilon_m(r+3)) = m+1$。

接下来，对于 $\mathsf{act}_2 = \mathsf{Lab}(e_2)$，注意到 $\mathcal{I}_{\mathrm{act}_2} = \mathcal{I}_{\mathrm{ch}>0}$。因此，$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{ch}>0}(\varepsilon_m(2)) = \mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{ch}>0}(\varepsilon_m(2)) = 2m$。此外，对于 $\mathsf{act}_3 = \mathsf{Lab}(e_3)$，$\mathcal{I}_{\mathrm{act}_3} = \{b\}$。因此，由于 $\ell_i \le \ell_{i-1}$ 对所有 $i \in \overline{r_m}$，$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{ch}>0}(\varepsilon_m(j)) = \ell_{j-3}$且 $\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{ch}>0}(\varepsilon_m(j)) = \ell_{j-3} + m$ 对所有 $j \in 3, \overline{r_m + 2}$。

因此，结合这些结果可得：

$$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{ch}>0}(\varepsilon_m) = 2m + 2 + \sum_{i \in \overline{r_m}} \ell_{i-1} \le 2m + 2 + \sum_{i \in \overline{r_m}} \left(\frac{m}{2^{i-1}} + 1\right) \le 5n + 2$$

$$\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{ch}>0}(\varepsilon_m) \le 2m \le 2n$$

最后，如果 $s_1 = (\text{检查}_{>0})^f$ 且 $s_2 = (\text{检查}_{>0})^s$，那么再次由引理 7.21 可知，存在一个$m \in \mathbb{N} - \{0\}$ 使得 $w_1 = w_2 = \delta^m$。但此时 ε_m^{-1}是一个实现了 $(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s_1,\ s_2\mathrm{ch}>0}$的计算，并满足上述界 $\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{ch}>0}(\varepsilon_m^{-1}) \le 5n+2$ 和 $\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{ch}>0}(\varepsilon_m^{-1}) \le 2n$。

因此，$\mathrm{TMSP}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{ch}>0} \preceq (n, n)$。

(b) 根据构造，$\mathrm{INST}^{\mathrm{Counter}_1}$ 由一个 $\mathsf{check}_{>0}$实例组成。将此实例命名为 $\mathsf{check}_{>0}$，由 (a) 可知，$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_{\mathrm{ch}>0})$ 与 $\mathcal{F}_{\mathrm{ch}>0} = (n, n)$ 是 $\mathsf{Counter}_1$ 的估计集，并且对所有 inst 都满足 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{inst}} \preceq \mathcal{F}_{\mathrm{inst}}$。此外，令 $\phi_{\mathrm{inst}}(n) = \psi_{\mathrm{inst}}(n) = n$ 对所有 n 成立，可知命题 9.7(3) 的假设均满足，因此只需检查 (n, n) 是否为 $\mathrm{TMSP}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{check}}$ 和 $\mathrm{TMSP}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{inc}}$ 的渐近上界。根据构造，立即可得 $\mathrm{TMSP}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{check}} \le (n, n)$。

现在，固定 $n \in \mathbb{N}$，并令 $(w_1, s_1, w_2, s_2) \in \mathrm{IO}_{\mathrm{inc}}$ 满足 $|w_1|, |w_2| \le n$。

若 $s_1 = s_2$，则空计算 ε 实现 $(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s_1,\ s_2\text{递增}}$，因此平凡界仍然成立。

假设 $s_1 = \text{递增}_s$ 且 $s_2 = \text{递增}_f$。那么根据引理 7.23，存在 $j \in \mathbb{N} - \{0\}$ 使得$w_1 = \delta^{j-1}$ 且 $w_2 = \delta^j$。此外，存在一个递增的计算，以如下形式实现 $(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s_1,\ s_2\text{递增}}$：

$$\varepsilon_j = \big((\delta^{j-1}, \mathrm{inc}_s), e'_1, (\delta^j, q), e'_2, (\delta^j, \mathrm{inc}_f)\big)$$

其中 $e'_k = (s, f, e_k)$ 对于 $i = 1, 2$。

由于 $e_1 \in E^0_{\mathrm{inc}}$，$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{inc}}(\varepsilon_j(1)) = 1$且 $\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_j(\varepsilon_j(1)) = j$。此外，根据估计集的定义，$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{inc}}(\varepsilon_j(2)) = j$且 $\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_j(\varepsilon_j(2)) = 2j$。因此，$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{inc}}(\varepsilon_j) = j+1 \le n+1$且 $\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_j(\varepsilon_j) = 2j \le 2n$。

最后，如果 $s_1 = \text{递增}_f$ 且 $s_2 = \text{递增}_s$，那么再次由引理 7.23 可知，存在一个整数 $j \in \mathbb{N} - \{0\}$，使得 $w_1 = \delta^j$ 且 $w_2 = \delta^{j-1}$。但于是，ε_j^{-1}就是一个实现 $(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s_1,\ s_2\text{递增}}$ 的计算，并且再次满足 $\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{inc}}(\varepsilon_j^{-1}) \le n+1$ 以及 $\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_j(\varepsilon_j^{-1}) \le 2n$。

因此，$\mathrm{TMSP}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{inc}} \preceq (n, n)$。

□

虽然命题 9.7(3) 对上述论证很有帮助，但请注意，它对所研究的渐近上界对的可能取值有所限制。此外，计算某个计算的估计复杂度，需要计算构成该计算各个配置的每个词的长度。

如果 $\mathrm{IO}_{\mathrm{op}}$ 中 $\mathrm{op} \in \mathrm{Obj}$ 的每个元素都能通过一种“增长不会太大”的计算来实现，那么就可以克服这些限制和复杂之处。

De定义 9.9（线性有界对象）。设 $\mathrm{Obj} \in \mathrm{OBJ}^*$。对于任意一次计算 n

$$\varepsilon = \big((w'_0, s'_0), e'_1, (w'_1, s'_1), e'_2, \ldots, e'_m, (w'_m, s'_m)\big)$$

操作 op $\in$ Obj 的过程，定义 ε 的约化空间为 $\widehat{\ }\mathrm{sp}_{\mathrm{op}}(\varepsilon) = \max_{j\in 0,m}|w'_j|$，并将 ε 的估计约化空间定义为 $M_\varepsilon = \max(|w'_0|, |w'_m|)$。

那么，对于 $K \in \mathbb{N}$，若对所有 op $\in$ Obj 和 $(w_1, s_1, w_2, s_2) \in \mathrm{IO}_{\mathrm{op}}$，都存在一个计算 ε，通过执行 op 实现 $(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s_1,\ s_2}{}_{\mathrm{op}}$ 使得 $\widehat{\ }\mathrm{sp}_{\mathrm{op}}(\varepsilon) \leq KM_\varepsilon$，则称 Obj 为线性 K-有界。在这种情况下，ε称为线性 K-有界计算。

定义 9.10（线性近似复杂度）。设 Obj $\in$ OBJ* 是线性 K-有界对象，且 $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_{\mathrm{inst}})^{\mathrm{inst}\in\mathsf{INST}_{\mathrm{Obj}}}$ 是 Obj 的一个估计集，其中对每个实例 inst $\in$ INST$^{\mathrm{Obj}}$，都有 $\mathcal{F}_{\mathrm{inst}} = (f_{\mathrm{inst}}, g_{\mathrm{inst}})$。

设 $\varepsilon = \big((w_0, s_0)\ e'_1, (w_1, s_1)\ e'_2, \ldots, e'_m, (w_m, s_m)\big)$ 是某个 op $\in$ Obj 的一个计算，且满足$m \geq 1$。对所有 $i \in \overline{m}$，令 $e'_i = (\mathrm{sf}_i, \mathrm{sf}'_i, e_i)$ 满足 $e_i = (s'_{i-1}, s'_i, \mathrm{act}_i) \in E_{\mathrm{op}}$。于是，定义 $\varepsilon(i)$ 相对于 $(\mathcal{F}, K)$ 的线性近似时间和线性近似空间，分别记为 $\widetilde{\ }\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}{}_{\mathrm{op}}(\varepsilon(i)\ K)$ 和 $\widetilde{\ }\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon(i)\ K)$，如下：

- 若 $\mathrm{act}_i = \mathrm{ACT}_0$，则 $\widetilde{\ }\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}{}_{\text{操作}}(\varepsilon(i)\ K) = 1$ 和 $\widetilde{\ }\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}{}_{\text{操作}}(\varepsilon(i)\ K) = KM_\varepsilon$。
- 若 $\mathrm{act}_i \in \mathrm{ACT}_{\text{操作}}$，则对于 $\mathrm{act}_i = (\mathrm{inst}_i, \mathrm{op}_i, \mu_{\mathrm{extact}_i})$，

$$\widetilde{\mathrm{tm}}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon(i), K) = f_{\mathrm{inst}_i}(KM_\varepsilon)$$
$$\widetilde{\mathrm{sp}}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon(i), K) = g_{\mathrm{inst}_i}(KM_\varepsilon) + KM_\varepsilon$$

那么，ε 相对于 $\mathcal{F}$ 的线性近似时间和线性近似空间分别为：

- $\widetilde{\mathrm{tm}}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon, K) = \sum_{i\in\overline{m}} \widetilde{\mathrm{tm}}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon(i), K)$
- $\widetilde{\mathrm{sp}}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon, K) = \max_{i\in\overline{m}}\big(\widetilde{\mathrm{sp}}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon(i), K)\big)$

最后，若 $\varepsilon = (w_0, s_0)$ 是 op 的空计算，则与估计复杂度的情形一样，定义 $\widetilde{\ }\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}{}_{\text{操作}}(\varepsilon, K) = 0 = \mathrm{tm}_{\mathrm{op}}(\varepsilon)$，以及 $\widetilde{\ }\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon, K) = |w_0| = \mathrm{sp}_{\mathrm{op}}(\varepsilon)$。

如果操作 op 相对于 $\mathcal{F}$ 和 K的线性近似时间—空间复杂度至多为 $(f, g)$$\sim_{\mathcal{F}}$，则称其具有此复杂度，记作 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{op}}(K) \leq (f, g)$。这意味着 f 和 g 是一对增长函数，并且对于所有满足 $|w_1|, |w_2| \leq n$的 $(w_1, s_1, w_2, s_2) \in \mathrm{IO}_{\mathrm{op}}$，都存在一个关于 K线性有界的 op 计算 ε，实现 $(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s_1,s_2}\mathrm{op}$，且满足界 $\widetilde{\ }\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}\mathrm{op}(\varepsilon, K) \leq f(n)$ 和$\widetilde{\ }\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon, K) \leq g(n)$。此外，若存在 $\sim_{\mathcal{F}}\mathrm{TMSP}\mathrm{op}(K)$ 的上界 (f, g)，且 $(f, g) \sim (f', g')$，则称 (f', g') 是 $\sim_{\mathcal{F}}\mathrm{TMSP}\mathrm{op}(K)$ 的渐近上界，记作$\sim_{\mathcal{F}}\mathrm{TMSP}\mathrm{op}(K) \preceq (f', g')$。

最后，与先前情形中的定义类似，如果对于所有 op $\in$ Obj，$\mathrm{TMSP}_{\mathrm{op}}(K) \leq (f, g)$，则称 (f, g) 是 $\sim_{\mathcal{F}}$ $\sim_{\mathcal{F}}$ $\sim_{\mathcal{F}}\mathrm{TMSP}^{\mathrm{Obj}}(K)$ 的上界，记作 $\mathrm{TMSP}^{\mathrm{Obj}}(K) \leq (f, g)$。类似地，当且仅当对于所有 op $\in$ Obj，$\mathrm{TMSP}_{\mathrm{op}}(K) \preceq (f', g')$ 时，$\mathrm{TMSP}\sim_{\mathcal{F}}$ $\sim_{\mathcal{F}}(K) \preceq (f', g')$。

引理 9.11. 设 Obj 是某个 $K \in \mathbb{N}$ 下线性 K-有界的对象。此外，设 $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_{\mathrm{inst}})^{\mathrm{inst}\in\mathsf{INST}_{\mathrm{Obj}}}$ 是 Obj 的一个估计集，其中每个实例 $\in \mathrm{INST}^{\mathrm{Obj}}$ 都满足 $\mathcal{F}_{\mathrm{inst}} = (f_{\mathrm{inst}}, g_{\mathrm{inst}})$。假设对于所有实例 $\in \mathrm{INST}^{\mathrm{Obj}}$，$\mathrm{TMSP}_{\mathrm{inst}} := \mathrm{TMSP}_{\mathrm{Obj}_{\mathrm{inst}}} \preceq \mathcal{F}_{\mathrm{inst}}$。那么，若 $\mathrm{TMSP}^{\mathrm{Obj}}(K) \preceq (f, g)$，则 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{Obj}} \preceq (f, g)$。

$\sim_{\mathcal{F}}$证明。设 (f', g') 是 $\mathrm{TMSP}^{\mathrm{Obj}}(K)$ 的一个上界，且 $(f', g') \sim (f, g)$。那么，对于任意操作 $\in$ Obj 和 $(w_1, s_1, w_2, s_2) \in \mathrm{IO}_{\mathrm{op}}$，其中 $|w_1|, |w_2| \leq n$，令

$$\varepsilon = \big((w'_0, s'_0), e'_1, (w'_1, s'_1), e'_2, \ldots, e'_m, (w'_m, s'_m)\big)$$

是一次线性受限于 K 的操作计算，实现了 $(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s_1,\ s_2}{}_{\text{操作}}$ 并满足界$\widetilde{\ }\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}{}_{\text{操作}}(\varepsilon, K) \leq f'(n)$ 和 $\widetilde{\ }\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon, K) \leq g'(n)$。

对于每个 $i \in \overline{m}$，设 $e'_i = (\mathsf{sf}_i, \mathsf{sf}'_i, e_i)$，其中 $e_i = (t_i, t'_i, \text{动作}_i) \in E_{\mathrm{op}}$。于是：

- 若 $\mathsf{act}_i \in \mathsf{ACT}^0_{\text{操作}}$，则 $\mathsf{tm}^{\mathcal{F}}_{\text{操作}}(\varepsilon(i)) = 1 = \widetilde{\mathsf{tm}}^{\mathcal{F}}_{\text{操作}}(\varepsilon(i), K)$，且

$$\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon(i)) = \max(|w'_{i-1}|, |w'_i|) \le KM_\varepsilon = \widetilde{\mathrm{sp}}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon(i), K)$$

- 若 $\mathsf{act}_i \in \mathsf{ACT}_{\text{操作}}$，则对于 $\mathsf{act}_i = (\mathsf{inst}_i, \mathsf{op}_i, \mu_{\mathrm{extact}_i})$，

$$\begin{aligned}\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon(i)) &= f_{\mathrm{inst}_i}(\max(|w'_{i-1}(\mathcal{I}_{\mathrm{act}_i})|, |w'_i(\mathcal{I}_{\mathrm{act}_i})|)) \\ &\le f_{\mathrm{inst}_i}(\max(|w'_{i-1}|, |w'_i|)) \\ &\le f_{\mathrm{inst}_i}(KM_\varepsilon) = \widetilde{\mathrm{tm}}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon(i), K)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon(i)) &= g_{\mathrm{inst}_i}(\max(|w'_{i-1}(\mathcal{I}_{\mathrm{act}_i})|, |w'_i(\mathcal{I}_{\mathrm{act}_i})|)) + |w'_i(\mathcal{I}_{\mathrm{op}} - \mathcal{I}_{\mathrm{act}_i})| \\ &\le g_{\mathrm{inst}_i}(\max(|w'_{i-1}|, |w'_i|)) + |w'_i| \\ &\le g_{\mathrm{inst}_i}(KM_\varepsilon) + KM_\varepsilon = \widetilde{\mathrm{sp}}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon(i), K)\end{aligned}$$

因此，$\mathsf{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon) \le \widetilde{\mathsf{tm}}^{\mathcal{F}}_{\text{操作}}(\varepsilon, K) \le f'(n)$，且 $\mathsf{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon) \le \widetilde{\mathsf{sp}}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{op}}(\varepsilon, K) \le g'(n)$，因此可得 $\mathsf{TMSP}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{Obj}} \preceq (f', g')$。

因此，由命题 9.7(2)可得 $\mathsf{TMSP}_{\mathrm{Obj}} \preceq (f, g)$。

□

10. 接受器、弱接受器和检查器

虽然对象的复杂度函数与 S-机器的复杂度函数的定义显然相似，但二者之间存在根本差异。特别是，对象的复杂度由其操作的所有可能输入-输出计算给出，而S-机器的复杂度仅由其某一特定类别的计算给出；这类计算不仅受到起始配置和结束配置可能处于的状态限制，也受到构成这些配置的带字母限制。为了形成完整的类比，下面定义一类特定的真操作。

定义 10.1（接受器）。令 $A \subseteq \mathcal{A}^*$ 和 $L \subseteq F(A)$。那么，L 的接受器是一个真操作 $\mathsf{accept}_L \in \mathsf{OBJ}^*$，满足 $\mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{acc}} = \{a\}$, $\mathcal{A}_{\mathrm{acc}}(a) = A$，且 $\mathsf{IO}_{\mathrm{acc}}$ 由下式给出：

$$\begin{aligned}\mathsf{IO}^{s,s}_{\mathrm{acc}} &= \mathbb{I} \sqcup \{(w_1, w_2) \mid w_1, w_2 \in L\}; \\ \mathsf{IO}^{s,f}_{\mathrm{acc}} &= \{(w, 1) \mid w \in L\}; \\ \mathsf{IO}^{f,f}_{\mathrm{acc}} &= \mathbb{I}.\end{aligned}$$

对于 $w \in L$，实现 $(w, 1) \in \mathsf{IO}^{s\,f}_{\mathrm{acc}}$，的 accept_L 的计算 ε 称为 w的接受计算。与实现计算的术语类似，介于 $(w \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{acc}} \sqcup 1^{\mathrm{inv}}_{\mathrm{acc}}, \mathsf{acc}_s)$ 和 $(1 \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{acc}} \sqcup 1^{\mathrm{inv}}_{\mathrm{acc}}, \mathsf{acc}_f)$ 之间的 $\mathsf{EXP}(\mathsf{accept}_L)$ 的计算 $\widetilde{\varepsilon}_w$ 称为 w的 EXP-接受计算。注意，在此情况下，$\widetilde{\varepsilon}_w$ 实现了 $(w, 1) \in \mathsf{IO}^{s,\ f\ \mathsf{EXP}(\mathrm{acc})} = \mathsf{IO}^{s\,f}_{\mathrm{acc}}$。

命题 10.2. 对于任意接受器 $\mathsf{accept}_L(a) \in \mathsf{OBJ}^*$，存在一个识别型 S-机 $\mathcal{S}$，其输入带为 i^*，使得 $Y_{i^*} = \mathcal{A}_{\mathrm{acc}}(a)$、$L_{\mathcal{S}} = L$、$\mathsf{TM}_{\mathcal{S}} \sim \mathsf{TM}_{\mathrm{acc}}$ 和 $\mathsf{SP}_{\mathcal{S}} \sim_1 \mathsf{SP}_{\mathrm{acc}}$。此外，对于增长函数 f 和 g，当且仅当 $\mathsf{TMSP}_{\mathcal{S}} \preceq_1 (f, g)$ 时，$\mathsf{TMSP}_{\mathrm{acc}} \preceq_1 (f, g)$。

证明。由定理 8.10(g)可知 $\mathsf{IO}^{\mathsf{EXP}(\mathrm{acc})} = \mathsf{IO}_{\mathrm{acc}}$，因此 $\mathsf{EXP}(\mathsf{accept}_L)$ 也是 L 的一个接受器。因此，由于适当操作的复杂度函数是根据其展开定义的，不失一般性，可以假设 $\mathsf{accept}_L \in \mathsf{OBJ}_0$。于是，$\mathsf{accept}_L$ 中的接受计算与 EXP-接受计算等价。

现在，令 $\mathcal{G}_{\mathrm{acc}}$ 为对应于 accept_L 的 0 阶 S-图，并固定一个枚举η：$\mathcal{I}_{\mathrm{acc}} \to \overline{N}$。然后，令 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{G}_{\mathrm{acc}}, \eta)$ 为定理 3.4(b) 中构造的、作用于 $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = \mathcal{S}_{\mathcal{G}_{\mathrm{acc}},\eta}(\mathcal{H}_{\mathrm{acc}})$ 上的 S-机器。

设 $i^* = \eta(a)$、$q_1^s = \mathsf{acc}_s$ 和 $q_1^f = \mathsf{acc}_f$。于是，令 $q_j^s = q_j^f = q_j^*$ 对所有 $j \in \overline{2, N+1}$成立，将 $q^s, q^f \in S_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}$ 定义为状态 $q^s = (q_i^s)_{i\in\overline{N+1}}$ 和 $q^f = (q_i^f)_{i\in\overline{N+1}}$。

按照记号约定，机器 $\mathcal{S}$ 等同于识别 S-机器 $(\mathcal{S}, i^*, q^s, q^f)$。注意，根据构造，$Y_{i^*} = \mathcal{A}_{\mathrm{acc}}(a)$。

假设 $w \in L_{\mathcal{S}}$，并令 $\varepsilon = (w_0, \tau_1, w_1, \ldots, \tau_n, w_n)$ 为 $\mathcal{S}$ 在 $I(w)$ 与 W_{ac} 之间的任意一次计算。那么，根据定理 3.4(b) 的 (ii) 部分，存在一次接受 L 的计算

$$\psi_{\mathrm{acc},\eta}(\varepsilon) = \big(\mu_{\mathrm{acc},\eta}(w_0), \phi(\tau_1), \mu_{\mathrm{acc},\eta}(w_1), \ldots, \phi(\tau_n), \mu_{\mathrm{acc},\eta}(w_n)\big)$$

对所有 $j \in \overline{0,n}$，令 $w_j = q_1 w_1' q_2 \ldots w_N' q_{N+1}$，根据构造，$\mu_{\mathrm{acc},\eta}(w_j) = \big((w'_{\eta(i)})_{i\in\mathcal{I}_{\mathrm{acc}}}, q_1\big)$。特别地，$\mu_{\mathrm{acc},\eta}(w_0) = (w \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{acc}}, \mathsf{acc}_s)$，$\mu_{\mathrm{acc},\eta}(w_n) = (1, \mathsf{acc}_f)$，并且对每个 j，$|\mu_{\mathrm{acc},\eta}(w_j)| = |w_j| - (N+1)$。因此，$w \in L$ and$\psi_{\mathrm{acc},\eta}(\varepsilon)$ 是接受语言 L 的一个输入输出计算，实现了 $(w, 1) \in \mathrm{IO}^{s\,f}_{\mathrm{acc}}$，且满足：

- $\mathsf{tm}_{\text{接受}}(\psi_{\text{接受}\,\eta}(\varepsilon)) = \mathsf{tm}(\varepsilon)$
- $\mathsf{sp}_{\text{接受}}(\psi_{\text{接受}\,\eta}(\varepsilon)) = \mathsf{sp}(\varepsilon) - (N+1)$

反过来，设 $w \in L$ and $\varepsilon_w = \big((w_0, s_0)\ e_1, (w_1, s_1) \ldots, e_n, (w_n, s_n)\big)$ 是 accept_L 的一个输入输出计算，实现了 $(w,1) \in \mathrm{IO}^{s\,f}_{\mathrm{acc}}$。那么，根据定理 3.4(b) 的 (iii) 部分，存在一个计算

$$\psi_{\mathcal{S}}(\varepsilon_w) = \big((\mu^{-1}_{\mathrm{acc},\eta}(w_0, s_0)), \tau_1, \mu^{-1}_{\mathrm{acc},\eta}(w_1, s_1), \ldots, \tau_n, \mu^{-1}_{\mathrm{acc},\eta}(w_n, s_n)\big)$$

$\mathcal{S}$ 的计算，其中对所有 i，$\tau_i = \phi^{-1}(e_i)$。由于 $(w_0, s_0) = (w \sqcup 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{acc}}, \mathsf{acc}_s)$ 且 $(w_n, s_n) = (1, \mathsf{acc}_f)$，根据构造，$\mu^{-1}_{\mathrm{acc},\eta}(w_0, s_0) = I(w)$ 且 $\mu^{-1}_{\mathrm{acc},\eta}(w_n, s_n) = W_{ac}$。特别地，$\psi_{\mathcal{S}}(\varepsilon_w)$ 是 w 的一个接受计算，因此 $w \in L_{\mathcal{S}}$。此外，对所有 j，$|\mu^{-1}_{\mathrm{acc},\eta}(w_j, s_j)| = |w_j| + N + 1$。因此，$\mathsf{tm}(\psi_{\mathcal{S}}(\varepsilon_w)) = \mathsf{tm}_{\mathrm{acc}}(\varepsilon_w)$，且 $\mathsf{sp}(\psi_{\mathcal{S}}(\varepsilon_w)) = \mathsf{sp}_{\mathrm{acc}}(\varepsilon_w) + N + 1$。

因此，$L_{\mathcal{S}} = L$。

现在固定 $n \in \mathbb{N}$ 和 $w \in L_{\mathcal{S}}$，使得 $|w| \le n$。那么 $w \in L$，因此 $(w,1) \in \mathrm{IO}^{s\,f}_{\mathrm{acc}}$。

因此，存在 $\varepsilon_w^{\mathrm{tm}}, \varepsilon_w^{\mathrm{sp}}$ 个接受 L 的输入-输出计算，实现 $(w,1) \in \mathrm{IO}^{s\,f}_{\mathrm{acc}}$，满足 $\mathsf{tm}_{\mathrm{acc}}(\varepsilon_w^{\mathrm{tm}}) \le \mathrm{TM}_{\mathrm{acc}}(n)$ 且 $\mathsf{sp}_{\mathrm{acc}}(\varepsilon_w^{\mathrm{sp}}) \le \mathrm{SP}_{\mathrm{acc}}(n)$。但如上所述，$\psi_{\mathcal{S}}(\varepsilon_w^{\mathrm{tm}})$ 和$\psi_{\mathcal{S}}(\varepsilon_w^{\mathrm{sp}})$ 是 $\mathcal{S}$ 的计算，它们接受 w，并满足界 $\mathsf{tm}(\psi_{\mathcal{S}}(\varepsilon_w^{\mathrm{tm}})) \le \mathrm{TM}_{\mathrm{acc}}(n)$ 和 $\mathsf{sp}(\psi_{\mathcal{S}}(\varepsilon_w^{\mathrm{sp}})) \le \mathrm{SP}_{\mathrm{acc}}(n) + N + 1$。因此，$\mathrm{TM}_{\mathcal{S}}(n) \le \mathrm{TM}_{\mathrm{acc}}(n)$ 且 $\mathrm{SP}_{\mathcal{S}}(n) \le \mathrm{SP}_{\mathrm{acc}}(n) + N + 1$，即 $\mathrm{TM}_{\mathcal{S}} \le \mathrm{TM}_{\mathrm{acc}}$ 和 $\mathrm{SP}_{\mathcal{S}} \preceq \mathrm{SP}_{\mathrm{acc}}$。

此外，若 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{acc}} \preceq (f, g)$，那么对于满足 $(f, g) \sim (f', g')$ 和 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{acc}} \le (f', g')$ 的增长函数 f'和 g'，存在一个接受L的计算 ε'_w，实现 $(w, 1) \in \mathrm{IO}^{s\,f}_{\mathrm{acc}}$，使得 $\mathsf{tm}_{\mathrm{acc}}(\varepsilon'_w) \le f'(n)$ 且 $\mathsf{sp}_{\mathrm{acc}}(\varepsilon'_w) \le g'(n)$。但是，$\psi_{\mathcal{S}}(\varepsilon'_w)$ 是一个接受 w 的计算 $\mathcal{S}$，并满足 $\mathsf{tm}(\psi_{\mathcal{S}}(\varepsilon'_w)) \le f'(n)$ 且 $\mathsf{sp}(\psi_{\mathcal{S}}(\varepsilon'_w)) \le g'(n) + N + 1$。因此，对于 $g''(n) = g'(n) + N + 1$，$\mathrm{TMSP}_{\mathcal{S}} \le (f', g'')$。但是 $g'' \sim g'$，因此 $\mathrm{TMSP}_{\mathcal{S}} \preceq (f, g)$。

反之，设 $(w_1, s_1, w_2, s_2) \in \mathrm{IO}_{\mathrm{acc}}$，使得 $|w_1|, |w_2| \le n$。

假设 $s_1 \ne s_2$，并固定 $i \in \{1, 2\}$，使得 $s_i = \mathsf{acc}_s$。那么，$w_i \in L = L_{\mathcal{S}}$，因此存在计算 $\varepsilon^{\mathrm{tm}}$ 和 $\varepsilon^{\mathrm{sp}}$，它们接受 $\mathcal{S}$ 和 w_i，并满足界 $\mathsf{tm}(\varepsilon^{\mathrm{tm}}) \le \mathrm{TM}_{\mathcal{S}}(n)$ 和 $\mathsf{sp}(\varepsilon^{\mathrm{sp}}) \le \mathrm{SP}_{\mathcal{S}}(n)$。如上所述，进而存在计算 $\psi_{\mathrm{acc},\eta}(\varepsilon^{\mathrm{tm}})$ 和 $\psi_{\mathrm{acc},\eta}(\varepsilon^{\mathrm{sp}})$，连接 (w_i, acc_s) 与 $(1, \mathsf{acc}_f)$，且满足 $\mathsf{tm}_{\mathrm{acc}}(\psi_{\mathrm{acc},\eta}(\varepsilon^{\mathrm{tm}})) \le \mathrm{TM}_{\mathcal{S}}(n)$ 和 $\mathsf{sp}_{\mathrm{acc}}(\psi_{\mathrm{acc},\eta}(\varepsilon^{\mathrm{sp}})) \le \mathrm{SP}_{\mathcal{S}}(n) - (N+1)$。若 $i = 1$，则这些计算实现 $(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s\,f}_{\mathrm{acc}}$；若 $i = 2$，则它们的逆实现 $(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s\,f}_{\mathrm{acc}}$，并满足相同的界。

否则，假设 $s_1 = s_2$。若 $w_1 \ne w_2$，则 $w_1, w_2 \in L$ 和 $s_1 = s_2 = \mathsf{acc}_s$。对于 $i \in \{1, 2\}$，令 $\varepsilon_i^{\mathrm{tm}}$ 和 $\varepsilon_i^{\mathrm{sp}}$ 为 $\mathcal{S}$ 的计算，接受 w_i，且满足 $\mathsf{tm}(\varepsilon_i^{\mathrm{tm}}) \le \mathrm{TM}_{\mathcal{S}}(n)$ 和 $\mathsf{sp}(\varepsilon_i^{\mathrm{sp}}) \le \mathrm{SP}_{\mathcal{S}}(n)$。那么，串接得到计算 $\delta^{\mathrm{tm}} = \psi_{\mathrm{acc},\eta}(\varepsilon_1^{\mathrm{tm}})\, \psi_{\mathrm{acc},\eta}(\varepsilon_2^{\mathrm{tm}})^{-1}$ 和

$\delta^{\mathrm{sp}} = \psi_{\mathrm{acc},\eta}(\varepsilon_1^{\mathrm{sp}})\psi_{\mathrm{acc},\eta}(\varepsilon_2^{\mathrm{sp}})^{-1}$ 实现 $(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s_1,s_2\text{接受}}$，且满足 $\mathsf{tm}_{\mathrm{acc}}(\delta^{\mathrm{tm}}) \leq 2\mathrm{TM}_{\mathcal{S}}(n)$ 和 $\mathsf{sp}_{\mathrm{acc}}(\delta^{\mathrm{sp}}) \leq \mathrm{SP}_{\mathcal{S}}(n) - (N+1)$。

最后，如果 $(w_1, s_1) = (w_2, s_2)$，那么一个空计算 ε 实现 $(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s_1,s_2}{}_{\mathrm{acc}}$，并满足 $\mathsf{tm}(\varepsilon) = 0 \leq \mathrm{TM}_{\mathcal{S}}(n)$ 和 $\mathsf{sp}(\varepsilon) \leq n$。

因此，$\mathrm{TM}_{\mathrm{acc}} \preceq \mathrm{TM}_{\mathcal{S}}$ 且 $\mathrm{SP}_{\mathrm{acc}} \preceq_1 \mathrm{SP}_{\mathcal{S}}$。

同理，$\mathrm{TMSP}_{\mathcal{S}} \preceq (f, g)$ 蕴含 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{acc}} \preceq_1 (f, g)$。

□

请注意，命题 10.2 仅确立了接受语言的复杂度之间单向的对应关系：对于任意接受器，都存在一个相应的 S-机器，满足类似的复杂度界。反向的对应关系也是可能的，并且可以用与命题 10.2 大致相同的方法证明（但用定理 3.4 的 (a) 部分代替 (b) 部分）。不过，出于本手稿的目的，并不需要这样的反向结论，因此略去不述。

下面的例子说明了在命题 10.2 中使用关系 $\sim_1$，而不是直接使用更强关系 $\sim$ 的必要性：

例 10.3。设 $\mathsf{acc} = \text{接受}_L$ 是一个 0 阶接受器，其中 L 是字母表 A 上的某个无限语言，满足：

(1) $\{|w| \mid w \in L\} = P = \left\{2^{2^i} \mid i \in \mathbb{N}\right\}$；(2) 存在正常数 C、K，使得对于每个 $w \in L$，都存在一个计算 ε_w，实现 $(w, 1) \in \mathrm{IO}^{s\ f}_{\mathrm{acc}}$，并满足

$$C|w| \leq \mathrm{tm}_{\mathrm{acc}}(\varepsilon_w), \mathrm{sp}_{\mathrm{acc}}(\varepsilon_w) \leq K|w|$$

鉴于条件 (2)，人们很容易认为 $\mathrm{TM}_{\mathrm{acc}} \sim \mathrm{SP}_{\mathrm{acc}}$。然而，事实并非如此：

设 id_P 是由 $\mathsf{id}_P(n) = \max\{p \in P \mid p \leq n\}$ 给出的增长函数。注意，对所有 $n \in \mathbb{N}$，$\mathsf{id}_P(n) \leq n$。

假设存在正常数 L，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，$n \leq L\mathsf{id}_P(n)$。那么，对于任意 $m \in \mathbb{N}$，$2^{2^m} - 1 \leq L\mathsf{id}_P(2^{2^m} - 1) = L \cdot 2^{2^{m-1}}$。由于对于每个 $m \in \mathbb{N}$，$2^{2^m} \geq 2\ 2^{2^m} - 1 \geq 2^{2^m - 1}$。但这样一来，对所有 $m \in \mathbb{N}$，$L \geq 2^{2^{m-1}-1}$，这对于固定的 L 来说是不可能的。因此，$\mathsf{id}_P \not\leq n$。

接下来注意，对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $w \in L$，$|w| \leq n$ 意味着 $|w| \leq \mathsf{id}_P(n)$。因此，对于任意满足 $|w| \leq n$ 的 $w \in L$，条件（2）可以改写为：

$$C\ \mathrm{id}_P(n) \leq \mathrm{tm}_{\mathrm{acc}}(\varepsilon_w), \mathrm{sp}_{\mathrm{acc}}(\varepsilon_w) \leq K\ \mathrm{id}_P(n)$$

因此可知，对于任意本质的（w_1，s_1，w_2，s_2）$\in \mathrm{IO}_{\mathrm{acc}}$，满足 $|w_1|$、$|w_2| \leq n$，存在一个实现（w_1，w_2）$\in \mathrm{IO}^{s_1,\ s_2}{}_{\mathrm{acc}}$ 的计算，其时间和空间均由 $\mathsf{id}_P(n)$ 的线性函数从上下两方面界定。$\mathrm{IO}_{\mathrm{acc}}$ 的对称性进一步意味着，所有（w_1，$\mathsf{acc}f$，w_2，$\mathsf{acc}s$）$\in \mathrm{IO}_{\mathrm{acc}}$也有类似的界。

然而，对于“平凡”四元组，即形如（w_1，s_1，w_1，s_1）$\in \mathrm{IO}_{\mathrm{acc}}$的四元组，任何实现（$w_1$，$w_1$）$\in \mathrm{IO}^{s_1,\ s_1}{}_{\mathrm{acc}}$ 的计算 ε 都有 $\mathsf{sp}_{\mathrm{acc}}(\varepsilon) \geq |w_1|$。因此，$n \preceq \mathrm{SP}_{\mathrm{acc}}$（事实上，对于任何具有非空字母表的操作皆如此）。当然，这样的关系可由时间为 0 的空计算实现。所以，$\mathrm{TM}_{\mathrm{acc}} \sim \mathsf{id}_P$ 且 $\mathrm{SP}_{\mathrm{acc}} \sim n$。

与此同时，对于如命题 10.2 所述由 acc 构造的识别 S-机器 $\mathcal{S}$，确定时间和空间函数的计算仅仅是那些“从开始到结束”的计算。因此，在这种情况下，任何对平凡计算的考量都毫无意义，条件 (2) 由此保证 $\mathrm{TM}_{\mathcal{S}} \sim \mathrm{SP}_{\mathcal{S}} \sim \mathsf{id}_P$。

虽然这个例子展示了一些病态行为，但应当注意，这种讨论实际上并非本质的，因为等价关系 $\sim_1$ 足以满足所研究的大多数目的。

不过应当注意，可以通过从 IO 关系的定义中移除“平凡”四元组来消除这一考量。这种修改不会影响定理 8.10 的关键结果，但会带来一些复杂性，其潜在代价可能超过任何收益。

在下文中，稍微修改接受器的定义会更方便，这样可以得到功能方式和复杂度本质上相同的真操作。这些操作分为检查器和弱接受器。

定义 10.4。设 A 是一个字母表，并且 $L \subseteq F(A)$。

若 $\mathcal{A}_{\mathrm{ch}}(a) = A$，且其 IO 关系 $\mathsf{IO}_{\mathrm{ch}}$ 如下所示，则称真操作 $\mathsf{check}_L(a)$ 为 L 的检查器：

$$\mathsf{IO}_{\mathrm{ch}}^{s,s} = \mathsf{IO}_{\mathrm{check}}^{f,f} = \mathbb{I};$$
$$\mathsf{IO}_{\mathrm{ch}}^{s,f} = \{(w,w) \mid w \in L\}.$$

若 $\mathcal{A}_{\mathrm{ch}}(a) = A$，且其 IO 关系 $\mathsf{IO}_{\mathrm{wacc}}$ 满足以下条件，则称真操作 $\mathsf{waccept}_L(a)$ 为 L 的弱接受器：

$$\mathsf{IO}_{\mathrm{wacc}}^{s,f} \cap \{(w,1) \mid w \in F(A)\} = \{(w,1) \mid w \in L\}$$

因此，接受器是弱接受器。

鉴于 L 非空，注意到操作 wacc 是 L的弱接受器，当且仅当 $\mathsf{IO}_{\mathrm{wacc}}^{s\,f} \supseteq \{, (w, 1) \mid w \in L\}$ 且 $\mathsf{IO}_{\mathrm{wacc}}^{s\,s} \subseteq L^2 \cup , (F(A) - L)^2, ,$ 即 $(w_1, w_2) \in \mathsf{IO}_{\mathrm{wacc}}^{s\,s}$，意味着 $w_1, w_2 \in L$或 $w_1, w_2 \notin L$。

注意，“检查器”一词与前几节中的用法一致。例如，根据引理 7.21，真操作 $\mathsf{check}_{>0}$ 是字母表 $\{\delta\}$上的语言 $L_{>0} = \{\delta^i \mid i > 0\}$ 的检查器。

尽管操作的时间-空间复杂度取决于定义其输入-输出四元组的所有四元组，但在研究弱接受器时，许多这样的四元组在某种意义上并无关联（见命题 10.7）。因此，为了简化后续的许多论证，我们考虑弱接受器复杂度的一个放宽版本。

定义 10.5（弱时间-空间复杂度）。设 wacc $=\mathsf{waccept}_L(a)$ 是语言 L 的弱接受器，且 f, g 是增长函数。

假设对于所有 $w \in L$，都存在 EXP(wacc) 的一个计算 ε，该计算 EXP-实现 $(w, 1) \in \mathsf{IO}_{\mathrm{wacc}}^{s\,f}$,, 并满足 $\mathsf{tm}_{\mathrm{wacc}}(\varepsilon) \leq f(|w|)$ 以及 $\mathsf{sp}_{\mathrm{wacc}}(\varepsilon) \leq g(|w|)$。那么，$(f, g)$ 称为 wacc 的弱时间-空间复杂度的一个上界，记作 $\mathsf{WTMSP}_{\mathrm{wacc}} \leq (f, g)$。自然地，若 f' 和 g' 是满足 $(f', g') \sim (f, g)$ 的增长函数，则 (f', g') 称为 wacc 的弱时间-空间复杂度的一个渐近上界，记作 $\mathsf{WTMSP}_{\mathrm{wacc}} \preceq (f', g')$。

此外，设 $\mathcal{F}$ 是 wacc 的估计集，并假设存在 $K \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $w \in L$，都存在 wacc 的一个计算 ε，实现 $(w, 1) \in \mathsf{IO}_{\mathrm{wacc}}^{s\,f}$，且满足界 $\mathsf{tm}_{\mathrm{wacc}}^{\mathcal{F}}(\varepsilon) \leq K f(K|w|) + K$ 和 $\mathsf{sp}_{\mathrm{wacc}}^{\mathcal{F}}(\varepsilon) \leq K g(K|w|) + K$。那么，$(f, g)$ 称为 wacc 的估计弱时间空间复杂度的一个上界，记作 $\mathsf{WTMSP}_{\mathrm{wacc}}^{\mathcal{F}} \leq (f, g)$。类似地，在此情形下，如果 $(f, g) \sim (f', g')$，那么 (f', g') 是 wacc 的弱时间空间复杂度的渐近上界，记作 $\mathsf{WTMSP}_{\mathrm{wacc}}^{\mathcal{F}} \preceq (f', g')$。

下面这个命题 9.7(3) 的类似结果，可以用大致相同的方法证明：对相关计算使用命题 9.7(1)：

引理 10.6。设 $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_{\mathrm{inst}})_{\mathrm{inst} \in \mathsf{INST}_{\mathrm{wacc}}}$ 是语言 L 的弱接受器 wacc 的一个估计集。对于所有实例 $\in \mathsf{INST}_{\mathrm{wacc}}$, 令实例 $= (\mathsf{Obj}_{\mathrm{inst}}, \mu_{\mathrm{inst}}^{\mathrm{val}})$ 和 $\mathcal{F}_{\mathrm{inst}} = (f_{\mathrm{inst}}, g_{\mathrm{inst}})$。假设对于所有实例 $\in \mathsf{INST}_{\mathrm{wacc}}$，$\mathsf{TMSP}_{\mathrm{inst}} \preceq \mathcal{F}_{\mathrm{inst}}$ 且 $f_{\mathrm{inst}} \neq 0$。此外，假设存在增长函数 ϕ_{inst} 和 ψ_{inst}，使得对于所有 $c, n \in \mathbb{N}$，$\psi_{\mathrm{inst}} \neq 0$, $f_{\mathrm{inst}}(cn) \leq \phi_{\mathrm{inst}}(c) f_{\mathrm{inst}}(n)$，且 $g_{\mathrm{inst}}(cn) \leq \psi_{\mathrm{inst}}(c) g_{\mathrm{inst}}(n)$。那么，$\mathsf{WTMSP}_{\mathrm{wacc}}^{\mathcal{F}} \preceq (f, g)$ 蕴含 $\mathsf{WTMSP}_{\mathrm{wacc}} \preceq (f, g)$。

命题 10.7。对于增长函数 $f(n)$ $g(n) \succeq n$ 以及字母表 A 上的语言 L，以下各项等价：

(1) 存在一个接受器 acc $=$ 接受$_L$，用于 L，其 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{acc}} \preceq (f,g)$；(2) 存在一个弱接受器 wacc $=$ waccept$_L$，用于 L，其弱图灵机空间复杂度$_{\mathrm{wacc}} \preceq (f,g)$；(3) 存在一个检查器 ch $=$ 检查$_L$，用于 L，其 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{ch}} \preceq (f,g)$。

证明。由于接受器也是弱接受器，(1) 的成立意味着存在一个弱接受器，使得 (f,g) 是其时间-空间复杂度的渐近上界。接着，令 (f',g') 为其时间-空间复杂度的一个上界，且满足 $(f',g') \sim (f,g)$，根据定义可直接得出 (f',g') 是该弱接受器的弱时间-空间复杂度的上界。因此，(1) 蕴含 (2)。

已知存在满足弱图灵机空间复杂度$_{\mathrm{wacc}} \preceq (f,g)$的弱接受器 waccept$_L$，图 9 展示了如何由 waccept$_L$构造检查器 check$_L$，以及如何进而由 check$_L$构造接受器 accept$_L$。因此，只需证明这些 IO 关系，并说明 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{ch}}$、$\mathrm{TMSP}_{\mathrm{acc}} \preceq (f,g)$。

首先，对于任意操作 op $\in$ {，check$_L$、accept$_L$}均满足 $\mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}} = \{b\}$、$\mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{op}} = \{a\}$ 和 $\mathcal{A}_{\mathrm{op}}(a) = \mathcal{A}_{\mathrm{op}}(b) = A$。因此，由于尾部位于 $\mathrm{SF}_{\mathrm{ch}}$ 或 $\mathrm{SF}_{\mathrm{acc}}$ 的边只有包含守卫片段 $[b=1]$的边，这两个操作都满足条件 (O)。

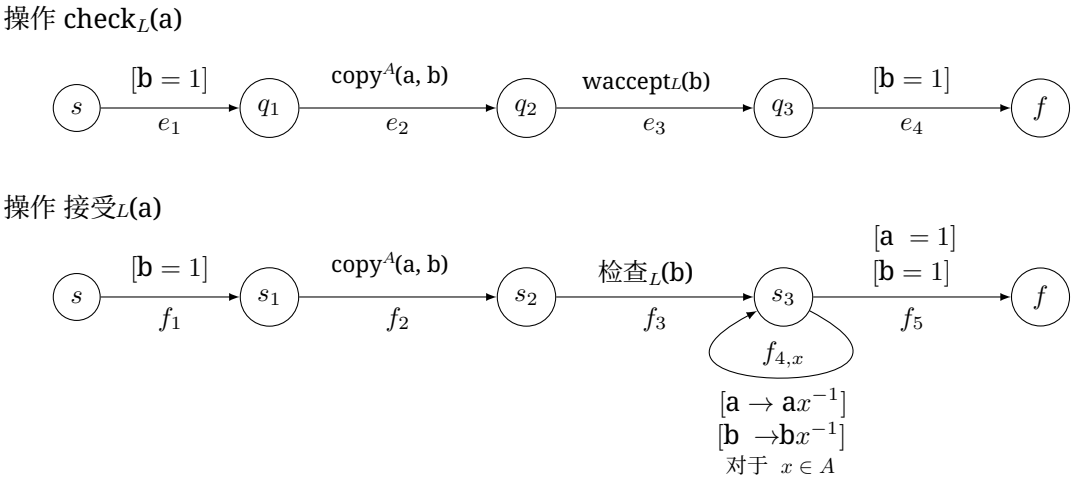


FIGURE 9. 从弱接受器构造检查器，以及从检查器构造接受器。

对于 $w \in L$，按如下方式定义子集 $C_w \subseteq \mathrm{GL}_{\mathrm{ch}} \times S_{\mathrm{ch}}$：

$$\begin{aligned} C^s_w = C^{q_1}_w = C^f_w &= \{(w,1)\} \\ C^{q_2}_w &= \{(w,v) \mid v \in L\} \\ C^{q_3}_w &= \{(w,u) \mid (u,1) \in \mathsf{IO}^{f,f}_{\mathrm{wacc}}\} \end{aligned}$$

不难检查，对于每个 $e \in E_{\mathrm{ch}}$，C_w 在 IO_e 下封闭。例如，假设 $(w_1,s_1,w_2,s_2) \in \mathsf{IO}_{e_3}$，且 $(w_1,s_1) \in C_w$。若 $s_1 = s_2 = q_2$，则存在某个 $v \in L$，使得 $w_1 = (w,v)$。于是，存在某个 $v' \in F(A)$，使得 $v(w,v')$，且 $(v,v') \in \mathsf{IO}^{s\,s}_{\mathrm{wacc}}$；但根据弱接受器的定义，此时 $v' \in L$。对于 s_1、s_2 的其他所有取值，论证类似。

此外，对于 $w \notin L$，定义子集 $C_{1,w}, C_{2,w} \subseteq \mathrm{GL}_{\mathrm{ch}} \times S_{\mathrm{ch}}$ 如下：

$$
\begin{aligned}
C^{s}_{1,w} = C^{q_1}_{1,w} = C^{f}_{2,w} &= \{(w,1)\} \\
C^{q_2}_{1,w} &= \{(w,v) \mid v \notin L\} \\
C^{q_3}_{1,w} &= \{(w,u) \mid (u,1) \notin \mathsf{IO}^{f,f}_{\mathrm{wacc}}\} \\
C^{f}_{1,w} = C^{s}_{2,w} = C^{q_1}_{2,w} &= \emptyset \\
C^{q_2}_{2,w} &= \{(w,v) \mid v \in L\} \\
C^{q_3}_{2,w} &= \{(w,u) \mid (u,1) \in \mathsf{IO}^{f,f}_{\mathrm{wacc}}\}
\end{aligned}
$$

同样，不难检查，对于所有 $e \in E_{\mathrm{ch}}$，$C_{1,w}$ 和 $C_{2,w}$ 在 IO_e 下均封闭。因此，由命题 7.16 可知 $\mathsf{IO}^{s,s\,\mathrm{ch}}$、$\mathsf{IO}^{f,f\,\mathrm{ch}} \subseteq \mathbb{I}$ 和 $\mathsf{IO}^{s,f\,\mathrm{ch}} \subseteq \{(w,w) \mid w \in L\}$，故 check_L 确实是 L 的检查器。

当然，对于任意具有 $|w| = n$ 的 $w \in F(A)$，$(w,w) \in \mathsf{IO}^{s,\,s\,\mathrm{ch}}$ 以及 $(w,w) \in \mathsf{IO}^{f,\,f\,\mathrm{ch}}$ 对所有 $w \in F(A)$ 均成立，其中任一者都可以通过满足 $\mathsf{tm}_{\mathrm{ch}}(\varepsilon) = 0 \le f(n)$ 和 $\mathsf{sp}_{\mathrm{ch}}(\varepsilon) = |w| \le g(n)$ 的空计算 ε 来实现。

现在，根据引理 5.6 和 9.5，以及 $\mathsf{WTMSP}_{\mathrm{wacc}} \preceq (f,g)$ 这一假设，存在 $K \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $w \in L$，存在 $\mathsf{EXP}(\text{检查}_L)$ 的计算 γ_w 和 δ_w，满足：

- γ_w 是配置 $((w,1) \sqcup 1_{\mathrm{invch}}\ q_1)$ 与 $((w,w) \sqcup 1_{\mathrm{invch}}\ q_2)$ 之间的计算，并满足 $\mathsf{tm}_{\mathrm{ch}}(\gamma_w) \le K|w| + K$ 以及 $\mathsf{sp}_{\mathrm{ch}}(\gamma_w) \le K|w| + K$
- δ_w 是配置 $((w,w) \sqcup 1_{\mathrm{invch}}\ q_2)$ 与 $((w,1) \sqcup 1_{\mathrm{invch}}\ q_3)$ 之间的一次计算，并满足 $\mathsf{tm}_{\mathrm{ch}}(\delta_w) \le Kf(K|w|) + K$ 以及 $\mathsf{sp}_{\mathrm{ch}}(\delta_w) \le Kg(K|w|) + K + |w|$。

那么，若 ρ 是支撑 γ_w 的路径，且 ρ' 是支撑 δ_w 的路径，则路径 e_1, ρ, ρ', e_4 支撑一次计算 ε_w，它属于 $\mathsf{EXP}(\text{检查}_L)$，实现 $(w,w) \in \mathsf{IO}^{s,f\,\mathrm{ch}}$ 并满足：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tm}_{\mathrm{ch}}(\varepsilon_w) &= 1 + \mathrm{tm}_{\mathrm{ch}}(\gamma_w) + \mathrm{tm}_{\mathrm{ch}}(\delta_w) + 1 \le Kf(K|w|) + K|w| + 2K + 2 \\
\mathrm{sp}_{\mathrm{ch}}(\varepsilon_w) &= \max(|w|, \mathrm{sp}_{\mathrm{ch}}(\gamma_w), \mathrm{sp}_{\mathrm{ch}}(\delta_w)) \le \max(K|w| + K, Kg(K|w|) + K + |w|)
\end{aligned}
$$

因此，由于 $f(n)\ g(n) \succeq n$，$\mathsf{TMSP}_{\mathrm{ch}} \preceq (f,g)$。

现在，对 $w \in L$，定义子集 $D_w \subseteq \mathsf{GL}_{\mathrm{acc}} \times S_{\mathrm{acc}}$ 如下：

$$
\begin{aligned}
D^{s}_{w} = D^{s_1}_{w} &= \{(w,1)\} \\
D^{s_2}_{w} &= \{(w,w)\} \\
D^{s_3}_{w} &= \{(v,v) \mid v \in L\} \\
D^{f}_{w} &= \{(1,1)\}
\end{aligned}
$$

此外，对 $w \notin L$，定义子集 $D_{1,w}, D_{2,w} \subseteq \mathsf{GL}_{\mathrm{acc}} \times S_{\mathrm{acc}}$ 如下：

$$
\begin{aligned}
D^{s}_{1,w} = D^{f}_{2,w} = D^{s_1}_{1,w} &= \{(w,1)\} \\
D^{s_2}_{1,w} &= \{(w,w)\} \\
D^{s_3}_{1,w} = D^{f}_{1,w} = D^{s_j}_{2,w} = D^{s}_{2,w} &= \emptyset
\end{aligned}
$$

与前一种情况一样，很容易检查这些子集在 IO_e 下对所有 $e \in E_{\mathrm{acc}}$ 都封闭，因此根据命题 7.16，accept_L 确实是 L 的一个接受器。

令 $\mathcal{F}$ 为由 $\mathcal{F}_{\mathrm{copy}} = (n,n)$ 和 $\mathcal{F}_{\mathrm{ch}} = (f,g)$ 给出的 accept_L 的估计集。根据引理 9.5，对于两个实例 $\in \mathsf{INST}_{\mathrm{acc}}$，$\mathsf{TMSP}_{\mathrm{inst}} \preceq \mathcal{F}_{\mathrm{inst}}$。但是请注意，命题 9.7(3)不能应用于这种情况，因为事先并不知道是否存在合适的增长函数 ϕ_{ch} 和 ψ_{ch}。

令 $w \in L$ 并设 $w \equiv x_1^{\delta_1} \dots x_k^{\delta_k}$，其中 $x_i \in A$ 且 $\delta_i \in \{\pm 1\}$，对 $k \in \mathbb{N}$ 成立。然后，令 $\rho'_w = e'_1, \dots, e'_k$ 为通过对所有 i 设定 $e'_i = (\hat{}s, \hat{}f, f_4^{\delta_i}, x_i)$ 而得到的一般路径。由此可得

ρ'_w 支持一个从 ((w, w) s_3) 到 ((1,1) s_3) 的接受$_L$ 计算 γ_w，满足 $\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{acc}}(\gamma_w) = k = |w|$ 且 $\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{acc}}(\gamma_w) = 2k = 2|w|$。

因此，令 $f'_i = (\hat{s}, \hat{f}, f_i)$ 对所有 i 成立，因为对所有 $w \in L$ 都存在一个计算

$$\delta_w = \big(((w,1), \mathrm{acc}_s), f'_1, ((w,1), s_1), f'_2, ((w,w), s_2), f'_3, ((w,w), s_3)\big)$$

并且存在一个计算 $\delta' = \big(((1,1)\ s_3)\ f'_5, ((1,1), \mathrm{acc}_f)\big)$，它接受 $_L$，因此存在一个计算 ε_w，实现 $(w, 1) \in \mathrm{IO}^{s\,f}_{\mathrm{acc}}$，该计算由拼接 δ_w、γ_w 和 δ' 形成。根据 γ_w 的构造可知，ε_w 是一个线性 2-有界计算，因此 accept$_L$ 是一个线性 2-有界真操作。

但对所有 $w \in L$,

$$\widetilde{\mathrm{tm}}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{acc}}(\varepsilon_w, 2) = 1 + 2|w| + f(2|w|) + |w| + 1 \le 4f(2|w|) + 1$$
$$\widetilde{\mathrm{sp}}_{\mathrm{acc}}(\varepsilon_w, 2) = \max(4|w|, g(2|w|) + 2|w|)$$

$\mathcal{F}$ 因此，由于 $f, g \succeq n$，可得 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{acc}}(2) \preceq (f, g)$。于是，根据引理 9.11，$\mathrm{TMSP}_{\mathrm{acc}} \preceq (f, g)$。

□

因此，命题 10.2 和命题 10.7 将定理 1.1 的证明归结为：对于给定的满足特定复杂度（或弱复杂度）界的语言 L，构造一个 accept$_L$、waccept$_L$ 或 check$_L$。

11. 改进的计数器

本节将构造一族计数器对象，事实证明，它们比例 7.19 中定义的基本计数器 $\mathrm{Counter}_1$ 更“经济”。事实上，这些计数器是本手稿的主要创新，也为 S^*-图的定义提供了大部分动机。

首先，在下面的图 10 中定义另外两个辅助真操作 less(a, b) 和 check$_{\geq 0}(a)$。按照最小兼容硬件的惯例，对于所有 $i \in \mathcal{I}_{\mathrm{less}}$，$\mathcal{I}_{\mathrm{ch}\geq 0} = \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{ch}\geq 0} = \{a\}$、$\mathcal{I}_{\mathrm{less}} = \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{less}} \sqcup \mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{less}}$、$\mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{less}} = \{a, b\}$、$\mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{less}} = \{a', b'\}$ 和 $\mathcal{A}_{\mathrm{less}}(i) = \{\delta\}$。

注意，尾为 less$_s$ 的唯一一条边包含守卫片段 $[a' = 1]$ 和 $[b' = 1]$，而尾为 less$_f$ 的唯一一条边包含守卫片段 $[b' = 1]$。此外，由于 $\mathcal{G}_{\mathrm{less}} - \{e_5^{\pm 1}\}$ 由两个连通分支组成，且包含 less$_f$ 的那个分支不包含任何提及a'的边，因此，任何以 less$_f$ 开头且包含提及 a' 的边的路径，其第一条这样的边必定是 e_5^{-1}。但是 e_5 包含守卫片段 $[a' = 1]$。因此，less 满足条件 (O)。

引理 11.1. 关系 $\mathrm{IO}_{\mathrm{less}}(a, b)$ 和 $\mathrm{IO}_{\mathrm{ch}\geq 0}(a)$ 给定如下:

$$\mathrm{IO}^{s,s}_{\mathrm{less}} = \mathrm{IO}^{f,f}_{\mathrm{less}} = \mathbb{I}$$
$$\mathrm{IO}^{s,s}_{\mathrm{ch}\geq 0} = \mathrm{IO}^{f,f}_{\mathrm{ch}\geq 0} = \mathbb{I}$$
$$\mathrm{IO}^{s,f}_{\mathrm{less}} = \big\{\big((\delta^i, \delta^j), (\delta^i, \delta^j)\big) \mid i < j\big\}$$
$$\mathrm{IO}^{s,f}_{\mathrm{ch}\geq 0} = \big\{(\delta^i, \delta^i) \mid i \geq 0\big\}$$

特别地，a 和 b 在 less(a, b) 中是不可变的，而 a 在检查$_{\geq 0}(a)$ 中是不可变的。此外，$\mathrm{TMSP}_{\mathrm{less}}$,$\mathrm{TMSP}_{\mathrm{ch}\geq 0} \preceq (n, n)$。

证明。关于检查$_{\geq 0}$ 的陈述证明很直接。

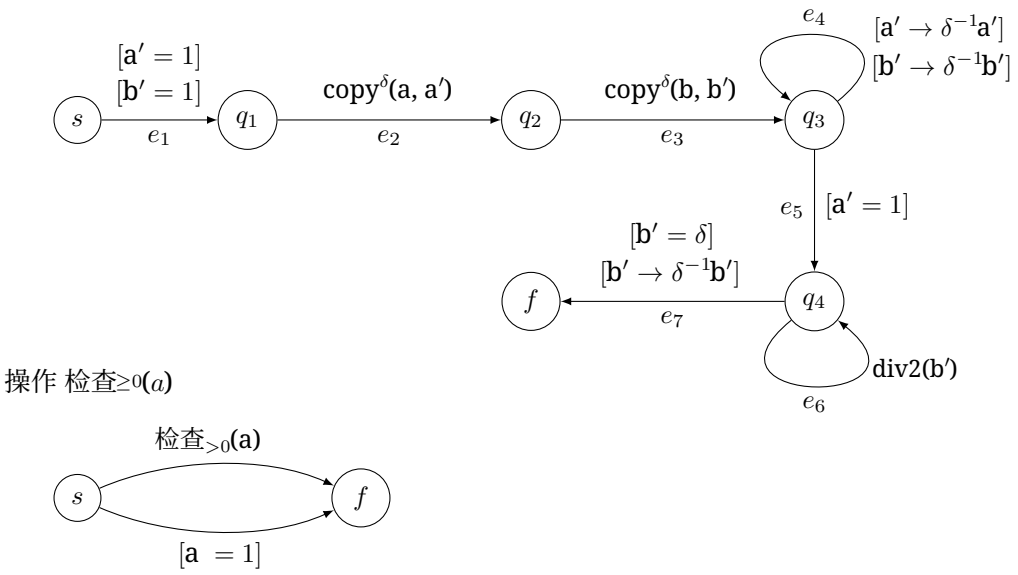


FIGURE 10. 操作 less(a, b)，以及检查$_{\geq 0}(a)$。

在 less 中，外部带 a 和 b 仅分别由 e_2 和 e_3提及。根据引理 5.6，这些边将带作为不可变变量提及。因此，根据引理 7.22，a 和 b 在 less 中都是不可变的。因此，$\mathrm{IO}^{s,\ s\ \mathrm{less}}\mathrm{IO}^{f,\ f\ \mathrm{less}} = \mathbb{I}$，并且 $\mathrm{IO}^{s,\ f\ \mathrm{less}} \subseteq \mathbb{I}$。

对于所有满足 $i \geq j$的 $i, j \in \mathbb{Z}$，定义子集 $C_{i,\ j} \subseteq \mathbf{GL}_{\mathrm{ch}\geq 0} \times S_{\mathrm{ch}\geq 0}$ 如下：

$$\begin{aligned} C^{s}_{i,j} = C^{q_1} &= \emptyset \\ C^{q_2}_{i,j} &= \{(\delta^i, \delta^j, \delta^k, 1) \mid k < j\} \\ C^{q_3}_{i,j} &= \{(\delta^i, \delta^j, \delta^k, \delta^l) \mid k < l\} \\ &= \{(\delta^i, \delta^j, \delta^k, \delta^{k+q}) \mid k \in \mathbb{Z}, q \geq 1\} \\ C^{q_4}_{i,j} &= \{(\delta^i, \delta^j, 1, \delta^q) \mid q \geq 1\} \\ C^{f}_{i,j} &= \{(\delta^i, \delta^j, 1, 1)\} \end{aligned}$$

显然可以检查，$C_{i,\ j}$ 对所有 $\ell \in \overline{7}$在 $\mathrm{IO}e_\ell$ 下封闭，因此对所有 $e \in E_{\mathrm{ch}\geq 0}$也在 $\mathrm{IO}e$ 下封闭。于是，$(\delta^i, \delta^j) \notin \mathrm{IO}^{s,\ f\,\mathrm{ch}\geq 0}$。

对于 $i, j \in \mathbb{Z}$对于 $i < j$，考虑一般路径 $\rho_{i,\ j} = e'_1, e'_2, e'_3, (e'_4)^i, e'_5, (e'_6)^k, e'_7$，其中 e:

- $e'_\ell = (\hat{s}, \hat{f}, e_\ell)$ 对于 $\ell \in \overline{7}$,
- 对于 $m \in \mathbb{N}$ 以及任意一般边 e'，$(e')^m$ 表示一般子路径 $\underbrace{e' \ \ldots \ e'}_{m\ \text{次}}$，，，
- 对于 $m \in \mathbb{N}$，$(e'_\ell)^{-m}$ 表示子路径 $(e''_\ell)^m$，其中 $e''_\ell = (\hat{s}, \hat{f}, e_\ell^{-1})$。
- $k \geq \log_2(j - i)$。

因此，对于 $w_{i,\ j} = (\delta^i, \delta^j)$，如引理 7.21 的证明所示，$\rho_{i,\ j}$支持一个输入输出计算$\varepsilon_{i,\ j}$实现 $(w_{i,\ j}, w_{i,\ j}) \in \mathrm{IO}^{s,\ f}$较少。

因此，$\mathrm{IO}^{s,f\text{小于}} = \{((\delta^i, \delta^j), (\delta^i, \delta^j)) \mid i < j\}$。

现在，设 $\mathcal{F}$ 是由 $\mathcal{F}_{\mathrm{copy}} = \mathcal{F}_{\mathrm{div2}} = (n, n)$ 给出的操作小于(a, b) 的估计集。根据引理 9.5，对于所有实例 $\in \mathrm{INST}_{\mathrm{less}}$，$\mathrm{TMSP}_{\mathrm{inst}} \preceq \mathcal{F}_{\mathrm{inst}}$。

那么，类似于引理 9.8(1) 的证明，根据 $\varepsilon_{i,\ j}$ 的构造可知，对于所有满足 $i < j$ 的 i、$j \in \mathbb{Z}$：

$$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}(\varepsilon_{i,j}) = 1 + |i| + |j| + |i| + 1 + 3(j - i) + 1 \leq 5(|i| + |j|) + 3$$
$$\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}(\varepsilon_{i,j}) = 2(|i| + |j|)$$

因此，由于 $|w_{i,\ j}| = |i| + |j|$，可得 $\mathrm{TMSP}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{less}} \preceq (n, n)$。

因此，由于 $\mathcal{F}$ 满足命题 9.7 的假设，$\mathrm{TMSP}_{\mathrm{less}} \preceq (n, n)$。

□

现在，以例 7.19 中构造的对象计数器$_1[a]$ 为基础，对所有 $d \in \mathbb{N} - \{0\}$，对象计数器 $_{d+1}[a_1, \ldots, a_{d+1}]$ 按图 11 迭代定义。

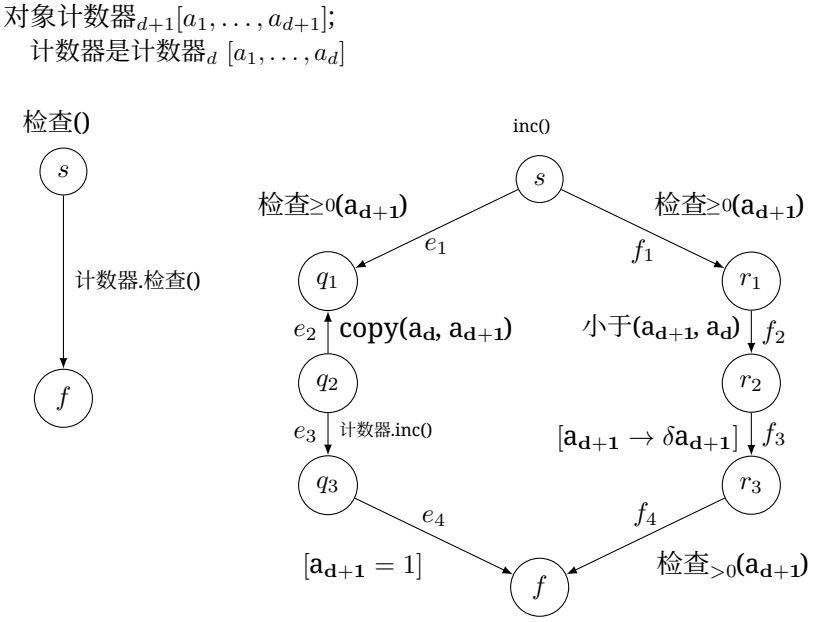


FIGURE 11. 对象计数器$_{d+1}[a_1, \ldots, a_{d+1}]$。

注意，对于操作 $\in \{\mathsf{ch}, \mathsf{inc}\}$，根据最小兼容硬件约定，$\mathcal{I}_{\mathrm{op}} = \mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Counter}_{d+1}}$和 $\mathcal{A}_{\mathrm{op}}(a_i) = \{\delta\}$ 对所有 $i \in \overline{d+1}$均成立。

此外，值得注意的是，Counter$_{d+1}$·check() 中动作 cntr.check() 的作用与 check$_{>0}$ 类似。事实上，可以用 check$_{>0}(a_1)$ 替换该动作，而不会影响任何期望的性质。

最后，值得注意的是，定义操作 inc() 的标记图满足定义 6.3 的条件 (6)。为此，注意对于 $i \leq d$，提及作为变量的 a_i 的边只有 e_2，而提及作为变量的 a_d 的边只有 f_2；然而，根据引理 5.6 和 11.1，这两条边都将 a_d 作为不可变变量提及。因此，$\mathcal{G}_{\mathrm{inc}}$ 确实是一个 S-图。

接下来的目标是证明 Counter$_{d+1}$ 确实是定义 7.18 所指的计数器。正如预期，证明将对 d 使用归纳法，其中引理 7.23 建立基例。不过，首先必须明确确定这些对象的值集合。

定义 11.2. 对于 $d \geq 1$，令 $U_d = \{(i_1, \ldots, i_d) \mid i_1 \geq i_2 \geq \cdots \geq i_d \geq 0\} \subseteq \mathbb{N}^d$。然后，对每个 d，归纳地定义函数 $\mathsf{succ}_d : U_d \to U_d$ 如下：

- 对于 $d = 1$ 和 $u = (i) \in U_1$，定义 $\mathsf{succ}_1(u) = (i+1)$。
- 对于 $d > 1$，令 $u = (i_1, \ldots, i_{d-1}, i_d) = (w, d)$，其中 $w = (i_1, \ldots, i_{d-1})$。然后，作为 $w \in U_{d-1}$，定义

$$\mathrm{succ}_d(u) = \begin{cases} (w, i_d + 1) & i_{d-1} > i_d \\ (\mathrm{succ}_{d-1}(w), 0) & i_{d-1} = i_d \end{cases}$$

然后，通过以下方式在 U_d 上定义关系 $\leq_d$：当且仅当存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathsf{succ}_d^k(u) = u'$。

引理 11.3。对于所有 $d \geq 1$，通过 $\epsilon_d(0, \ldots, 0) = 0$ 以及对所有 $u \in U_d$，$\epsilon_d(\mathsf{succ}_d(u)) = f(u) + 1$ 来定义 $\epsilon_d : U_d \to \mathbb{N}$。那么，$\epsilon_d$ 在 $(U_d, \leq_d)$ 与 $(\mathbb{N}, \leq)$ 之间定义了一个偏序集同构。

同构映射 ϵ_d 称为计数器 $\mathsf{Counter}_d$的解码函数。注意，解码函数 ϵ_1 对应于将 (i) 映射到 i 的“恒等映射”，对所有 $i \in \mathbb{N}$均如此。

现在，对于所有 $d \geq 1$和 $u = (i_1, \ldots, i_d) \in U_d$，定义 $\delta^u = (\delta^{i_1}, \ldots, \delta^{i_d}) \in F(\delta)^d$。然后，定义 $\mathsf{VAL}_d = \{\delta^u \mid u \in U_d\}$。$U_d$ 上的良序 $\leq_d$ 由此在 VAL_d上诱导出良序 $\leq_d$，使得由 $f_d(\delta^u) = \epsilon_d^{-1}(u)$ 给出的映射 f_d 定义了 $(\mathsf{VAL}_d, \leq_d)$ 与 $(\mathbb{N}, \leq)$ 之间的偏序集同构。因此，VAL_d 的元素可枚举为 $\mathsf{VAL}_d = \{v_i^d\}_{i \in \mathbb{N}}$，其中 $v_i^d = \delta^{\epsilon_d^{-1}(i)}$。滥用记号，将 succ_d 的定义扩展为令 $\mathsf{succ}_d(v_i^d) = v_{i+1}^d$。

引理 11.4. 对所有 $d \geq 0$, $\mathcal{C}_{d+1} = \mathsf{Counter}_{d+1}[a_1, \ldots, a_{d+1}]$ 都是关于值 $\mathsf{VAL}_{\mathcal{C}_{d+1}} = \mathsf{VAL}_{d+1}$ 的计数器。

证明。通过对 d 进行归纳法即可得证，其中引理 7.23 给出了 $d = 0$ 的基例证明。因此，假设 $d \geq 1$，且 $\mathcal{C}_d$ 是关于值 $\mathsf{VAL}_{\mathcal{C}_d} = \mathsf{VAL}_d$ 的计数器。

因此，由于 $\mathcal{C}_{d+1}$ 使用了 cntr 的一个实例，对于任一操作 $\mathsf{op} = \mathsf{inc}$，检查 $\mathsf{VAL}_{\mathcal{C}_{d+1}} \subseteq \mathsf{VAL}_d \times F(\delta) = \mathsf{GL}_{\mathsf{op}}$。

根据计数器中操作 check() 的定义，直接进行归纳论证即可立即得出 $\mathsf{IO}^{s,\ s\text{ 检查}} = \mathsf{IO}^{f,\ f\text{ 检查}} = \mathbb{I}$ 且

$$\mathsf{IO}^{s,f}_{\mathrm{check}} = \{(v, v) \mid v = (v_j^d, \delta^i) \in \mathsf{VAL}_{\mathcal{C}_{d+1}}, j > 0\}$$

现在，固定 $m \in \mathbb{N}$，并令 $\epsilon_{d+1}^{-1}(m) = (i_1, \ldots, i_d, i_{d+1})$，其中 $u_m = (i_1, \ldots, i_d)$。那么，存在$j \in \mathbb{N}$ 使得 $v_m^{d+1} = \delta^{\epsilon_{d+1}^{-1}(m)} = (v_j^d, \delta^{i_{d+1}})$，其中 $v_j^d = \delta^{u_m}$。注意，根据V_{d+1}的定义，$j = 0$ 当且仅当 $m = 0$。

如果 $i_d > i_{d+1}$，那么 $v_{m+1}^{d+1} = \mathsf{succ}_{d+1}(v_m^{d+1}) = (v_j^d, \delta^{i_{d+1}+1})$。在这种情况下，存在一个输入-输出计算

$$\varepsilon_m = \big((v_m^{d+1}, \mathrm{inc}_s), f_1', (v_m^{d+1}, r_1), f_2', (v_m^{d+1}, r_2), f_3', (v_{m+1}^{d+1}, r_3), f_4', (v_{m+1}^{d+1}, \mathrm{inc}_f)\big)$$

递增操作 inc 在 $(v_m^{d+1}, \mathsf{inc}_s)$ 和 $(v_{m+1}^{d+1}, \mathsf{inc}_f)$ 之间，其中对于所有 j，$f_j' = (\hat{}s, \hat{}f, f_j)$。

否则，如果 $i_d = i_{d+1}$，那么 $v_{m+1}^{d+1} = \mathsf{succ}_{d+1}(v_m^{d+1}) = (\mathsf{succ}_d(v_j^d), 1)$。但此时存在一个输入输出计算

$$\varepsilon_m = \big((v_m^{d+1}, \mathrm{inc}_s), e_1', (v_m^{d+1}, q_1), e_2'', ((v_j^d, 1), q_2), e_3', (v_{m+1}^{d+1}, q_3), e_4', (v_{m+1}^{d+1}, \mathrm{inc}_f)\big)$$

递增操作 inc 在 $(v_m^{d+1}, \mathsf{inc}_s)$ 和 $(v_{m+1}^{d+1}, \mathsf{inc}_f)$ 之间，其中对于所有 j，$e_j' = (\hat{}s, \hat{}f, e_j)$ 且 $e_j'' = (\hat{}f, \hat{}s, e_j)$。

因此，由定义可知，v_0^{d+1}是计数器$_{d+1}$的初始值，故 $\mathsf{VAL}_{d+1} \subseteq \mathsf{VAL}_{\mathcal{C}_{d+1}}$。反过来，定义子集 $C_{m,\mathrm{check}}, D_{m,\mathrm{check}} \subseteq$ 广义线性群$_{\mathrm{check}} \times S_{\mathrm{check}}$ 如下：

- If $m > 0$, then $C^s_{m,\mathrm{check}} = C^f_{m,\mathrm{check}} = \{v_m^{d+1}\}$, $D_{m,\mathrm{check}} = \emptyset$
- If $m = 0$, then $C^s_{m,\mathrm{check}} = D^f_{m,\mathrm{check}} = \{v_m^{d+1}\}$ and $D^s_{m,\mathrm{check}} = C^f_{m,\mathrm{check}} = \emptyset$.

类似地，定义子集 $C_{m,\mathrm{inc}} \subseteq$ 广义线性群$_{\mathrm{inc}} \times S_{\mathrm{inc}}$ 如下:

- 若 $i_{d+1} < i_d$，则

$$C^{s}_{m,\mathrm{inc}} = C^{q_1}_{m,\mathrm{inc}} = C^{r_1}_{m,\mathrm{inc}} = C^{r_2}_{m,\mathrm{inc}} = \{v_m^{d+1}\}$$
$$C^{r_3}_{m,\mathrm{inc}} = C^{f}_{m,\mathrm{inc}} = \{v_{m+1}^{d+1}\}$$
$$C^{q_2}_{m,\mathrm{inc}} = C^{q_3}_{m,\mathrm{inc}} = \emptyset$$

- 若 $i_{d+1} = i_d$，则

$$C^{s}_{m,\mathrm{inc}} = C^{q_1}_{m,\mathrm{inc}} = C^{r_1}_{m,\mathrm{inc}} = \{v_m^{d+1}\}$$
$$C^{q_2}_{m,\mathrm{inc}} = \{(v_j^{d}, 1)\}$$
$$C^{q_3}_{m,\mathrm{inc}} = C^{f}_{m,\mathrm{inc}} = \{v_{m+1}^{d+1}\}$$
$$C^{r_2}_{m,\mathrm{inc}} = C^{r_3}_{m,\mathrm{inc}} = \emptyset$$

最后，定义 $D_{0,\ \mathrm{inc}} = \{(v_0^{d+1}$, 递增$_f)$, $(v_0^{d+1}, q_3)\} \subseteq$广义线性群$_{\mathrm{inc}} \times S_{\mathrm{inc}}$。

对于每个操作 $\in$ {检查,递增}，显然可以检查出 $C_{m,\ \mathrm{op}}$ 和 $D_{m,\ \mathrm{op}}$ 对于每个 $e \in E_{\mathrm{op}}$ 都在 IO$_e$ 下封闭。此外，

$$\mathsf{VAL}_{d+1} \times \mathrm{SF}_{\mathrm{op}} = \bigcup \left(C^{\mathrm{SF}_{\mathrm{op}}}_{m,\mathrm{op}} \cup D^{\mathrm{SF}_{\mathrm{op}}}_{m,\mathrm{op}} \right)$$

因此，命题 7.17 意味着 VAL$^{\mathcal{C}_{d+1}}$ =VAL$_{d+1}$。

此外，命题 7.16 得出 IO$_{\mathrm{inc}} \subseteq \bigcup((C_{m,\ \mathrm{inc},\ \mathsf{IO}})^2 \cup (D_{m,\ \mathrm{inc},\ \mathsf{IO}})^2)$。特别地，这意味着 IO$^{s,\ s\ 递增}$ =IO$^{f,\ f\ 递增} = \mathbb{I}$ 并且

$$\mathsf{IO}^{s,f}_{\mathrm{inc}} \subseteq \{(v_m^{d+1}, v_{m+1}^{d+1}) \mid m \in \mathbb{N}\}$$

因此，由于计算 ε_m 给出了反向包含，Counter$_{d+1}$ 确实是相对于 VAL$_{d+1}$的一个计数器。

□

引理 11.5。对于所有 $d \in \mathbb{N}$，TMSP$_{\mathcal{C}_{d+1}} \preceq (n, n)$ 对于 $\mathcal{C}_{d+1} =$ Counter$_{d+1}$成立。

证明。证明 f 通过对 d进行归纳得出，其中基例 $d = 0$ 由引理 9.8(2) 给出。

令 $\mathcal{F}$ 为对所有实例 $\in$ INST$^{\mathcal{C}_{d+1}}$，由 $\mathcal{F}_{\mathrm{inst}} = (n, n)$ 给出的估计集。由引理 9.5、引理 9.8、引理 11.1 和归纳假设可知，每个实例都满足 TMSP$_{\mathrm{inst}} \preceq \mathcal{F}_{\mathrm{inst}}$。

注意，对于 $m \in \mathbb{N}$，实现 $(v_m^{d+1}, v_{m+1}^{d+1}) \in$ IO$^{s,\ f\ 递增}$ 的计算 ε_m 是线性 1-有界的。此外，若 $m \neq 0$，则线性 1-有界的计算

$$\zeta_m = \left((v_m^{d+1}, \mathrm{check}_s), e', (v_m^{d+1}, \mathrm{check}_f)\right)$$

其中，对于唯一的边 $e \in E_{\mathrm{check}}$，$e' = (\hat{}s, \hat{}f, e)$ 实现 $(v_m^{d+1}, v_m^{d+1}) \in$ IO$^{s,\ f\ 检查}$。因此，Counter$_{d+1}$ 是一个 1-有界对象。

现在，对于 $m \geq 1$，注意 $\widetilde{\mathsf{tm}}^{\mathcal{F}\ 检查}(\zeta_m, 1) = |v_m^{d+1}|$ 以及 $\widetilde{\mathsf{sp}}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{check}}(\zeta_m, 1) = 2|v_m^{d+1}|$.

接下来，令 $m \in \mathbb{N}$, $M_m = \max(|v_m^{d+1}|, |v_{m+1}^{d+1}|)$，且 $\epsilon_{d+1}^{-1}(m) = (i_1, \ldots, i_d, i_{d+1})$。那么，无论是 $i_d > i_{d+1}$ 还是 $i_d = i_{d+1}$，都可得

$$\widetilde{\mathrm{tm}}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{inc}}(\varepsilon_m, 1) = 3M_m + 1$$
$$\widetilde{\mathrm{sp}}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{inc}}(\varepsilon_m, 1) = 2M_m$$

因此，由于 IO$^{s,\ s\ 递增}$ = IO$^{f,\ f\ 递增} = \mathbb{I}$ 以及 IO$^{s,\ s\ 检查}$ =IO$^{f,\ f\ 检查} = \mathbb{I}$，所以任何此类关系都可以通过空计算实现，TMSP$^{\mathcal{C}_{d+1}}(1) \preceq (n, n)$。

因此，引理 9.11 意味着 $\mathsf{TMSP}_{\mathcal{C}_{d+1}} \preceq (n, n)$。

□

鉴于定义 $\mathsf{Counter}_d$ 的既定目的是构造在某种意义上比 $\mathsf{Counter}_1$，更“经济”的计数器，引理 11.5 似乎背离了这一目的。毕竟，这些对象的时间-空间复杂度具有相同的渐近上界，因此尚不清楚 $\mathsf{Counter}_d$ 如何能优于更简单的 $\mathsf{Counter}_1$。

不过，使用这些计数器来构造其他对象时，它们的优势便显现出来。为此，我们以更简洁的方式研究 $\mathsf{Counter}_d$ 的值。

对所有 $d \geq 1$，令 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{N}^d$ 上的 ℓ_1-范数。也就是说，对所有 $m \in \mathbb{N}$，$|\epsilon_d^{-1}(m)| = i_1 + \cdots + i_m$，其中 $\epsilon_d^{-1}(m) = (i_1, \ldots, i_d)$。注意，对所有 m、d，$|\epsilon_d^{-1}(m)| = |v_m^d|$。然后定义增长函数 size_d：

$$\mathrm{size}_d(n) = \max_{m \in \overline{0,n}} |v_m^d| = \max_{m \in \overline{n}} |v_m^d|$$

其中，最后一个等式是根据观察结果得出的：对于所有 d，$|v_0^d| = 0$。

引理 11.6. 对于所有 $d \geq 1$，$\mathsf{size}_d \sim n^{1/d}$。

证明. 对于每个 $k \in \mathbb{N}$，令 $k_d = (k, \ldots, k) \in \mathsf{VAL}_d$，并令 $c_k = \epsilon_d(k_d)$。例如，若 $d = 3$ 且 $k = 2$，则 $k_d = (2, 2, 2)$，并且 $c_k = 9$。

根据定义，$\mathsf{size}_d(c_k) = \max_{m \in \overline{c_k}} |v_m^d| = \max_{m \in \overline{c_k}} |\epsilon_d^{-1}(m)| \geq |k_d| = kd$。此外，对于所有 $m \leq c_k$，$\epsilon_d^{-1}(m) \leq_d \epsilon_d^{-1}(c_k) = k_d$，因此 $\epsilon_d^{-1}(m) \in \{0, 1, \ldots, k\}^d$。于是，$\mathsf{size}_d(c_k) = dk$。

对于所有 $k \geq 1$，$(j_1, \ldots, j_d) \in \{0, 1, , k\}^d - \{0_d\}$，定义 $\pi_{k,d}(j_1, \ldots, j_d)$ 为将坐标重新排列为非递增顺序后得到的序列。由此诱导出一个满射 $\pi_{k,d}$：$\{0, 1, \ldots, k\}^d - \{0_d\} \to \epsilon_d^{-1}(\overline{c_k})$，因此

$$c_k = |\epsilon_d^{-1}(\overline{c_k})| \leq |\{0, 1, \ldots, k\}^d - \{0_d\}| = (k+1)^d - 1 \leq (k+1)^d \tag{11.1}$$

此外，对于所有 $v = (i_1, \ldots, i_d) \in \epsilon_d^{-1}(\overline{c_k})$，注意到 $\pi_{k\,d}^{-1}(v)$ 由指标 $i_1, \ldots, i_d$ 的所有（互不相同的）排列组成。因此，$|\pi_{k\,d}^{-1}(v)| \leq d!$。于是，存在一个从 $\{0, 1, \ldots, k\}^d - \{0_d\}$ 到 $d!$ 个互不相交的 $\epsilon_d^{-1}(\overline{c_k})$ 副本的单射，它将 $\pi_{k\,d}^{-1}(v)$ 中的不同元素映射到 v 的不同副本中。由此，

$$k^d \leq (k+1)^d - 1 = |\{0, 1, \ldots, k\}^d - \{0_d\}| \leq d! \cdot c_k \tag{11.2}$$

注意，$c_0 = 0$ 意味着对于 $k = 0$，(11.1) 和 (11.2) 都显然成立。

现在，对于所有 $n \in \mathbb{N} - \{0\}$，都存在 $m \in \mathbb{N} - \{0\}$，使得 $m^d \leq n \leq (m+1)^d$。根据等式 (11.1)，$m^d \geq c_{m-1}$，因此 $c_{m-1} \leq n$。但此时 $d(m-1) = \text{大小}_d(c_{m-1}) \leq \text{大小}_d(n)$，因此

$$\mathrm{size}_d(n) \geq d((m+1) - 2) \geq dn^{1/d} - 2d \tag{11.3}$$

反过来，对于所有 $n \in \mathbb{N} - \{0\}$，都存在 $\ell \in \mathbb{N} - \{0\}$，使得 $\frac{\ell^d}{d}! \leq n \leq \underline{(\ell+1)d}\,!$。根据 (11.2)，$n \leq (\ell+1)d\,! \leq c_{\ell+1}$，从而 $\text{大小}_d(n) \leq \text{大小}_d(c_{\ell+1}) = d(\ell+1)$。但此时 $\ell^d \leq d! \cdot n$，因此 $\ell \leq \sqrt[d]{d!} \cdot n^{1/d}$，于是

$$\mathrm{size}_d(n) \leq \left(d\sqrt[d]{d!}\right) n^{1/d} + d \tag{11.4}$$

因此，由于 $\mathsf{size}_d(0) = 0$ 意味着 (11.3) 和 (11.4) 对 $n = 0$ 均成立，结论得证。□

推论 11.7. 对所有 $\varepsilon \in (0, 1)$，存在 $\mathcal{I}_\varepsilon \subseteq \mathcal{I}^*$ 和一个计数器 $\mathcal{C}_\varepsilon[\mathcal{I}_\varepsilon]$，使得 $\mathsf{TMSP}_{\mathcal{C}_\varepsilon} \preceq (n, n)$ 且 $\mathsf{size}_\varepsilon \preceq n^\varepsilon$。

证明。取 $d \in \mathbb{N}$ 使得 $d\varepsilon > 1$。然后，令 $\mathcal{I}_\varepsilon = \{a_1, \ldots, a_d\}$，设 $\mathcal{C}_\varepsilon = \mathsf{Counter}_{d+1}[\mathcal{I}_\varepsilon]$。根据引理 11.4、引理 11.5 和引理 11.6，$\mathcal{C}_\varepsilon$ 是一个满足该命题的计数器。

□

稍微滥用一下记号，Counter$_\varepsilon$ 的值记为 VAL$_\varepsilon = \{v_i^\varepsilon\}_{i\in\mathbb{N}}$。

12. Positivity check

本节中固定一个字母表 A。沿用前几节的记号， L_A 取为 $F(A)$，即由 $A\cup A^{-1}$上的约化词组成的集合。接着，将 L_A^+ 定义为 L_A的子集，其中包含的字仅由 A 中的字母组成（而非 A^{-1}中的字母）。换言之，L_A^+ 是 A上的自由幺半群中的字的集合，并视为 L_A的子集。

本节余下部分的目标是构造一个检查器族（依定义 10.4），其 L_A^+ 的复杂度逐步趋近于线性。

12.1. 分割。

为此，下面首先定义辅助真操作 split^A （见图 12）。请注意，根据最小兼容硬件的约定，$\mathcal{I}_{\text{split}} = \mathcal{I}_{\text{split}}^{\text{ext}} = \{a, b\}$和 $\mathcal{A}_{\text{split}}(a) = \mathcal{A}_{\text{split}}(b) = A$。此外，split 是一个 0 阶操作，因此其计算可从第4节所述的较简单角度来考察（而非第6节中的泛型计算）。

对于任意 $w \in L_A$，令 $S_w = \{(w_1, w_2) \in L_A \times L_A \mid w_1w_2 = w\}$，其中等式 $w_1w_2 = w$ 是在自由群 $F(A)$ 中成立的。注意，集合 S_w 构成了 $L_A \times L_A$ 的一个划分。

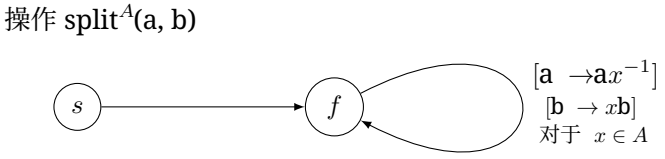


Figure 12. 操作 split$^A(a, b)$。

引理 12.1。split^A 的 IO 关系如下：

$$\mathsf{IO}^{s,s}_{\text{split}} = \mathsf{IO}^{s,f}_{\text{split}} = \mathsf{IO}^{f,f}_{\text{split}} = \bigcup_{w\in L_A} S_w^2$$

此外，split^A 具有线性时间-空间复杂度，即 $\mathsf{TMSP}_{\text{split}} \preceq (n, n)$。

证明。由于 split$_s$ 与 split$_f$ 之间的边为空，任何输入输出计算都可以延长 1 步，以切换起始状态（分别地，结束状态）。因此，立即可得 IO$^{s,\ s\ \text{split}}$ =IO$^{s,\ f\ \text{split}}$ =IO$^{f,\ f\ \text{split}}$。

设 $e_x \in E_{\text{split}}$ 是 split$_f$ 上与字母 $x \in A$ 对应的环。当且仅当存在 $y \in \{x^{\pm1}, 1\}$ 使得 $w_1' = w_1y^{-1}$ 和 $w_2' = yw_2$， $e_x^{\pm1}$ 才支持在 ((w1, w2), split$_f$) 与 ((w1′, w2′), split$_f$) 之间的计算。但这意味着 $w_1'w_2' = w_1w_2$，即 (w1, w2)、(w1′, w2′) $\in S_w$，其中$w = w_1w_2$。

由此可知，对于每条边 $e \in E_{\text{split}}$，每个集合 $S_w \times S_{\text{split}}$ 都在 IO$_e$ 下封闭。因此，IO $_{\text{split}} \subseteq \bigcup(S_w \times \mathsf{SF}^{\text{split}})^2$。

现在，设 $(w_1, w_2) \in L_A \times L_A$，并设 $w \in L_A$ 使得 $w = w_1w_2$。令 $m = |w_1| + |w_2|$，并注意到 $|w| \le m$。

如果 $w_2 = 1$，那么令 $\varepsilon_{w_1,\ w_2}$ 表示 ((w, 1), split$_f$) 与 ((w1, w2), split$_f$) 之间的空计算。

否则，令 $w_2 \equiv x_1^{\delta_1} \dots x_k^{\delta_k}$对于 $x_i \in A$ 和 $\delta_i \in \{\pm1\}$ 对所有 i 均成立。然后，考虑 computation

$$\varepsilon_{w_1,w_2} = \big(((u_0, v_0), \text{split}_f), e_{x_k}^{\delta_k}, ((u_1, v_1), \text{split}_f), \dots, e_{x_1}^{\delta_1}, ((u_k, v_k), \text{split}_f)\big)$$

其中 $(u_0, v_0) = (w, 1)$。于是，对所有 $j \in \overline{0、 k-1}$、 $v_{j+1} = x_{k-j}^{\delta_j} v_j$ 和 $u_{j+1} = u_j x_{k-j}^{-\delta_j}$ 均成立。特别地，$v_k = w_2$。此外，由于 $((w, 1), (u_k, v_k)) \in \mathrm{IO}^{f,f}$ 拆分 意味着 $(u_k, v_k) \in S_w$ 且 $v_k = w_2, u_k = w_1$。

此外，由于假设 $x_1^{\delta_1} \dots x_k^{\delta_k}$是约化的，因此对于所有 $j \in 0, \ k-1$。所以，既然 $|u_j| = |u_{j+1} x_{k-j}^{\delta_j}| \le |u_{j+1}| + 1$，则 $|u_j| + |v_j| \le |u_{j+1}| + |v_{j+1}|$。因此，$\max(|u_j| + |v_j|) = m$。

无论哪种情况，$\varepsilon_{w_1,\ w_2}$都是实现 $\big((w,1), (w_1, w_2)\big) \in \mathrm{IO}^{f,\ f}$ 分割 的计算，并满足界 $\mathrm{tm}^{\mathrm{split}}(\varepsilon_{w_1,\ w_2}) \le m$ 和 $\mathrm{sp}^{\mathrm{split}}(\varepsilon_{w_1,\ w_2}) = m$。

对于 $n \in \mathbb{N}$和 $w \in L_A$，令 $(w_1, w_2), (w_1', w_2') \in S_w$，设 $m = |w_1| + |w_2|$和 $m' = |w_1'| + |w_2'|$，并假设 $m, m' \le n$。那么，计算 $\varepsilon = \varepsilon_{w_1,\ w_2}^{-1} \varepsilon_{w_1',\ w_2'}$ 是实现$\big((w_1, w_2),(w_1', w_2')\big) \in \mathrm{IO}^{f,\ f}$ 分割 的计算，其 $\mathrm{tm}^{\mathrm{split}}(\varepsilon) \le 2n$ 且 $\mathrm{sp}_{\mathrm{split}} \le n$。因此，$\mathrm{IO}^{f,\ f\ \text{分割}} = \bigcup_{w \in L_A} S_w^2$，故 IO 关系如陈述所示。

此外，由于 $((w_1, w_2), (w_1', w_2')) \in \mathrm{IO}^{s_1,\ s_2}$分割 任意 s_1, s_2都可以通过一种计算实现：该计算使 ε 的长度至多增加 2，且不影响空间，因此，关于 ε 复杂度的界意味着 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{split}} \preceq (n, n)$。

□

12.2 右正性与弱接受器。

对于任意满足 $w \equiv x_1^{\delta_1} \dots x_k^{\delta_k}$ 的 $w \in L_A$，若对所有 i 都有 $x_i \in A$ 和 $\delta_i \in \{\pm 1\}$，则将 w 的度定义为 $\deg(w) = \sum \delta_i$。注意，$\deg(w)$ 可以根据 w 的任意一种表示来定义；也就是说，该度在自由约化下是不变量。

接着，令 L_A^{R+} 为 L_A 的子集，其中包含所有满足以下条件的词 w：若 $w \equiv w_l w_r$，则 $\deg(w_r) \ge 0$。换言之，当且仅当对所有 $\ell \in \overline{k}$ 都有 $\sum_{i=\ell}^{k} \delta_i \ge 0$ 时，$w \equiv x_1^{\delta_1} \dots x_k^{\delta_k} \in L_A^{R+}$。

因此，对于任意的 x、 $y \in A$、 $xy^{-2}x^2 \in L_A^{R+}$，但 $xy^{-2}x \notin L_A^{R+}$。注意， $L_A^{+} \subseteq L_A^{R+}$。

引理 12.2. 设 w、 w_l、 $w_r \in L_A$ 满足 $w = w_l w_r$。假设 $w_l \in L_A^{R+}$ 且 $w_r \in L_A^{+}$。那么，$w \in L_A^{+}$ 当且仅当 $w_l \in L_A^{+}$。

证明。反向显然，因此只需假设 $w \in L_A^{+}$ 并证明 $w_l \in L_A^{+}$。

显然，不失一般性可假设 $w_l \ne 1$，因此取 $w_l \equiv x_1^{\delta_1} \dots x_k^{\delta_k}$ 使得 $x_i \in A$ 且对所有 i 都有 $\delta_i \in \{\pm 1\}$。由于 $w_l \in L_A^{R+}$，可得 $\delta_k = 1$。因此，由于 $w_r \in L_A^{+}$， w_l 的最后一个字母与 w_r 的第一个字母之间不会发生约消。因此，由于 w_l 和 w_r 本身都是约化的， $w \equiv w_l w_r$。

因此，由于对于所有 i， $w \in L_A^{+}, \delta_i = 1$，所以 $w_l \in L_A^{+}$。

□

请注意，引理 12.2 的正向结论需要满足 $w_l \in L_A^{R+}$。例如，对于任意 $x \in A$，$1 = x^{-1}x \in L_A^{+}$ 且 $x \in L_A^{+}$，但 $x^{-1} \notin L_A^{+}$。然而，无论对 w_l 有何假设，反向结论都成立。

引理 12.3。设 $w_1, w_2 \in L_A^{R+}$，且 $v_1, v_2 \in L_A^{+}$，满足 $w_1 v_1 = w_2 v_2$。那么存在$z \in L_A^{+}$ 和 $\delta \in \{\pm 1\}$，使得 $w_1^{-1} w_2 = z^{\delta}$。

证明。固定 $i \in \{1, 2\}$，若 $w_i \ne 1$，则存在 $x_{i,1}, \dots, x_{i,k} \in A$ 和 $\delta_{i,1}, \dots, \delta_{i,k} \in \{\pm 1\}$，使得 $w_i = x_{i,1}^{\delta_{i,1}} \cdots x_{i,k}^{\delta_{i,k}}$。类似地，若 $v_i \ne 1$，则根据 L_A^{+} 的定义，存在$y_{i,1}, \dots, y_{i,\ell} \in A$，使得 $v_i = y_{i,1} \dots y_{i,\ell}$。根据 L_A^{R+} 的定义，必有 $\delta_{i,k} = 1$。因此， $w_i v_i \equiv x_{i,1}^{\delta_{i,1}} \cdots x_{i,k}^{\delta_{i,k}} y_{i,1} \dots y_{i,\ell}$，也就是说，右侧的关系乘积是约化的。

因此，显然当 $w_i = 1$ 或 $v_i = 1$时，同样成立，于是 $w_1 v_1 \equiv w_2 v_2$。结果， v_2 必须是 $w_1 v_1$的后缀。

如果 v_2 是 v_1的后缀，那么存在 $z \in L_A^{+}$ 使得 $v_1 \equiv z v_2$，从而 $w_1^{-1} w_2 = v_1 v_2^{-1} = z$。否则，存在 $z \in L_A^{+}$ 使得 $v_2 \equiv z v_1$，从而 $w_1^{-1} w_2 = v_1 v_2^{-1} = z^{-1}$。

□

现在，对于 $\varepsilon \in (0,1)$，适当操作 $\mathrm{wacc}_{R+} = \mathrm{waccept}^{\varepsilon}_{R+}(a)$ 定义如下，见图13。值得注意的是，假设 $a \notin \mathcal{I}_{\varepsilon}$。因此，对于所有 $i \in \mathcal{I}_{\varepsilon}$，$\mathcal{I}_{\mathrm{wacc}_{R+}} = \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{wacc}_{R+}} \sqcup \mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{wacc}_{R+}}$、$\mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{wacc}_{R+}} = \{a\}$、$\mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{wacc}_{R+}} = \mathcal{I}_{\varepsilon}$、$\mathcal{A}_{\mathrm{wacc}_{R+}}(a) = A$，且 $\mathcal{A}_{\mathrm{wacc}_{R+}}(i) = \delta$。

操作 $\mathrm{waccept}^{\varepsilon}_{R+}(a)$;
计数器是计数器$_{\varepsilon}[\mathcal{I}_{\varepsilon}]$;

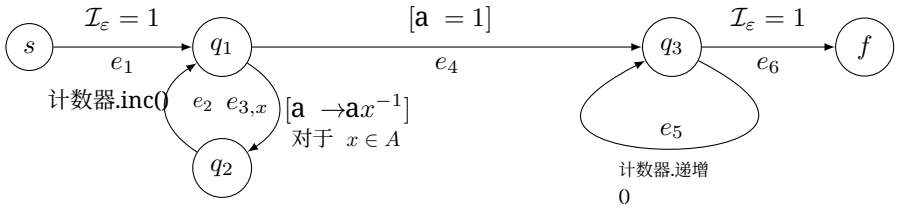


FIGURE 13. 语言 L_A^{R+} 的弱接受器。

此外，同时标记 e_1 和 e_6 的动作'$\mathcal{I}_{\varepsilon} = 1$'表示所有 $i \in \mathcal{I}_{\varepsilon}$的守卫片段集合$[i = 1]$。因此，$e_1$、$e_6 \in E^0_{\mathrm{wacc}_{R+}}$、$e_1^{-1}$和$e_6^{-1}$也由 $\mathcal{I}_{\varepsilon} = 1$标记，并且 wacc_{R+} 满足条件 (O)。

wacc_{R+}的一个计算 $\gamma = \big((u_0, s_0)\ e'_1, (u_1, s_1)\ e'_2, \ldots, e'_{2\ell}, (u_{2\ell}, s_{2\ell})\big)$ 称为一个 (q_1, q_2)-计算，如果对于所有 $i \in 0,\ s_{2i} = q_1$，并且对于所有 $i \in \overline{\ell},\ s_{2i-1} = q_2$。令 $u_i = (w_i, v_i)$，其中$w_i \in L_A$ 且 $v_i \in \mathrm{VAL}_{\varepsilon}$，如果 $w_0 = w$、$v_0 = v_0^{\varepsilon}$和 $w_{2\ell} = 1$，则称 γ 接受 $w \in L_A$。

引理 12.4. 设 $\big((u_1, q_1)\ e'_1, (u_2, q_2)\ e'_2, (u_3, q_1)\big)$ 是 wacc_{R+} 的 (q_1, q_2)-计算，且 $u_i = (w_i, v_i)$ 对于 $w_i \in F(\mathcal{A})$ 成立，并且对所有 i 都有 $v_i = v^{\varepsilon}_{j(i)} \in \mathrm{VAL}_{\varepsilon}$。那么：

(a) $j(1) + \deg(w_1) = j(3) + \deg(w_3)$
(b) $\deg(w_2) \le \deg(w_1)$

证明. 令 $e'_j = (\mathrm{sf}_j, \mathrm{sf}'_j, e''_j)$ 对于 $j = 1,\ 2$。

首先，假设 $e''_1 = e''_2$ 因此 e_{w_2} 那么，且 $e'_1 = e'_2$。特别地，(b) 得到满足。

˄ 如果还满足 $e''_2 = e_2$，那么 $e'_2 = (\hat{s}, f, e_2)$，因此 $u_1 = u_3$，且 (a) 显然得到满足。否则，存在 $x \in A$ 使得 $e''_2 = e^{\pm 1}_{3\,x,}$。特别地，要么 $e'_2 = (\hat{s}, \hat{f}, e^{-1}_{3\,x,})$，要么 $e'_2 = (f, \hat{s}, e_{3,\ x})$。无论哪种情况，$v_3 = v_2$ 且 $w_3 = w_2 x = w_1 x$。因此，$j(3) = j(2) = j(1) - 1$，并且 $\deg(w_3) = \deg(w_1 x) = \deg(w_1) + 1$。

反之，假设 $e''_1 = e^{\pm 1}_{3\ ,\ x}$对某个 $x \in A$ 成立。因此，$e'_1 = (\hat{s}, \hat{f}, e_{3,\ x})$ 或 $e'_1 = (\hat{f}, \hat{s}, e^{-1}_{3\,x,})$。两种情况下，$v_2 = v_1$ 且 $w_2 = w_1 x^{-1}$。因此，$\deg(w_2) = \deg(w_1) - 1$，故 (b) 得证。

˄ 若还满足 $e''_2 = e_2$，则 $e'_2 = (\hat{s}, f, e_2)$，从而 $j(3) = j(2) + 1 = j(1) + 1$ 且 $w_3 = w_2$。最后，若 $e''_2 = e^{\pm 1}_{3\ ,\ y}$对某个 $y \in A$ 成立，则 $e'_2 = (\hat{s}, \hat{f}, e^{-1}_{3\ ,\ y})$ 或 $e'_2 = (\hat{f}, \hat{s}, e_{3,\ y})$。两种情况下，$v_3 = v_2$ 且 $w_3 = w_2 y$，因此 $j(3) = j(1)$，并且 $\deg(w_3) = \deg(w_2) + 1 = \deg(w_1)$。

□

引理 12.5. 存在一个（q_1，q_2）-计算接受 $w \in L_A$，当且仅当 $w \in L_A^{R+}$。此外，令 $\mathcal{F}$ 为 wacc_{R+} 的估计集，该估计集由 $\mathcal{F}_{\mathrm{cntr}} =$（$n$，$n$）给出，则存在 $K \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $w \in L_A^{R+}$，都存在一个（q_1，q_2）-计算 γ_w 接受 w，并满足 $\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}_{R+}}(\gamma_w) \le K|w|^{1+\varepsilon}$以及 $\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}_{R+}}(\gamma_w) \le K|w|$。

证明. 设 $\gamma = \big((u_0,\ s_0)\ \ e'_1,\ \ (u_1,\ s_1)\ \ e'_2,\ \ \ldots\ldots,\ \ e'_{2\ell},\ \ (u_{2\ell},\ s_{2\ell}) \big)$ 是一个 $(q_1,\ q_2)$-计算，该计算接受 wacc_{R+}中的 $w \in L_A$。沿用之前的记号，令 $u_i = (w_i,\ v_i)$，其中对所有 i 均有 $v_i = v^{\varepsilon}_{j(i)}$。此外，令 $e'_i = (\mathsf{sf}_i,\ \mathsf{sf}'_i,\ e''_i)$，对所有 i均成立。

对于所有 $i \in \overline{2\ell}$，定义：

$$z_i = \begin{cases} 1 & e''_i = e_2 \\ x^{-1} & e'_i = (\hat{s}, \hat{f}, e_{3,x}) \text{ or } e'_i = (\hat{f}, \hat{s}, e^{-1}_{3,x}) \\ x & e'_i = (\hat{s}, \hat{f}, e^{-1}_{3,x}) \text{ or } e'_i = (\hat{f}, \hat{s}, e_{3,x}) \end{cases}$$

然后，令 $w'_i = z_1 \ldots z_i$ 对所有 i成立。

根据标记 e_2 和 $e_{3,\ x}$, $w_i = w_{i-1}z_i$ 的动作的定义，对所有 i都有 $w_i = ww'_i$。因此，由于 $w_{2\ell} = 1$, $w'_{2\ell}$ 与 w^{-1}自由相等。

由引理 12.4(a)可知，对所有 $i \in \overline{\ell}$，$j(2i-2) + \text{度}(w_{2i-2}) = j(2i) + \text{度}(w_{2i})$。特别地，由于假设 $j(0) = 0$ 且 $w_0 = w$，因此对所有$i \in \overline{\ell}$，$j(2i) + \text{度}(w_{2i}) = \text{度}(w)$。但度是可加的，因此度$(w_{2i}) = \text{度}(ww'_{2i}) = \text{度}(w) + \text{度}(w'_{2i})$，进而度$(w'_{2i}) = -j(2i)$。因此，由于对所有 i都有 $j(2i) \geq 0$，度$(w'_{2i}) \leq 0$。

此外，引理 12.4(b) 意味着，对于所有 $i \in \overline{\ell}$，$\deg(w'_{2i-1}) \leq \deg(w'_{2i})$。因此，对于所有$i \in \overline{2\ell}$, $\deg(w'_i) \leq 0$。

因此，由于 w 的任意后缀都必须与 $(w'_{2\ell})^{-1}$ 的某个后缀自由相等，而该后缀由某个 i 对应的 $(w'_i)^{-1}$ 给出，所以这样的后缀的度必定非负，从而 $w \in L^{R+}_A$。

现在，对于任意 $w \in L^{R+}_A$，γ_w 存在性的证明可通过对 $n = |w|$ 进行归纳法得出；其平凡基例 $n = 0$ 由空计算 $\big((1, v^{\varepsilon}_0)\ q_1\big)$ 给出。

首先，假设 $n = 1$，于是 $w = x \in A$。考虑以下计算：

$$\gamma_w = \big(((w, v^{\varepsilon}_0), q_1), (\hat{s}, \hat{f}, e_{3,x}), ((1, v^{\varepsilon}_0), q_2), (\hat{s}, \hat{f}, e_2), ((1, v^{\varepsilon}_1), q_1)\big)$$

那么，$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}_{R+}}(\gamma_w) = 1 + |v^{\varepsilon}_1| = 2$，且 $\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}_{R+}}(\gamma_w) = \max(|w|, |v^{\varepsilon}_1|) = 1$。因此，该结论对 $K \geq 2$ 成立。

一般地，令 $w \equiv x^{\delta_1}_1 \ldots x^{\delta_n}_n$。那么，后缀 $w' = x^{\delta_2}_2 \ldots x^{\delta_n}_n$ 也属于 L^{R+}_A。因此，根据归纳假设，存在一个 (q_1, q_2)-计算 $\gamma_{w'}$，接受 w'，并满足 $\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}_{R+}}(\gamma_{w'}) \leq K|w'|^{1+\varepsilon}$ 以及 $\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}_{R+}}(\gamma_{w'}) \leq K|w'|$。

对于 $\gamma_{w'} = \big((u'_0, s_0)\ e'_1、(u'_1, s_1)\ e'_2、\ \ldots\ldots、\ e'_m、(u'_m, s_m)\big)$，其中 $u'_i = (w'_i, v_i)$，对每个 i 设定 $u_i = (x^{\delta_1}_1 w'_i, v_i)$，得到一个计算

$$\widetilde{\gamma}_{w'} = \big((u_0, s_0), e'_1, (u_1, s_1), e'_2, \ldots, e'_m, (u_m, s_m)\big)$$

于是，$u_0 = (w, v^{\varepsilon}_0)$ 且 $u_m = (x^{\delta_1}_1, v_m)$。根据引理 12.4，$v_m = v^{\varepsilon}_j$ 对于 $j = \deg(w') \leq n-1$。由于 $\mathcal{I}_{\mathrm{cntr}} = \mathcal{I}_{\varepsilon}$，可得：

$$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}_{R+}}(\widetilde{\gamma}_{w'}) = \mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}_{R+}}(\gamma_{w'}) \leq K(n-1)^{1+\varepsilon}$$
$$\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}_{R+}}(\widetilde{\gamma}_{w'}) = \mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}_{R+}}(\gamma_{w'}) + 1 \leq K(n-1) + 1$$

如果 $\delta_1 = 1$，那么令 γ' 为如下给出的计算：

$$\big(((x^{\delta_1}_1, v^{\varepsilon}_j), q_1), (\hat{s}, \hat{f}, e_{3,x_1}), ((1, v^{\varepsilon}_j), q_2), (\hat{s}, \hat{f}, e_2), ((1, v^{\varepsilon}_{j+1}), q_1)\big)$$

在此情形下，γ'的复杂度为 $\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}_{R+}}(\gamma') = 1 + \max(|v^{\varepsilon}_j|, |v^{\varepsilon}_{j+1}|) \leq 1 + \mathrm{size}_{\varepsilon}(n)$，而 $\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}_{R+}}(\gamma') = \max(1 + |v^{\varepsilon}_j|, |v^{\varepsilon}_{j+1}|) \leq 1 + \mathrm{size}_{\varepsilon}(n)$。

反之，若 $\delta_1 = -1$，注意到由于 $w \in L^{R+}_A$，$\deg(w') \geq 1$。因此，$j \geq 1$，从而存在一个计算 γ'，其定义如下

$$\big(((x^{\delta_1}_1, v^{\varepsilon}_j), q_1), (\hat{f}, \hat{s}, e_2), ((x^{\delta_1}_1, v^{\varepsilon}_{j-1}), q_2), (\hat{s}, \hat{f}, e^{-1}_{3,x_1}), ((1, v^{\varepsilon}_{j-1}), q_1)\big)$$

与前一种情况一样， γ' 满足 $\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}_{R+}}(\gamma') = \max(|v^{\varepsilon}_j|, |v^{\varepsilon}_{j-1}|) + 1 \leq \mathrm{size}_{\varepsilon}(n) + 1$，并且 $\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}_{R+}}(\gamma') = \max(1 + |v^{\varepsilon}_j|, 1 + |v^{\varepsilon}_{j-1}|) \leq 1 + \mathrm{size}_{\varepsilon}(n)$。

在任一情况下， $\widetilde{\gamma}_{w'}$ 和 γ' 都可以连接起来，得到一个接受 w的 (q_1, q_2)-计算 γ_w，并满足：

$$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}_{R+}}(\gamma_w) \leq K(n-1)^{1+\varepsilon} + 1 + \mathrm{size}_{\varepsilon}(n)$$
$$\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}_{R+}}(\gamma_w) \leq \max(K(n-1) + 1, 1 + \mathrm{size}_{\varepsilon}(n))$$

由推论 11.7，存在 $C \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $k \in \mathbb{N}$，$\mathrm{size}_{\varepsilon}(k) \leq Ck^{\varepsilon} + C$。因此，取 $K \geq C + 1$，可得 $\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}_{R+}}(\gamma_w) \leq Kn + K$。

现在，由伯努利不等式可得：

$$\begin{aligned}(n-1)^{1+\varepsilon} &= (n-1)n^{\varepsilon}\big(1 - 1/n\big)^{\varepsilon} \leq (n-1)n^{\varepsilon}(1 - \varepsilon/n)\\ &\leq n^{1+\varepsilon} - n^{\varepsilon} - (n-1)n^{\varepsilon}(\varepsilon/n)\end{aligned}$$

因此，假设 $K \geq C$，则 $\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}}(\gamma_w) \leq Kn^{1+\varepsilon} - K\varepsilon(1-1/n)n^{\varepsilon} + C + 1$。接着，取 $K \geq 4C\varepsilon^{-1}$，可得对于 $n \geq 2$，$K\varepsilon(1-1/n)n^{\varepsilon} \geq 2Cn^{\varepsilon} \geq 2C$，从而 $\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}_{R+}}(\gamma_w) \leq Kn^{1+\varepsilon}$。 □

引理 12.6. 设 $\gamma = \big((u_0, s_0)\ e'_1, (u_1, s_1)\ e'_2, \ldots, e'_m, (u_m, s_m)\big)$ 是 wacc_{R+} 的一次计算，其中对所有 i，都有 $e'_i = (\mathrm{sf}_i, \mathrm{sf}'_i, e''_i)$。假设 γ 的计算路径在所有连接 (u_0, s_0) 与 (u_m, s_m) 的计算中具有最小长度。那么，对所有 i:

(1) $\mathrm{sf}_i \neq \mathrm{sf}'_i$(2) 若 $\mathrm{sf}_i = \mathrm{sf}'_{i+1}$，则 $e''_i \neq e''_{i+1}$(3) 若 $e''_i \in E^0_{\mathrm{wacc}_{R+}}$，则 $e''_{i+1} \neq (e''_i)^{-1}$

证明。假设存在 $i, j \in 0, m$，使得 $\overline{i \neq j}$ 且 $(u_i, s_i) = (u_j, s_j)$。不失一般性地假设 $i < j$，则一般路径 $e'_1, \ldots, e'_i, e'_{j+1}, \ldots, e'_m$ 支持连接 (u_0, s_0) 与 (u_m, s_m) 的一次计算。然而，这条路径的长度严格小于 m，这与关于 γ 的假设矛盾。

现在，若 $\mathrm{sf}_i = \mathrm{sf}'_i$，则计数器的 IO 关系以及 0 阶动作的 IO 关系意味着 $(u_{i-1}, s_{i-1}) = (u_i, s_i)$。因此，(1) 必须成立。

接下来，假设 $\mathrm{sf}_i = \mathrm{sf}'_{i+1}$ and $e''_i = e''_{i+1} = e$。令 $\mathrm{act}_e = \mathrm{Lab}(e)$，则 $(u_{i-1}, u_i) \in \mathrm{IO}^{\mathrm{sf}_i, \mathrm{sf}'_i}\mathrm{act}_e$，且 $(u_i, u_{i+1}) \in \mathrm{IO}^{\mathrm{sf}_{i+1}, \mathrm{sf}'_{i+1}}\mathrm{act}_e$。由 (1) 可知，$\mathrm{sf}'_i = \mathrm{sf}_{i+1}$，因此引理 7.4(3) 表明 $(u_{i-1}, u_{i+1}) \in \mathrm{IO}_{\mathrm{sf}_i, \mathrm{sf}'_{i+1}}\mathrm{act}_e$。一般边 $e' = (\mathrm{sf}_i, \mathrm{sf}'_{i+1}, e)$ 随后支持 (u_{i-1}, s_{i-1}) 与 (u_{i+1}, s_{i+1}) 之间的一次计算。但这样一来，长度为 $m-1$ 的一般路径 $e'_1, \ldots, e'_{i-1}, e', e'_{i+2}, \ldots, e'_m$ 支持 (u_0, s_0) 与 (u_m, s_m) 之间的一次计算，这再次与关于 γ 的假设矛盾。因此，(2) 必须成立。

最后，假设 $e''_i \in E^0_{\mathrm{wacc}_{R+}}$ 和 $e''_{i+1} = (e''_i)^{-1}$。由于 $E^0_{\mathrm{wacc}_{R+}}$ 的边都不是环，因此 (1) 意味着 $\mathrm{sf}'_i = \mathrm{sf}'_{i+1} \neq \mathrm{sf}_i$。令 t 为定义 $\mathrm{Lab}(e''_i)$ 的变换，并令 $\delta \in \{\pm 1\}$满足：$\delta = 1$ 当且仅当 $\mathrm{sf}_i = \hat{}s$。于是 $u_i = t^{\delta}u_{i-1}$ 且 $u_{i+1} = t^{-\delta}u_i = u_{i-1}$。但这样一来，$(u_{i-1}, s_{i-1}) = (u_{i+1}, s_{i+1})$，因此 (3) 必须成立。

□

引理 12.7。真操作 wacc_{R+} 是 L^{R+}_A 的弱接受器。此外，该操作满足 $\mathrm{IO}^{sf}_{\mathrm{wacc}_{R+}} = \{, (w, 1) \mid w \in L^{R+}_A\}$ 且 $\mathrm{WTMSP}_{R+, \varepsilon} := \mathrm{WTMSP}_{\mathrm{wacc}_{R+}} \preceq (n^{1+\varepsilon}, n)$。

证明。设 $(w, w') \in \mathrm{IO}^{sf}_{\mathrm{wacc}_{R+}}$，且 $\gamma = \big((u_0, s_0)\ e'_1, (u_1, s_1)\ e'_2, \ldots, e'_m, (u_m, s_m)\big)$ 是一个输入-输出计算，其计算路径长度最小，并实现了 $(w, w') \in \mathrm{IO}^{sf}_{\mathrm{wacc}_{R+}}$。

对于所有 $i \in \overline{m}$，令 $e'_i = (\mathrm{sf}_i, \mathrm{sf}'_i, e''_i)$，其中 $e''_i \in E_{\mathrm{wacc}_{R+}}$。类似地，对于所有 $i \in \overline{0,m,}$ 令 $u_i = (w_i, v_i)$，其中 $w_i = u_i(a) \in F(A)$ 且 $v_i = u_i(\mathcal{I}_\varepsilon) = v^\varepsilon_{j(i)} \in \mathrm{VAL}_\varepsilon$。因此，$w_0 = w$，$w_m = w'$，且 $v_0 = v_m = v^\varepsilon_0$。

由于 $\mathrm{SF}^{\mathrm{wacc}_{R+}}$ 的顶点位于 $\mathcal{G}_{\mathrm{wacc}_{R+}} - \{q_1\}$ 的不同连通分支中，因此必定存在 $j \in \overline{m}$，使得 $s_{j-1} = q_1$。令 j 为满足此条件的最大索引，则 $e''_j = e_4$，且对所有 $i > j$ 都有 $e_i \in \{e_5^{\pm 1}, e_6^{\pm 1}\}$。于是，标记 e_4 的守卫片段蕴含 $w_j = 1$。因此，由于 e_5 和 e_6 的动作均未提及 a，故 $w' = 1$。

类似地，$\mathrm{SF}^{\mathrm{wacc}_{R+}}$ 的顶点位于 $\mathcal{G}_{\mathrm{wacc}_{R+}} - \{q_3\}$ 的不同连通分支中，因此存在满足 $s_{k+1} = q_3$ 的最小 $k \in \overline{m-1}$。根据引理 12.6，计算

$$\gamma' = \big((u_1, s_1), e'_2, \ldots, e'_k, (u_k, s_k)\big)$$

是一个 (q_1, q_2)-计算，且 $e''_{k+1} = e_4^{\pm 1}$。如上所述，标记 e_4 的守卫片段由此蕴含 $w_k = 1$。此外，由于必须满足 $e''_1 = e_1^{\pm 1}$，因此 $u_1 = (w_1, v_1) = (w, v^\varepsilon_0)$。因此，$\gamma'$ 是一个接受 w 的 (q_1, q_2)-计算，所以根据引理 12.5，$w \in L_A^{R+}$。

最后，对于 $w \in L_A^{R+}$，令 ρ' 为引理 12.5 中支持计算 γ_w 的一般路径，则一般路径 $\rho''_s = (\hat{}s, \hat{}f, e_1)\ \rho'$、$(\hat{}s, \hat{}f, e_4)$ 支持在配置 $((w, v^\varepsilon_0), (\mathrm{wacc}_{R+})s)$ 与 $((w, v^\varepsilon_d)\ q_3)$ 之间进行计算，其中某个 $d \in \mathbb{N}$。根据引理 12.4，$\deg(w) = d \geq 0$，因此 $\rho''_f = (\hat{}f, \hat{}s, e_5)^d$、$(\hat{}s, \hat{}f, e_6)$ 支持在配置 $((1, v^\varepsilon_d)\ q_3)$ 与 $((1, v^\varepsilon_0), (\mathrm{wacc}_{R+})s)$ 之间进行计算。因此，$\rho'' = \rho''_s, \rho''_f$ 支持对 wacc_{R+} 进行计算 σ_w，实现 $(w, 1) \in \mathrm{IO}^{sf}_{\mathrm{wacc}_{R+}}$。

因此，$\mathrm{IO}^{sf}_{\mathrm{wacc}_{R+}} = \{(w, 1) \mid w \in L_A^{R+}\}$，所以 wacc_{R+} 是 L^R 的弱接受器 ${}_A{}^+$.

现在，令 $\mathcal{F}$ 为根据引理 12.5 由 $\mathcal{F}_{\mathrm{cntr}} = (n, n)$ 给出的 wacc_{R+} 的估计集。根据引理 11.5 和引理 10.6，只需找到 $L \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $w \in L_A^{R+}$，$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}_{R+}}(\sigma_w) \leq L|w|^{1+\varepsilon} + L$ 且 $\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}_{R+}}(\sigma_w) \leq L|w| + L$。

根据构造和引理 12.5：

$$\begin{aligned}\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}_{R+}}(\sigma_w) &\leq 1 + K|w|^{1+\varepsilon} + 1 + \sum_{j=1}^{d} \max(|v^\varepsilon_j|, |v^\varepsilon_{j-1}|) + 1 \\ &\leq K|w|^{1+\varepsilon} + 3 + d\,\mathrm{size}_\varepsilon(d) \leq 2K|w|^{1+\varepsilon} + 3 \\ \mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}_{R+}}(\sigma_w) &\leq K|w|\end{aligned}$$

因此，对于 $L \geq \max\{2K, 3\}$，所需的不等式均成立。

□

12.3. 正词的弱接受器。

对于 $\varepsilon \in (0,1)$，下文图 14 中定义了适当操作 $\mathrm{wacc}^{1,\varepsilon}_{+} = \mathrm{waccept}^{1,\varepsilon}_{+}(a)$。如其名称所示，$\mathcal{I}^{\mathrm{val}}{}_{\mathrm{wacc}^{1,\varepsilon}_{+}} = \emptyset$，以及 $\mathcal{I}^{\mathrm{ext}}{}_{\mathrm{wacc}^{1,\varepsilon}_{+}} = \{a\}$。此外，从图中各边的标记动作可以推得，$\mathcal{I}^{\mathrm{int}}{}_{\mathrm{wacc}^{1,\varepsilon}_{+}} = \{b\}$，以及 $\mathcal{A}_{\mathrm{wacc}^{1,+}{}^{\varepsilon}}(a) = \mathcal{A}_{\mathrm{wacc}^{1,+}{}^{\varepsilon}}(b) = A$。

由于标记 e_2 和 e_3 的正动作由适当操作构成，因此按照惯例，不在标题中声明它们。不过，应当注意，$\mathrm{check}^\varepsilon_{R+}$ 尚未定义。引理 12.7 已证明，适当操作 $\mathrm{wacc}^\varepsilon_{R+}$ 是 L_A^{R+} 的一个弱接受器，且满足某些复杂度界；由此，命题 10.7 得出一个满足相同复杂度界的相应检查器，本文据此定义动作标记 e_3。

由于 e_5 标记为平凡作用，根据标记 e_1 和 $e_4^{-1}{}_{,x}$ 的动作的定义，可知 $\mathrm{wacc}^{1,\varepsilon}_{+}$ 满足条件 (O)。

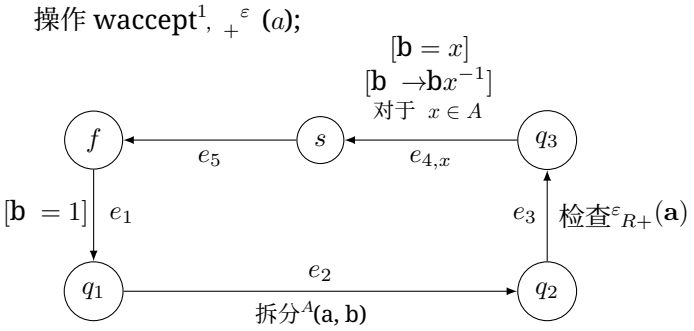


FIGURE 14. 语言 L_A^+ 的一个弱接受器。

在接下来的操作讨论中，令 $\mathcal{F}$ 为 $\mathsf{wacc}^{1,\ +^{\varepsilon}}$ 的估计集，由 $\mathcal{F}_{\mathrm{split}} = (n, n)$ 和 $\mathcal{F}_{\mathrm{ch}_{R+}} = (n^{1+\varepsilon}, n)$ 给出。

如果计算 $\gamma = \big((u_0, s_0)\ e'_1, (u_1, s_1)\ e'_2, \ldots, e'_m, (u_m, s_m)\big)$ of $\mathsf{wacc}^{1,\ +^{\varepsilon}}$ 是一个满足以下条件的输入-输出计算，那么它称为电路计算： $s_i = (\mathsf{wacc}^{1,\ +^{\varepsilon}})_s$ 当且仅当 $i = 0, m$。因此， γ 是实现 $(u_0(a)\ u_m(a)) \in \mathsf{IO}^{s,s\ \mathsf{wacc}^{1,+^{\varepsilon}}}$ 的一个计算。

令 $\mathsf{CIO}^{s,s\ \mathsf{wacc}^{1,+^{\varepsilon}}}$ 为 $\mathsf{IO}^{s,s\ \mathsf{wacc}^{1,+^{\varepsilon}}}$ 的子集，它由所有可由电路计算实现的有序对组成。注意，由于平凡计算也是电路计算，因此 $\mathsf{CIO}^{s,s\ \mathsf{wacc}^{1\ \varepsilon}_{+}} \supseteq \mathbb{I}_{,\circ}$ 此外，由于电路计算的逆仍是电路计算，$\mathsf{CIO}^{s,s\ \mathsf{wacc}^{1,+^{\varepsilon}}}$ 是对称闭合的。

以下 陈述给出了引理 12.6 的一个类似结果，具有相似的用途:

引理 12.8. 设 $\gamma = \big((u_0, s_0)\ e'_1, (u_1, s_1)\ e'_2, \ldots, e'_m, (u_m, s_m)\big)$ 是 $\mathsf{wacc}^{1,\ +^{\varepsilon}}$ 的一次电路计算，其中对所有 i，都有 $e'_i = (\mathsf{sf}_i, \mathsf{sf}'_i, e''_i)$。假设 m 是最小的，即 γ 的计算路径在所有实现 $(u_0(a)\ u_m(a)) \in \mathsf{IO}^{s,s\ \mathsf{wacc}^{1,+^{\varepsilon}}}$ 的电路计算中具有最小长度。那么对所有 i:

(1) $\mathsf{sf}_i \neq \mathsf{sf}'_i$(2) $e''_i \neq e''_{i+1}$(3) 如果 $e''_i \in E^{0\ \mathsf{wacc}^{1,+^{\varepsilon}}}$，那么 $e''_{i+1} \neq (e''_i)^{-1}$

证明。如同引理 12.6 的证明，如果存在 i、$j \in 0$、m，使得 $i < j$，并且 (u_i, s_i) 与 (u_j, s_j) 是同一配置，那么一般路径 $\rho' = e'_1$、…、e'_i、e'_{j+1}、…、e'_m 支持在 (u_0, s_0) 与 (u_m, s_m) 之间的计算。但这样一来，这是一个实现 $(u_0(a)\ u_m(a)) \in \mathsf{IO}^{s,\ s\ \mathsf{wacc}^{1,\ +^{\varepsilon}}}$ 的电路计算，该计算由长度至多为 $m-1$ 的一般路径支持，这与 γ 的选取矛盾。

根据检查器与 0 度动作的 IO 关系定义，可知当 $e''_i \neq e_2$ 时，(1) 成立。

假设 $e''_i = e''_{i+1} = e_\circ$ 由于 $\mathcal{G}_{\mathrm{wacc}_{R+}}$ 不包含环，因此 $\mathsf{sf}'_i = \mathsf{sf}_{i+1}$。所以，根据引理 7.4(3)，$(u_{i-1}, u_{i+1}) \in \mathsf{IO}_{\mathsf{sf}_i,\ \mathsf{sf}'_{i+1}\ \mathrm{Lab}(e)}$。因此，采用引理 12.6(2) 中给出的相同论证可知，(2) 必须成立。

现在，对所有 i，令 $u_i(a) = w_i$ 且 $u_i(b) = v_i$。

假设 $e'_i = (\hat{}s, \hat{}s, e_2)$，因此 $s_{i-1} = q_1 = s_i$。由于 γ 是电路计算， $i \neq 0, m$。因此，根据 (2)，$e''_{i-1}, e''_{i+1} \in \{e_1^{\pm 1}\}$。特别地，由于当 $e''_i \neq e_2$ 时 (1) 成立，因此一般边为 $e'_{i+1} \in \{(\hat{}f, \hat{}s, e_1), (\hat{}s, \hat{}f, e_1^{-1})\}$ 以及 $e'_{i-1} \in \{(\hat{}s, \hat{}f, e_1), (\hat{}f, \hat{}s, e_1^{-1})\}$。动作标记 e_1

于是可得 $v_{i-1} = 1 = v_i$。但引理 12.1 随即推出 $w_{i-1} = w_{i-1}v_{i-1} = w_iv_i = w_i$，因此 $(u_{i-1}, s_{i-1}) = (u_i, s_i)$。

^^ 另一方面，假设 $e'_i = (f, f, e_2)$，因此 $s_{i-1} = q_2 = s_i$。那么，和上面一样，(2) ^^ 意味着 $e'_{i-1} = (f, \hat{}s, e_3)$ 且 $e'_{i+1} = (\hat{}s, f, e_3)$。因此，$(u_{i-2}, s_{i-2}) = (u_{i-1}, q_3)$，$(u_{i+1}, s_{i+1}) = (u_i, q_3)$，且 $w_{i-2}, w_{i+1} \in L_A^{R+}$。此外，必定存在 $x, y \in A$，使得 $e''_{i-2} = e_4^{\pm 1}{}_{,x}$ 且 $e''_{i+2} = e_4^{\pm 1}{}_{,y}$。特别地，这推出 $s_{i-3} = (\mathsf{wacc}^1{}_{,+}{}^{\varepsilon})_s = s_{i+2}$，因此根据电路计算的定义，$i = 3$ 且 $m = 5$。此外，标记 $e_{4,z}$ 的动作的守卫对于 $z \in A$ 强制要求 $v_{i-2} = x$ 和 $v_{i+1} = y$。因此，根据引理 12.1，

$$w_{i-2}x = w_{i-1}(a)v_{i-1} = w_iv_i = w_{i+1}y$$

由于 $w_{i-2}, w_{i+1} \in L_A^{R+}$ 都是约化字，因此 $w_{i-2}x$ 和 $w_{i+1}y$ 也必定是约化字，因而等价。但此时 $x = y$，所以 $(u_{i-1}, s_{i-1}) = (u_i, s_i)$。

因此，条件 (1) 必须成立，从而可用与引理 12.6 中相同的方法证明条件 (3)。

□

引理 12.9。$\mathsf{CIO}^{s,s}\,\mathsf{wacc}^{1\,\varepsilon}_{+} = \mathbb{I} \cup \{(w, wx), (wx, w) \mid w \in L_A^{R+}, x \in A\}$。此外，对于所有 $w \in L_A^{R+}$ 和所有 $x \in A$，存在一个电路计算 $\gamma_{w,x}$，实现 $(w, wx) \in \mathsf{IO}^{s,s}\,\mathsf{wacc}^{1,+^{\varepsilon}}$，并满足界 $\mathsf{tm}^{\mathcal{F}}\mathsf{wacc}^{1,+^{\varepsilon}}(\gamma_{w,x}) \leq 2|w|^{1+\varepsilon} + 4$ 和 $\mathsf{sp}^{\mathcal{F}}\mathsf{wacc}^{1,+^{\varepsilon}}(\gamma_{w,x}) \leq |w| + 1$。

证明。设 $(w', w) \in \mathsf{CIO}^{s,\ s\ \mathrm{wacc}^{1,\ +^{\varepsilon}}}$ 使得 $w \neq w'$，并令

$$\gamma = \big((u_0, s_0), e'_1, (u_1, s_1), e'_2, \ldots, e'_m, (u_m, s_m)\big)$$

为实现 $(w', w) \in \mathsf{IO}^{s,\ s\ \mathrm{wacc}^{1,\ +^{\varepsilon}}}$ 的电路计算，其计算路径长度最小。对所有 i，令 $e'_i = (\mathsf{sf}_i, \mathsf{sf}'_i, e''_i)$，$u_i(a) = w_i$，以及 $u_i(b) = v_i$。

首先，假设 $e''_1 = e_5^{\pm 1}$。那么，由引理 12.8，$u_1 = u_0$ 且 $s_1 = (\mathsf{wacc}^{1,\ +^{\varepsilon}})_f$。于是引理 12.8 蕴含 $e''_2 = e_1^{\pm 1}$，因此 $u_2 = u_1$ 且 $s_2 = q_1$。类似地，可得 $e'_3 = (\hat{}s, \hat{}f, e_2)$，^ 因此 $s_3 = q_2$。此外，由引理 12.1，$w_3v_3 = w_2 = w'$。然后，如上所述，$e'_4 = (\hat{}s, f, e_3)$，因此 $(u_4, s_4) = (u_3, q_3)$。特别地，$\mathsf{IO}^{\mathrm{ch}_{R+}}$ 的定义给出 $w_3 \in L_A^{R+}$。

那么，$e''_5 = e_4^{\pm 1}{}_{,\ x}$ 对于某个 $x \in A$，使得 $s_5 = (\mathsf{wacc}^{1,\ +^{\varepsilon}})_s$，$v_4 = v_3 = x$，并且 $u_5 = (w_4, 1) = (w_3, 1)$。根据电路计算的定义，$m = 5$，因此 $w_3 = w$。于是，$w \in L_A^{R+}$ 和 $w' = w_3v_3 = wx$，即 $(w', w) = (wx, w)$，其中 $w \in L_A^{R+}$。

反过来，假设 $e''_1 = e_4^{\pm 1}{}_{,\ x}$ 对于某个 $x \in A$。那么，如上所述，引理 12.8 意味着 $m = 5$，$e''_2 = e_3$，$e''_3 = e_2$，$e''_4 = e_1^{\pm 1}$，以及 $e''_5 = e_5^{\pm 1}$。但此时，逆计算 γ^{-1} 是一个电路计算，其计算路径是在所有实现 $(w, w') \in \mathsf{IO}^{s,\ s\ \mathrm{wacc}^{1,\ +^{\varepsilon}}}$ 的电路计算中最短的，并且其第一条一般边由 $e_5^{\pm 1}$ 构造，因此上述论证意味着存在 $x \in A$，使得 $(w', w) = (w', w'x)$，其中 $w' \in L_A^{R+}$。

因此，由于 $\mathsf{CIO}_{\mathrm{wacc}^{1,\ +^{\varepsilon}}}$ 是对称闭合的，只需证明对于任意 $w \in L_A^{R+}$ 和 $x \in A$，计算 $\gamma_{w,\ x}$ 满足陈述中的要求。

为实现这一目标，固定 $w \in L_A^{R+}$ 和 $x \in A$，并定义一般路径：

$$\rho_{w,x} = (\hat{s}, \hat{f}, e_{4,x}^{-1}), (\hat{f}, \hat{s}, e_3), (\hat{f}, \hat{s}, e_2), (\hat{s}, \hat{f}, e_1^{-1}), (\hat{s}, \hat{f}, e_5^{-1})$$

记 $\rho_{w,\ x} = e'_1$、.....、 e'_5，由检查器的定义和引理 12.1 可知，$\rho_{w,\ x}$支持如下电路计算：

$$\gamma_{w,x} = \big(((w,1),(\mathrm{wacc}_+^{1,\varepsilon})_s), e'_1, ((w,x),q_1), e'_2, ((w,x),q_2), e'_3, ((wx,1),q_1),$$
$$e'_4, ((wx,1),(\mathrm{wacc}_+^{1,\varepsilon})_f), e'_5, ((wx,1),(\mathrm{wacc}_+^{1,\varepsilon})_s)\big)$$

因此，$\gamma_{w,\ x}$ 是一个实现（w, wx） $\in \mathsf{IO}^{s,\ s\ \mathrm{wacc}^{1,\ +}{}^{\varepsilon}}$ 的电路计算，因此 $\mathsf{CIO}^{s,\ s\ \mathrm{wacc}^{1,\ +}{}^{\varepsilon}}$ 如陈述所述。

此外，$\gamma_{w,\ x}$ 的估计复杂度为：

$$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}^{1,\varepsilon}_+}(\gamma_{w,x}) = 1 + |w|^{1+\varepsilon} + (|w|+1) + 1 + 1 \le 2|w|^{1+\varepsilon} + 4$$
$$\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}^{1,\varepsilon}_+}(\gamma_{w,x}) = |w| + 1$$

□

引理 12.10。 操作 $\mathsf{wacc}^{1,\ +}{}^{\varepsilon}$ 是 L_A^+ 的弱接受器，其 WTMSP 为 $_{\mathrm{waccept}^{1,\ +}{}^{\varepsilon}} \preceq (n^{2+\varepsilon}, n)$.

证明。由于 e_5 由平凡作用标记，$\mathsf{IO}^{s,\ s\ \mathrm{wacc}^{1\ \varepsilon}_+} = \mathsf{IO}^{s,\ f\ \mathrm{wacc}^{1\ \varepsilon}_+} = \mathsf{IO}^{f,\ f\ \mathrm{wacc}^{1,\ }}$。

令 $w \in L_A$ 满足 $(w, 1) \in \mathsf{IO}^{s,\ s\ \mathrm{wacc}^{1,\ +}{}^{\varepsilon}}$，并固定一个计算

$$\gamma = \big((u_0,s_0), e'_1, (u_1,s_1), e'_2, \ldots, e'_m, (u_m,s_m)\big)$$

实现 $(w, 1) \in \mathsf{IO}^{s,\ s\ \mathrm{wacc}^{1,\ +}{}^{\varepsilon}}$。

令 $i_0, \ldots, i_t \in \overline{m}$ 为满足 $s_{i_j} = (\mathsf{wacc}^{1,\ +}{}^{\varepsilon})_s$ 且使得 $i_{j-1} < i_j$ 对所有 $j \in \overline{t}$ 都成立的指标。因此，$i_0 = 0$ 且 $i_t = m$。那么，γ 可以看作以下电路计算的串接

$$\gamma_j = \big((u_{i_{j-1}}, s_{j-1}), e'_{i_{j-1}+1}, \ldots, e'_{i_j}, (u_{i_j}, s_{i_j})\big)$$

对于 $j \in \overline{t}$。

现在，令 $w_j = u_{i_j}(a)$ 对所有 $j \in \overline{0,t}$ 都成立。因此，$w_0 = w$ 且 $w_t = 1$。那么，γ_j 是一个实现 $(w_{j-1}, w_j) \in \mathsf{IO}^{s,\ s\mathrm{wacc}^{1,\ +}{}^{\varepsilon}}$ 的电路计算，因此 $(w_{j-1}, w_j) \in \mathsf{CIO}^{s,\ s\mathrm{wacc}^{1,\ +}{}^{\varepsilon}}$。这样的$\gamma_j$称为 γ的极大电路子计算。

不失一般性，可以假设 $w_{j-1} \neq w_j$ 对所有 $j \in \overline{t}$均成立，因为这样就可以将 γ_j从 γ 中“移除”，从而得到一个实现（w,1） $\in \mathsf{IO}^{s,\ s\ \mathrm{wacc}^{1,\ +}{}^{\varepsilon}}$ 的计算，其中极大电路子计算更少。类似地，不失一般性，可以假设$w_i \neq w_j$对所有互异的 i、$j \in 0$、t均成立。

因此，根据引理 12.9，对于每个 $j \in \overline{t}$，存在 $x_j \in A$ 和 $\delta_j \in \{\pm 1\}$，使得 $w_j = w_{j-1}x_j^{\delta_j}$。于是，对于所有 $j \in \overline{t}$、$1 = w_t = w_{j-1}x_j^{\delta_j} \ldots x_t^{\delta_t}$，以及 $w_{j-1} = x_t^{-\delta_t} \ldots x_j^{-\delta_j}$。

注意，由于假设对所有互异的 i、$j \in 0$、t均有 $w_i \neq w_j$，字 $\overline{x_1^{\delta_1} \ldots x_t^{\delta_t}}$必须是约简的。

假设存在 $j \in \overline{t}$ 使得 $\delta_j = 1$。然后，令 k 为满足此条件的最大索引，则 $w_k \in L_A^+$，且 γ_k 是实现（w_{k-1}，w_k） $= (w_k x_k^{-1}, w_k) \in \mathsf{IO}^{s,\ s\ \mathrm{wacc}^{1,\ +}{}^{\varepsilon}}$ 的电路计算。根据引理 12.9，$w_{k-1} \in L_A^{R+}$。特别地，由于 $w_t x_t^{-1} = x_t^{-1} \notin L_A^{R+}$，必有 $k < t$。因此，可得 $w_{k-1} = w_k x_k^{-1} = x_t \ldots x_{k+1} x_k^{-1} \in L_A^{R+}$。但这样一来，$x_t \ldots x_k^{-1} = x_t^{-\delta_t} \ldots x_k^{-\delta_k}$中必然存在一次消去，从而字 $x_1^{\delta_1} \ldots x_t^{\delta_t}$中也存在一次消去。

因此，对于所有 $j \in \overline{t}$，$\delta_j = -1$，从而 $w = w_0 = x_t \ldots x_1 \in L_A^+$。

反之，固定 $w = y_1 \ldots y_t \in L_A^+$并将 w_j设为 w的前缀，使其满足 $|w_j| = j$，即对所有满足 $w_0 = 1$的 $j \in \overline{t}$ 都有 $w_j = y_1 \cdots y_j$。于是，由于对所有 $j \in \overline{t}$都有 $w_j \in L_A^+ \subseteq L_A^{R+}$，引理 12.9 得到一个电路

计算 $\gamma_{w_{j-1},\,y_j}$ 实现 $(w_{j-1},\ w_j)\ \in \mathrm{IO}^{s},\ s\,\mathrm{wacc}^{1,\ +}{}^{\varepsilon}$ 并满足

$$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}^{1,\varepsilon}_{+}}(\gamma_{w_{j-1},y_j}) \le 2|w_{j-1}|^{1+\varepsilon}+4 = 2(j-1)^{1+\varepsilon}+4$$
$$\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}^{1,\varepsilon}_{+}}(\gamma_{w_{j-1},y_j}) \le |w_{j-1}|+1 \le j$$

因此，令 γ_w 为计算 γ_{w_{j-1},y_j} （其中 $j \in \overline{t}$）的串接，则 γ_w 是实现 $(1,w)\ \in \mathrm{IO}^{s,s\ \mathrm{wacc}^{1,+}{}^{\varepsilon}}$ 的计算，并满足：

$$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}^{1,\varepsilon}_{+}}(\gamma_w) \le \sum_{j=1}^{t} 2(j-1)^{1+\varepsilon}+4 \le 2t^{2+\varepsilon}+4t \le 6t^{2+\varepsilon}$$
$$\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{wacc}^{1,\varepsilon}_{+}}(\gamma_w) = \max_{j\in\overline{t}} j \le t$$

现在，令 γ' 为逆计算 γ_w^{-1}与实现 $(1,1)\ \in \mathrm{IO}^{s,f\ \mathrm{wacc}^{1,+}{}^{\varepsilon}}$ 的计算的串接，且其支撑集为单条一般边 $(\hat{}s,\hat{}f,e_5)$。那么，γ'_w 实现 $(w,1)\ \in \mathrm{IO}^{s,f\ \mathrm{wacc}^{1,+}{}^{\varepsilon}}$，并满足 $\mathrm{tm}^{\mathcal{F}\ \mathrm{wacc}^{1,+}{}^{\varepsilon}}(\gamma'_w) \le 6t^{2+\varepsilon}+1$ 以及 $\mathrm{sp}^{\mathcal{F}\ \mathrm{wacc}^{1,+}{}^{\varepsilon}}(\gamma'_w) \le t$。

因此，$\mathrm{wacc}^{1,}{}_{+}{}^{\varepsilon}$ 确实是 L_A^+ 的弱接受器；又由于 $t=|w|$，根据 γ'_w 复杂度的界可得 $\mathrm{WTMSP}^{\mathcal{F}\ \mathrm{wacc}^{1}_{+}{}^{\varepsilon}} \preceq_{,}(n^{2+\varepsilon},n)$。由此，该结论可由引理 12.1、引理 12.7、命题 10.7 和引理 10.6 推出。

□

12.4. 正词的改进弱接受器。

现在以弱接受器 $\mathrm{wacc}^{1,\ +}{}^{\varepsilon}$ 为基础，迭代构造 L_A^+ 的弱接受器。这些操作称为 $\mathrm{wacc}^{d+1,}{}_{+}{}^{\varepsilon} = \mathrm{waccept}^{d+1,\ +}{}^{\varepsilon}(a)$，适用于所有 $d \in \mathbb{N}$，如下方图 15 所定义。

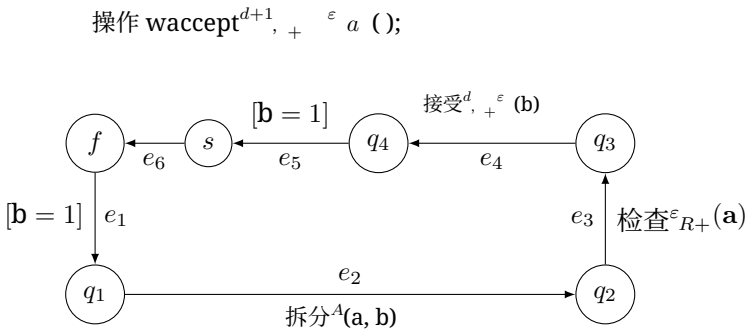


FIGURE 15. 语言 L_A^+ 的高效弱接受器。

该构造的归纳假设是，$\mathrm{wacc}^{d,\ +}{}^{\varepsilon}$ 是一个接受 L_A^+ 并满足弱图灵机空间复杂度 $_{\mathrm{wacc}^{d,\ +}{}^{\varepsilon}} \preceq (n^{\frac{d+1}{d}+\varepsilon},n)$的弱接受器。注意，引理 12.10 给出了这次归纳的基例，而引理 12.14 则证明了归纳步骤。

与第 11 节中计数器 $\mathrm{Counter}^{d+1}$ 的迭代构造一样，这些弱接受器将证明比 $\mathrm{waccept}^{1,\ +}{}^{\varepsilon}$ 更“高效”，这一点将在引理 12.14 和推论 11.7 中得到精确说明。

请注意，边 e_4 标记的是一个尚未定义的动作，即动作 $\mathrm{acc}^{d,\ +}{}^{\varepsilon} =$ 接受$^{d,\ +}{}^{\varepsilon}$。不过，与上文 $\mathrm{waccept}^{1,\ +}{}^{\varepsilon}$ 的情形一样，这里默认该动作对应于 L_A^+ 的接受器；该接受器来自命题 10.7 所得的迭代构造弱接受器 $\mathrm{waccept}^{d,\ +}{}^{\varepsilon}$。

按照命名约定，对于所有 d，$\mathrm{waccept}^{d+1,}{}_{+}{}^{\varepsilon}$ 的硬件与 $\mathrm{waccept}^{1,}{}_{+}{}^{\varepsilon}$ 的硬件相同。也就是说，$\mathcal{I}_{\mathrm{wacc}^{d+1,}{}_{+}{}^{\varepsilon}} = \mathcal{I}^{\mathrm{ext}}\ \mathrm{wacc}_{+}^{d+1\ \varepsilon} \sqcup \mathcal{I}^{\mathrm{int}}$、$\mathrm{wacc}^{d+1,+}{}^{\varepsilon}$，其中 $\mathcal{I}^{\mathrm{ext}}\ \mathrm{wacc}_{+}^{d+1\ \varepsilon} = \{a\}$，且$\mathcal{I}^{\mathrm{int}}\ \mathrm{wacc}_{+}^{d+1\ \varepsilon} = \{a\}$，；而 $\mathcal{A}_{\mathrm{wacc}^{d+1,+}{}^{\varepsilon}}(a) = \mathcal{A}_{\mathrm{wacc}^{d+1,+}{}^{\varepsilon}}(b) = A$。由于 e_6 标记为平凡作用，而 e_1, e_5^{-1} 包含守卫片段 $[b = 1]$，因此显然 $\mathrm{waccept}^{d+1,}{}_{+}{}^{\varepsilon}$ 满足条件 (O)。

令 $\mathcal{F}^{d+1}$ 为 $\mathrm{wacc}^{d+1,}{}_{+}{}^{\varepsilon}$ 的估计集，由 $\mathcal{F}^{d+1}{}_{\mathrm{split}} = (n, n)$、$\mathcal{F}^{d+1}{}_{\mathrm{ch}_{R+}} = (n^{1+\varepsilon}, n)$ 和 $\mathcal{F}^{d+1}{}_{\mathrm{acc}_{+}^{d\ \varepsilon}} = (n^{\frac{d+1}{d}+\varepsilon}, n)$ 给出。根据引理 12.1、引理 12.7、命题 10.7 以及归纳假设，对每个实例都有 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{inst}} \preceq \mathcal{F}^{d+1}_{\mathrm{inst}}$。

因此，根据引理 10.6，要证明引理 12.14，只需证明 $\mathrm{waccept}^{d+1,}{}_{+}{}^{\varepsilon}$ 是满足 $\mathrm{WTMSP}^{\mathcal{F}^{d+1}}{}_{\mathrm{wacc}_{+}^{d+1\ \varepsilon}} \preceq (n^{\frac{d+2}{d+1}+\varepsilon}, n)$ 的 L_A^+ 弱接受器。

As i在上一节关于 $\mathrm{wacc}^{1,}{}_{+}{}^{\varepsilon}$ 的讨论中，一个输入-输出计算 n

$$\gamma = \big((u_0, s_0), e_1', (u_1, s_1), e_2', \ldots, e_m', (u_m, s_m)\big)$$

$\mathrm{wacc}^{d+1,}{}_{+}{}^{\varepsilon}$ 的计算，如果 $s_i = (\mathrm{wacc}^{d+1,}{}_{+}{}^{\varepsilon})_s$ 当且仅当 $i = 0, m$，则称为电路计算。

设 $\rho = e_1', \ldots, e_m'$ 是一个一般路径，且对所有 i，都有 $e_i' = (\mathrm{sf}_i, \mathrm{sf}_i', e_i'')$。若对所有 i，都有 $\mathrm{sf}_i \neq \mathrm{sf}_i'$，则称 ρ 为适当泛型路径。因此，如果一个电路计算 γ 的计算路径是适当的，则称该电路计算为适当电路计算。

引理 12.11. 对于任意非平凡的适当电路计算 γ，存在 $w \in L_A^{R+}$ 和$p \in L_A^+$，使得 γ要么实现 $(w, wp) \in \mathrm{IO}^{s,\ s\ \mathrm{wacc}^{d+1,\ +}{}^{\varepsilon}}$，要么实现 $(wp, w) \in \mathrm{IO}^{s,\ s\ \mathrm{wacc}^{d+1,\ +}{}^{\varepsilon}}$。此外，对于每个 $w \in L_A^{R+}$ 和 $p \in L_A^+$，都存在一个适当电路计算 $\gamma_{w,\ p}$，它实现 $(w, wp) \in \mathrm{IO}^{s,\ s\ \mathrm{wacc}^{d+1,\ +}{}^{\varepsilon}}$，并满足以下界

$$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}^{d+1}}_{\mathrm{wacc}_{+}^{d+1,\varepsilon}}(\gamma_{w,p}) \leq 2|w|^{1+\varepsilon} + 2|p|^{\frac{d+1}{d}+\varepsilon} + 3$$

$$\mathrm{sp}^{\mathcal{F}^{d+1}}_{\mathrm{wacc}_{+}^{d+1,\varepsilon}}(\gamma_{w,p}) \leq |w| + |p|$$

证明. 设 $\gamma = \big((u_0, s_0)\ e_1'、(u_1, s_1)\ e_2'、\ldots\ldots、\ e_m'、(u_m, s_m)\big)$ 是一个适当电路计算。对于所有i，令 $u_i(a) = w_i$、$u_i(b) = v_i$，以及 $e_i' = (\mathrm{sf}_i, \mathrm{sf}_i', e_i'')$。

假设 $e_1 = (\hat{f}, \hat{s}, e_6)$，然后，令 $e_1 = (\hat{s}, \hat{f}, e_6^{-1})$。$\{$ $u_0 = u_1 = (w, 1)$。接着，由于 γ是真，必有 $e_2' = (\hat{f}, \hat{s}, e_4)$，$e_3' = (\hat{f}, \hat{s}, e_3)$，$e_4' = (\hat{f}, \hat{s}, e_2)$，$e_5' \in \{(\hat{f}, \hat{s}, e_1), (\hat{s}, \hat{f}, e_1^{-1})\}$，最后还有 $e_6' \in \{(\hat{f}, \hat{s}, e_6), (\hat{s}, \hat{f}, e_6^{-1})\}$。特别地，这意味着 $s_6 = (\mathrm{wacc}^{d+1,}{}_{+}{}^{\varepsilon})_s$，因此 $m = 6$。

设 $v = v_2$。根据定义接受器的 IO 关系，必然有 $v \in L_A^+$ 和 $w_2 = w$。类似地，检查器的定义意味着 $w \in L_A^{R+}$，且 $u_3 = u_2 = (w, v)$。

同样，标记 e_6 和 e_1 的 0 阶动作意味着 $u_4 = u_5 = u_6$，且 $v_4 = 1$。最后，引理 12.1 意味着 $wv = w_4 v_4 = w_4$。

因此，γ 实现了 $(w, wv) \in \mathrm{IO}^{s,\ s\ \mathrm{wacc}^{d+1,\ +}{}^{\varepsilon}}$，其中 $w \in L_A^{R+}$ 和 $v \in L_A^+$。

否则，$e_1' \in \{(\hat{s}, \hat{f}, e_6)、(\hat{f}, \hat{s}, e_6^{-1})\}$。由此，同样的推理可知，$m = 6$和$e_6' \in \{(\hat{s}, \hat{f}, e_5)、(\hat{f}, \hat{s}, e_5^{-1})\}$。

因此，逆计算 γ^{-1} 是一个适当电路计算，其计算路径上的第一条一般边为$(\hat{f}, \hat{s}, e_5)$或$(\hat{s}, \hat{f}, e_5^{-1})$。但是，对于 $w = w_6$，由上述论证可知，γ^{-1} 实现了$(w, wv) \in \mathrm{IO}^{s,\ s\ \mathrm{wacc}^{d+1,\ +}\ ^{\varepsilon}}$ 对于 $w \in L_A^{R+}$ 和 $v' \in L_A^+$。因此，γ 实现了$(wv, w) \in \mathrm{IO}^{s,\ s\ \mathrm{wacc}_+^{d+1,\ \varepsilon}}$.

反过来，考虑一般路径：

$$\rho = (\hat{f}, \hat{s}, e_5), (\hat{f}, \hat{s}, e_4), (\hat{f}, \hat{s}, e_3), (\hat{f}, \hat{s}, e_2), (\hat{f}, \hat{s}, e_1), (\hat{f}, \hat{s}, e_6)$$

注意，ρ是适当泛型路径。令 $\rho = e'_1$、……、e'_6。

那么，对于任意 $w \in L_A^{R+}$ 和 $p \in L_A^+$，ρ 支持如下电路计算：

$$\begin{aligned}\gamma_{w,p} = \big(((w,1),(\mathrm{wacc}_+^{d+1,\varepsilon})_s), e'_1, ((w,1),q_4), e'_2, ((w,p),q_3), e'_3, ((w,p),q_2), e'_4,\\ ((wp,1),q_1), e'_5, ((wp,1),(\mathrm{wacc}_+^{d+1,\varepsilon})_f), e'_6, ((wp,1),(\mathrm{wacc}_+^{d+1,\varepsilon})_f)\big)\end{aligned}$$

因此，$\gamma_{w,\ p}$ 是实现 $(w, wp) \in \mathrm{IO}^{s,\ s\ \mathrm{wacc}^{d+1,\ +}\ ^{\varepsilon}}$ 的适当电路计算，并满足：

$$\begin{aligned}\mathrm{tm}^{\mathcal{F}^{d+1}}_{\mathrm{wacc}_+^{d+1,\varepsilon}}(\gamma_{w,p}) &= 1 + |p|^{\frac{d+1}{d}+\varepsilon} + |w|^{1+\varepsilon} + (|w| + |p|) + 1 + 1\\ &\le 2|p|^{\frac{d+1}{d}+\varepsilon} + 2|w|^{1+\varepsilon} + 3\\ \mathrm{sp}^{\mathcal{F}^{d+1}}_{\mathrm{wacc}_+^{d+1,\varepsilon}}(\gamma_{w,p}) &= |w| + |p|\end{aligned}$$

□

下面的命题是引理 12.6 和引理 12.8 的类似结果：

引理 12.12. 设 $\gamma = \big((u_0, s_0)\ e'_1, (u_1, s_1)\ e'_2, \ldots, e'_m, (u_m, s_m)\big)$ 是 $\mathrm{wacc}^{d+1,\ +}\ ^{\varepsilon}$的一次电路计算，其中对所有 i 都有 $e'_i = (\mathrm{sf}_i, \mathrm{sf}'_i, e''_i)$。假设 γ 的计算路径在所有实现 $(u_0(a)\ u_m(a)) \in \mathrm{IO}^{s,\ s\ \mathrm{wacc}^{d+1,\ +}\ ^{\varepsilon}}$ 的电路计算中长度最小。那么，对所有 i:

(1) 若 $e''_i \notin \{e_2, e_4\}$，则 $\mathrm{sf}_i \neq \mathrm{sf}'_i$(2) 若 $e''_i = e_4$ 且 $\mathrm{sf}_i = \mathrm{sf}'_i$，则 $\mathrm{sf}_i = \hat{s}$(3) 若 $e''_i = e_2$ 且 $\mathrm{sf}_i = \mathrm{sf}'_i$，则 $\mathrm{sf}_i = \hat{f}$(4) $e''_i \neq e''_{i+1}$(5) 若 $e''_i \in E^{0\ \mathrm{wacc}^{d+1,\ +}\ ^{\varepsilon}}$，则 $e''_{i+1} \neq (e''_i)^{-1}$

证明。与引理 12.6 和 12.8 的证明类似，对于所有 $i, j \in 0, m$ with $i \neq j$，$(u_i, s_i) \neq (u_j, s_j)$。于是，与那些情形一样，(1) 可由检查器和 0 度动作的 IO 关系的定义推出。

类似地，如果 $e''_i = e_4$ and $\mathrm{sf}_i = \mathrm{sf}'_i = \hat{f}$，那么定义接受器的 IO 关系的定义给出 $u_{i-1} = u_i$ and $s_{i-1} = q_4 = s_i$。因此，(2) 必须成立。

现在，假设 $e''_i = e_2$ and $\mathrm{sf}_i = \mathrm{sf}'_i = \hat{s}$。那么，与引理 12.8(1) 的证明类似，可得$e''_{i-1} = e''_{i+1} = e_1$，因此 $u_{i-1}(b) = 1 = u_i(b)$。但引理 12.1 蕴含 $(u_{i-1}, s_{i-1}) = (u_i, s_i)$。因此，(3) 必须成立。

最后，由于$\mathcal{G}_{\mathrm{wacc}^{d+1,+}\ ^{\varepsilon}}$ 中没有环，(4) 和 (5) 可由针对引理 12.8 的条件 (2) 和 (3) 所给出的相同证明得出。

□

引理 12.13. 对于每个 $(w, w') \in \mathrm{IO}^{s,\ s\ \mathrm{wacc}^{d+1,\ +}\ ^{\varepsilon}}$，都存在一个具有真计算路径的实现计算。

证明. 若 $w = w'$，则一个平凡计算实现 $(w, w') \in \mathrm{IO}^{s,\ s\ \mathrm{wacc}^{d+1,\ +}\ \varepsilon}$。因此，由于平凡的一般路径显然是真路径，该命题成立。

现在，假设 $w \neq w'$ 并令 $\gamma = \big((u_0, s_0)\ e'_1, (u_1, s_1)\ e'_2, \ldots, e'_m, (u_m, s_m)\big)$ 为实现 $(w, w') \in \mathrm{IO}^{s,\ s\ \mathrm{wacc}^{d+1,\ +}\ \varepsilon}$ 的一次计算，其计算路径 ρ 长度最小。与前面的情形一样，对所有 i，令 $w_i = u_i$ (a)、$v_i = u_i(b)$ 和 $e'_i = (\mathrm{sf}_i, \mathrm{sf}'_i, e''_i)$。

令 $j_0, \ldots, j_t \in \overline{0,m}$ 为由条件 $s_i = (\mathrm{wacc}^{d+1,\ +}\ \varepsilon)_s$ 当且仅当 $i = j_k$ 对某个 $k \in 0, t$ 成立所给出的递增序列。因此，$j_0 = \overline{0}$ 且 $j_t = m$。

对于所有 $i \in \overline{t}$，定义一般路径 $\rho_i = e'_{j_{i-1}+1}, \ldots, e'_{j_i}$。那么，$\rho_i$ 支持 γ 的一个子计算γ_i，该子计算实现了 $(w_{j_{i-1}}, w_{j_i}) \in \mathrm{IO}^{s,\ s\ \mathrm{wacc}^{d+1,\ +}\ \varepsilon}$。注意，根据指标 $j_0, \ldots, j_r$ 的定义，γ_i 是一次电路计算。

假设 ρ 不是适当泛型路径 .

对于任意满足 $\mathrm{sf}_\ell = \mathrm{sf}'_\ell$ 的索引 $\ell \in \overline{m}$，存在一个索引 $k \in \overline{t}$，使得 $j_{k-1} < \ell \leq j_k$。那么，由于 γ_k 必须是具有最小长度计算路径的电路计算，引理 12.12 ^ ^ 表明，要么 $e'_\ell = (\hat{s}, \hat{s}, e_4)$，要么 $e'_\ell = (f, f, e_2)$。

令 ℓ 为满足 $\mathrm{sf}_\ell = \mathrm{sf}'_\ell$ 的最小索引。然后，令 $\rho'_{k,\ 1}$ 和 $\rho'_{k,\ 2}$ 为一般路径，使得 $\rho_k = \rho'_{k,\ 1}, e'_\ell, \rho'_{k,\ 2}$。

首先，假设 $e'_\ell = (\hat{s}, \hat{s}, e_4)$。那么，$s_{\ell-1} = s_\ell = q_3$ 和 $w_{\ell-1} = w_\ell$，因此 γ_k 的极小性推出 $v_{\ell-1} \neq v_\ell$。定义接受器的 IO 关系接着意味着 $v_{\ell-1}, v_\ell \in L_A^+$。令$u'_\ell = (w_{\ell-1}, 1) = (w_\ell, 1)$，并令 $s'_\ell = (\mathrm{wacc}^{d+1,\ +}\ \varepsilon)_s$。

^ ^ ^ ^ 考虑一般路径 $\rho''_{k,\ 1} = (\hat{s}, f, e_4)$、$(\hat{s}, f, e_5)$ 以及 $\rho''_{k,\ 2} = (f, \hat{s}, e_5)$、$(f, \hat{s}, e_4)$。那么，它们各自都是真路径，其中 $\rho''_{k,\ 1}$ 支持在 $(u_{\ell-1}, s_{\ell-1})$ 与 (u'_ℓ, s'_ℓ) 之间的一次计算，而 $\rho''_{k,\ 2}$支持在 (u'_ℓ, s'_ℓ) 与 (u_ℓ, s_ℓ) 之间的一次计算。

^ ^ 反过来，假设 $e'_\ell = (f, f, e_2)$。那么，根据引理 12.1，存在一个字 $w''_\ell \in L_A$，使得 $w''_\ell = w_{\ell-1}v_{\ell-1} = w_\ell v_\ell$。令 $u'_\ell = (w'', 1)$，并令 $s'_\ell = (\mathrm{wacc}^{d+1}{}_{,+}\ \varepsilon)_s$。在这种情况下，定义真泛型路径 $\rho''_{k,1} = (f, \hat{s}, e_2)$、$(f, \hat{s}, e_1)$、$(f, \hat{s}, e_6)$，以及 $\rho''_{k,2} = (\hat{s}, f, e_6)$、$(\hat{s}, f, e_1)$、$(\hat{s}, f, e_2)$。然后，如上所述，$\rho''_{k,1}$ 支持在 $(u_{\ell-1}, s_{\ell-1})$ 与 (u'_ℓ, s'_ℓ) 之间的计算，而 $\rho''_{k,2}$ 支持在 (u'_ℓ, s'_ℓ) 与 (u_ℓ, s_ℓ) 之间的计算。

无论哪种情况，对于一般路径 $\rho_{k,1} = \rho'_{k,1}, \rho''_{k,1}$ 和 $\rho_{k,2} = \rho''_{k,2}, \rho'_{k,2}$，可知 $\rho_{k,1}$支持一个在 $(u_{j_{k-1}}, s_{j_{k-1}})$ 和 (u'_ℓ, s'_ℓ) 之间的电路计算 $\gamma_{k,1}$，而 $\rho_{k,2}$ 支持一个在 (u'_ℓ, s'_ℓ) 和 (u_{j_k}, s_{j_k}) 之间的电路计算 $\gamma_{k,2}$。

因此，令 ρ' 为将 ρ 中的一般边 e'_ℓ替换为一般子路径 $\rho''_{k,1}, \rho''_{k,2}$后得到的一般路径，可知 ρ' 支持一个实现 $(w, w') \in \mathrm{IO}^{s,s\ \mathrm{wacc}^{d+1,+}\ \varepsilon}$ 的计算 γ'。此外，ρ'中任何形如 $(\mathrm{sf}, \mathrm{sf}\ e)$ 的一般边必定是 $(\hat{s}, \hat{s}, e_4)$ 或 $(\hat{f}, \hat{f}, e_2)$，而构成 ρ'的此类一般边的数量比构成 ρ的少一个。

因此，通过反复执行上述过程即可得到该结论。 □

引理 12.14. 真操作 $\mathrm{wacc}^{d+1,\ +}\ \varepsilon$ 是正词L_A^+集合的弱接受器，并满足弱图灵机空间复杂度 $\mathrm{wacc}^{d+1,\ +}\ \varepsilon \preceq (n^{\frac{d+2}{d+1}+\varepsilon}, n)$。

证明。与引理 12.10 中一样，标记边 e_6 的平凡作用立即推出 IO 关系与状态无关，即 $\mathrm{IO}^{s,\ s\ \mathrm{wacc}^{d+1}_{+}\ \varepsilon} = \mathrm{IO}^{s,\ f\ \mathrm{wacc}^{d+1}_{+}\ \varepsilon} = \mathrm{IO}^{f,\ f\ \mathrm{wacc}^{d+1,\ +}\ \varepsilon}$。

假设对于某个 $w \neq 1$，有 $(1, w) \in \mathrm{IO}^{s,s\ \mathrm{wacc}^{d+1}_{+}}$。根据引理 12.13，存在一个计算 γ，它实现 $(1, w) \in \mathrm{IO}^{s,s\ \mathrm{wacc}^{d+1,+}\ \varepsilon}$，其计算路径 ρ 是真路径。

如引理 12.13 的证明中那样，设 $\gamma = \big((u_0, s_0)\ e'_1,(u_1, s_1)\ e'_2, \ldots, e'_m,(u_m, s_m)\big)$ 是一个计算，其中 $w_i = u_i(a)$、 $v_i = u_i(b)$，且 $e'_i = (\mathsf{sf}_i,\mathsf{sf}'_i, e''_i)$。此外，设 $j_0, \ldots, j_t \in 0, m$ 为满足以下条件的递增指标序列： $s_i = (\mathsf{wacc}^{d+1}{}_{,+}{}^{\varepsilon})_s$ 当且仅当存在某个 $k \in 0, t$ 使得 $i = j_k$。特别地，$j_0 = 0$ 且 $j_t = m$。

不失一般性，假设对于所有实现 $(1, w) \in \mathsf{IO}^{s,\ s\,\mathrm{wacc}^{d+1},\ +}{}^{\varepsilon}$ 且其计算路径为真的计算， t 的值最小。也就是说， γ 由数量最少的真电路计算组成。注意到，由于 $w \neq 1$，显然有 $t \geq 1$。

对于所有 $i \in \overline{t}$，令 $\rho_i = e'_{j_{i-1}+1}$、……、 e'_{j_i}。那么， ρ_i 支持一个实现 $(w_{j_{i-1}}, w_{j_i}) \in \mathsf{IO}^{s,\ s\,\mathrm{wacc}^{d+1},\ +}{}^{\varepsilon}$ 的真电路计算 γ_i。特别地， γ_1 是一个实现 $(1, w_{j_1}) \in \mathsf{IO}^{s,\ s\,\mathrm{wacc}^{d+1},\ +}{}^{\varepsilon}$ 的真电路计算。

如果 $w_{j_1} = 1$，那么真一般路径 ρ_2、……、 ρ_t 支持一个实现 $(1, w) \in \mathsf{IO}^{s,\ s\,\mathrm{wacc}^{d+1},\ +}{}^{\varepsilon}$ 的计算 γ'。然而，此时 γ' 由真电路计算 γ_2、……、 γ_t 组成，这与组成 γ 的真电路计算数量的极小性相矛盾。

因此， $w_{j_1} \neq 1$。由引理 12.11 可知，存在 $w' \in L_A^{R+}$ 和 $p \in L_A^+$，使得 $(w', w'p) = (1, w_{j_1})$ 或 $(w'p, w') = (1, w_{j_1})$。若后者成立，则对于 $p \in L_A^+$， $w' = p^{-1}$。但这只有在 $p = 1$ 时才会发生，而此时 $w_{j_1} = w' = 1$。因此， $(w', w'p) = (1, w_{j_1})$，从而 $w_{j_1} = p \in L_A^+$。

现在，假设 $t \geq 2$。那么， γ_2 是一个适当电路计算，实现了 $(w_{j_1}, w_{j_2}) \in \mathsf{IO}^{s,\ s\,\mathrm{wacc}^{d+1},\ +}{}^{\varepsilon}$，因此由引理 12.11 可知，存在 $w'' \in L_A^{R+}$ 和 $p' \in L_A^+$，使得 $(w'', w''p') = (w_{j_1}, w_{j_2})$ 或 $(w''p', w'') = (w_{j_1}, w_{j_2})$。在第一种情况下， $w'' = w_{j_1} \in L_A^+$，从而 $w_{j_2} = w''p' \in L_A^+$；在后一种情况下， $w'' \in L_A^{R+}$ 且 $w''p' = w_{j_1} \in L_A^+$，因此由引理 12.2 可得 $w_{j_2} = w'' \in L_A^+$。

于是，引理 12.11 蕴含存在一个适当电路计算 $\gamma_{1,\ w_{j_2}}$，它实现 $(1, w_{j_2}) \in \mathsf{IO}^{s,\ s\,\mathrm{wacc}^{d+1},\ +}{}^{\varepsilon}$。令 ρ'_2 为 $\gamma_{1,\ w_{j_2}}$ 的计算路径，则适当泛型路径 $\rho'_2, \rho_3, \ldots, \rho_t$ 支持一个实现 $(1, w) \in \mathsf{IO}^{s,\ s\,\mathrm{wacc}^{d+1},\ +}{}^{\varepsilon}$ 的计算 γ'。但这样一来， γ' 就由适当电路计算 $\gamma_{1,\ w_{j_2}}, \gamma_3, \ldots, \gamma_t$ 组成，这再次与构成 γ 的适当电路计算数量的极小性矛盾。

因此， $t = 1$，所以 γ 本身就是一个适当电路计算。但随后，如同上文关于 γ_1 的论证，可以推出 $w \in L_A^+$。

反过来，对于所有 $w \in L_A^+$，引理 12.11 给出一个实现 $(1, w) \in \mathsf{IO}^{s,\ s\,\mathrm{wacc}^{d+1},\ +}{}^{\varepsilon}$ 的计算 $\gamma_{1,\ w}$。根据 IO 关系的对称性，

$$\mathsf{IO}^{s,f}_{\mathrm{wacc}_+^{d+1,\varepsilon}} \cap \{(w,1) \mid w \in L_A\} = \mathsf{IO}^{s,s}_{\mathrm{wacc}_+^{d+1,\varepsilon}} \cap \{(w,1) \mid w \in L_A\} = \{(w,1) \mid w \in L_A^+\}$$

因此，$\mathsf{wacc}^{d+1}{}_{,+}{}^{\varepsilon}$ 确实是 L_A^+ 的弱接受器。

因此，根据归纳假设以及本节引言中的讨论，只需证明 $\mathsf{WTMSP}^{\mathcal{F}^{d+1}}{}_{\mathrm{wacc}_+^{d+1}}{}^{\varepsilon} \preceq (n^{\frac{d+2}{d+1}+\varepsilon}, n)$。

现在，令 $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ 和 $w = x_1 \ldots x_n \in L_A^+$ 满足 $x_1, \ldots, x_n \in A$。对于所有满足 $\ell < r$ 的 $\ell, r \in \overline{n}$，令 $w_{\ell,r} = x_{\ell+1} \ldots x_r$。此外，对于所有 $r \in \overline{n}$，令 $w_r = x_1 \ldots x_r$，其中 $w_0 = 1$。

于是，对于所有满足 $\ell < r$ 的 ℓ、 $r \in 0$、 n，由引理 12.11 可得一个适当电路计算 $\gamma_{\ell,\ r} := \gamma_{w_\ell,\ w_{\ell,\ r}}$，它实现 $(w_\ell, w_r) \in \mathsf{IO}^{s,\ s\,\mathrm{wacc}^{d+1},\ +}{}^{\varepsilon}$ 并满足：

$$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}^{d+1}}_{\mathrm{wacc}^{d+1,\varepsilon}_{+}}(\gamma_{\ell,r}) \leq 2|w_\ell|^{1+\varepsilon} + 2|w_{\ell,r}|^{\frac{d+1}{d}+\varepsilon} + 3 \leq 2\ell^{1+\varepsilon} + 2(r-\ell)^{\frac{d+1}{d}+\varepsilon} + 3$$
$$\mathrm{sp}^{\mathcal{F}^{d+1}}_{\mathrm{wacc}^{d+1,\varepsilon}_{+}}(\gamma_{\ell,r}) \leq |w_\ell| + |w_{\ell,r}| = \ell + (r-\ell) = r \leq n$$

现在，令 $\alpha = \frac{d}{d+1}$ 和 $t = \lceil n^\alpha \rceil$。令 $k \in \mathbb{N}$ 为满足 $kt \leq n$ 的最大正整数。注意，由于 $n^{1-\alpha}t \geq n^{1-\alpha}n^\alpha = n$，必有 $k \leq n^{1-\alpha}$。于是，对于每个 $m \in \overline{k}$，可得 $\gamma_{(m-1)t,\ mt}$ 是一个适当计算，它实现 $(w_{(m-1)t}, w_{mt}) \in \mathsf{IO}^{s,\ s\ \mathrm{wacc}^{d+1,\ +}_{\varepsilon}}$ 且满足：

$$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}^{d+1}}_{\mathrm{wacc}^{d+1,\varepsilon}_{+}}(\gamma_{(m-1)t,mt}) \leq 2((m-1)t)^{1+\varepsilon} + 2t^{\frac{d+1}{d}+\varepsilon} + 3$$
$$\mathrm{sp}^{\mathcal{F}^{d+1}}_{\mathrm{wacc}^{d+1,\varepsilon}_{+}}(\gamma_{(m-1)t,mt}) \leq n$$

最后，存在一个计算 $\gamma_{kt,\ n}$ 实现 $(w_{kt}, w) \in \mathsf{IO}^{s,\ s\ \mathrm{wacc}^{d+1,\ +}_{\varepsilon}}$ 并满足：

$$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}^{d+1}}_{\mathrm{wacc}^{d+1,\varepsilon}_{+}}(\gamma_{kt,n}) \leq 2(kt)^{1+\varepsilon} + 2t^{\frac{d+1}{d}+\varepsilon} + 3$$
$$\mathrm{sp}^{\mathcal{F}^{d+1}}_{\mathrm{wacc}^{d+1,\varepsilon}_{+}}(\gamma_{kt,n}) \leq n$$

因此，将 $\gamma_{0,\ t}, \ldots, \gamma_{(k-1)t,\ kt}, \gamma_{kt,\ n}$ 连接起来得到的计算 γ'_w 是一个实现 $(1, w) \in \mathsf{IO}^{s,\ s\ \mathrm{wacc}^{d+1,\ +}_{\varepsilon}}$ 并满足以下条件的计算：

$$\begin{aligned}
\mathrm{tm}^{\mathcal{F}^{d+1}}_{\mathrm{wacc}^{d+1,\varepsilon}_{+}}(\gamma'_w) &\leq \left(\sum_{m=1}^{k} \mathrm{tm}^{\mathcal{F}^{d+1}}_{\mathrm{wacc}^{d+1,\varepsilon}_{+}}(\gamma_{(m-1)t,mt})\right) + \mathrm{tm}^{\mathcal{F}^{d+1}}_{\mathrm{wacc}^{d+1,\varepsilon}_{+}}(\gamma_{kt,n}) \\
&\leq \left(\sum_{m=1}^{k} 2((m-1)t)^{1+\varepsilon} + 2t^{\frac{d+1}{d}+\varepsilon} + 3\right) + 2(kt)^{1+\varepsilon} + 2t^{\frac{d+1}{d}+\varepsilon} + 3 \\
&\leq 2k(kt)^{1+\varepsilon} + 2kt^{\frac{d+1}{d}+\varepsilon} + 3(k+1)
\end{aligned}$$
$$\mathrm{sp}^{\mathcal{F}^{d+1}}_{\mathrm{wacc}^{d+1,\varepsilon}_{+}}(\gamma'_w) \leq \max_{m \in \overline{k}} \left(\mathrm{sp}^{\mathcal{F}^{d+1}}_{\mathrm{wacc}^{d+1,\varepsilon}_{+}}(\gamma_{(m-1)t,mt}), \mathrm{sp}^{\mathcal{F}^{d+1}}_{\mathrm{wacc}^{d+1,\varepsilon}_{+}}(\gamma_{kt,n})\right) \leq n$$

由于 $k \leq n^{1-\alpha}$ 和 $kt \leq n$，$k(kt)^{1+\varepsilon} \leq n^{1-\alpha}n^{1+\varepsilon}$。

此外，由于 $t \leq n^\alpha + 1 \leq 2n^\alpha$ 和 $\frac{d+1}{d} + \varepsilon \leq 3$，可得

$$2kt^{\frac{d+1}{d}+\varepsilon} \leq 2n^{1-\alpha}(2n^\alpha)^{\frac{d+1}{d}+\varepsilon} \leq 2n^{1-\alpha}2^3 n^{\alpha\frac{d+1}{d}+\alpha\varepsilon} \leq 16n^{1-\alpha}n^{1+\alpha\varepsilon}$$

最后，注意到 $k \leq n^{1-\alpha} \leq n^{1-\alpha}n^{1+\varepsilon}$，因此 $3(k+1) \leq 3n^{1-\alpha}n^{1+\varepsilon} + 3$。因此，

由于 $\alpha < 1$，可得：

$$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}^{d+1}}_{\mathrm{wacc}^{d+1,\varepsilon}_{+}}(\gamma'_w) \leq 21n^{1-\alpha}n^{1+\varepsilon} + 3 = 21n^{\frac{d+2}{d+1}+\varepsilon} + 3$$

因此，令 ρ_w 为支持 γ'_w 的一般路径 ρ_w^{-1} 的计算路径，则 $(\hat{s}, \hat{f}, e_6)$ 支持一个计算 γ_w，该计算实现 $(w, 1) \in \mathsf{IO}^{s,\ f\ \mathrm{wacc}^{d+1,\ +}_{\varepsilon}}$ 并满足：

$$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}^{d+1}}_{\mathrm{wacc}^{d+1,\varepsilon}_{+}}(\gamma_w) \leq 21|w|^{\frac{d+2}{d+1}+\varepsilon} + 4$$
$$\mathrm{sp}^{\mathcal{F}^{d+1}}_{\mathrm{wacc}^{d+1,\varepsilon}_{+}}(\gamma_w) \leq |w|$$

因此，由于平凡计算 γ_1 实现了 $(1, 1) \in \mathsf{IO}^{s,\ f\ \mathrm{wacc}^{d+1,\ +}_{\varepsilon}}$，弱图灵机空间复杂度 $\mathcal{F}^{d+1}\ \mathrm{wacc}^{d+1\ \varepsilon}_{+} \preceq_{,} (n^{\frac{d+2}{d+1}+\varepsilon}, n)$。

□

推论 12.15。对于任意字母表 A 和任意 $\varepsilon > 0$，都存在一个接受器 $\mathsf{accept}^{\varepsilon}_{A+}$，其对应于 L^+_A，使得 $\mathsf{TMSP}_{\mathrm{accept}^{\varepsilon}_{A+}} \preceq (n^{1+\varepsilon}, n)$。

证明。由归纳法可知，对于所有 $d \in \mathbb{N} - \{0\}$，引理 12.14 给出了一个弱接受器 $\mathsf{wacc}^{d\,\varepsilon/2}_{+}$，其识别 L^+_A，且其弱时间-空间复杂度渐近有界于 $(n^{1+\frac{1}{d}+\frac{\varepsilon}{2}}, n)$。因此，令 $d \geq 2/\varepsilon$，可得 $\mathsf{wacc}^{d\,\varepsilon/2}_{+}$，满足 $\mathsf{WTMSP}_{\mathrm{wacc}^{d,\ \varepsilon/2}_{+}} \preceq (n^{1+\varepsilon}, n)$。

然而，命题 10.7 构造出相应的接受器 $\mathsf{accept}^{\varepsilon}_{A+}$，其识别 L^+_A 并满足该陈述。□

13. Simulating Turing machines

13.1. 图灵机。

如引言中所述，定理 1.1（实际上也是本手稿）的目标，是构造一台 S-机器（借助 S-图），以某种意义“模拟”给定的多带非确定性图灵机。为此，本节将介绍讨论图灵机所需的框架。此处给出的图灵机定义与 [14] 和 [7], 中所用的定义相似；引理 13.2 是一个有用的工具，可用于简化相关考量。

定义 13.1（图灵机）。具有 k 条带和 k 个读写头的多带图灵机是一个六元组 $M = \langle A, Y, Q, \Theta, \vec{s}_1, \vec{s}_0 \rangle$，其中 A 是输入字母表，$Y = \cup_{i=1}^{k} Y_i$ 是带字母表（满足 $A \subseteq Y_1$），$Q = \cup_{i=1}^{k} Q_i$ 是机器读写头的状态集合，Θ 是转移（或指令）的集合，$\vec{s}_1$ 是初始状态的 k 维向量，$\vec{s}_0$ 是接受状态的 k 维向量。

在 M 中，带 i 的配置是形如 $U = uqv$ 的字，其中 u 和 v 是由 Y_i 组成的词，且 $q \in Q_i$。因此，M 的配置是形如 $C = \alpha U_1 \omega \alpha U_2 \omega \ldots \alpha U_k \omega$ 的字，其中 α 和 ω 是固定符号，每个 $U_i = u_i q_i v_i$ 都是带 i 的配置。C 的大小为 $|C| = \sum_i (|u_i| + |v_i|)$。

从本质上说，M 的配置决定了机器在某个给定实例下的状态。可以将其理解为：每条带最左端和最右端的方格始终分别标记为 α 和 ω，而第 i条带的读写头位于两个方格之间，这两个方格分别包含 u_i 的最后一个字母（若 u_i 为空，则为 α）和 v_i 的第一个字母（若 v_i 为空，则为 ω）。因此，u_i 和v_i 分别是写在第 i条带读写头左侧和右侧的词，而q_i 则是此时第 i个读写头的状态。

M 的一次转移由读写头的状态以及读写头观察到的 $2k$ 字母决定。转移的结果是，部分 $2k$ 字母可以被替换为相应字母表中的其他字母，可以在 α 和 ω之间添加新的方格，读写头可以向左或向右移动一个方格，状态也可以改变。

特别地，转移的形式为

$$\theta = [a_1 q_1 b_1 \to a'_1 q'_1 b'_1, \ldots, a_k q_k b_k \to a'_k q'_k b'_k]$$

其中：

- $q_i, q'_i \in Q_i$，
- a_i, a'_i 各自为空、是 Y_i中的一个字母，或为 α，并且
- b_i, b'_i 各自为空、是 Y_i中的一个字母，或为 ω。

那么，当且仅当对于所有 i，且满足以下条件时，称配置 $C = \alpha U_1 \omega \ldots \alpha U_k \omega$ 是 θ-可应用的：$U_i = u_i q_i v_i$

- u_i 以 a_i 结束，当 $a_i \in Y_i$ 时，

• u_i 为空，当 $a_i = \alpha$ 时，
若 b_i，则• v_i 以 $b_i \in Y_i$开头，并且
若 $b_i = \omega$，则• v_i 为空。

在这种情况下， θ 应用于 C 的结果是配置

$$C \cdot \theta = \alpha U_1' \omega \dots \alpha U_k' \omega$$

使得对于所有 i，都有 $U_i' = u_i' q_i' v_i'$；其中 u_i' 和 v_i' 是通过以自然的方式将 a_i 和b_i 分别替换为 a_i' 和 b_i'，从 u_i 和 v_i 得到的。

注意，对于任意命令 θ，都可以构造出逆转移

$$\theta^{-1} = [a_1' q_1' b_1' \to a_1 q_1 b_1, \dots, a_k' q_k' b_k' \to a_k q_k b_k]$$

以下观察说明了采用这一术语的理由：配置 C 是 θ-可适用的，当且仅当 $C \cdot \theta$ 是 θ^{-1}-可适用的，其中 $(C \cdot \theta) \cdot \theta^{-1} = C$。

若图灵机 M 在逆运算下封闭，即 $\theta \in \Theta$ 当且仅当 $\theta^{-1} \in \Theta$，则称其为对称的。

M 的一次计算是一个序列 $\mathcal{C}$： $C_0 \to C_1 \to C_2 \to \dots \to C_n$，使得对于每个 $i \in \overline{n}$，存在 $\theta_i \in \Theta$ 满足 $C_i = C_{i-1} \cdot \theta_i$。在这种情况下， $\mathcal{C}$ 的时间和空间分别定义为 $\mathsf{tm}(\mathcal{C}) = n$ 和 $\mathsf{sp}(\mathcal{C}) = \max |C_i|$。

M 的一个输入构型是形如 $\alpha U_1 \omega \dots \alpha U_k \omega$ 的配置，其中 $U_i = u_i q_i^s v_i$，且 $(q_1^s, \dots, q_k^s) = \vec{s}_1$， v_i 对所有 $i \in \overline{k}$ 都为空， u_j 对 $j \neq 1$ 为空，并且 u_1 是字 A 上的一个字。注意，输入构型由字 u_1 唯一确定；相应地，这样的配置记作 $I(u_1)$。

M的接受构型是形如 $\alpha U_1 \omega \dots \alpha U_k \omega$ 的配置，其中 $U_i = u_i q_i^a v_i$满足条件：$(q_1^a, \dots, q_k^a) = \vec{s}_0$。

于是， M的语言（记作 L_M）是由满足以下条件的字 w构成的集合：这些字属于 A，且存在 w 的接受计算，即存在一个计算 $\mathcal{C}$： $C_0 \to C_1 \to \dots C_n$，满足 $C_0 = I(w)$，并且C_n 是一个接受构型。

对于 $w \in L_M$， w的时间和空间（分别记作 $\mathsf{tm}_M(w)$ 和 $\mathsf{sp}_M(w)$）是其接受计算所需的最少时间和空间。于是， M的时间和空间函数（记作 TM_M、SP_M： $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$）定义为它们在 S-机器和接受器中的类似结果，即

$$\mathsf{TM}_M(n) = \max\{\mathrm{tm}_M(w) \mid w \in L_M,\ |w| \leq n\}$$
$$\mathsf{SP}_M(n) = \max\{\mathrm{sp}_M(w) \mid w \in L_M,\ |w| \leq n\}$$

与此前的情形一样，这些函数都是增长函数，因此可以按照预序 $\preceq$ 和 $\preceq_1$进行分析，也可以只考虑相应的等价类。

请注意，所给出的图灵机定义一般具有非确定性：虽然转移在适用于某个配置时以固定方式作用，因而在此意义下是“确定性的”，但一个配置可能对若干不同的 $\theta \in \Theta$ 都是 θ-适用的。因此，时间函数和空间函数仅仅度量接受给定字时的“一条最优路径”。

下面的陈述提供了一个更简单的环境，用于研究图灵机。在更一般环境下的证明可见 [14], ，而该陈述可与 [7] 的引理 5.1 进行比较。

引理 13.2（ [14] 中的引理 3.1）。对于每个语言为 L_M 的图灵机 M，都存在一个具有以下性质的图灵机 M'：
(a) $L_{M'} = L_M$。 (b) M' 是对称的。 (c) $\mathsf{TM}_{M'} \sim_1 \mathsf{SP}_{M'} \sim_1 \mathsf{TM}_M$。 (d) 对于任意接受计算 $\mathcal{C}$： $C_0 \to C_1 \to \dots \to C_n$， C_n 是空的接受配置，即 $C_n = \alpha q_1^a \omega \dots \alpha q_k^a \omega$。

(e) M' 的每个转移或其逆都属于以下两种形式之一，其中 i:

$$[q_1\omega \to q_1'\omega, \ldots, q_{i-1}\omega \to q_{i-1}'\omega,\ aq_i\omega \to q_i'\omega,\ q_{i+1}\omega \to q_{i+1}'\omega, \ldots] \tag{1}$$

$$[q_1\omega \to q_1'\omega, \ldots, q_{i-1}\omega \to q_{i-1}'\omega,\ \alpha q_i\omega \to \alpha q_i'\omega,\ q_{i+1}\omega \to q_{i+1}'\omega, \ldots] \tag{2}$$

其中 $a \in Y_i$和 $q_j, q_j' \in Q_j$。

13.2. 图灵重写系统。

本节将介绍一种用于图灵机的新框架。该框架基于 S-图，因此为这两个概念搭建了桥梁。重要的是，引理 13.2 将很快表明，这一框架足以满足本手稿中的讨论需求（见引理 13.5）。

定义 13.3（图灵重写系统）。图灵系统硬件 $\mathcal{H}$ 是一个元组 $(\mathcal{I}, \mathcal{A})$，其中$\mathcal{I}$ 是有限指标集， $\mathcal{A}$ 是一个由（不一定互不相交的）有限集组成的 $\mathcal{I}$-元组 $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$。集合 A_i 称为 $\mathcal{H}$的字母表。令 L_i 为 A_i上的所有（有限）词的集合，即 L_i是 A_i上的自由幺半群 A_i^*。那么， $\mathcal{H}$ 的图灵语言为 $L_{\mathcal{H}} = \bigtimes_{i\in\mathcal{I}} L_i$。与先前的情况一样，姑且不拘泥于术语， $L_{\mathcal{H}}$ 的元素称为 $L_{\mathcal{H}}$-词。

在 $\mathcal{H}$ 上的精确片段是形如 $[u_i \to v_i]$ 的表达式 Q_i，其中 u_i、 $v_i \in L_i$。此时，当且仅当 $w_i = u_i$时，称 Q_i 可作用于字 $w_i \in L_i$；而 v_i 称为将 Q_i 应用于 u_i的结果。此外， Q_i 的大小定义为 $|Q_i| = \max(|u_i|, |v_i|)$。

反过来，在 $\mathcal{H}$ 上的（右）匹配片段是形如 $[*u_i \to *v_i]$的表达式 Q_i，其中 u_i、 $v_i \in L_i$，且 $*$ 是一个指定符号。此时，当且仅当存在 $w_i' \in L_i$ 使得 $w_i = w_i'u_i$时， Q_i 可作用于 $w_i \in L_i$；在这种情况下，将 Q_i应用于 w_i 的结果为 $Q(w_i) = w_i'v_i$。 Q_i 的大小仍定义为 $|Q_i| = \max(|u_i|, |v_i|)$。

相对于 $i \in \mathcal{I}$ 定义的精确片段或匹配片段称为带片段i。注意，对于任意带片段 Q_i i 以及任意字 $w_i \in L_i$，若 Q_i 可应用于该字，则$\big||Q_i(w_i)| - |w_i|\big| \le |Q_i|$。

关于 $\mathcal{H}$ 的图灵操作是一个 $\mathcal{I}$元组 $Q = (Q_i)_{i\in\mathcal{I}}$，其中 Q_i 是带片段 i，称为 Q带片段 i。在这种情况下，当且仅当对所有 $i \in \mathcal{I}$， Q_i 都可应用于 w_i 时，才称 Q 可应用于 $L_{\mathcal{H}}$字 $w = (w_i)_{i\in\mathcal{I}}$；而将 Q 应用于 w 所得结果为$L_{\mathcal{H}}$字 $Q(w) = (Q_i(w_i))_{i\in\mathcal{I}}$。此外， Q 的大小定义为 $|Q| = \max_{i\in\mathcal{I}} |Q_i|$。因此，如果 Q 可应用于 w，那么 $\big||Q(w)| - |w|\big| \le |Q| \cdot |\mathcal{I}|$。

于是， $\mathcal{T}$上的图灵重写系统是一个有限有向图（$S_{\mathcal{T}}, E_{\mathcal{T}}$）（其中边可以是平行边或环），并配备了一个以 $\mathcal{H}$上的图灵动作标记各边的标记 Lab。标记各边的图灵动作集合记作 $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$。

$\mathcal{T}$的一个配置是一个有序对（w, s）$\in L_{\mathcal{H}} \times S_{\mathcal{T}}$。若边 $e =$（s_1, s_2）$\in E_{\mathcal{T}}$满足 $Q =$ Lab(e)，则称其可应用于配置（w, s），条件是 $s_1 = s$ 且 Q 可应用于 w。此时，将 e 应用于（w, s）的结果定义为配置 e（w, s）$=$（$Q(w)$ s_2）。 $\mathcal{T}$的计算是一个序列

$$\mathcal{C} = \big((w_0, s_0), e_1, (w_1, s_1), e_2, \ldots, e_n, (w_n, s_n)\big)$$

使得对于所有 i，（w_i, s_i）都是 $\mathcal{T}$的配置， $e_i \in E_{\mathcal{T}}$可应用于（w_{i-1}, s_{i-1}），且e_i（w_{i-1}, s_{i-1}）$=$（w_i, s_i）。此时，称 $\mathcal{C}$ 是配置（w_0, s_0）与（w_n, s_n）之间的一次计算。与先前的情形一样，$\mathcal{C}$的时间和空间分别为 n 和 $\max_{i\in 0,\ n} |w_i|$。此外，令所有 $i \in \overline{n}$均满足 Lab(e_i) $= Q^i \in \overline{\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}}$，则 $\mathcal{C}$ 的历史是序列（$Q^1, \ldots, Q^n$）。

与 S-机器和 S-图的定义一样，通常假设 $\mathcal{T}$有两个（不同的）指定顶点 s_s、 $s_f \in S_{\mathcal{T}}$，且 $\mathcal{I}$有一个指定索引 $i^* \in \mathcal{I}$。为使术语一致， s_s 和s_f 分别称为 $\mathcal{T}$的起始状态和终止状态，而 i^*

称为输入带。不过，在此设定中， $\mathcal{T}$ 的输入字母表 A 取为某个子集$A \subseteq A_{i^*}$。

对于任意 $w \in A^*$，定义 $L_{\mathcal{H}}$-字 $w^* = (w_i^*)_{i\in\mathcal{I}}$，方法是令 $w_i^* = w$，若 $i = i^*$；否则令 $w_i^* = 1$（其中，1 表示自由幺半群中的空字）。那么，若计算 $\mathcal{C}_w$ 在 (w^*, s_s) 与 $(1^*, s_f)$ 之间能够识别 w，则称该计算识别 w。相应地，由 $\mathcal{T}$ 识别的语言是子集 $L_{\mathcal{T}} \subseteq A^*$，它由所有在 A 上且能被 $\mathcal{T}$ 识别的词组成。

给定 $w \in L_{\mathcal{T}}$， w 的时间和空间分别是识别 w 的计算所需的最少时间和空间。随后，以类似于定义 S-机器时的方式，定义 $\mathcal{T}$ 的时间和空间复杂度。

请注意，按照上述定义，图灵重写系统$\mathcal{T}$中每条给定边的应用都是确定性的。然而，一般的图灵重写系统是非确定性的，因为不同的边可能适用于同一个给定配置。

接下来，为图灵重写系统引入一种类似于 S-机、 S-图和图灵机的“对称性”的概念。

定义 13.4（逆作用与对称性）。设 $\mathcal{H} = (\mathcal{I}, \mathcal{A})$ 是一个图灵系统硬件。对于 $i \in \mathcal{I}$，若 Q_i 是带 i 的一个片段，则带 i 的逆片段 Q_i^{-1} 定义为 “ 反转箭头 ”，即：

- 若 Q_i 是精确片段 $[u_i \to v_i]$，则 Q_i^{-1} 是精确片段 $[v_i \to u_i]$
- 若 Q_i 是匹配片段 $[*u_i \to *v_i]$，则 Q_i^{-1} 是匹配片段 $[*v_i \to *u_i]$

于是，给定一个图灵操作 $Q = (Q_i)_{i\in\mathcal{I}}$，逆图灵操作 Q^{-1} 定义为 $(Q_i^{-1})_{i\in\mathcal{I}}$。注意，对于所有 i，$|Q_i^{-1}| = |Q_i|$ 都成立，因此 $|Q^{-1}| = |Q|$。

根据构造，显然（Q^{-1}）$^{-1} = Q$。此外， Q 适用于 $w \in L_{\mathcal{H}}$ 当且仅当 Q^{-1} 适用于 Q（w），且 Q^{-1}（Q（w））$= w$。

最后，若一个定义在 $\mathcal{H}$ 上的图灵重写系统 $\mathcal{T}$ =（$S_{\mathcal{T}}$， $E_{\mathcal{T}}$）满足：对于每个e =（s_1， s_2）$\in E_{\mathcal{T}}$，都存在一条逆边 e^{-1} =（s_2， s_1）$\in E_{\mathcal{T}}$，且 Lab（e^{-1}）$= Q^{-1}$，则称其为对称的。

如上所述，给定一个对称图灵重写系统 $\mathcal{T}$，当且仅当 e^{-1} 适用于 e（w， s）时，一条边 $e \in E_{\mathcal{T}}$ 适用于配置（w， s）；在这种情况下， e^{-1}（e（w， s））=（w， s）。

引理 13.5。对于每个图灵机 M，存在一个对称图灵重写系统$\mathcal{T}_M$，使得 $L_{\mathcal{T}_M} = L_M$ 且 $\mathsf{TM}^{\mathcal{T}_M} \sim_1 \mathsf{SP}_{\mathcal{T}_M} \sim_1 \mathsf{TM}_M$。

证明。根据引理 13.2，不失一般性，可以假设 M 满足该处详述的性质 (a)–(e)。

令 $M = \langle A、 Y、 Q、 \Theta、 \vec{s}_1、 \vec{s}_0\rangle$，其中 $Y = \bigcup_{i=1}^k Y_i$ 且 $Q = \bigcup_{i=1}^k Q_i$。然后，令 $\mathcal{H}_M = (\mathcal{I}_M, \mathcal{A}_M)$ 为由 $\mathcal{I}_M = k$ 和 $\mathcal{A}_M(i) = Y_i$ 对所有 $i \in \mathcal{I}_M$ 给出的图灵系统硬件。

现在，令 $S_M = \bigtimes_{i\in\mathcal{I}_M} Q_i$，并按照 M 的转移定义相应的带标签的边 $E_M = \{e_\theta\}_{\theta\in\Theta}$，如下所示：

- 如果 θ 是引理 13.2 中形式 (1) 的形式，则令 e_θ 为有向边 $((q_j), (q_j'))$，并标记为图灵操作 $Q_\theta = (Q_{j,\ \theta})$，其中 $Q_{i,\ \theta} = [*a \to *1]$ 且 $Q_{j,\ \theta} = [*1 \to *1]$ 对所有 $j \neq i$ 均成立。
- 若 θ^{-1} 是引理 13.2 中的形式 (1)，则令 e_θ 为与$e_{\theta^{-1}}^{-1}$对应的有向边。
- 若 θ 是引理 13.2 中的形式 (2)，则令 e_θ 为有向边 $((q_j), (q_j'))$，并将其标记为图灵操作 $Q_\theta = (Q_{j,\ \theta})$，其中 $Q_{i,\ \theta} = [1 \to 1]$ 且 $Q_{j,\ \theta} = [*1 \to *1]$ 对所有 $j \neq i$ 均成立。

最后，令 $\mathcal{T}_M = (S_M, E_M)$ 为定义在 $\mathcal{H}_M$ 上的图灵重写系统，其输入带为 1，输入字母表为 A，起始状态为 $\vec{s}_1$，终止状态为 $\vec{s}_0$。

注意，由于 M 是对称图灵机，根据构造可知 $\mathcal{T}_M$ 是对称的。定义映射 η，将 M 的配置映射为 $\mathcal{T}_M$ 的配置：

$$\eta(\alpha u_1 q_1 v_1 \omega \alpha u_2 q_2 v_2 \omega \dots \alpha u_k q_k v_k \omega) = ((u_i v_i), (q_i))$$

根据构造可知，对于 M 的任意配置 C 以及任意 $\theta \in \Theta$，当且仅当 e_θ 可应用于 $\eta(C)$ 时，θ 才可应用于 C，其中 $\eta(C \cdot \theta) = e_\theta(\eta(C))$。

因此，η 在 M 的计算与 $\mathcal{T}_M$ 的计算之间建立了对应关系，故命题得证。

□

下面的命题给出了引理 13.5 的一个部分逆命题；该命题与引理 13.5 一起表明，图灵重写系统的框架与图灵机的框架在本质上是等价的。然而，对于本手稿的目的而言，这一等价性是多余的，因此省略其证明。

引理 13.6. 对于每个对称图灵重写系统 $\mathcal{T}$，存在一个图灵机 $M_\mathcal{T}$，满足以下性质：

(a) $L_{M_\mathcal{T}} = L_\mathcal{T}$。 (b) $M_\mathcal{T}$ 是对称的。 (c) $\mathrm{TM}^{M_\mathcal{T}} \sim \mathrm{TM}_\mathcal{T}$，$\mathrm{SP}^{M_\mathcal{T}} \sim \mathrm{SP}_\mathcal{T}$。 (d) $M_\mathcal{T}$ 的任何接受计算都以接受构型结束。 (e) $M_\mathcal{T}$ 的每个转移或其逆都是引理 13.2(e) 中所列形式之一。

现在，由于定理 1.1 的目标是在某种意义上构造一个模拟特定图灵机的 S-机，根据引理 13.5 和命题 10.2，只需构造一个在该意义上模拟特定图灵重写系统的接受器 S-图。然而，从定义 13.3 可以明显看出，S-图与图灵重写系统之间存在若干根本差异。

或许最明显的区别在于，硬件的图灵语言是由硬件字母表上的词构成的，而 S-机的语言则是由硬件字母表生成的（自由约化）群词构成的。从本质上说，这相当于使用半群元素而非群元素的区别。这应该能阐明第 12 节中定义的接受器 $\mathrm{accept}^{\varepsilon}_{A+}$ 的重要性。

不过，或许更关键的是，尽管 S-图的一个动作显然可以模拟一个精确片段，却没有与匹配片段直接对应的类似结果。例如，虽然 S-图的守卫片段可用于检查给定带上是否写有特定词，但如何检查该带上写的词是否仅仅以特定字母开头，并不明显；而匹配片段却能轻易实现这一点。不过，正如后续各节将要概述的那样，借助正接受器 $\mathrm{accept}^{\varepsilon}_{A+}$，这一问题将再次得到解决。

14. 图灵纸带

在本节中，固定一个图灵重写系统 $\mathcal{T}$。此外，令 $\mathcal{H}_\mathcal{T} = (\mathcal{I}_\mathcal{T}, \mathcal{A}_\mathcal{T})$ 为构造 $\mathcal{T}$ 所基于的图灵系统硬件，并固定一个索引 $i \in \mathcal{I}_\mathcal{T}$。为方便记号，$\mathcal{A}_\mathcal{T}(i)$ 简记为 A_i。

作为本节主要构造的准备步骤，首先定义几个简单的真操作。

14.1. 一些辅助操作。

对于给定的字母表 A，真操作 $\mathsf{swap}^A(a,b)$ 如下方的图16所示。由该图可推知，该操作的硬件（$\mathcal{I}_{\mathrm{swap}}$，$\mathcal{A}_{\mathrm{swap}}$）由 $\mathcal{I}_{\mathrm{swap}} = \mathcal{I}_{\mathrm{swap}}^{\mathrm{ext}} = \{a,b\}$ 给出，其中 $\mathcal{A}_{\mathrm{swap}}(a) = \mathcal{A}_{\mathrm{swap}}(b) = A$。

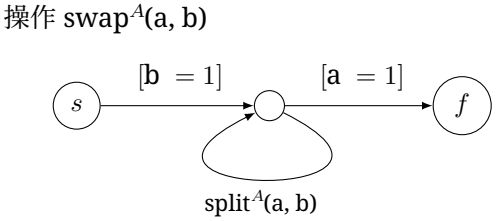


FIGURE 16. 操作 $\mathsf{swap}^A(a,b)$

以下结论可由引理 12.1 和命题 9.7 直接推出。由于该操作只是引理 12.1 中讨论的真操作 split^A 的简单扩展，因此省略该结论的证明。

引理 14.1。操作 $\mathsf{swap}^A(a,b)$ 的 IO 关系如下：

$$\mathsf{IO}_{\mathrm{swap}}^{s,s} = \mathsf{IO}_{\mathrm{swap}}^{f,f} = \mathbb{I}$$
$$\mathsf{IO}_{\mathrm{swap}}^{s,f} = \{(w_1,w_2) \mid w_1(a) = w_2(b),\ w_1(b) = w_2(a) = 1\}$$

此外，$\mathsf{TMSP}_{\mathrm{swap}} \preceq (n,n)$。

接下来，对于给定的字母表 A，下面将构造真操作 $\mathsf{re}_A^{\varepsilon}(a,b)$。该操作用于重新排列两条带的内容，同时保持字母出现的顺序不变。其硬件可见为 $\mathcal{I}_{\mathrm{re}} = \mathcal{I}_{\mathrm{re}}^{\mathrm{ext}} = \{a,b\}$，其中包含 $\mathcal{A}_{\mathrm{re}}(a) = \mathcal{A}_{\mathrm{re}}(b) = A$。

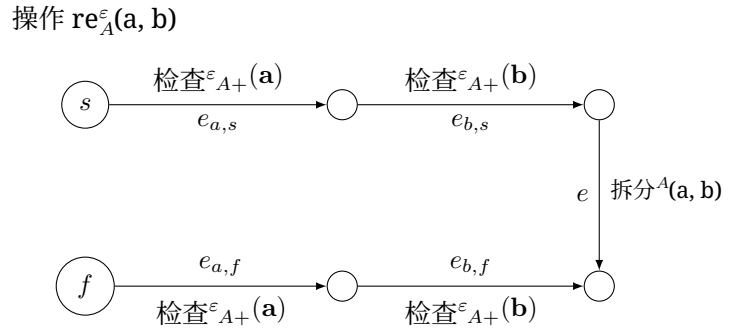


FIGURE 17. 真操作 $\mathsf{re}_A^{\varepsilon}(a,b,c)$。

引理 14.2。$\mathsf{re}_A^{\varepsilon}$ 的 IO 关系如下：

$$\mathsf{IO}_{\mathrm{re}}^{s,f} = \{(w_1,w_2) \mid w_1(a)w_1(b) = w_2(a)w_2(b),\ w_j(a), w_j(b) \in L_A^+ \text{ for } j = 1,2\}$$
$$\mathsf{IO}_{\mathrm{re}}^{s,s} = \mathsf{IO}_{\mathrm{re}}^{f,f} = \mathsf{IO}_{\mathrm{re}}^{s,f} \cup \mathbb{I}$$

此外，$\mathsf{TMSP}_{\mathrm{re}} \preceq (n^{1+\varepsilon}, n)$。

证明。设 $(w_1, s_1, w_2, s_2) \in \mathrm{IO}_{\mathrm{re}}$ 使得 $w_1 \neq w_2$，从而 $s_1, s_2 \in \mathrm{SF}_{\mathrm{re}}$。进一步，设

$$\gamma = \big((u_0, t_0), e'_1, (u_1, t_1), e'_2, \ldots, e'_m, (u_m, t_m)\big)$$

是一个计算，实现 $(w_1, w_2) \in \mathrm{IO}^{s_1,\ s_2}$ 并具有最小长度的计算路径。

对于所有 $i \in \overline{m}$，令 $e'_i = (\mathrm{sf}_i, \mathrm{sf}'_i, e''_i)$。那么，由定义检查器的 IO 关系可知，其外部带是不可变的，因此存在 $j \in 0, m$ 使得 $e''_j = e_\circ$ 此外，由引理 14.1 可得 $w_1(a)w_1(b) = w_2(a)w_2(b)$。

此外，检查器的外部带不可变这一性质与计算路径的极小性假设共同推出：若 $e''_i \neq e$，则 $\mathrm{sf}_i \neq \mathrm{sf}'_i$。因此，由于 e 分离了 $\mathrm{re}^{\varepsilon}_A$ 的图，可得：

$$e'_1, e'_2 = (\hat{s}, \hat{f}, e_{a,s_1}), (\hat{s}, \hat{f}, e_{b,s_1})$$
$$e'_{m-1}, e'_m = (\hat{f}, \hat{s}, e_{b,s_2}), (\hat{f}, \hat{s}, e_{a,s_2})$$

但随后，检查器的 IO 关系推出 $w_j(a)\, w_j(b) \in L^+_A$。因此，令

$$S = \{(w_1, w_2) \mid w_1(a)w_1(b) = w_2(a)w_2(b),\ w_j(a)i, w_j(b) \in L^+_A \text{ for } j = 1, 2\}$$

然后 $\mathrm{IO}^{s\,f}_{\mathrm{re}} \subseteq S,$ 和 $\mathrm{IO}^{s\,s}_{\mathrm{re}},$、$\mathrm{IO}^{f\,f}_{\mathrm{re}} \subseteq \mathbb{I} \cup S,$。

ˆ 现在，令 $(w_1,\ w_2) \in S$ 和 s_1、$s_2 \in \mathrm{SF}_{\mathrm{re}}$。通过令 $\mathrm{sf}_1, \mathrm{sf}_2 \in \{\hat{}s,\ f\}$ 定义 $\mathrm{sf}_j = \hat{}s$，当且仅当 $s_j = \mathrm{re}_s$。于是，一般路径：

$$\rho = (\hat{s}, \hat{f}, e_{a,s_1}), (\hat{s}, \hat{f}, e_{b,s_1}), (\mathrm{sf}_1, \mathrm{sf}_2, e), (\hat{f}, \hat{s}, e_{b,s_2}), (\hat{f}, \hat{s}, e_{a,s_2})$$

支持一个计算 $\gamma^{s_1,\ w_1\ s_2,\ w_2}$，实现 $(w_1,\ w_2) \in \mathrm{IO}^{s_1,\ s_2}_{\mathrm{re}}$。

令 $\mathcal{F}$ 为由 $\mathcal{F}_{\mathrm{check}^{\varepsilon}_{A+}} = (n^{1+\varepsilon},\ n)$ 和 $\mathcal{F}_{\mathrm{split3}} = (n,\ n)$ 给出的估计集。则上述计算 $\gamma^{s_1,\ w_1\ s_2,\ w_2}$ 的估计复杂度有界于：

$$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{re}}(\gamma^{s_1,s_2}_{w_1,w_2}) = 3|w_1|^{1+\varepsilon} + \max(|w_1|, |w_2|) + 3|w_2|^{1+\varepsilon} \leq 7\max(|w_1|, |w_2|)^{1+\varepsilon}$$
$$\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{re}}(\gamma^{s_1,s_2}_{w_1,w_2}) = \max(|w_1|, |w_2|)$$

因此，该陈述由引理 14.1、推论 12.15 和命题 9.7 得出。

□

14.2. 图灵磁带对象。

本节的主要内容是构造一种称为图灵带的特定类型的对象。与引入计数器（见图 11）和正词接受器（见图15）一样，这一构造分为三个步骤：

(1) 定义一类一般对象（见定义 5.7 和定义 10.1）；(2) 构造一个具体实例（见引理 7.23 和引理 12.10）；(3) 执行迭代步骤，生成一系列此类对象，其性质依次“更好”（见引理 11.4 和引理 12.14）。

定义 14.3。对于所有 $d \in \mathbb{N} - \{0\}$，设 $\mathcal{I}_d = \{a_1, \ldots, a_d\}$。然后，令 V^d 为 $L^+_{A_i}$ 中由词组成的 $\mathcal{I}_d$ 元组的集合（回忆一下，A_i 是固定 $i \in \mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ 的字母表 $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}(i)$）。

对于所有 $w \in L^+_{A_i}$，令 V^d_w 为 V^d 中由所有满足 $w = v(a_1)\ldots v(a_d)$ 的 $v \in V^d$ 构成的子集。反过来，对于任意 $v \in V^d$，令 $w_d(v) \in A^*_i$ 为满足 $v \in V^d_{w_d(v)}$ 的 A_i 上唯一的字。注意 $V^d = \bigsqcup_{w \in A^*_i} V^d_w$ 并且对于所有 $v \in V^d$，$|v| = |w_d(v)|$。

现在，假设 $\mathrm{Obj} = \mathrm{Obj}[\mathcal{I}_d]$ 是一个对象，由操作集 $= \mathrm{set}(b)$ 以及针对每个 $Q = (Q_j)_{j \in \mathcal{I}_{\mathcal{T}}} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$ 的一个操作 $Q = Q()$ 组成。此外，假设 $\mathcal{A}_{\mathrm{set}}(b) = A_i$，并且

$\mathcal{A}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{Obj}}(a_j) = A_i$ 对所有 $a_j \in \mathcal{I}_d$ 都成立。最后，假设 $\mathsf{VAL}_{\mathrm{Obj}} = V^d$，且 IO 关系如下：

$$
\begin{aligned}
\mathsf{IO}^{s,s}_{\mathrm{set}} &= \mathbb{I} \\
\mathsf{IO}^{s,f}_{\mathrm{set}} &= \big\{(u_1,u_2) \mid u_1(\mathcal{I}_d) = 1,\ u_2(b) = 1,\ w_d(u_2(\mathcal{I}_d)) = u_1(b)\big\} \\
\mathsf{IO}^{f,f}_{\mathrm{set}} &= \mathbb{I} \cup \big\{(u_1,u_2) \mid u_1(b) = u_2(b) = 1,\ w_d(u_1(\mathcal{I}_d)) = w_d(u_2(\mathcal{I}_d))\big\} \\
\mathsf{IO}^{s,s}_{Q} &= \mathsf{IO}^{f,f}_{Q} = \big\{(v_1,v_2) \mid w_d(v_1) = w_d(v_2)\big\} \\
\mathsf{IO}^{s,f}_{Q} &= \big\{(v_1,v_2) \mid Q_i \text{ is applicable to } w_d(v_1) \text{ with } Q_i(w_d(v_1)) = w_d(v_2)\big\}
\end{aligned}
$$

那么，Obj 称为 i-图灵带 $\mathcal{T}$，其秩为 d。

现在，对于任意固定的 $\varepsilon > 0$，考虑下文图18中定义的对象 $\mathsf{TTape}^1_{,\ \tau^{\varepsilon}_{,\ i}} := \mathsf{TTape}^1_{,\ \tau^{\varepsilon}_{,\ i}[\mathcal{I}_1]}$。请注意，操作 $Q()$ 与 $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$ 的元素相对应；图中标记为 $Q()$ 的两张图分别定义了相应的 Q-带片段 i 精确或（右）匹配时的操作。

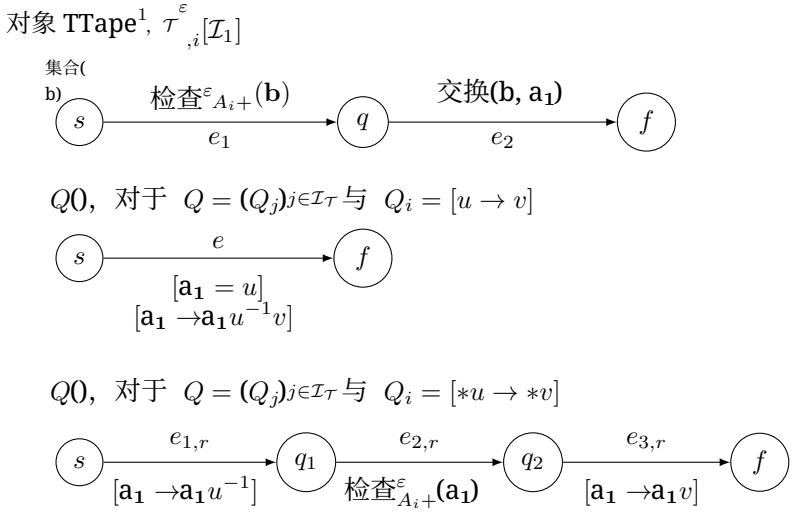


FIGURE 18. 一个对象 $\mathsf{TTape}^1_{,\ \tau^{\varepsilon}_{,\ i}[a]}$ 它是一个 i-图灵带，属于 $\mathcal{T}$。

根据既定的命名约定，可以隐含得出，对于所有 $Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$，$\mathcal{I}^{\mathrm{val}}{}_{\mathrm{TTape}^1_{,\ \tau^{\varepsilon}_{,\ i}}} = \{a_1\}$、$\mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{set}} = \{b\}$ 和 $\mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{Q} = \emptyset$。此外，最小硬件约定意味着 $\mathcal{A}_{\mathrm{TTape}^1_{,\ \tau^{\varepsilon}_{i,}}}(a_1) = \mathcal{A}_{\mathrm{set}}(b) = A_i$，并且对于所有 $\mathsf{op} \in \mathsf{TTape}^1_{,\ \tau^{\varepsilon}_{i,}}$，都有 $\mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{op}} = \emptyset$。

引理 14.4. 对象 $\mathsf{TTape}^1 = \mathsf{TTape}^1_{,\ \tau^{\varepsilon}_{,\ i}}$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个秩 1 i-图灵带。此外，$\mathsf{TMSP}_{\mathrm{TTape}^1} \preceq (n^{1+\varepsilon}, n)$。

证明。注意到 $V^1 = L^+_{A_i}$，因此可以视为 $L_1 = L^{\mathrm{val}}{}_{\mathrm{TTape}^1}$ 的子集。在命题 7.17 的设定下，接下来可得对于所有 $Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$，$\widehat{V}^1_Q = V^1$；而 $\widehat{V}^1$集合 是 L_{set} 的子集，由所有满足 $u(a_1) \in L^+_{A_i}$ 的 $u \in \mathsf{GL}_{\mathrm{set}}$ 构成。

为简便起见，对于任意 $u \in L_{\mathrm{set}}$，记 $u = (u(a_1)\ u(b))$，也就是说，将 b 分量列在第二位。然后，对于所有 $v \in L^+_{A_i}$ 和 $w \in L_{A_i}$，定义子集 $C_{v,\ w,\ \mathrm{set}} \subseteq$ 广义线性群$_{\mathrm{set}} \times S_{\mathrm{set}}$ 如下：

- $C^s_{v,w,\mathrm{set}} = \{(v,w)\}$

- 若 $w \notin L_{A_i}^+$，则 $C_{v\ ,w,\text{集合}}^{q} = C_{v\ ,w,\text{集合}}^{f} = \emptyset$
- 如果 $w \in L_{A_i}^+$ 且 $v \neq 1$，那么 $C_{v\ ,w,\text{令}}^{q} = \{\ (v,\ \ w)\ \}$ 且 $C_{v\ ,w,\text{令}}^{f} = \emptyset$
- 如果 $w \in L_{A_i}^+$ 且 $v = 1$，那么 $C_{v,\ w,\ \text{令}}^{q} = \{(v, w)\}$ 且 $C_{v,\ w,\ \text{令}}^{f} = \{(w,1)\}$

那么，对所有 $w \in L_{A_i} - \{1\}$，定义子集 $C_{w,\ \text{set}} \subseteq \mathbf{GL}_{\text{set}} \times S_{\text{set}}$ 如下：

$$C_{w,\text{set}}^{f} = \{(v, w) \mid v \in L_{A_i}^+\}$$
$$C_{w,\text{set}}^{s} = C_{w,\text{set}}^{q} = \emptyset$$

根据检查器的定义和引理 14.1，可知 $C_{v,\ w,\ \text{set}}$ 以及 $C_{w,\ \text{set}}$ 中的每一个对于每个 $e \in E_{\text{set}}$ 都在 IO_e 下封闭。此外，$\left(\bigcup_{v,\ w} C_{v\ w}^{\mathrm{SF}_{\text{set}}}{}_{,\ ,\ \text{令}}\right) \cup \left(\bigcup_{w} C_{w}^{\mathrm{SF}_{\text{set}}}{}_{,\ \text{令}}\right) = \widehat{V}^1{}_{\text{集合}} \times \mathbf{SF}_{\text{set}}$。

现在，令 $Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$。首先，假设带 i 的 Q-片段是精确片段 $[u \to v]$。那么，对于所有 $w \in L_{A_i}^+$，定义 $C_{w,s,Q} \subseteq$ 广义线性群$_Q \times S_Q$，使得 $C_{w,s,Q}^{s} = \{w\}$, $C_{w,s,Q}^{f} = \{v\}$ 当 $w = u$ 时成立，而$C_{w,s,Q}^{f} = \emptyset$ 在其他情况下成立。此外，对于所有 $w \in L_{A_i}^+ - \{v\}$，定义子集 $C_{w,f,Q} \subseteq$ 广义线性群$_Q \times S_Q$，使得$C_{w,f,Q}^{f} = \{w\}$ 且 $C_{w,f,Q}^{s} = \emptyset$。

那么，$\left(\bigcup_w C_{w\ s\ ,,Q}^{\mathrm{SF}_Q}\right) \cup \left(\bigcup_w C_{w\ f\ ,,Q}^{\mathrm{SF}_Q}\right) = \widehat{V}_Q^1 \times \mathbf{SF}_Q$。此外，根据 0 阶动作的定义，对于任意边 $e \in E_Q$，每个 $C_{w,s,Q}$ 和 $C_{w,f,Q}$ 都在 IO_e 下封闭。

反过来，假设带 i 的 Q-片段是右匹配片段 $[*u \to *v]$。那么，对所有 $w \in L_{A_i}^+$，定义子集 $C_{w,\ Q} \subseteq$ 广义线性群$_Q \times S_Q$ 如下：

$$C_{w,Q}^{s} = \{wu\}$$
$$C_{w,Q}^{q_1} = C_{w,Q}^{q_2} = \{w\}$$
$$C_{w,Q}^{f} = \{wv\}$$

此外，对于满足 $wu^{-1} \notin L_{A_i}^+$ 的 $w \in L_{A_i}$，定义 $C_{w,s,Q} \subseteq$ 广义线性群$_Q \times S_Q$ 如下：$C_{w,s,\ Q}^{s} = \{w\}$,$C_{w\ ,s,Q}^{q_1} = \{wu^{-1}\}$，以及 $C_{w\ ,s,Q}^{q_2} = C_{w\ ,s,Q}^{f} = \emptyset$。

最后，对于满足 $wv^{-1} \notin L_{A_i}^+$ 的 $w \in L_{A_i}$，通过令 $C_{w\ ,f,Q}^{f} = \{w\}$, $C_{w\ ,f,Q}^{q_2} = \{wv^{-1}\}$，以及 $C_{w,f,Q}^{s} = C_{w\ ,f,Q}^{q_1} = \emptyset$，定义子集 $C_{w,f,Q} \subseteq$ 广义线性群$_Q \times S_Q$。

由此再次可知，每个子集在 IO_e 下均封闭，对每个 $e \in E_Q$ 都成立，并且

$$\left(\bigcup_w C_{w,Q}^{\mathrm{SF}_Q}\right) \cup \left(\bigcup_w C_{w,s,Q}^{\mathrm{SF}_Q}\right) \cup \left(\bigcup_w C_{w,f,Q}^{\mathrm{SF}_Q}\right) = \widehat{V}_Q^1 \times \mathrm{SF}_Q \tag{14.1}$$

因此，命题 7.17 蕴含 $\mathbf{VAL}_{\mathrm{TTape}^1} \subseteq V^1$。

另一方面，对于所有 $v \in V^1$，集合图中的一般路径 $(\hat{}s, \hat{}f, e_1)$, $(\hat{}s, \hat{}f, e_2)$ 支持一个输入输出计算 γ_v，其发生在 $((1, v), \mathsf{set}_s)$ 和 $((v, 1), \mathsf{set}_f)$ 之间。这意味着在 $\mathcal{G}^{\mathrm{val}}{}_{\mathrm{TTape}^1}$，中，存在一条边连接与初始值和 v 对应的顶点，因此 $v \in \mathbf{VAL}^{\mathrm{TTape}^1}$。

因此，V^1 确实是 $\mathbf{TTape}^1$, $\tau^{\varepsilon}{}_i$, 的值集。

上述构造的集合再结合命题 7.16，便可推出 IO 关系满足以下包含关系：

$$\mathsf{IO}_{\text{set}}^{s,s}, \mathsf{IO}_{\text{set}}^{f,f}, \mathsf{IO}_{Q}^{s,s}, \mathsf{IO}_{Q}^{f,f} \subseteq \mathbb{I}$$
$$\mathsf{IO}_{\text{set}}^{s,f} \subseteq \{\big((1, v), (v, 1)\big) \mid v \in L_{A_i}^+\}$$
$$\mathsf{IO}_{Q}^{s,f} \subseteq \{(u, v)\} \qquad \text{if } Q_i = [u \to v]$$
$$\mathsf{IO}_{Q}^{s,f} \subseteq \{(wu, wv) \mid w \in L_{A_i}^+\} \qquad \text{如果 } Q_i = [*u \to *v]$$

注意，最后两个包含关系可以用单个包含关系来描述

$$\mathsf{IO}_Q^{s,f} \subseteq \{(v, Q_i(v)) \mid Q_i \text{ is applicable to } v\}$$

此外，注意对于任意 $v_1, v_2 \in V^1$, $w_1(v_1) = w_1(v_2)$，当且仅当 $v_1 = v_2$。

因此，要证明 $\mathsf{TTape}^1_{\varepsilon}$, $\mathcal{T}$, i 是一个秩为 1 的 i-图灵带 $\mathcal{T}$，只需证明上述包含关系都是等式。

IO 关系的自反性意味着 IO^{s}, s 集合 $= \mathsf{IO}^{f}$, f 集合 $= \mathsf{IO}_Q^{s\,s} =$, $\mathsf{IO}_Q^{f\,f} = \mathbb{I}$, 。此外，对于任意 $v \in V^1$，上述定义的集合计算 γ_v 实现了 $((1, v), (v, 1)) \in \mathsf{IO}^{s}$, f 集合，因此 IO^{s}, f 集合 $= \{((1, v), (v, 1)) \mid v \in L^+_{A_i}\}$。

同时， Q 的两种情况如下：

- 如果 Q_i 是精确片段 $[u \to v]$，那么一般路径 $(\hat{}s, f, e)$ 支持一次计算 $\gamma^Q_{u,\ v}$，实现 $(u, v) \in \mathsf{IO}_Q^{s\,f}$,
- 若 Q_i 是右匹配片段 $[*u \to *v]$，那么对于所有 $w \in L^+_{A_i}$，一般路径 $(\hat{}s, \hat{}f, e_{1,\ r})$, $(\hat{}s, \hat{}f, e_{2,\ r})$, $(\hat{}s, \hat{}f, e_{3,\ r})$ 支持一个实现 $(wu, wv) \in \mathsf{IO}_Q^{s\,f}$, 的计算 γ^Q_w

因此，$\mathsf{TTape}^1_{\varepsilon}$, $\mathcal{T}$, i 是一个秩 1 的 $\mathcal{T}$ 的 i-图灵带。

现在，令 $\mathcal{F}$ 为 $\mathsf{TTape}^1_{\varepsilon}$, $\mathcal{T}$, i 的估计集，该集合由 $\mathcal{F}_{\mathrm{check}} = (n^{1+\varepsilon}, n)$ 和 $\mathcal{F}_{\mathrm{swap}} = (n, n)$ 给出。注意以下不等式：

- 对于所有 $v \in V^1$,

$$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{set}}(\gamma_v) = |v|^{1+\varepsilon} + |v| \le 2|v|^{1+\varepsilon}$$
$$\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{set}}(\gamma_v) = |v|$$

- 若 Q_i 是精确片段 $[u \to v]$，那么

$$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{Q}(\gamma^Q_{u,v}) = 1$$
$$\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{Q}(\gamma^Q_{u,v}) = \max(|u|, |v|)$$

- 若 Q_i 是右匹配片段 $[*u \to *v]$，那么对于所有 $w \in L^+_{A_i}$,

$$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{Q}(\gamma^Q_{w}) = 1 + |w|^{1+\varepsilon} + 1 \le |w|^{1+\varepsilon} + 2$$
$$\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{Q}(\gamma^Q_{w}) = \max(|wu|, |w|, |wv|)$$

但由于 $u, v \in L^+_{A_i}$, $|wu| = |w| + |u|$ 和 $|wv| = |w| + |v|$。因此，对于 $M = \max(|wu|, |wv|)$,

$$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{Q}(\gamma^Q_{w}) \le M^{1+\varepsilon} + 2$$
$$\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{Q}(\gamma^Q_{w}) = M$$

由于平凡计算实现了定义 IO 关系的所有其他有序对，因此可得 $\mathsf{TMSP}^{\mathcal{F}}{}_{\mathrm{TTape}_1} \preceq (n^{1+\varepsilon}, n)$。由于引理 14.1、推论 12.15 和命题 10.7 表明 $\mathsf{TMSP}_{\mathrm{check}} \preceq \mathcal{F}_{\mathrm{check}}$ 和 $\mathsf{TMSP}_{\mathrm{swap}} \preceq \mathcal{F}_{\mathrm{swap}}$，由命题 9.7 可得 $\mathsf{TMSP}_{\mathrm{TTape}^1} \preceq (n^{1+\varepsilon}, n)$。□

14.3. 改进的图灵带。

本节的目标是定义一个秩不断递增的图灵带序列，并证明它会在特定意义上变得“更高效”。不过，需要预先指出，这种改进所依据的并非通常的时间-空间复杂度，而是用其“顺序计算”的复杂度来衡量（见第 14.4 节）。

现在，为此，假设对象 $\mathrm{TTape}^d = \mathrm{TTape}^{d,\ \tau^{\varepsilon}\ ,\ i}$ 是一个秩为 d、满足 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{TTape}^d} \preceq (n^{1+\varepsilon}, n)$ 的 $\mathcal{T}$ 的 i-图灵带。因此，请注意，引理 14.4 表明 $\mathrm{TTape}^{1,\ \tau^{\varepsilon}i,}$ 为这一迭代构造提供了基础。

首先，辅助对象 $\mathrm{IRT}^d := \mathrm{IRT}^{d,\ \tau^{\varepsilon}\ ,\ i}[\mathcal{I}_{d+1}]$ 在下方的图 19 中构造，其名称表明它是一个“中间重排带”。其中，集合 $\mathcal{I}'_d$ 被取为 $\mathcal{I}_{d+1}$ 的子集 $\{a_2, \ldots, a_{d+1}\}$。因此，该集合与 $\mathcal{I}_d$ 构成双射，正如其在实例 TT^d 中所发挥的作用。

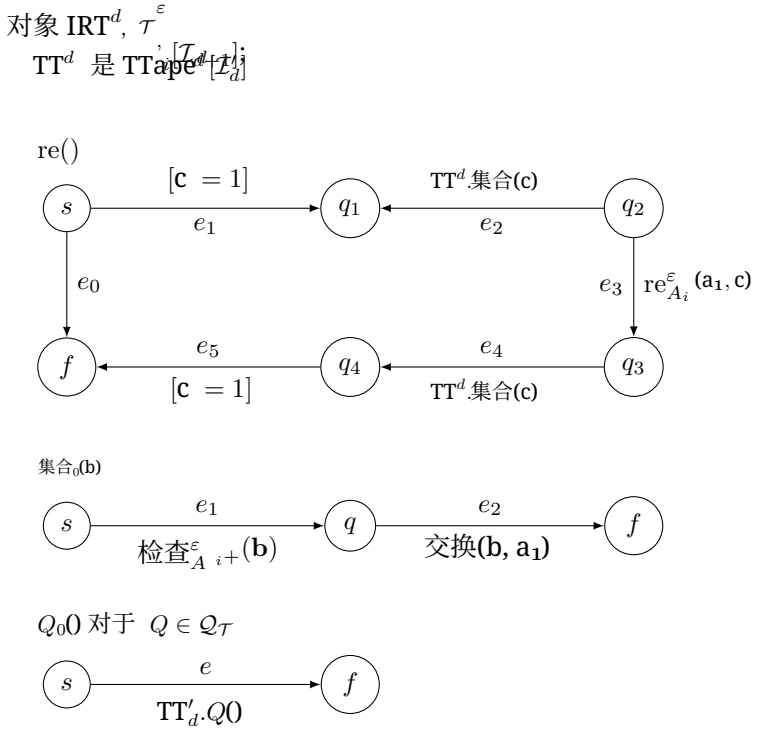


FIGURE 19. 辅助对象 IRT^d、τ^{ε}、$_i[\mathcal{I}_{d+1}]$

该对象由以下 $|\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}|+2$ 操作组成：$|\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}|+1$ 个操作分别与 $\mathrm{TTape}^d[\mathcal{I}'_d]$ 的操作相对应，其功能也与之类似；以及操作 $\mathrm{re} = \mathrm{re}()$，该操作旨在重新排列 $\mathcal{I}_{d+1}$ 的内容，同时不影响其“顺序”。

根据这些图的构造可以推 deduced 出：$\mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{set}_0} = \mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{Q_0} = \emptyset$，$\mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{re}} = \{c\}$，并且对于所有 $\mathrm{op} \in \mathrm{IRT}^d$ 以及所有 $j \in \mathcal{I}_{\mathrm{op}}$，$\mathcal{A}_{\mathrm{op}}(j) = A_i$。对于操作 re，根据 e_0 的平凡动作标记以及 e_1 和 e_5 的守卫片段标记，可以立即得出条件 (O) 得到满足。

对于任意操作 $\in \mathrm{IRT}^d$ 和 $u \in$ 广义线性群$_{\mathrm{op}}$，$u(\mathcal{I}'_d)$ 是 TTape^d 中某个值的副本，也就是 V^d 中的一个字。因此，$u(\mathcal{I}'_d)$ 通常被视为这个值，并自然地扩展映射 w_d，使得：

$$w_d(u(\mathcal{I}'_d)) = u(a_2)u(a_3)\ldots u(a_{d+1})$$

请注意，与将 w_d 应用于 $\mathcal{I}_{d+1}$ 中 $\mathcal{I}_d$ 的“规范”副本不同，在此语境下将专门使用它。

反过来，对于任意 $v \in V^d$，定义 v_d 为 $\mathcal{I}'_d$ 上 v 的副本。因此，对于所有 $j \in \overline{d}$，$v(a_j) = v_d(a_{j+1})$。

注意，对于任意 $v \in \mathrm{VAL}_{\mathrm{TT}^d}$，当且仅当 $v(a_1) \in L^+_A$。

引理 14.5. 对象 $\mathsf{IRT}^d = \mathsf{IRT}^d_{,\ \tau^{\varepsilon}\ ,\ i}$ 满足 $\mathsf{VAL}_{\mathrm{IRT}^d} = V^{d+1}$，其 IO 关系如下：

$$\begin{aligned}
\mathsf{IO}^{s,s}_{\mathrm{re}} &= \mathsf{IO}^{s,f}_{\mathrm{re}} = \mathsf{IO}^{f,f}_{\mathrm{re}} = \{(v_1, v_2) \mid w_{d+1}(v_1) = w_{d+1}(v_2)\} \\
\mathsf{IO}^{s,s}_{\mathrm{set}_0} &= \mathsf{IO}^{f,f}_{\mathrm{set}_0} = \mathbb{I} \\
\mathsf{IO}^{s,f}_{\mathrm{set}_0} &= \{(u_1, u_2) \mid u_1(a_1) = u_2(b) = 1,\ u_1(b) = u_2(a_1),\ u_1(\mathcal{I}'_d) = u_2(\mathcal{I}'_d)\} \\
\mathsf{IO}^{s,s}_{Q_0} &= \mathsf{IO}^{f,f}_{Q_0} = \mathbb{I} \cup \{(u_1, u_2) \mid u_1(a_1) = u_2(a_1),\ w_d(u_1(\mathcal{I}'_d)) = w_d(u_2(\mathcal{I}'_d))\} \\
\mathsf{IO}^{s,f}_{Q_0} &= \{(u_1, u_2) \mid u_1(a_1) = u_2(a_1),\ Q_i(w_d(u_1(\mathcal{I}'_d))) = w_d(u_2(\mathcal{I}'_d))\}
\end{aligned}$$

此外，$\mathsf{TMSP}_{\mathrm{IRT}^d} \preceq (n^{1+\varepsilon}, n)$。

证明。为简单起见，令 $\mathsf{GL}^+_{\mathrm{re}}$ 为 $\mathsf{GL}_{\mathrm{re}}$ 的子集，其中包含所有满足以下条件的词 u：对所有 $j \in \mathcal{I}_{\mathrm{re}}$，$u(j) \in L^+_{A_i}$。然后，对任意 $w \in L^+_{A_i}$，将子集 $C_w \subseteq \mathsf{GL}^+_{\mathrm{re}} \times S_{\mathrm{re}}$ 定义如下：

$$\begin{aligned}
C^s_w = C^{q_1}_w = C^{q_4}_w = C^f_w &= \{u \mid u(c) = 1,\ w_{d+1}(u(\mathcal{I}_{d+1})) = w\} \\
C^{q_2}_w = C^{q_3}_w &= \{u \mid u(\mathcal{I}'_d) = 1,\ u(a_1)u(c) = w\}
\end{aligned}$$

注意，$\bigcup_w C^{\mathrm{SF}_{\mathrm{re}}}_w = (V^{d+1} \times 1^{\mathrm{int}}_{\mathrm{re}}) \times \mathsf{SF}_{\mathrm{re}} = \widehat{V}^{d+1}_{\mathrm{re}} \times \mathsf{SF}_{\mathrm{re}}$，其中 $\widehat{V}^{d+1}$重新 的定义与命题 7.17 中的情形相同。此外，根据引理 14.2 和集合运算的定义，对所有 $e \in E_{\mathrm{re}}$，每个子集 C_w 都在 IO_e 下封闭。

接下来，对所有 $w \in L^+_{A_i}$ 和所有 $v \in V^d$，定义 $C_{w,\ v} \subseteq \mathsf{GL}_{\mathrm{set}_0} \times S_{\mathrm{set}_0}$ 如下：

$$\begin{aligned}
C^s_{w,v} = C^q_{w,v} &= \{u \mid u(\mathcal{I}'_d) = v_d,\ u(a_1) = 1,\ u(b) = w\} \\
C^f_{w,v} &= \{u \mid u(\mathcal{I}'_d) = v_d,\ u(a_1) = w,\ u(b) = 1\}
\end{aligned}$$

根据检查器的定义和引理 14.1，对所有 $e \in E_{\mathrm{set}_0}$，每个 $C_{w,\ v}$ 都在 IO_e 下封闭。此外，对于任意满足 $w \neq 1$ 的 $w \in L_{A_i}$ 以及任意 $v \in V^{d+1}$，定义 $C_{w,\ v,\ f} \subseteq$ 广义线性群$_{\mathrm{set}_0} \times S_{\mathrm{set}_0}$ 如下：

$$\begin{aligned}
C^s_{w,v,f} = C^q_{w,v,f} &= \emptyset \\
C^f_{w,v,f} &= \{u \mid u(\mathcal{I}_{d+1}) = v,\ u(b) = w\}
\end{aligned}$$

反过来，对于 $w \in L_{A_i} - L^+_{A_i}$ 和 $v \in V^{d+1}$，定义 $C_{w,\ v,\ s} \subseteq$ 广义线性群$_{\mathrm{set}_0} \times S_{\mathrm{set}_0}$ 如下：

$$\begin{aligned}
C^s_{w,v,s} &= \{u \mid u(\mathcal{I}_{d+1}) = v,\ u(b) = w\} \\
C^q_{w,v,s} = C^f_{w,v,s} &= \emptyset
\end{aligned}$$

最后，对于任意满足 $v(a_1) \neq 1$ 的 $w \in L^+_{A_i}$ 和 $v \in V^{d+1}$，定义 $C_{w,\ v,\ s} \subseteq$ 广义线性群$_{\mathrm{set}_0} \times S_{\mathrm{set}_0}$ 如下：

$$\begin{aligned}
C^s_{w,v,s} = C^q_{w,v,s} &= \{u \mid u(\mathcal{I}_{d+1}) = v,\ u(b) = w\} \\
C^f_{w,v,s} &= \emptyset
\end{aligned}$$

同样，检查器的定义和引理 14.1 表明，对所有 $e \in E_{\mathrm{set}_0}$，这些子集中的每一个都在 IO_e 下封闭。此外，注意

$$\left(\bigcup C^{\mathrm{SF}_{\mathrm{set}_0}}_{w,v}\right) \cup \left(\bigcup C^{\mathrm{SF}_{\mathrm{set}_0}}_{w,v,s}\right) \cup \left(\bigcup C^{\mathrm{SF}_{\mathrm{set}_0}}_{w,v,f}\right) = \widehat{V}^{d+1}_{\mathrm{set}_0} \times \mathrm{SF}_{\mathrm{set}_0}$$

现在，固定 $Q = (Q_i)_{i \in \mathcal{I}_{\mathcal{T}}} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$。然后，对于所有满足 Q_i 适用于 w 的 $w \in L^+_{A_i}$ 以及任意 $w' \in L^+_A$，定义子集 $C_{w,w'} \subseteq$ 广义线性群$_{Q_0} \times S_{Q_0}$ 如下：

$$\begin{aligned}
C^s_{w,w'} &= \{u \mid w_d(u(\mathcal{I}'_d)) = w,\ u(a_1) = w'\} \\
C^f_{w,w'} &= \{u \mid w_d(u(\mathcal{I}'_d)) = Q_i(w),\ u(a_1) = w'\}
\end{aligned}$$

反过来，对于任意满足 Q_i 不适用于 w 的 $w \in L^+_{A_i}$ 以及任意 $w' \in L^+_{A_i}$，定义子集 $C_{w,w',s} \subseteq$ 广义线性群$_{Q_0} \times S_{Q_0}$ 如下：

$$C^s_{w,w',s} = \{u \mid w_d(u(\mathcal{I}'_d)) = w,\ u(a_1) = w'\}$$
$$C^f_{w,w',s} = \emptyset$$

类似地，对于任意满足 Q_i^{-1}不适用于 w 的 $w \in L^+_{A_i}$ 以及任意 $w' \in L^+_{A_i}$，定义子集 $C_{w,w',f} \subseteq$ 广义线性群$_{Q_0} \times S_{Q_0}$ 如下：

$$C^s_{w,w',f} = \emptyset$$
$$C^f_{w,w',f} = \{u \mid w_d(u(\mathcal{I}'_d)) = w,\ u(a_1) = w'\}$$

根据定义图灵带的 IO 关系可知，对于相应的边 e，这些集合中的每一个都在 IO$_e$ 下封闭。此外，

$$\left(\bigcup C^{\mathrm{SF}_{Q_0}}_{w,w'}\right) \cup \left(\bigcup C^{\mathrm{SF}_{Q_0}}_{w,w',s}\right) \cup \left(\bigcup C^{\mathrm{SF}_{Q_0}}_{w,w',f}\right) = V^{d+1} = \widehat{V}^{d+1}_{Q_0}$$

因此，由于 V^{d+1} 包含初始值，根据命题 7.17 可知 $\mathrm{VAL}_{\mathrm{IRT}^d} \subseteq V^{d+1}$。对于反向包含，请注意以下内容：

- 设 $w \in L^+_{A_i}$ 和 $v \in V^d$。那么，根据检查器的定义和引理 14.1，在 $\mathcal{G}_{\text{集合}_0}$ 中形成的一般路径 $(\hat{}s, \hat{}f, e_1), (\hat{}s, \hat{}f, e_2)$ 支持一次计算 $\gamma_{\text{集合}w\ v}^{0}$，该计算属于集合$_0$，发生在 $(u_1, (\text{集合}_0)s)$ 与 $(u_2, (\text{集合}_0)f)$ 之间，且满足 $u_j(\mathcal{I}'_d) = v$，$u_1(b) = u_2(a_1) = w$，以及$u_1(a_1) = u_2(b) = 1$。

- 令 $w \in L^+_{A_i}$ 且 $v_1, v_2 \in V^{d+1}_w$。接着，令 $u_1, u_2 \in \mathrm{GL}_{\mathrm{re}}$ 满足 $u_j(\mathcal{I}_{d+1}) = v_j$ 且$u_j(c) = 1$。于是，根据集合运算的定义和引理 14.2，由设定 $e'_j = (\hat{}s, \hat{}f, e_j)$ 得到的一般路径$e'_1, \ldots, e'_5$支持计算 $\gamma_{\mathrm{re}v_1,v_2}$，该计算发生在 (u_1, re_s) 与 (u_2, re_f) 之间。

现在，令 $v \in V^{d+1}$。接着，设定 $w = w_{d+1}(v)$，计算 $\gamma^{\mathrm{set}_0}_{w,1}$ 意味着图 $\mathcal{G}^{\mathrm{val}}{}_{\mathrm{IRT}^d}$ 中存在一条边，连接初始值与由 $v_w(\mathcal{I}'_d) = 1$且 $v_w(a_1) = w$给出的字 $v_w \in V^{d+1}$。此外，由于 $v_w, v \in V^{d+1}_w$，计算 $\gamma^{\mathrm{re}}_{v_w,v}$ 意味着 $\mathcal{G}^{\mathrm{val}}{}_{\mathrm{IRT}^d}$ 中存在一条边，连接 v_w 与 v。因此，$v \in \mathrm{VAL}_{\mathrm{IRT}^d}$，从而 $\mathrm{VAL}_{\mathrm{IRT}^d} = V^{d+1}$。

上述构造的集合与命题 7.16 结合，即可推出 IO 关系包含于陈述中所列的关系。显然，根据图灵带的定义，涉及 Q_0 的包含关系实际上都是等式。此外，平凡计算意味着 $\mathrm{IO}^{s,\ s\ \text{集合}_0} = \mathrm{IO}^{f,\ f\ \text{集合}_0} = \mathbb{I}$，而平凡动作标记 e_0 意味着 $\mathrm{IO}^{s\ s}_{\mathrm{re}} =, \mathrm{IO}^{s\ f}_{\mathrm{re}} =, \mathrm{IO}^{f\ f}_{\mathrm{re}}$，。最后，计算 $\gamma^{\mathrm{set}_0}_{w,\ v}$ 意味着 $\mathrm{IO}^{s,\ f\ \text{集合}_0}$，的反向包含关系成立，而计算 $\gamma^{\mathrm{re}}_{v_1,\ v_2}$意味着 $\mathrm{IO}^{s\ f,}_{\mathrm{re}}$ 的反向包含关系成立。因此，IRT^d 的 IO 关系如陈述所示。

现在，令 $\mathcal{F}$ 为 IRT^d 的估计集，对每个实例 $\in \mathrm{INST}_{\mathrm{IRT}^d}$，该估计集由 $\mathcal{F}_{\mathrm{inst}} = (n^{1+\varepsilon}, n)$ 给出。根据归纳假设、推论 12.15、引理 14.1、引理 14.2 和命题 9.7(3)，只需证明 $\mathrm{TMSP}^{\mathcal{F}}{}_{\mathrm{IRT}_d} \preceq (n^{1+\varepsilon}, n)$。

对于任意 $(u_1, s_1, u_2, s_2) \in \mathrm{IO}_{Q_0}$，由归纳假设立即可知，存在一条一般边支撑某个计算，实现 $(u_1, u_2) \in \mathrm{IO}^{s_1\ s_2}_{Q_0}$，并满足所需的复杂度界。

对于任意的 $(u_1, u_2) \in \mathrm{IO}^{s,\ f\text{集合}_0}$，设 $w = u_1(b) = u_2(a_1)$，并设 $v \in V^d$ 使得 $u_j(\mathcal{I}'_d) = v$。那么，$\gamma^{\mathrm{set}_0}_{w,\ v}$ 实现了 $(u_1, u_2) \in \mathrm{IO}^{s,\ f\ \text{集合}_0}$，并满足：

$$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{set}_0}(\gamma^{\mathrm{set}_0}_{w,v}) = 2|w|^{1+\varepsilon} \leq 2|u_1|^{1+\varepsilon}$$
$$\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{set}_0}(\gamma^{\mathrm{set}_0}_{w,v}) = |u_1| = |u_2|$$

此外，对于 $(v_1, v_2) \in \mathrm{IO}_{\mathrm{re}}^{s\ f}$，，计算 $\gamma_{v_1,\ v_2}^{\mathrm{re}}$ 实现了 $(v_1, v_2) \in \mathrm{IO}_{\mathrm{re}}^{s\ f}$，并满足：

$$\begin{aligned}\mathrm{tm}_{\mathrm{re}}^{\mathcal{F}}(\gamma_{v_1,v_2}^{\mathrm{re}}) &= 1 + |v_1|^{1+\varepsilon} + \max(|v_1|, |v_2|)^{1+\varepsilon} + |v_2|^{1+\varepsilon} + 1 \\ &= 3|v_1|^{1+\varepsilon} + 2 \\ \mathrm{sp}_{\mathrm{re}}^{\mathcal{F}}(\gamma_{v_1,v_2}^{\mathrm{re}}) &= |v_1| = |v_2|\end{aligned}$$

因此，根据 e_0 的存在性，对于任意 $(v_1, s_1, v_2, s_2) \in \mathrm{IO}_{\mathrm{re}}$，都存在一个计算 γ，它实现 $(v_1, v_2) \in \mathrm{IO}^{s_1,\ s_2}$且满足 $\mathrm{tm}_{\mathrm{re}}^{\mathcal{F}}(\gamma) \leq 3|v_1|^{1+\varepsilon} + 3$ 和 $\mathrm{sp}_{\mathrm{re}}^{\mathcal{F}}(\gamma) = |v_1| = |v_2|$。

因此，由于所有剩余的 IO 关系都是自反的，因而可由空计算实现，所以 $\mathrm{TMSP}^{\mathcal{F}}{}_{\mathrm{IRT}_d} \preceq (n^{1+\varepsilon}, n)$。

□

有了对象 IRT^d，接下来便按照下方图20中的方式执行迭代步骤，并定义对象 $\mathrm{TTape}^{d+1} := \mathrm{TTape}^{d+1,\ \tau\ \ ^{\varepsilon}\ ,\ i\ \ [\mathcal{I}_{d+1}]}$。请注意，标记为$Q()$的两个图表示与图灵操作 $Q = (Q_j)_{j\in\mathcal{I}_\mathcal{T}} \in \mathcal{Q}_\mathcal{T}$ 相对应的操作，这两种情况分别对应于 Q_i 的可能片段类型。

与前述情形一样，记号 $\mathcal{I}'_d = 1$ 表示 $a_j \in \mathcal{I}'_d$的守卫片段集合 $[a_j = 1]$。记号 $\mathcal{I}_{d+1} = 1$ 的作用类似。

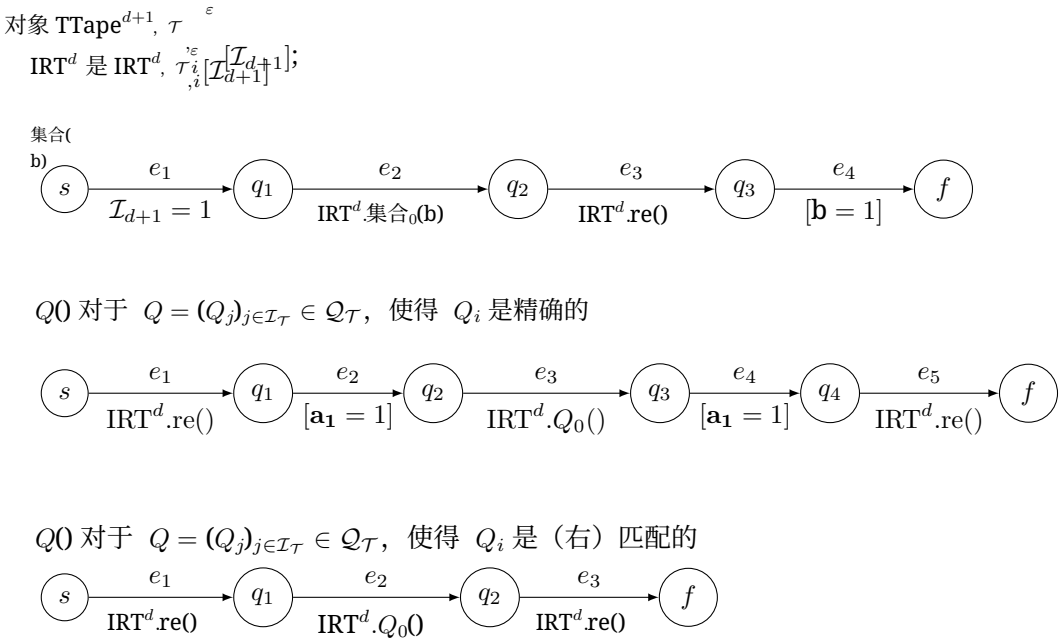


FIGURE 20. 秩为 $d+1$ 的 i-图灵带

下述命题完成了迭代构造：

引理 14.6。对象 TTape^{d+1} 是秩为 $d+1$ 的 i-图灵带，满足时间度量 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{TTape}^{d+1}} \preceq (n^{1+\varepsilon}, n)$ 的界。

证明。如引理 14.5 中已证明的 $\mathrm{VAL}_{\mathrm{IRT}^d} = V^{d+1}$，图语言的定义立即推出 $\mathrm{VAL}_{\mathrm{TTape}^{d+1}} \subseteq V^{d+1}$。

反之，设 $v \in V^{d+1}$。然后，给定 $u_1, u_2, u_3 \in \mathrm{GL}_{\mathrm{set}}$：

- $u_1(\mathcal{I}_{d+1}) = 1$, $u_1(b) = w_{d+1}(v)$

- $u_2(a_1) = w_{d+1}(v)$, $u_2(\mathcal{I}'_d) = 1$, $u_2(b) = 1$
- $u_3(\mathcal{I}_{d+1}) = v$, $u_3(b) = 1$

接着，根据引理 14.5 中概述的 IO 关系，存在一个集合的计算 γ_v^{set}，如下所示：

$$\gamma_v^{\mathrm{set}} = \big((u_1, \mathrm{set}_s), (\hat{s}, \hat{f}, e_1), (u_1, q_1), (\hat{s}, \hat{f}, e_2), (u_2, q_2), \\ (\hat{s}, \hat{f}, e_3), (u_3, q_3), (\hat{s}, \hat{f}, e_4), (u_3, \mathrm{set}_f)\big)$$

因此， $\mathcal{G}^{\mathrm{val}}{}_{\mathrm{TTape}^{d+1}}$ 中初始值与 v之间存在一条边，因此$v \in \mathbf{VAL}^{\mathrm{TTape}^{d+1}}$。

因此，$\mathbf{VAL}_{\mathrm{TTape}^{d+1}} = V^{d+1}$。

现在，对于任意 $w \in L^+_{A_i}$，定义子集 $C_{w,\mathrm{set}} \subseteq \mathbf{GL}_{\mathrm{set}} \times S_{\mathrm{set}}$ 如下：

$$C^s_{w,\mathrm{set}} = C^{q_1}_{w,\mathrm{set}} = \{u \mid u(\mathcal{I}_{d+1}) = 1,\ u(b) = w\} \\ C^{q_2}_{w,\mathrm{set}} = \{u \mid u(a_1) = w,\ u(\mathcal{I}'_d) = 1,\ u(b) = 1\} \\ C^{q_3}_{w,\mathrm{set}} = C^f_{w,\mathrm{set}} = \{u \mid w_{d+1}(u(\mathcal{I}_{d+1})) = w,\ u(b) = 1\}$$

同时，对于任意 $w \in L_{A_i}$ 和 $v \in V^{d+1} - \{1\}$，定义 $C_{w,v,\mathrm{set}} \subseteq \mathbf{GL}_{\mathrm{set}} \times S_{\mathrm{set}}$ 如下：

$$C^s_{w,v,\mathrm{set}} = \{u \mid u(\mathcal{I}_{d+1}) = v,\ u(b) = w\} \\ C^{q_1}_{w,v,\mathrm{set}} = C^{q_2}_{w,v,\mathrm{set}} = C^{q_3}_{w,v,\mathrm{set}} = C^f_{w,v,\mathrm{set}} = \emptyset$$

此外，对于任意 $w \in L_{A_i} - L^+_{A_i}$，定义 $C_{w,s,\mathrm{set}} \subseteq \mathbf{GL}_{\mathrm{set}} \times S_{\mathrm{set}}$ 如下：

$$C^s_{w,s,\mathrm{set}} = C^{q_1}_{w,s,\mathrm{set}} = \{u \mid u(\mathcal{I}_{d+1}) = 1,\ u(b) = w\} \\ C^{q_2}_{w,s,\mathrm{set}} = C^{q_3}_{w,s,\mathrm{set}} = C^f_{w,s,\mathrm{set}} = \emptyset$$

反过来，对于任意 $v \in V^{d+1}$ 和 $w \in L_{A_i} - \{1\}$，定义 $C_{w,v,f,\mathrm{set}} \subseteq$ 广义线性群$_{\mathrm{set}} \times S_{\mathrm{set}}$ 如下：

$$C^s_{w,v,f,\mathrm{set}} = C^{q_j}_{w,v,f,\mathrm{set}} = \emptyset \\ C^f_{w,v,f,\mathrm{set}} = \{u \mid u(\mathcal{I}_{d+1}) = v,\ u(b) = w\}$$

根据引理 14.5，上述每个集合对所有 $e \in E_{\mathrm{set}}$ 都在 $\mathbf{IO}_e$ 下封闭。因此，由于 $\mathbf{ND}^1_{\mathrm{set}} \times \mathbf{SF}^{\mathrm{op}}$ 包含于它们的并集中，根据命题 7.16，IO 关系包含于定义中的那些关系（参见定义 14.3）。对于任意$v \in V^{d+1}$，计算 γ_v 的存在性继而意味着 $\mathbf{IO}^{s,f}$ 集合满足反向包含；而空计算和传递性则意味着 $\mathbf{IO}^{s,s}$ 集合 和 $\mathbf{IO}^{f,f}$ 集合也满足同样的反向包含。因此，该操作集的 IO 关系正如 i-图灵带的定义所述。

现在，令 $Q = (Q_j)^{j \in \mathcal{I}_\mathcal{T}}$。

情形 1. Q_i 是精确片段 $[w_1 \to w_2]$。那么，定义
子集 $C_{ex} \subseteq$ 广义线性群$_Q \times S_Q$ 如下：

$$C^s_{ex} = C^{q_1}_{ex} = V^{d+1}_{w_1} \\ C^{q_2}_{ex} = \{v \in V^{d+1}_{w_1} \mid w_d(v(\mathcal{I}'_d)) = w_1\} \\ C^{q_3}_{ex} = \{v \in V^{d+1}_{w_2} \mid w_d(v(\mathcal{I}'_d)) = w_2\} \\ C^{q_4}_{ex} = C^f_{ex} = V^{d+1}_{w_2}$$

注意，对于任意 $v \in C^{q_2}_{ex} \cup C^{q_3}_{ex}$，必然有 $v(a_1) = 1$。

对于满足 $w \neq w_1$ 的任意 $w \in L^+_{A_i}$，定义 $C_{w,\ s,\ ex} \subseteq$ 广义线性群$_Q \times S_Q$ 如下：

$$\begin{aligned} C^s_{w,s,ex} = C^{q_1}_{w,s,ex} &= V^{d+1}_w \\ C^{q_2}_{w,s,ex} &= \{v \in V^{d+1}_w \mid w_d(v(\mathcal{I}'_d)) = w\} \\ C^{q_3}_{w,s,ex} = C^{q_4}_{w,s,ex} = C^f_{w,s,ex} &= \emptyset \end{aligned}$$

此外，对于任意满足 $w \neq w_2$ 的 $w \in L^+_{A_i}$，定义 $C_{w,f,ex} \subseteq$ 广义线性群$_Q \times S_Q$ 如下：

$$\begin{aligned} C^s_{w,f,ex} = C^{q_1}_{w,f,ex} = C^{q_2}_{w,f,ex} &= \emptyset \\ C^{q_3}_{w,f,ex} &= \{v \in V^{d+1}_w \mid w_d(v(\mathcal{I}'_d)) = w\} \\ C^{q_4}_{w,f,ex} = C^f_{w,f,ex} &= V^{d+1}_w \end{aligned}$$

利用引理 14.5，很容易检查这些集合中的每一个都在 IO$_e$ 下封闭，其中每个 $e \in E_Q$ 均如此。因此，命题 7.16 得出以下包含关系：

$$\begin{aligned} \mathsf{IO}^{s,s}_Q, \mathsf{IO}^{f,f}_Q &\subseteq \{(v_1, v_2) \mid w_{d+1}(v_1) = w_{d+1}(v_2)\} \\ \mathsf{IO}^{s,f}_Q &\subseteq \{(v_1, v_2) \mid w_{d+1}(v_1) = w_1,\ w_{d+1}(v_2) = w_2\} \end{aligned}$$

反过来，对于任意满足 $w_{d+1}(v_1) = w_{d+1}(v_2)$ 的 v_1、$v_2 \in V^{d+1}$，由引理 14.5 可知，单条一般边 $(\hat{}s, \hat{}s, e_1)$ 支持一个在 (v_1, Q_s) 与 (v_2, Q_s) 之间的计算 $\gamma^{ex}_{v_1,v_2,s}$。类似地，$\hat{}\hat{}(f, f, e_5)$ 支持一个在 (v_1, Q_f) 与 (v_2, Q_f) 之间的计算 $\gamma^{ex}_{v_1,v_2,f}$。

同时，对于任意满足 $w_{d+1}(v_j) = w_d(v_j(\mathcal{I}'_d)) = w_j$ 的 $v_1, v_2 \in V^{d+1}$，由引理 14.5，存在一个计算 $\gamma^{ex}_{v_1,\ v_2}$ 其定义如下

$$\gamma^{ex}_{v_1,v_2} = \big((v_1, Q_s), e'_1, (v_1, q_1), e'_2, (v_1, q_2), e'_3, (v_2, q_3), e'_4, (v_2, q_4), e'_5, (v_2, Q_f)\big)$$

$\hat{}$其中，对所有 $j \in \overline{5}$，$e'_j = (\hat{}s, f, e_j)$。

因此，由传递性，上述所有包含关系都是等式；所以，精确片段的定义蕴含该操作的 IO 关系等价于i-图灵带定义中的 IO 关系。

情形 2. Q_i 是（右）匹配片段 $[*w_1 \to *w_2]$。

对于任意满足 $ww_1^{-1} \in L^+_{A_i}$ 的 $w \in L^+_{A_i}$，令 $w' = ww_1^{-1}w_2$，定义 $C_{w,\ m} \subseteq$ 广义线性群$_Q \times S_Q$ 如下：

$$\begin{aligned} C^s_{w,m} = C^{q_1}_{w,m} &= V^{d+1}_w \\ C^{q_2}_{w,m} = C^f_{w,m} &= V^{d+1}_{w'} \end{aligned}$$

反过来 y，对于任意满足 $ww_1^{-1} \in L_{A_i} - L^+_{A_i}$ 的 $w \in L^+_{A_i}$，定义 $C_{w,\ s,\ m} \subseteq$ 广义线性群$_Q \times S_Q$ 如下 ：

$$\begin{aligned} C^s_{w,s,m} = C^{q_1}_{w,s,m} &= V^{d+1}_w \\ C^{q_2}_{w,s,m} = C^f_{w,s,m} &= \emptyset \end{aligned}$$

同理，对于满足 $ww_2^{-1} \notin L^+_{A_i}$ 的 $w \in L^+_{A_i}$，定义 $C_{w,\ f,\ m} \subseteq$ 广义线性群$_Q \times S_Q$ 如下：

$$\begin{aligned} C^s_{w,f,m} = C^{q_1}_{w,f,m} &= \emptyset \\ C^{q_2}_{w,f,m} = C^f_{w,f,m} &= V^{d+1}_w \end{aligned}$$

注意，对任意 $v \in V^{d+1}_w$，$w_d(v(\mathcal{I}'_d))$ 都是 w 的后缀。因此，如果 Q_i 适用于 $w_d(v(\mathcal{I}'_d))$，那么它也适用于 w。

因此，根据引理 14.5，上述每个集合对每个 $e \in E_Q$ 都在 IO_e 下封闭。所以，命题 7.16 推出以下包含关系：

$$\mathsf{IO}_Q^{s,s}, \mathsf{IO}_Q^{f,f} \subseteq \{(v_1, v_2) \mid w_{d+1}(v_1) = w_{d+1}(v_2)\}$$
$$\mathsf{IO}_Q^{s,f} \subseteq \{(v_1, v_2) \mid Q_i(w_{d+1}(v_1)) = w_{d+1}(v_2)\}$$

与前一种情形一样，对于任意满足 $w_{d+1}(v_1) = w_{d+1}(v_2)$ 的 $v_1, v_2 \in V^{d+1}$，$\mathsf{IO}_{\mathrm{re}}$ 的构成意味着存在计算 $\gamma^m_{v_1,\ v_2,\ s}$ 和 $\gamma^m_{v_1,\ v_2,\ f}$，它们由单条泛型边支持，从而得到 $\mathsf{IO}_Q^{s\,s}$，和 $\mathsf{IO}_Q^{f\,f}$ 的反向包含。与此同时，对于任意满足 () (()) （其中某个 ）的 ,, 引理 14.5 意味着存在一个计算，v_2，其定义如下

$$\gamma^m_{v_1,v_2} = \big((v_1, Q_s), e'_1, (v_1, q_1), e'_2, (v_2, q_2), e'_3, (v_2, Q_f)\big)$$

ˆ其中，对所有 $j \in \overline{3}$，$e'_j = (\hat{}s, f, e_j)$。

因此，根据传递性，上述所有包含关系再次都是等式；也就是说，该操作的 IO 关系等价于 i-图灵带定义中的 IO 关系。

因此，TTape^{d+1} 是秩为 $d+1$的 i-图灵带。

现在，令 $\mathcal{F}$ 为由$\mathcal{F}_{\mathrm{IRT}^d} = (n^{1+\varepsilon}, n)$给出的 TTape^{d+1} 的估计集。根据引理 14.5 和命题 9.7(3)，只需证明 $\mathsf{TMSP}^{\mathcal{F}}{}_{\mathrm{TTape}_{d+1}} \preceq (n^{1+\varepsilon}, n)$。

对于 $Q = (Q_j)_{j \in \mathcal{I}_\mathcal{T}}$，注意以下几点：

- 若 Q_i 是精确的，则对于任意满足$v_j(a_1) = 1$ 且 $j = 1$为 2 的 $(v_1, v_2) \in \mathsf{IO}$，：

$$\begin{aligned}\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_Q(\gamma^{ex}_{v_1,v_2}) &= |v_1|^{1+\varepsilon} + 1 + \max(|v_1|, |v_2|)^{1+\varepsilon} + 1 + |v_2|^{1+\varepsilon} \\ &\le 3\max(|v_1|, |v_2|)^{1+\varepsilon} + 2 \\ \mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_Q(\gamma^{ex}_{v_1,v_2}) &= \max(|v_1|, |v_2|)\end{aligned}$$

此外，对于任意满足 $w_{d+1}(v_1) = w_{d+1}(v_2)$的 v_1、$v_2 \in V^{d+1}$，

$$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_Q(\gamma^{ex}_{v_1,v_2,s}) = \mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_Q(\gamma^{ex}_{v_1,v_2,f}) = \max(|v_1|, |v_2|)^{1+\varepsilon} = |v_j|^{1+\varepsilon}$$
$$\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_Q(\gamma^{ex}_{v_1,v_2,s}) = \mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_Q(\gamma^{ex}_{v_1,v_2,f}) = |v_j|$$

- 若 Q_i 是（右）匹配的，则对于任意满足$v_j(a_1) = 1$ 且 $j = 1$为 2 的 $(v_1, v_2) \in \mathsf{IO}$，：

$$\begin{aligned}\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_Q(\gamma^{m}_{v_1,v_2}) &= |v_1|^{1+\varepsilon} + \max(|v_1|, |v_2|)^{1+\varepsilon} + |v_2|^{1+\varepsilon} \\ &\le 3\max(|v_1|, |v_2|)^{1+\varepsilon} \\ \mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_Q(\gamma^{m}_{v_1,v_2}) &= \max(|v_1|, |v_2|)\end{aligned}$$

此外，对于任意 $v_1, v_2 \in V^{d+1}$，若 $w_{d+1}(v_1) = w_{d+1}(v_2)$,

$$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_Q(\gamma^{m}_{v_1,v_2,s}) = \mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_Q(\gamma^{m}_{v_1,v_2,f}) = \max(|v_1|, |v_2|)^{1+\varepsilon} = |v_j|^{1+\varepsilon}$$
$$\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_Q(\gamma^{m}_{v_1,v_2,s}) = \mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_Q(\gamma^{m}_{v_1,v_2,f}) = |v_j|$$

因此，根据传递性，对于任意 $(v_1, s_1, v_2, s_2) \in \mathsf{IO}_Q$，都存在一个计算 γ，它实现了 $(v_1, v_2) \in \mathsf{IO}_Q^{s_1\ s_2}$，并且满足 $\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_Q(\gamma) \le 5M^{1+\varepsilon} + 2$，且对于 $M = \max(|v_1|, |v_2|)$，$\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_Q(\gamma) \le M$。

对于操作集，注意任意 $(u_1, u_2) \in \mathsf{IO}^{s,\ f}$ 集合都由 γ^{set}_v 实现，其中 $v = u_2(\mathcal{I}_{d+1})$。此时，$|u_1| = |v| = |u_2|$，$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{set}}(\gamma^{\mathrm{set}}_v) = 2|v|^{1+\varepsilon} + 2$，且 $\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{set}}(\gamma^{\mathrm{set}}_v) = |v|$。

此外，对于任意的 $(u_1, u_2) \in \mathsf{IO}^{f,\ f}$ 集合，使得 $u_1 \neq u_2$, $u_1(b) = 1 = u_2(b)$ 且 $w_{d+1}(v_1) = w_{d+1}(v_2)$ 对于 $v_j = u_j(\mathcal{I}_{d+1})$ 成立。但此时令 $u \in \mathsf{GL}_{\mathrm{set}}$ 满足 $u(b) = w_{d+1}(v_j)$ 且 $u(\mathcal{I}_{d+1}) = 1$，则

计算 $\gamma^{\mathrm{set}}_{v_j}$实现了 $(u, u_j) \in \mathrm{IO}^{s,\ f\text{集合}}$。因此，令 $\gamma^{\mathrm{set}}_{v_1,\ v_2}$为逆计算 $(\gamma^{\mathrm{set}}_{v_1})^{-1}$ 与 $\gamma^{\mathrm{set}}_{v_2}$ 的串接，可得 $\gamma^{\mathrm{set}}_{v_1,\ v_2}$ 实现了 $(u_1, u_2) \in \mathrm{IO}^{f,\ f\text{集合}}$ 并满足

$$\mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{set}}(\gamma^{\mathrm{set}}_{v_1,v_2}) = \sum \mathrm{tm}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{set}}(\gamma^{\mathrm{set}}_{v_j}) = 4|v_j|^{1+\varepsilon} + 4$$
$$\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{set}}(\gamma^{\mathrm{set}}_{v_1,v_2}) = \max\big(\mathrm{sp}^{\mathcal{F}}_{\mathrm{set}}(\gamma^{\mathrm{set}}_{v_j})\big) = |v_j|$$

其中 $|u_1| = |v_1| = |v_2| = |u_2|$。

因此，由于集合的所有其他关系都可通过空计算实现，可得 $\mathrm{TMSP}^{\mathcal{F}}\ \mathrm{TTape}_{d+1} \preceq (n^{1+\varepsilon}, n)$。

□

14.4. 顺序计算。

虽然上一节的迭代构造生成了任意秩的图灵带，但引理 14.6 给出的复杂度上界与秩无关。因此，迭代步骤并未带来明显的改进，其目的目前仍不清楚。为了解决这个问题，必须引入一种新的计算效率度量方法。该方法专用于图灵带，关键在于，它旨在衡量对象对其所对应的图灵重写系统的模拟效果。

定义 14.7（顺序计算）。设 $Q^1, \dots, Q^k \in \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$，并且对所有 $j \in \overline{k}$，$Q^j = (Q^j_\ell)_{\ell \in \mathcal{I}_{\mathcal{T}}}$。那么，具有历史 $(Q^1, \dots, Q^k)$ 的 $\mathcal{T}$ 的一个 i-计算，是一个由 A_i 上的词组成的元组 $\mathcal{C} = (w_0, w_1, \dots, w_k)$，使得对所有 $j \in \overline{k}$，$Q^j_i(w_{j-1}) = w_j$。注意，$\mathcal{T}$ 的任意计算都确定了 $\mathcal{T}$ 的一个 i-计算；而具有固定历史的 $\mathcal{T}$ 的任意一组 ℓ-计算 $(\mathcal{C}_\ell)_{\ell \in \mathcal{I}_{\mathcal{T}}}$，都唯一确定了具有该历史的 $\mathcal{T}$ 的一个计算。

现在，假设 TTape_d 是秩为 d的 $\mathcal{T}$ 上的 i-图灵带。那么，对于 $\mathcal{T}$ 上具有历史$(Q^1, \dots, Q^k)$的任意 i-计算$\mathcal{C} = (w_0, w_1, \dots, w_k)$，近似 $\mathcal{C}$ 的 TTape_d 上的顺序计算是一个序列 $\gamma_{\mathcal{C}} = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$，使得对于所有$j \in \overline{k}$，$\gamma_j$ 都是 $\mathrm{EXP}(Q^j)$的输入输出计算，并且 EXP-实现$(v_{j-1}, v_j) \in \mathrm{IO}^{s\ f}_{Q^j}$，其中 $v_0, v_1, \dots, v_k \in V^d$ 满足 $w_d(v_\ell) = w_\ell$，对所有$\ell \in 0, k$均成立。在这种情况下，称 $\gamma_{\mathcal{C}}$ 分别以 v_0 开始并以 v_k结束。此外，$\gamma_{\mathcal{C}}$的时间和空间分别定义为 $\mathrm{tm}(\gamma_{\mathcal{C}}) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{tm}^{Q^j}(\gamma_j)$ 和 $\mathrm{sp}(\gamma_{\mathcal{C}}) = \max(\mathrm{sp}^{Q^j}(\gamma_j))$。

若 f 和 g 是一对增长函数，则称 TTape_d 的顺序复杂度至多为 (f, g)，记作 $\mathrm{SEQ}(\mathrm{TTape}_d) \preceq (f, g)$，如果对于$\mathcal{T}$的任意 i-计算 $\mathcal{C} = (w_0, w_1, \dots, w_k)$，都存在 TTape_d的一个顺序计算 $\gamma_{\mathcal{C}}$，它近似于 $\mathcal{C}$，且对于 $n = \max(|w_0|, |w_k|, k)$，$\mathrm{tm}(\gamma_{\mathcal{C}}) \leq f(n)$，$\mathrm{sp}(\gamma_{\mathcal{C}}) \leq g(n)$。与以往的情形一样，若另一对增长函数 f', g' 满足 $(f', g') \sim (f, g)$，则称 (f', g') 是 TTape_d顺序复杂度的一个渐近上界，记作 $\mathrm{SEQ}(\mathrm{TTape}_d) \preceq (f', g')$。

请注意，上述顺序复杂度的定义完全是根据图灵带展开的计算给出的。与标准复杂度的情形一样，可以引入估计集，从而得到估计顺序复杂度这一概念；它可以通过命题 9.7 的类似结果与顺序复杂度联系起来。然而，鉴于证明下述关键陈述所需的严谨程度，本文不再详细阐述这一概念。

Prop 命题 14.8. 对所有 $d \in \mathbb{N} - \{0\}$，$\mathrm{SEQ}(\mathrm{TTape}^{d}_{,\mathcal{T}^{\varepsilon}_{i},}) \preceq (n^{\frac{d+1}{d}+\varepsilon}, n)$，对于任意 $\varepsilon > 0$.

证明。对于任意 $d \in \mathbb{N}$，令 $\alpha_d = \frac{d}{d+1}$ 和 $\beta_d = 1/\alpha_d$。

固定 $\mathcal{T}$ 的一个 i-计算 $\mathcal{C}=(w_0,w_1,\dots,w_k)$，其历史为 $(Q^1,\dots,Q^k)$。不失一般性，假设 $k\geq 1$，即该 i-计算非空。证明通过对 d 进行归纳法展开，表明对于 $\mathsf{TTape}^d=\mathsf{TTape}^{d,\varepsilon}_{\mathcal{T},i}$，$\mathsf{SEQ}(\mathsf{TTape}^d)\preceq(n^{\beta_d+\varepsilon},n)$。

对于基例，令 $d=1$。根据引理 14.4，存在一个常数 $C_1\in\mathbb{N}$，使得 $\mathsf{TMSP}_{\mathrm{TTape}^1}\leq(C_1n^{1+\varepsilon}+C_1,C_1n+C_1)$。因此，对于所有 $j\in\overline{k}$，都存在一个计算 γ_j，它属于 $\mathsf{EXP}(Q^j)$，并且 EXP- 实现 $(w_{j-1},w_j)\in\mathsf{IO}^{s\,f}_{Q^j,}$ 且满足：

$$\begin{aligned}\mathrm{tm}_{Q^j}(\gamma_j)&\leq C_1\max(|w_{j-1}|,|w_j|)^{1+\varepsilon}+C_1\\ \mathrm{sp}_{Q^j}(\gamma_j)&\leq C_1\max(|w_{j-1}|,|w_j|)+C_1\end{aligned}$$

此外，令 $K_{\mathcal{T}}=\max_{Q\in\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}}|Q|$，则对于所有 $j\in\overline{k}$，$\big||w_j|-|w_{j-1}|\big|\leq K_{\mathcal{T}}$。因此，对于所有 j，$|w_j|\leq|w_0|+k\cdot K_{\mathcal{T}}$。特别地，对于 $n=\max(|w_0|,|w_k|,k)$，对于所有$j\in k$，$|w_j|\leq(1+K_{\mathcal{T}})n$，于是

$$\begin{aligned}\mathrm{tm}_{Q^j}(\gamma_j)&\leq C_1(1+K_{\mathcal{T}})^{1+\varepsilon}n^{1+\varepsilon}+C_1\\ \mathrm{sp}_{Q^j}(\gamma_j)&\leq C_1(1+K_{\mathcal{T}})n+C_1\end{aligned}$$

但此时，$\gamma_{\mathcal{C}}=(\gamma_1,\dots,\gamma_k)$ 是 $\mathsf{TTape}^{1,\varepsilon}_{\mathcal{T},i}$ 的一次顺序计算，它近似于 $\mathcal{C}$，并满足

$$\begin{aligned}\mathrm{tm}(\gamma_{\mathcal{C}})&=\sum\mathrm{tm}_{Q^j}(\gamma_j)\leq k\big(C_1(1+K_{\mathcal{T}})^{1+\varepsilon}n^{1+\varepsilon}+C_1\big)\\&\leq C_1(1+K_{\mathcal{T}})^{1+\varepsilon}n^{2+\varepsilon}+C_1n\leq 2C_1(1+K_{\mathcal{T}})^{1+\varepsilon}n^{2+\varepsilon}\\&=2C_1(1+K_{\mathcal{T}})^{1+\varepsilon}n^{\beta_1+\varepsilon}\\ \mathrm{sp}(\gamma_{\mathcal{C}})&\leq C_1(1+K_{\mathcal{T}})n+C_1\end{aligned}$$

因此，由于 C_1 和 $K_{\mathcal{T}}$ 是与 i-计算 $\mathcal{C}$ 无关的常数，故可得渐近界 $\mathsf{SEQ}(\mathsf{TTape}^{1,\varepsilon}_{\mathcal{T},i})\preceq(n^{2+\varepsilon},n)=(n^{\beta_1+\varepsilon},n)$。

现在，假设 $\mathsf{SEQ}(\mathsf{TTape}^{d,\varepsilon}_{\mathcal{T},i})\preceq(n^{\beta_d+\varepsilon},n)$。因此，存在一个常数 $C_d\in\mathbb{N}$，使得 $\mathsf{SEQ}(\mathsf{TTape}^{d,\varepsilon}_{\mathcal{T},i})\leq(C_dn^{\beta_d+\varepsilon}+C_d,C_dn+C_d)$。此外，根据引理 14.5，可以假设$C_d$ 满足 $\mathsf{TMSP}_{\mathrm{IRT}^d}\leq(C_dn^{1+\varepsilon}+C_d,C_dn+C_d)$。

如上所述，令 $n=\max(|w_0|,|w_k|,k)$。然后，固定 $t\leq 2n^{1-\alpha_d}$ 和 $\ell_j,r_j\in\overline{k}$，使其对所有 $j\in\overline{t}$ 都满足：

- $\ell_1=0$, $r_t=k$
- $\ell_{j+1}=r_j$ for $j\in\overline{t-1}$
- $1\leq r_j-\ell_j\leq 2n^{\alpha_d}$ for all $j\in\overline{t}$.

例如，令 $m=\lceil n^{\alpha_d}\rceil$，可以设定 $t=\lceil k/m\rceil$，然后取 $r_j=jm$ 作为 $j\in\overline{t-1}$ 和 $r_t=k$。在这种情况下，注意到 $n^{1-\alpha_d}m\geq n\geq k$，因此 $n^{1-\alpha_d}+1\geq t$。

然后，对所有 $p\in\overline{t}$，令 $\mathcal{C}_p=(w_{\ell_p},w_{\ell_p+1},\dots,w_{r_p})$ 为 $\mathcal{T}$ 的 i-计算，其历史为 $(Q^{\ell_p+1},\dots,Q^{r_p})$。对每个 p，设 $m_p=$ 为 $\max(|w_{\ell_p}|,|w_{r_p}|,r_p-\ell_p)$。注意，根据指标的定义，$m_p\leq$ 为 $\max(|w_{\ell_p}|,|w_{r_p}|,2n^{\alpha_d})$。

固定 $p\in\overline{t}$ 和 $v_p\in V^{d+1}$，使得 $w_{d+1}(v_p)=w_{\ell_p}$。在接下来的两种情形中，构造一个 TTape^{d+1} 的顺序计算 $\gamma^{v_p}_{\mathcal{C}_p}$，使其逼近 $\mathcal{C}_p$，以 v_p 开始，并满足某些顺序复杂度界。

情形 1. $|w_{\ell_p}|,|w_{r_p}|\leq 4K_{\mathcal{T}}n^{\alpha_d}$。
那么，$m_p\leq(4K_{\mathcal{T}}+2)n^{\alpha_d}$。

根据归纳假设，存在一个顺序计算 $\gamma^d_{\mathcal{C}_p} = (\gamma^d_{\ell_p+1}, \ldots, \gamma^d_{r_p})$，它是对 TTape^d 的近似，并且满足

$$\mathrm{tm}(\gamma^d_{\mathcal{C}_p}) \leq C_d m_p^{\beta_d+\varepsilon} + C_d$$
$$\mathrm{sp}(\gamma^d_{\mathcal{C}_p}) \leq C_d m_p + C_d$$

因此，存在 $v^d_{\ell_p}, \ldots, v^d_{r_p} \in V^d$，满足 $w_d(v^d_j) = w_j$，对于所有 j，使得 γ^d_j是操作 EXP(Q^j) 的输入 - 输出计算，该操作属于 EXP(TTape^d)，并且 EXP- 实现 $(v^d_{j-1}, v^d_j) \in \mathrm{IO}^{s\,f}_{Q^j}$，。

设 $v^{d+1}_j \in V^{d+1}$，满足 $v^{d+1}_j(a_1) = 1$，且 $v^{d+1}_j(\mathcal{I}'_d) = (v^d_j)_d$。根据引理 8.9(1)，存在计算 η_j，它是 EXP(IRT^d) 上操作 EXP(Q^j_0) 的一次计算，并且 EXP-实现 $(v^{d+1}_{j-1}, v^{d+1}_j) \in \mathrm{IO}^{s,\ f_{\mathrm{IRT}^d}}$，其复杂度与 γ^d_j 相同，即满足 $\mathrm{tm}^{Q^j_0}(\eta_j) = \mathrm{tm}^{Q^j}(\gamma^d_j)$ 且 $\mathrm{sp}^{Q^j_0}(\eta_j) = \mathrm{sp}^{Q^j}(\gamma^d_j)$。

固定 $j \in \overline{\ell_p+1, r_p}$，并令 $u_{j-1}, u_j \in L^{\exp}_{Q^j}$，使得 $u_\ell(\mathcal{I}_{d+1}) = v^{\ d}_{\ \ell}{}^{+1}$ 和 $u_\ell(\mathcal{I}^{\mathrm{inv}}_{Q^j}) = 1^{\mathrm{inv}}_{Q^j}$。

若 Q^j_i 是匹配，则如上所述，引理 8.9(1)随即给出一个关于操作 EXP(Q^j) 的计算 χ_j，它在 (u_{j-1}, q_1) 与 (u_j, q_2) 之间进行，并满足 $\mathrm{tm}^{Q^j}(\chi_j) = \mathrm{tm}^{Q^j_0}(\eta_j)$，$\mathrm{sp}^{Q^j}(\chi_j) = \mathrm{sp}^{Q^j_0}(\eta_j)$。然后，可将 χ_j 增添边 $\pi_{e_1}(e_0)$ 和 $\pi_{e_3}(e_0)$，其中$e_0 \in E^{\exp}_{\mathrm{re}}$是 re 的无标记边，从而得到 EXP($Q^j$) 的一个输入输出计算 γ^{d+1}_j。

反过来，若 Q^j_i 是精确的，则引理 8.9(1)再次给出操作 EXP(Q^j) 的一个计算 χ_j，它在 (u_{j-1}, q_2) 与 (u_j, q_3) 之间进行，且复杂度与 η_j 相同。由于 $u_j(a_1) = 1$可应用于 (u_j, q_3)；同理，e_2^{-1}可应用于 (u_{j-1}, q_2)。将这两个应用增添到 χ_j 中后，所得计算还可像上文一样增添 EXP(re) 的无标记边的像，从而再次得到 EXP(Q^j) 的一个输入输出计算 γ^{d+1}_j。

在这两种情况下，γ^{d+1}_jEXP-实现 $(v^{d+1}_{j-1}, v^{d+1}_j) \in \mathrm{IO}^{s\,f}_{Q^j}$，并满足：

$$\mathrm{tm}_{Q^j}(\gamma^{d+1}_j) \leq \mathrm{tm}_{Q^j}(\chi_j) + 4 = \mathrm{tm}_{Q^j_0}(\eta_j) + 4$$
$$\mathrm{sp}_{Q^j}(\gamma^{d+1}_j) = \mathrm{sp}_{Q^j}(\chi_j) = \mathrm{sp}_{Q^j_0}(\eta_j)$$

接下来，注意到 $w_{d+1}(v^{d+1}_{\ell_p}) = w_d(v^d_{\ell_p}) = w_{\ell_p} = w_{d+1}(v_p)$。因此，引理 14.5 蕴含存在一个计算 ϕ_p，它属于 EXP(re)，且 EXP-实现 $(v_p, v^{d+1}_{\ell_p}) \in \mathrm{IO}^{s\,s}_{\mathrm{re}}$，并满足 $\mathrm{tm}_{\mathrm{re}}(\phi_p) \leq C_d|v_p|^{1+\varepsilon} + C_d$ 和 $\mathrm{sp}_{\mathrm{re}}(\phi_p) \leq C_d|v_p| + C_d$。再次使用引理 8.9(1)，即可得到一个计算 ϕ'_p，它属于 EXP(Q^{ℓ_p+1})，且 EXP-实现 $(v_p, v_{\ell_p}) \in \mathrm{IO}^{s\,s}_{Q^{\ell_p+1}}$，并具有与 ϕ_p 相同的复杂度界。

然后，ϕ'_p 可以与 $\gamma^{d+1}_{\ell_p+1}$ 连接，生成一个计算 ψ_p，它是 EXP(TTape^{d+1}) 的操作 EXP(Q^{ℓ_p+1})，并且 EXP-实现 $(v_p, v_{\ell_p+1}) \in \mathrm{IO}^{s\,f}_{Q^{\ell_p+1}}$，。

因此，$\gamma^{v_p}_{\mathcal{C}_p} = (\psi_p, \gamma^{d+1}_{\ell_p+2}, \ldots, \gamma^{d+1}_{r_p})$ 是 TTape^{d+1} 的一个顺序计算，它从 v_p 开始近似 $\mathcal{C}_p$，并满足：

$$\begin{aligned}
\mathrm{tm}(\gamma^{v_p}_{\mathcal{C}_p}) &= \mathrm{tm}_{Q^{\ell_p+1}}(\phi'_p) + \sum_j \mathrm{tm}_{Q^j}(\gamma^{d+1}_j) \le C_d|v_p|^{1+\varepsilon} + C_d + \sum_j (\mathrm{tm}_{Q^j}(\gamma^d_j) + 4) \\
&= C_d|w_{\ell_p}|^{1+\varepsilon} + \mathrm{tm}(\gamma^d_{\mathcal{C}_p}) + 4(r_p - \ell_p) + C_d \\
&\le C_d m_p^{1+\varepsilon} + C_d m_p^{\beta_d+\varepsilon} + 8n^{\alpha_d} + 2C_d \le 2C_d m_p^{\beta_d+\varepsilon} + 8n^{\alpha_d} + 2C_d \\
&\le 2C_d(4K_{\mathcal{T}} + 2)^{\beta_d+\varepsilon} n^{\alpha_d(\beta_d+\varepsilon)} + 8n^{\alpha_d} + 2C_d \\
&\le 2C_d(4K_{\mathcal{T}} + 2)^{\beta_d+\varepsilon} n^{1+\varepsilon} + 8n^{\alpha_d} + 2C_d \\
\mathrm{sp}(\gamma^{v_p}_{\mathcal{C}_p}) &= \max(\mathrm{sp}_{Q^{\ell_p+1}}(\phi'_p), \mathrm{sp}_{Q^j}(\gamma^{d+1}_j)) \le \max(C_d|v_p| + C_d, \mathrm{sp}_{Q^j}(\gamma^d_j)) \\
&\le \max(C_d|v_p| + C_d, \mathrm{sp}(\gamma^d_{\mathcal{C}_p})) \le C_d m_p + C_d \\
&\le C_d(4K_{\mathcal{T}} + 2)n^{\alpha_d} + C_d
\end{aligned}$$

情形 2. $\max(|w_{\ell_p}|, |w_{r_p}|) > 4K_{\mathcal{T}} n^{a_d}$。

根据 $K_{\mathcal{T}}$ 的定义，对于任意 $j \in \ell_p + 1, r_p, \big||w_j| - |w_{j-1}|\big| \le K_{\mathcal{T}}$。因此，对于所有 $j \in \ell_p$, $r_p, |w_j| \ge \max(|w_{\ell_p}|, |w_{r_p}|) - K_{\mathcal{T}}(r_p - \ell_p) > 2K_{\mathcal{T}} n^{\alpha_d}$。特别地，$|w_j| > K_{\mathcal{T}}$ 对于所有 j 都成立，因此，$\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$ 中的图灵操作没有任何精确片段适用于 w_j。于是，Q^j_i 对所有 $j \in \ell_p + 1, r_p$ 都匹配。

假设 $|w_{\ell_p}| > 4K_{\mathcal{T}} n^{\alpha_d}$，并取集合 $w_{\ell_p} = w w'_{\ell_p}$，使得 $|w'_{\ell_p}| = 4K_{\mathcal{T}} n^{\alpha_d}$。

假设对于某些 $j \in \ell_p$、$r_p - 1$，有 $w_j = w w'_j$ with $|w'_j| \ge (4n^{\alpha_d} - 2(j - \ell_p))K_{\mathcal{T}}$。那么，令 $Q^{j+1}_i = [*y_j \to *z_j]$，$y_j$ 是 w_j 的后缀，并满足 $|y_j| \le K_{\mathcal{T}}$。由于 $j - \ell_p \le r_p - \ell_p \le 2n^{\alpha_d}$，可推出 $|w'_j| \ge K_{\mathcal{T}} \ge |y_j|$。因此，$y_j$ 也是 w'_j 的后缀，这意味着 Q^{j+1}_i 适用于 w'_j。结果是，对于 $w'_{j+1} = w'_j y_j^{-1} z_j$，$w_{j+1} = w w'_{j+1}$ with

$$|w'_{j+1}| \ge |w'_j| - |y_j| \ge |w'_j| - K_{\mathcal{T}} \ge (4n^{\alpha_d} - 2((j+1) - \ell_p))K_{\mathcal{T}}$$

因此，Q^j_i 适用于 w'_{j-1}，并且对于所有 j，$Q^j_i(w_{j-1}) = wQ^j_i(w'_{j-1}) = w_j$。

反之，若有 $|w_{\ell_p}| \le 4K_{\mathcal{T}} n^{\alpha_d}$，则必然有 $|w_{r_p}| > 4K_{\mathcal{T}} n^{\alpha_d}$。但此时令 $w_{r_p} = w w'_{r_p}$，使得 $|w'_{r_p}| = 4K_{\mathcal{T}} n^{\alpha_d}$，对逆作用采取类似的论证，即可得到对所有 j 均有 w'_j。

因此，存在一个 i-计算 $\mathcal{C}'_p = (w'_{\ell_p}, w'_{\ell_p+1}, \ldots, w'_{r_p})$，其计算对象为 $\mathcal{T}$，历史为 $(Q^{\ell_p+1}, \ldots, Q^{r_p})$。令 $m'_p = \max(|w'_{\ell_p}|, |w'_{r_p}|, r_p - \ell_p)$，则存在一个顺序计算 $\rho^d_{\mathcal{C}'_p} = (\rho^d_{\ell_p+1}, \ldots, \rho^d_{r_p})$，逼近 $\mathcal{C}'_p$ 并满足

$$\begin{aligned}
\mathrm{tm}(\rho^d_{\mathcal{C}'_p}) &\le C_d(m'_p)^{\beta_d+\varepsilon} + C_d \\
\mathrm{sp}(\rho^d_{\mathcal{C}'_p}) &\le C_d m'_p + C_d
\end{aligned}$$

注意，在这两种情况下，$|w'_{\ell_p}|$ 或 $|w'_{r_p}|$ 中有一个等于 $4K_{\mathcal{T}} n^{\alpha_d}$，因此另一个至多为 $4K_{\mathcal{T}} n^{\alpha_d} + K_{\mathcal{T}}(r_p - \ell_p) \le 6K_{\mathcal{T}} n^{\alpha_d}$。这就得到 $m'_p \le (6K_{\mathcal{T}} + 2)n^{\alpha_d}$。

因此，存在 $v'_{\ell_p}, \ldots, v'_{r_p} \in V^d$，使得对所有 j，$w_d(v'_j) = w'_j$，且 ρ^d_j 是 $\mathrm{EXP}(\mathrm{TTape}^d)$ 的操作 $\mathrm{EXP}(Q^j)$ 的输入输出计算，它 EXP-实现了 $(v'_{j-1}, v'_j) \in \mathrm{IO}^{s\,f}_{Q^j}$，。

令 $v^{d+1}_j \in V^{d+1}$，使得 $v^{d+1}_j(a) = w$ 且 $v^{d+1}_j(\mathcal{I}'_d) = (v'_j)_d$。根据引理 8.9(1)，存在 $\mathrm{EXP}(\mathrm{IRT}^d)$ 的操作 $\mathrm{EXP}(Q^j_0)$ 的一次计算 η_j，该计算 EXP-实现了 $(v^{d+1}_{j-1}, v^{d+1}_j) \in \mathrm{IO}^{s,\ f\mathrm{IRT}^d}$，且其复杂度为 $\mathrm{tm}^{Q^j_0}(\eta_j) = \mathrm{tm}^{Q^j}(\rho^d_j)$，$\mathrm{sp}^{Q^j_0}(\eta_j) = \mathrm{sp}^{Q^j}(\rho^d_j) + |w|$。

与情形 1 一样，对于所有 $j \in \overline{\ell_p + 1, r_p}$，都存在 EXP(TTape^{d+1}) 的计算 EXP(Q^j) 的一次计算 γ_j^{d+1}，该计算 EXP-实现了 $(v_{j-1}^{d+1}, v_j^{d+1}) \in \mathrm{IO}^{s\,f}_{Q^j}$，并满足：

$$\begin{aligned}\mathrm{tm}_{Q^j}(\gamma_j^{d+1}) &\le \mathrm{tm}_{Q_0^j}(\eta_j) + 4\\ \mathrm{sp}_{Q^j}(\gamma_j^{d+1}) &= \mathrm{sp}_{Q_0^j}(\eta_j)\end{aligned}$$

此外，注意对所有 j，$w_{d+1}(v_j^{d+1}) = ww'_j = w_j$。特别地，由于 $w_d(v_p) = w_{\ell_p}$，因此又存在一个关于操作 EXP(Q^{ℓ_p+1}) 的计算 ϕ'_p，它属于 EXP(TTape^{d+1})，且能对 (v_p, v_{ℓ_p}) 实现 EXP，$\in \mathrm{IO}^{s\,s}_{Q^{\ell_p+1}}$，并满足

$$\begin{aligned}\mathrm{tm}_{Q^{\ell_p+1}}(\phi'_p) &\le C_d|v_p|^{1+\varepsilon} + C_d\\ \mathrm{sp}_{Q^{\ell_p+1}}(\phi'_p) &\le C_d|v_p| + C_d\end{aligned}$$

因此，令 ψ_p 为通过连接 ϕ'_p 和 $\gamma_{\ell_p+1}^{d+1}$ 得到的 EXP(Q^{ℓ_p+1}) 的计算，则 $\gamma_{\mathcal{C}_p}^{v_p} = (\psi_p, \gamma_{\ell_p+2}^{d+1}, \ldots, \gamma_{r_p}^{d+1})$ 又是 TTape^{d+1} 的一个顺序计算，它从 v_p 开始并逼近 $\mathcal{C}_p$。此外，该顺序计算满足：

$$\begin{aligned}\mathrm{tm}(\gamma_{\mathcal{C}_p}^{v_p}) &= \mathrm{tm}_{Q^{\ell_p+1}}(\phi'_p) + \sum_j \mathrm{tm}_{Q^j}(\gamma_j^{d+1}) \le C_d|v_p|^{1+\varepsilon} + C_d + \sum_j (\mathrm{tm}_{Q^j}(\rho_j^d) + 4)\\
&= C_d|w_{\ell_p}|^{1+\varepsilon} + \mathrm{tm}(\rho^d_{\mathcal{C}'_p}) + 4(r_p - \ell_p) + C_d\\
&\le C_d|w_{\ell_p}|^{1+\varepsilon} + C_d(m'_p)^{\beta_d+\varepsilon} + 8n^{\alpha_d} + 2C_d\\
&\le C_d|w_{\ell_p}|^{1+\varepsilon} + C_d(6K_{\mathcal{T}} + 2)^{\beta_d+\varepsilon} n^{\alpha_d(\beta_d+\varepsilon)} + 8n^{\alpha_d} + 2C_d\\
&\le C_d|w_{\ell_p}|^{1+\varepsilon} + C_d(6K_{\mathcal{T}} + 2)^{\beta_d+\varepsilon} n^{1+\varepsilon} + 8n^{\alpha_d} + 2C_d\\
\mathrm{sp}(\gamma_{\mathcal{C}_p}^{v_p}) &= \max(\mathrm{sp}_{Q^{\ell_p+1}}(\phi'_p), \mathrm{sp}_{Q^j}(\gamma_j^{d+1})) \le \max(C_d|v_p| + C_d, \mathrm{sp}_{Q^j}(\rho_j^d) + |w|)\\
&\le C_d \max(|v_p|, m'_p) + C_d + |w|\\
&\le C_d \max(|w_{\ell_p}|, (6K_{\mathcal{T}} + 2)n^{\alpha_d}) + C_d + |w|\\
&\le C_d(3|w_{\ell_p}| + 2n^{\alpha_d}) + C_d + |w_{\ell_p}|\\
&\le (3C_d + 1)|w_{\ell_p}| + 2C_d n^{\alpha_d} + C_d\end{aligned}$$

无论哪种情况，令 $L_d = 3C_d(6K_{\mathcal{T}} + 2)^{\beta_d+\varepsilon} + 8$，则 $\gamma_{\mathcal{C}_p}^{v_p}$ 是 TTape^{d+1} 的一个顺序计算，它从 v_p 开始并逼近 $\mathcal{C}_p$，且满足：

$$\begin{aligned}\mathrm{tm}(\gamma_{\mathcal{C}_p}^{v_p}) &\le L_d|w_{\ell_p}|^{1+\varepsilon} + L_d n^{1+\varepsilon} + L_d\\ \mathrm{sp}(\gamma_{\mathcal{C}_p}^{v_p}) &\le L_d|w_{\ell_p}| + L_d n + L_d\end{aligned}$$

现在，固定 $v_{1,\,s} \in V^{d+1}$ 使得 $w_{d+1}(v_1^s) = w_0$。由于 $\ell_1 = 0$，计算 $\gamma^{v_{1,\,\mathcal{C}_1}\,s}$ 如上所述存在。接着，令 $v_{2,\,s} \in V^{d+1}$ 为 $\gamma_{\mathcal{C}_1}$ 结束时的值。根据构造，由此可得 $w_{d+1}(v_{2,\,s}) = w_{r_1} = w_{\ell_2}$，因此 $\gamma^{v_{2,\,\mathcal{C}_2}\,s}$ 存在。

如此继续下去，存在 $v_{1,\,s}, \ldots, v_{t,\,s}, v_{t+1,\,s} \in V^{d+1}$，使得对所有 $p \in \overline{t}$，$\gamma^{v_{p,\,\mathcal{C}_p}\,s}$，如上所述，都是一个以 $v_{p,\,s}$ 开始并以 $v_{p+1,\,s}$ 结束的顺序计算。

因此，可以将 $\gamma^{v_1,s}_{\mathcal{C}_1}, \ldots, \gamma^{v_t,s}_{\mathcal{C}_t}$ 连接起来，生成一个顺序计算 $\gamma_{\mathcal{C}}$ of TTape^{d+1}，以逼近 $\mathcal{C}$ 并满足：

$$\begin{aligned}\mathrm{tm}(\gamma_{\mathcal{C}}) &= \sum_p \mathrm{tm}(\gamma^{v_{p,s}}_{\mathcal{C}_p}) \le L_d \sum_p |w_{\ell_p}|^{1+\varepsilon} + L_d t n^{1+\varepsilon} + L_d \\ &\le L_d t \max_p |w_{\ell_p}|^{1+\varepsilon} + L_d t n^{1+\varepsilon} + L_d \\ \mathrm{sp}(\gamma_{\mathcal{C}}) &= \max_p \mathrm{sp}(\gamma^{v_{p,s}}_{\mathcal{C}_p}) \le L_d \max_p |w_{\ell_p}| + L_d n + L_d\end{aligned}$$

但由于 $\big||w_j| - |w_{j-1}|\big| \le K_{\mathcal{T}}$ 对所有 $j \in \overline{k}$，

$$|w_j| \le |w_0| + K_{\mathcal{T}} k \le n + K_{\mathcal{T}} n = (K_{\mathcal{T}} + 1)n$$

特别地，$\max_p |w_{\ell_p}| \le (K_{\mathcal{T}} + 1)n$。

因此，由于 $t \le 2n^{1-\alpha_d}$，令 $C_{d+1} = 4L_d(K_{\mathcal{T}} + 2)^{1+\varepsilon}$，可得：

$$\begin{aligned}\mathrm{tm}(\gamma_{\mathcal{C}}) &\le L_d t((K_{\mathcal{T}} + 1)^{1+\varepsilon} + 1)n^{1+\varepsilon} + L_d \\ &\le 2L_d n^{1-\alpha_d} \cdot 2(K_{\mathcal{T}} + 1)^{1+\varepsilon} n^{1+\varepsilon} + L_d \\ &\le 4L_d(K_{\mathcal{T}} + 1)^{1+\varepsilon} n^{2-\alpha_d+\varepsilon} + L_d \\ &\le C_{d+1} n^{1+\beta_{d+1}+\varepsilon} + C_{d+1} \\ \mathrm{sp}(\gamma_{\mathcal{C}}) &\le L_d(K_{\mathcal{T}} + 2)n + L_d \le C_{d+1} n + C_{d+1}\end{aligned}$$

□

推论 14.9. 设 $\mathcal{T}$ 是定义在图灵系统硬件 $(\mathcal{I}_{\mathcal{T}}, \mathcal{A}_{\mathcal{T}})$ 上的图灵重写系统。那么，对于任意 $i \in \mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ 和任意 $\varepsilon > 0$，存在一个秩为某个值的 i-图灵带 $\mathsf{TTape}^{\varepsilon}_{\mathcal{T},\, i} = \mathsf{TTape}^{\varepsilon}_{\mathcal{T},\, i}[\mathcal{I}_{i,\varepsilon}]$，满足 $\mathsf{TMSP}_{\mathsf{TTape}^{\varepsilon}_{\mathcal{T},\, i}} \preceq (n^{1+\varepsilon}, n)$ 和 $\mathsf{SEQ}(\mathsf{TTape}^{\varepsilon}_{\mathcal{T},\, i}) \preceq (n^{1+\varepsilon}, n)$。

证明。固定 $\varepsilon > 0$，令 $d \in \mathbb{N}$ 使得 $d\varepsilon > 2$。那么，由命题 14.8 可知，秩为 d 的 $\mathcal{T}$ 的 i-图灵带 $\mathsf{TTape}^{d\,\varepsilon/2}_{\mathcal{T}\,i}$,,满足该结论。

□

15. Proof of Theorem 1.1

由命题 10.2 和引理 13.5，只需证明：对于任意 $\varepsilon > 0$ 以及任意满足 $\mathsf{TM}_{\mathcal{T}} \succeq n$ 的图灵重写系统 $\mathcal{T}$，都存在一个 $L_{\mathcal{T}}$ 的接受器 $\mathsf{acc}^{\varepsilon}$，使其满足 $\mathsf{TMSP}_{\mathsf{acc}^{\varepsilon}} \preceq (\mathsf{TM}^{1+\varepsilon}_{\mathcal{T}}, \mathsf{TM}_{\mathcal{T}})$。此外，由命题 10.7 可知，只需找到一个 $L_{\mathcal{T}}$ 的弱接受器 $\mathsf{wacc}^{\varepsilon}$，使其满足 $\mathsf{WTMSP}_{\mathsf{wacc}^{\varepsilon}} \preceq_1 (\mathsf{TM}^{1+\varepsilon}_{\mathcal{T}}, \mathsf{TM}_{\mathcal{T}})$。

为此，固定一个定义在图灵系统硬件 $\mathcal{H}_{\mathcal{T}} = (\mathcal{I}_{\mathcal{T}}, \mathcal{A}_{\mathcal{T}})$ 上的图灵重写系统 $\mathcal{T}$。令 $k = |\mathcal{I}_{\mathcal{T}}|$，并固定一个枚举 $\mathcal{I}_{\mathcal{T}} = \{i_1, \ldots, i_k\}$，使得 i_1 是 $\mathcal{T}$ 的输入带。由于向 $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ 添加一个对应字母表为空的索引不会影响 $\mathcal{T}$ 的语言或复杂度，因此不失一般性，可假设 $k \ge 2$。此外，令 $(S_{\mathcal{T}}, E_{\mathcal{T}})$ 为定义 $\mathcal{T}$ 的底层有向图。

接下来，将真操作 $\mathsf{wacc}^{\varepsilon} = \mathsf{wacc}^{\varepsilon}(a)$ 定义如下：

(1) 对所有 $j \in \overline{k}$，都存在一个实例 $\mathsf{TT}_j \in \mathsf{INST}_{\mathsf{wacc}^{\varepsilon}}$，它由推论 14.9 中定义的 i-图灵带 $\mathsf{TTape}^{\varepsilon}_{\mathcal{T},\, i_j}$ 构造而成，并通过将值带重命名为不相交指标集 $\mathcal{I}_{j,\,\varepsilon}$ 得到；也就是说，对于 $j \ne \ell$，有 $\mathcal{I}_{j,\,\varepsilon} \cap \mathcal{I}_{\ell,\,\varepsilon} = \emptyset$。

(2) $\mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathsf{wacc}^{\varepsilon}} = \left(\bigsqcup_{j=1}^{k} \mathcal{I}_{j,\varepsilon}\right) \sqcup \{b\}$, where $\mathcal{A}_{\mathsf{wacc}^{\varepsilon}}(b) = \mathcal{A}_{\mathcal{T}}(i_1)$.

(3) 对于每个 $q \in S_{\mathcal{T}}$，都存在一个与 $\mathsf{wacc}^{\varepsilon}$ 对应的状态 p_q。

(4) 对于每个 $e \in E_{\mathcal{T}}$，都存在 $k-1$ 个对应的状态 $s_e(1)\ldots, s_e(k-1)$。此外，设定 $s_e(0) = p_{t(e)}$、$s_e(k) = p_{h(e)}$，且 $\mathsf{Lab}(e) = Q \in \mathcal{Q}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}$，则存在相应的边 $e(1)\ldots, e(k)$，其中 $e(j) = (s_e(j-1)\ s_e(j), \mathrm{TT}_j.Q())$（对于 e 不是环的情况，见图 21）。

(5) 除了 (3) 中引入的 $|S_{\mathcal{T}}| + (k-1)|E_{\mathcal{T}}|$ 状态外，还有另外四个状态：由 $\mathrm{SF}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}$ 构成的起始状态和终止状态，以及另外两个名为 q 和 q' 的状态。

(6) 令 act_0 为 $\mathcal{H}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}$ 上的 0-动作，由所有$c \in \mathcal{I}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}$对应的守卫片段 $[c = 1]$ 组成。此外，令 $s_{\mathcal{T}}$、$f_{\mathcal{T}} \in S_{\mathcal{T}}$ 为 $\mathcal{T}$ 的起始状态和终止状态。那么，除了 (4) 中引入的 $k|E_{\mathcal{T}}|$ 边之外，还有另外六条边：

- $e_s = ((\mathrm{wacc}^\varepsilon)_s, q, \text{动作}_0)$
- $e_{\text{交换}} = (q, q', \text{交换}^A(a, b))$
- $e_{\text{集合}} = (q', p_{s_{\mathcal{T}}}, \mathrm{TT}_1(b))$
- $e_f = (p_{f_{\mathcal{T}}}, (\mathrm{wacc}^\varepsilon)_f, \text{动作}_0)$
- 逆边 e_s^{-1}和 e_f^{-1}

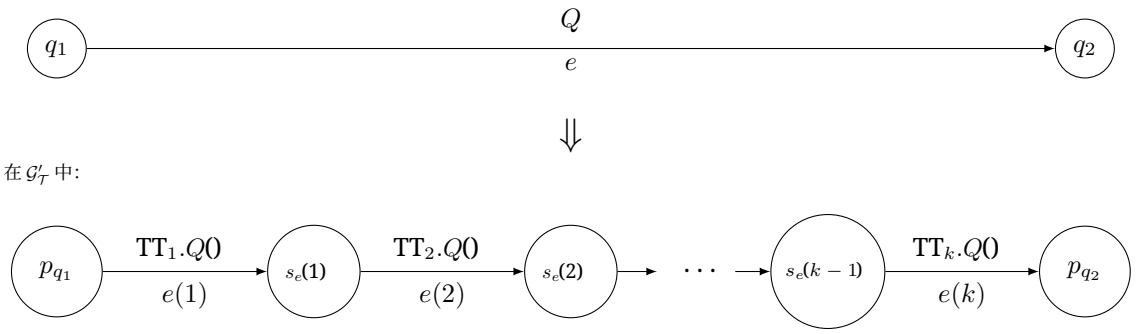


FIGURE 21. wacc 中对应于 $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ 的一条边的 $\mathcal{G}'_e$ 的边。$^\varepsilon$

注意，命名约定要求 $\mathcal{I}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon} = \{a\}$ 和 $\mathcal{I}^{\mathrm{val}}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon} = \emptyset$。此外，最小硬件的约定意味着，对于所有 $c \in \mathcal{I}_{j,\varepsilon}$，$\mathcal{A}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(c) = \mathcal{A}_{\mathcal{T}}(i_j)$。

条件 (1) 中所述指标集 $\mathcal{I}_{j,\varepsilon}$ 的不相交性保证了 $\mathcal{G}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}$ 满足定义 6.3 的条件 (5)。同样，(6) 中逆边 e_s^{-1} 和 e_f^{-1} 的存在确保了定义 6.3 的条件 (4)。其余条件也可类似验证，因此 $\mathcal{G}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}$ 确实是一个 S^*-图。

此外，动作 act_0 对 e_s 和 e_f^{-1} 的标记的定义立即意味着条件 (O) 得到满足。因此，$\mathrm{wacc}^\varepsilon$ 确实是一个适当操作。

由 (3) 和 (4) 中构造的状态和边组成的 $\mathcal{G}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}$ 的子图记为 $\mathcal{G}'_{\mathcal{T}}$。$\mathcal{G}'_{\mathcal{T}}$ 中由 (3) 得到的状态称为常规状态，而由 (4) 得到的状态称为额外状态。

此外，对于任意 $e \in E_{\mathcal{T}}$，将如图 21 所示由 e 构造的 $\mathcal{G}'_{\mathcal{T}}$子图记为 $\mathcal{G}'_e$。因此，$\mathcal{G}'_{\mathcal{T}}$可以看作是 $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$的图的一个副本，其中每条单边 e 都被一个由 k 条边组成的子图所取代。

有了这些术语，图 22 展示了真操作 $\mathrm{wacc}^\varepsilon$ 的总体布局，其中子图 $\mathcal{G}'_{\mathcal{T}}$“留空”，因为其构成取决于固定图灵重写系统 $\mathcal{T}$ 的构成。

对象 $\mathrm{wacc}^{\varepsilon}$(a);
TT_j 是 $\mathrm{TTape}^{\varepsilon}_{\mathcal{T},\ i_j}[\mathcal{I}_{j,\varepsilon}]$ 对于 $j \in \overline{k}$

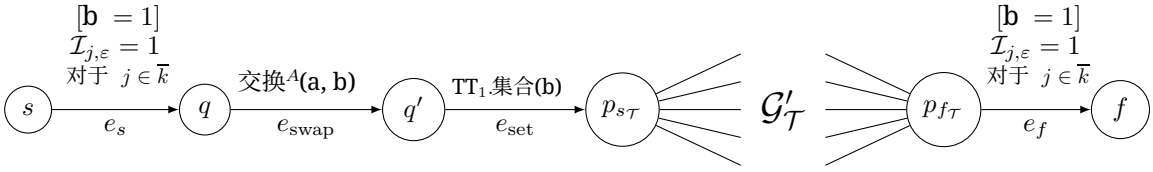


FIGURE 22. 真操作 $\mathrm{wacc}^{\varepsilon}(a)$。

现在，设 $\gamma = \big((u_0, s_0)\ e'_1, (u_1, s_1)\ e'_2, \ldots, e'_m, (u_m, s_m)\big)$ 是 $\mathrm{wacc}^{\varepsilon}$ 的一次计算，并对所有 $i \in \overline{m}$ 记作$e'_i = (\mathrm{sf}_i, \mathrm{sf}'_i, e''_i)$。那么， γ 称为 $\mathcal{G}'_{\mathcal{T}}$-计算，如果每个状态 s_i 和每条边e''_i 都包含在 $\mathcal{G}'_{\mathcal{T}}$ 中。

此外，如果 s_i 当且仅当 $i \in \{0, m\}$ 时是一个正则状态，那么 γ 称为 $\mathcal{T}$-边计算。根据 $\mathcal{G}'_{\mathcal{T}}$ 的构造，存在 $e \in E_{\mathcal{T}}$ 和 j_1、……、$j_m \in \overline{k}$，使得对于所有 $i \in \overline{m}$，$e''_i = e(j_i)$。在这种情况下， γ 称为 e 的 $\mathcal{T}$-边计算。

令 $V^{j,\varepsilon}$ 为 $\mathrm{TTape}^{\varepsilon}_{\mathcal{T},i_j}$ 的值集合。因此，令 $d_{j,\varepsilon}$ 为这条 i_j-图灵带的秩，$V^{j,\varepsilon} = V^{d_{j,\varepsilon}}$。于是，由于任何 $v \in \mathrm{VAL}^{\mathrm{TT}_j}$ 都是 $V^{j,\varepsilon}$ 中某个元素的副本，映射 $w_{d_{j,\varepsilon}}$ 可以自然地扩展为 $\mathrm{VAL}^{\mathrm{TT}_j}$ 上的映射 $w_{j,\varepsilon}$，从而 $w_{j,\varepsilon}(v) \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}(i_j)$。

对于每个 $u \in \mathrm{GL}_{\mathrm{wacc}^{\varepsilon}}$和每个 $j \in \overline{k}$，记 $v_j(u) = u(\mathcal{I}_{\varepsilon,\ j}) \in \mathrm{VAL}^{\mathrm{TT}_j}$。然后，定义$w_{\mathcal{T}}(u) \in L_{\mathcal{H}_{\mathcal{T}}}$，使得对所有 $j \in \overline{k}$， $w_{\mathcal{T}}(u)(i_j) = w_{j,\ \varepsilon}(v_j(u))$。

引理 15.1。设 $e = (q_1, q_2, Q) \in E_{\mathcal{T}}$，且 $Q = (Q_{i_j})_{j \in \overline{k}} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$。假设

$$\gamma = \big((u_0, s_0), e'_1, (u_1, s_1), e'_2, \ldots, e'_m, (u_m, s_m)\big)$$

是 $\mathcal{T}$-边计算 e，且对所有 $i \in \overline{m}$，满足 $e'_i = (\mathrm{sf}_i, \mathrm{sf}'_i, e''_i)$。那么：

(1) 若 $s_0 = s_m$，则 $w_{\mathcal{T}}(u_0) = w_{\mathcal{T}}(u_m)$。(2) 若 $s_0 = p_{q_1}$ 且 $s_m = p_{q_2}$，则 $w_{\mathcal{T}}(u_0)$ 是 Q-可应用的，且 $Q(w_{\mathcal{T}}(u_0)) = w_{\mathcal{T}}(u_m)$。(3) 若 $s_0 = p_{q_2}$ 且 $s_m = p_{q_1}$，则 $w_{\mathcal{T}}(u_0)$ 是 Q^{-1}- 可应用的，且 $Q^{-1}(w_{\mathcal{T}}(u_0)) = w_{\mathcal{T}}(u_m)$。

证明。对于每个 $j \in \overline{k}$，令 $R_j = \{(u'_1, u'_2) \in \mathrm{GL}^2_{\mathrm{wacc}^{\varepsilon}} \mid u'_1(\mathcal{I}_{\mathrm{wacc}^{\varepsilon}} - \mathcal{I}_{j,\ \varepsilon}) = u'_2(\mathcal{I}_{\mathrm{wacc}^{\varepsilon}} - \mathcal{I}_{j,\ \varepsilon})\}$。于是，根据 i_j-图灵带的定义，对于每个 $j \in k$， $e(j)$ 的 IO 关系为：

$$\mathrm{IO}^{s_e(j-1),s_e(j-1)}_{e(j)} = \mathrm{IO}^{s_e(j),s_e(j)}_{e(j)} = R_j \cap \{(u'_1, u'_2) \mid w_{j,\varepsilon}(v_j(u'_1)) = w_{j,\varepsilon}(v_j(u'_2))\}$$

$$\mathrm{IO}^{s_e(j-1),s_e(j)}_{e(j)} = R_j \cap \{(u'_1, u'_2) \mid Q_{i_j}(w_{j,\varepsilon}(v_j(u'_1))) = w_{j,\varepsilon}(v_j(u'_2))\}$$

其中，与 (4) 中一样， $s_e(0) = p_{q_1}$ 且 $s_e(k) = p_{q_2}$。

固定 $i \in \overline{0、 m}$ 和 $j \in \overline{k}$。取 $\ell \in \overline{0、 k}$，使得 $s_i = s_e(\ell)$。

(I) 假设 $\ell < j$。

令 $r \in \overline{i、 m}$，并假设对所有 $t \in i、 r$， $s_t \neq s_e(j)$。那么，对于所有 $t \in \overline{i、 r}$，若 $e''_t = e(j)$，则 $(u_{t-1}, u_t) \in \mathrm{IO}^{s_e(j-1)\ s_e(j-1)\ e(j)}$。于是，上述 IO 关系的构成意味着$w_{j,\ \varepsilon}(v_j(u_i)) = w_{j,\ \varepsilon}(v_j(u_r))$。

因此，如果对于所有 $t \in i、 \overline{m}$， $s_t \neq s_e(j)$，那么 $w_{j,\ \varepsilon}(v_j(u_i)) = w_{j,\ \varepsilon}(v_j(u_m))$。此外，由于 $s_e(\ell)$ 和 p_{q_2} 属于 $\mathcal{G}'_e - \{s_e(j)\}$ 的不同连通分支，因此必然有 $s_m = p_{q_1}$。

否则，令 $r \in i, m$ 为满足 $s_r = s_e(j)$ 的最小索引。由上述推理可得 $w_{j,\ \varepsilon}(v_j(u_i)) = w_{j,\ \varepsilon}(v_j(u_{r-1}))$。此外，对于所有 $p \in j+1$， k, $s_e(\ell)$ 和 $s_e(p)$ 都位于不同的

连通分支 $\mathcal{G}'_e - \{s_e(j)\}$ 中，因此 $s_{r-1} = s_e(j-1)$。上述 IO$^{e(j)}$ 的构成由此意味着 $w_{j,\ \varepsilon}(v_j(u_{r-1}))$ 是 Q_{i_j}- 适用的，其中 $Q_{i_j}(w_{j,\ \varepsilon}(v_j(u_{r-1}))) = w_{j,\ \varepsilon}(v_j(u_r))$。因此，$Q_{i_j}(w_{j,\ \varepsilon}(v_j(u_i))) = w_{j,\ \varepsilon}(v_j(u_r))$。

(II) 反过来，假设 $\ell \geq j$。

通过类似的论证，若对所有 $t \in \overline{i,r}$，都有 $s_t \neq s_e(j-1)$，则 $w_{j,\varepsilon}(v_j(u_i)) = w_{j,\varepsilon}(v_j(u_r))$。因此，如 (I) 中所示，对于所有 $t \in \overline{i,m}$，若 $s_t \neq s_e(j-1)$，则有 $w_{j,\varepsilon}(v_j(u_i)) = w_{j,\varepsilon}(v_j(u_m))$，其中 $s_m = p_{q_2}$。

此外，若 $r \in \overline{i,m}$ 是满足 $s_r = s_e(j-1)$ 的最小索引，则类似的论证可得 $w_{j,\varepsilon}(v_j(u_i)) = w_{j,\varepsilon}(v_j(u_{r-1}))$ 以及 $s_{r-1} = s_e(j)$。但此时，IO$^{e(j)}$ 的构成给出 $Q_{i_j}(w_{j,\varepsilon}(v_j(u_r))) = w_{j,\varepsilon}(v_j(u_{r-1}))$。因此，$Q_{i_j}^{-1}(w_{j,\varepsilon}(v_j(u_i))) = w_{j,\varepsilon}(v_j(u_r))$。

现在，假设 $s_0 = p_{q_1} = s_e(0)$，并固定 $j \in \overline{k}$。

若不存在满足 $s_i = s_e(j)$ 的 $i \in \overline{m}$，则如同 (I) 中那样，$w_{j,\ \varepsilon}(v_j(u_i)) = w_{j,\ \varepsilon}(v_j(u_m))$ 且 $s_m = p_{q_1}$。

否则，令 $r_1 \in \overline{m}$ 为满足 $s_{r_1} = s_e(j)$ 的最小索引。接着，按如下方式递归定义 r_2、……、r_n：

- 当 ℓ 为奇数时，令 $r_{\ell+1} \in \overline{r_\ell, m}$ 为满足 $s_{r_{\ell+1}} = s_e(j-1)$ 的最小索引；若不存在这样的索引，则令 $n = \ell$。
- 当 ℓ 为偶数时，令 $r_{\ell+1} \in \overline{r_\ell, m}$ 为满足 $s_{r_{\ell+1}} = s_e(j)$ 的最小索引；若不存在这样的索引，则令 $n = \ell$。

令 $r_0 = 0$，则由上文的 (I) 和 (II) 可知，对所有 $\ell \in \overline{t}$，

$$w_{j,\varepsilon}(v_j(r_\ell)) = \begin{cases} Q_{i_j}(w_{j,\varepsilon}(v_j(u_{r_{\ell-1}}))) & \text{if } \ell \text{ is odd} \\ Q_{i_j}^{-1}(w_{j,\varepsilon}(v_j(u_{r_{\ell-1}}))) & \text{if } \ell \text{ is even} \end{cases}$$

特别地，对于 $z = \lfloor n/2 \rfloor$，$w_{j,\ \varepsilon}(v_j(u_{r_{2z}})) = w_{j,\ \varepsilon}(v_j(u_{r_0})) = w_{j,\ \varepsilon}(v_j(u_0))$。

若 n 是偶数，则对所有 $t \in r_n + 1, m$，$n = 2z$，$s_n = s_e(j-1)$，且 $s_t \neq s_e(j)$。(I) 进而推出 $s_m = p_{q_1} = s_0$ 和 $w_{j,\ \varepsilon}(v_j(u_m)) = w_{j,\ \varepsilon}(v_j(u_{r_n})) = w_{j,\ \varepsilon}(v_j(u_0))$。

反之，若 n 是奇数，则对所有 $t \in r_n + 1, m$，$n = 2z+1$，$s_t = s_e(j)$，且 $s_t \neq s_e(j-1)$。(II) 进而推出 $s_m = p_{q_2}$ 和

$$w_{j,\varepsilon}(v_j(u_m)) = w_{j,\varepsilon}(v_j(u_{r_n})) = Q_{i_j}(w_{j,\varepsilon}(v_j(u_{r_{n-1}}))) = Q_{i_j}(w_{j,\varepsilon}(v_j(u_0)))$$

特别地，

- $s_0 = p_{q_1} = s_m$ 推出，对于所有 j，$w_{j,\ \varepsilon}(v_j(u_0)) = w_{j,\ \varepsilon}(v_j(u_m))$，因此 $w_{\mathcal{T}}(u_0) = w_{\mathcal{T}}(u_m)$。
- $s_0 = p_{q_1}$ 和 $s_m = p_{q_2}$ 意味着 $Q_{i_j}(w_{j,\ \varepsilon}(v_j(u_0))) = w_{j,\ \varepsilon}(v_j(u_m))$ 对所有 j 都成立，因此 $Q(w_{\mathcal{T}}(u_0)) = w_{\mathcal{T}}(u_m)$。

对称论证继而推出，当 $s_0 = p_{q_2}$ 时也有类似结果。

□

引理 15.2. 假设 $\gamma = \big((u_0, s_0)\ e'_1, (u_1, s_1)\ e'_2, \ldots, e'_m, (u_m, s_m)\big)$ 是一个 $\mathcal{G}'_T$-计算，其中 s_0 和 s_m 是正则状态。那么存在一个计算

$$\mathcal{C} = \big((w_0, q_0), e_1, (w_1, q_1), e_2, \ldots, e_n, (w_n, q_n)\big)$$

$\mathcal{T}$，使得 $w_{\mathcal{T}}(u_0) = w_0$，$w_{\mathcal{T}}(u_m) = w_n$，$s_0 = p_{q_0}$，且 $s_m = p_{q_n}$。

证明. 令 $\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_t \in \overline{0, m}$ 为由所有满足 s_{ℓ_i} 是正则状态的指标组成的递增序列，其中 $\ell_0 = 0$ 且 $\ell_t = m$。

那么，根据构造，对于所有 $i \in \overline{t}$，子计算

$$\gamma_i = \big((u_{\ell_{i-1}}, s_{\ell_{i-1}}), e'_{\ell_{i-1}+1}, \ldots, e'_{\ell_i}, (u_{\ell_i}, s_{\ell_i})\big)$$

是一条 $\mathcal{T}$-边 某个 $f_i \in E_{\mathcal{T}}$ 的计算。令 $Q^i = \mathsf{Lab}(f_i)$，则引理 15.1 推出 :

(a) 若 $s_{\ell_{i-1}} = s_{\ell_i}$，则 $w_{\mathcal{T}}(u_{\ell_{i-1}}) = w_{\mathcal{T}}(u_{\ell_i})$。(b) 若 $s_{\ell_{i-1}} = p_{q_1}$ 且 $s_{\ell_i} = p_{q_2}$，则 $Q^i(w_{\mathcal{T}}(u_{\ell_{i-1}})) = w_{\mathcal{T}}(u_{\ell_i})$。(c) 若 $s_{\ell_{i-1}} = p_{q_2}$ 且 $s_{\ell_i} = p_{q_1}$，则 $(Q^i)^{-1}(w_{\mathcal{T}}(u_{\ell_{i-1}})) = w_{\mathcal{T}}(u_{\ell_i})$。

如果 γ_i 满足 (a)，则令 $e_i =$ 为 NA，其中 NA 是一个固定符号。否则，若 γ_i满足 (b)，则令 $g_i = f_i$；若 γ_i 满足 (c)，则令 $g_i = f_i^{-1}$。

对于所有$\overline{i \in 0, t}$，令 $w'_i = w_{\mathcal{T}}(u_{\ell_i})$，并令 $q'_i \in S_{\mathcal{T}}$为与 s_{ℓ_i}对应的状态。然后，考虑序列

$$\mathcal{C}' = \big((w'_0, q'_0), g_1, (w'_1, q'_1), g_2, \ldots, g_t, (w'_t, q'_t)\big)$$

由于某些“边”可能记作 NA，$\mathcal{C}'$ 当然未必是 $\mathcal{T}$的一次计算；然而，根据 (a)，显然 $g_i =$ 为 NA 意味着 $(w'_{i-1}, q'_{i-1}) = (w'_i, q'_i)$。同时，若 $g_i \neq$ 为 NA，则由 (b) 和 (c) 可知，$g_i(w'_{i-1}, q'_{i-1}) = (w'_i, q'_i)$。

因此，删除所有 NA 后，即得到满足该陈述的计算 $\mathcal{C}$。

□

由此，定理 1.1 的证明完成。

命题 15.3。真操作 $\mathrm{wacc}^\varepsilon$ =$\mathrm{wacc}^\varepsilon(a)$ 是一个弱接受器，$L_{\mathcal{T}}$满足 $\mathrm{IO}^{s,\ f\mathrm{wacc}^\varepsilon} = \{(w, 1) \mid w \in L_{\mathcal{T}}\}$。此外，$\mathrm{WTMSP}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon} \preceq (n^{1+\varepsilon}, n)$。

证明。设 $\gamma = \big((u_0, s_0)\ e'_1, (u_1, s_1)\ e'_2, \ldots, e'_m, (u_m, s_m)\big)$ 是 $\mathrm{wacc}^\varepsilon$ 的一次计算，它实现了某个 $w \in F(A)$ 的 $(w, 1) \in \mathrm{IO}^{s,\ f\mathrm{wacc}^\varepsilon}$。对所有 $i \in \overline{m}$，令 $e'_i = (\mathrm{sf}_i, \mathrm{sf}'_i, e''_i)$。

假设 $\rho = e'_1, \ldots, e'_m$ 在所有支持实现 $(w, 1) \in \mathrm{IO}^{s,\ f\mathrm{wacc}^\varepsilon}$ 的计算的一般路径中长度最小。

于是，与引理 12.6 中一样，计算中的任意两个配置都不可能相同，否则就可以删去它们之间的任意一般边。由 0 度动作的定义、引理 14.1 以及图灵带集合运算的定义，立即可得：

(1) 若 $e''_i \in \{e_s^{\pm 1}, e_f^{\pm 1}, e_{\mathrm{swap}}\}$，则 $\mathrm{sf}_i \neq \mathrm{sf}''_i$。

(2) 若 $e''_i = e_{\mathrm{set}}$，则 $\mathrm{sf}_i = \hat{}f$ 或 $\mathrm{sf}'_i = \hat{}f$。

(3) 若 $e''_i \in \{e_s^{\pm 1}, e_f^{\pm 1}\}$，则 $e''_{i+1}, e''_{i-1} \neq e_i^{-1}$。

接下来，假设对某个 $i \in \overline{m-1}$，$e''_i = e''_{i+1}$。那么，由于 $\mathrm{wacc}^\varepsilon$ 中没有边是环（这在 $\mathcal{G}'_{\mathcal{T}}$ 中成立，因为 $k \geq 2$），必有 $\mathrm{sf}'_i = \mathrm{sf}_{i+1}$。IO 关系的传递性意味着，单条一般边 $e' = (\mathrm{sf}_i, \mathrm{sf}'_{i+1}, e''_i)$ 支持在 (u_{i-1}, s_{i-1}) 和 (u_{i+1}, s_{i+1}) 之间的一次计算。但若在 ρ 中用 e' 替换子路径 e'_i, e'_{i+1}，就会得到一条长度为 $m-1$ 的一般路径 ρ'，它支持实现 $(w, 1) \in \mathrm{IO}^{s,\ f\mathrm{wacc}^\varepsilon}$ 的计算，这与关于 ρ的假设矛盾。因此可得：

(4) $e''_i \neq e''_{i+1}$ for all $i \in \overline{m-1}$.

现在，作为 (1)–(4) 的推论，可以立即得出：

- $e'_1 \in \{(\hat{}s, \hat{}f, e_s), (\hat{}f, \hat{}s, e_s^{-1})\}$
- $e'_2 = (\hat{}s, \hat{}f, e_{\text{交换}})\ \hat{}$
- $e'_3 = (\hat{}s, f, e_{\text{集合}})$
- e''_4 是 $\mathcal{G}'_{\mathcal{T}}$的一条边

特别地，引理 14.1 和图灵带的集合运算定义表明，γ 有一个前缀：

$$\gamma_0 = \big((u, \mathrm{wacc}_s^\varepsilon), e'_1, (u, q), (\hat{s}, \hat{f}, e_{\mathrm{swap}}), (u', q'), (\hat{s}, \hat{f}, e_{\mathrm{set}}), (u_3, p_{s_{\mathcal{T}}})\big)$$

其中 $u, u', u_3 \in \mathrm{GL}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}$ 满足：

- $u(a) = w$, $u(i) = 1$ for $i \in \mathcal{I}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon} - \{a\}$
- $u'(b) = w$, $u'(i) = 1$ for $i \in \mathcal{I}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon} - \{b\}$

- $w_{1,\varepsilon}(v_1(u_3)) = w$, $u(i) = 1$ for $i \in \mathcal{I}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon} - \mathcal{I}_{1,\varepsilon}$.

特别要注意，$w_{\mathcal{T}}(u_3)$ 是 $\mathcal{T}$ 的输入构型 $I(w)$。

设 $\ell_1 \in \overline{4,m}$ 为使子计算

$$\gamma_1 = \big((u_3, s_3), e'_4, (u_4, s_4), e'_5, \ldots, e'_{\ell_1}, (u_{\ell_1}, s_{\ell_1})\big)$$

是一个 $\mathcal{G}'_{\mathcal{T}}$-计算的最大索引。那么，引理 15.2 给出一个 $\mathcal{C}_1$ 的计算 $\mathcal{T}$，其起止分别为 $(I(w)\ s_{\mathcal{T}})$ 和 $(w_{\mathcal{T}}(u_{\ell_1})\ t_1)$，其中 $t_1 \in S_{\mathcal{T}}$ 是 s_{ℓ_1} 所对应的状态。

假设 $t_1 = s_{\mathcal{T}}$，因此 $s_{\ell_1} = p_{s_{\mathcal{T}}}$。于是，$\ell_1$ 的极大性蕴含 $e''_{\ell_1+1} = e_{\mathrm{set}}$。此外，条件 (1)–(4) 要求 $e'_{\ell_1+1} = (\hat{}f, \hat{}f, e_{\mathrm{set}})$，因此 $s_{\ell_1+1} = p_{s_{\mathcal{T}}}$。定义图灵带的 IO 关系继而蕴含 $w_{1,\ \varepsilon}(v_1(u_{\ell_1})) = w_{1,\ \varepsilon}(v_1(u_{\ell_1+1}))$，因此 $w_{\mathcal{T}}(u_{\ell_1}) = w_{\mathcal{T}}(u_{\ell_1+1})$。

于是，条件 (4) 意味着 e''_{ℓ_1+2} 必须是 $\mathcal{G}'_{\mathcal{T}}$ 的一条边，因此存在一个极大索引 $\ell_2 \in \ell_1 + \overline{2,m}$，使得该子计算

$$\gamma_2 = \big((u_{\ell_1+1}, s_{\ell_1+1}), e'_{\ell_1+2}, \ldots, e'_{\ell_2}, (u_{\ell_2}, s_{\ell_2})\big)$$

是一个 $\mathcal{G}'_{\mathcal{T}}$-计算。同样，由引理 15.2 可得一个关于 $\mathcal{T}$ 的计算 $\mathcal{C}_2$，其起点为 $(w_{\mathcal{T}}(u_{\ell_1})\ s_{\mathcal{T}})$，终点为 $(w_{\mathcal{T}}(u_{\ell_2})\ t_2)$，其中 $t_2 \in S_{\mathcal{T}}$ 是 s_{ℓ_2} 所对应的状态。

若 $t_2 = s_{\mathcal{T}}$，则重复这一过程。由于 $s_m = \mathsf{wacc}^\varepsilon_f$，且 $p_{f_{\mathcal{T}}}$ 在 $\mathcal{G}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}$ 中将所有其他顶点与其分隔开，因此存在一个自然数 r，使得 $t_r = f_{\mathcal{T}}$。但随后将 $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_r$ 连接起来，就会得到一个接受 w 的 $\mathcal{T}$ 计算，因此 $w \in L_{\mathcal{T}}$。

反过来，设 $w \in L_{\mathcal{T}}$，并固定一个关于 $\mathcal{T}$ 的计算

$$\mathcal{C} = \big((w_0, s_0), e_1, (w_1, s_1), e_2, \ldots, e_m, (w_m, s_m)\big)$$

它接受 w 且满足 $m \leq \mathsf{TM}_{\mathcal{T}}(|w|)$。那么，对所有 $j \in \overline{k}$，$\mathcal{C}(j) = (w_0(i_j)\ w_1(i_j) \ldots, w_m(i_j))$ 都是 $\mathcal{T}$ 的一个 i_j-计算，其历史与 $\mathcal{C}$ 相同，即对于所有 $\ell \in \overline{m}$，有 $(Q^1, \ldots, Q^m)$ 对应于 $Q^\ell = \mathsf{Lab}(e_\ell) \in \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$。

由推论 14.9，存在 $K_s \in \mathbb{N}$，使得对所有 $j \in \overline{k}$，$\mathsf{SEQ}(\mathsf{TTape}^\varepsilon_{\mathcal{T},\ i_j}) \leq (K_s n^{1+\varepsilon} + K_s, K_s n + K_s)$。特别地，对所有 $j \in \overline{k}$，存在一个顺序计算 $\gamma_j = (\gamma_{j,\ 1}, \ldots, \gamma_{j,\ m})$，它是 $\mathsf{TTape}^\varepsilon_{\mathcal{T},\ i_j}$ 的一次计算，近似于 $\mathcal{C}(j)$，并满足

$$\mathrm{tm}(\gamma_j) \leq K_s n_j^{1+\varepsilon} + K_s$$
$$\mathrm{sp}(\gamma_j) \leq K_s n_j + K_s$$

对于 $n_j = \max(|w_0(i_j)|, |w_m(i_j)|, m)$。注意，对 $j \neq 1$，$w_0(i_j) = w_m(i_j) = 1$，因此 $n_j = m$。此外，$w_0(i_1) = w$，且 $w_m(i_1) = 1$，因此 $n_1 = \max(|w|, m)$。

对于所有 $j \in \overline{k}$，令 $v_{j,\ 0}, v_{j,\ 1}, \ldots, v_{j,\ m} \in V^{j,\ \varepsilon}$ 为这些值，使得对所有 $\ell \in \overline{m}$，$\gamma_{j,\ \ell}$ 是操作 $\mathsf{EXP}(Q^\ell)$ 在 $\mathsf{EXP}(\mathsf{TTape}^\varepsilon_{\mathcal{T},\ i_j})$ 上的一次计算，它 EXP-实现 $(v_{j,\ \ell-1}, v_{j,\ \ell}) \in \mathrm{IO}^{s\ f}_{Q^\ell,\ \varepsilon}$。注意，根据顺序计算的定义，对于所有 $j \in \overline{k}$ 以及 $\ell \in 0, m$，$w_{j,\ \varepsilon}(v_{j,\ \ell}) = w_\ell(i_j)$。

那么，对于所有 $j \in \overline{k}$ 和所有 $\ell \in \overline{m}$，引理 8.9(1) 给出一个 $\mathsf{EXP}(\mathsf{wacc}^\varepsilon)$ 的计算 $\delta_{j,\ell}$，其发生在配置 $(u_{j-1,\ell}, s_{e_\ell}(j-1))$ 与 $(u_{j,\ell}, s_{e_\ell}(j))$ 之间，并满足：

(a) $u_{j-1,\ell}(\mathcal{I}_{t,\varepsilon}) = u_{j,\ell}(\mathcal{I}_{t,\varepsilon}) = v_{t,\ell}$ for all $t \in \overline{j-1}$

(b) $u_{j-1,\ell}(\mathcal{I}_{j,\varepsilon}) = v_{j,\ell-1}$

(c) $u_{j,\ell}(\mathcal{I}_{j,\varepsilon}) = v_{j,\ell}$

(d) $u_{j-1,\ell}(\mathcal{I}_{t,\varepsilon}) = u_{j,\ell}(\mathcal{I}_{t,\varepsilon}) = v_{t,\ell-1}$ for all $t \in \overline{j+1,k}$

(e) $u_{j-1,\ell}(i) = u_{j,\ell}(i) = 1$ for all $i \in \mathcal{I}^{\exp}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon} - \bigsqcup_{t\in\overline{k}} \mathcal{I}_{t,\varepsilon}$

(f) $\mathrm{tm}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\delta_{j,\ell}) = \mathrm{tm}_{Q^\ell}(\gamma_{j,\ell})$

(g) $\mathrm{sp}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\delta_{j,\ell}) = \mathrm{sp}_{Q^\ell}(\gamma_{j,\ell}) + \sum_{t=1}^{j-1} |v_{t,\ell}| + \sum_{t=j+1}^{k} |v_{t,\ell-1}|.$

由于对于所有 j, ℓ, $|v_{j,\ell}| = |w_\ell(i_j)|$, $w_{j,\varepsilon}(v_{j,\ell}) = w_\ell(i_j)$。特别地, $\sum_{j=1}^{k} |v_{j,\ell}| = |w_\ell|$。因此, (g) 蕴含

(g') $\mathrm{sp}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\delta_{j,\ell}) \le \mathrm{sp}_{Q^\ell}(\gamma_{j,\ell}) + |w_\ell| + |w_{\ell-1}|$

固定 $\ell \in \overline{m}$, 将计算 $\delta_{1,\ \ell}$、…、$\delta_{k,\ \ell}$ 连接起来, 形成从 $(u_{0,\ \ell}, s_{e_\ell}(0))$ 到 $(u_{k,\ \ell}, s_{e_\ell}(k))$ 的计算 ρ_ℓ; 根据 (f) 和 (g'), 它们满足:

$$\mathrm{tm}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\rho_\ell) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{tm}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\delta_{j,\ell}) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{tm}_{Q^\ell}(\gamma_{j,\ell})$$
$$\mathrm{sp}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\rho_\ell) = \max_{j\in\overline{k}} \mathrm{sp}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\delta_{j,\ell}) \le \max_{j\in\overline{k}} \mathrm{sp}_{Q^\ell}(\gamma_{j,\ell}) + 2\max(|w_\ell|, |w_{\ell-1}|)$$

此外, (a)–(e) 推出, 对所有 $\ell \in \overline{m-1}$, $u_{k,\ \ell} = u_{0,\ \ell+1}$。因此, 由于对所有 $\ell \in \overline{m}$, $s_{e_\ell}(0) = p_{t(e_\ell)} = p_{s_{\ell-1}}$, 且 $s_{e_\ell}(k) = p_{h(e_\ell)} = p_{s_\ell}$, 可以将 ρ_1、…、ρ_m 连接起来, 形成从 $(u_{0,\ 1}, p_{s_0})$ 到 $(u_{k,\ m}, p_{s_m})$ 的计算 ψ; 根据 (f) 和 (g'), 它满足:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tm}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\psi) &= \sum_{\ell=1}^{m} \mathrm{tm}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\rho_\ell) = \sum_{\ell=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} \mathrm{tm}_{Q^\ell}(\gamma_{j,\ell}) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{m} \mathrm{tm}_{Q^\ell}(\gamma_{j,\ell}) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \mathrm{tm}(\gamma_j) \le \sum_{j=1}^{k} (K_s n_j^{1+\varepsilon} + K_s) \le K_s k \max(|w|, m)^{1+\varepsilon} + K_s k \\
&\le K_s k \mathsf{TM}_{\mathcal{T}}(|w|)^{1+\varepsilon} + K_s k |w|^{1+\varepsilon} + K_s k \\
\mathrm{sp}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\psi) &= \max_{\ell\in\overline{m}} \mathrm{sp}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\rho_\ell) \le \max_{\ell\in\overline{m}} \left(\max_{j\in\overline{k}} \mathrm{sp}_{Q^\ell}(\gamma_{j,\ell}) + 2\max(|w_{\ell-1}|, |w_\ell|) \right) \\
&\le \max_{\ell\in\overline{m}} \max_{j\in\overline{k}} \mathrm{sp}_{Q^\ell}(\gamma_{j,\ell}) + \max_{\ell\in\overline{m}} 2\max(|w_{\ell-1}|, |w_\ell|) \\
&= \max_{j\in\overline{k}} \max_{\ell\in\overline{m}} \mathrm{sp}_{Q^\ell}(\gamma_{j,\ell}) + 2 \max_{\ell\in\overline{0,m}} |w_\ell| = \max_{j\in\overline{k}} \mathrm{sp}(\gamma_j) + 2 \max_{\ell\in\overline{0,m}} |w_\ell| \\
&\le \max_{j\in\overline{k}} (K_s n_j + K_s) + 2 \max_{\ell\in\overline{0,m}} |w_\ell| \le K_s m + K_s |w| + 2 \max_{\ell\in\overline{0,m}} |w_\ell| \\
&\le K_s \mathsf{TM}_{\mathcal{T}}(|w|) + K_s |w| + 2 \max_{\ell\in\overline{0,m}} |w_\ell| + K_s
\end{aligned}$$

令 $K_{\mathcal{T}} = \max_{Q\in Q^{\mathcal{T}}} |Q|$, 如命题 14.8 的证明中所示, 对所有 $\ell \in \overline{m}$, $\big||w_\ell| - |w_{\ell-1}|\big| \le kK_{\mathcal{T}}$, 因此 $|w_\ell| \le |w_0| + \ell k K_{\mathcal{T}} \le |w| + mkK_{\mathcal{T}} \le |w| + mk\mathsf{TM}_{\mathcal{T}}(|w|)$。由于 K_s、k 和 $K_{\mathcal{T}}$ 是不依赖于 $\mathcal{C}$ 的常数, 所以存在一个不依赖于 $\mathcal{C}$ 的常数 $L_1 \in \mathbb{N}$, 使得:

$$\mathrm{tm}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\psi) \le L_1 \mathsf{TM}_{\mathcal{T}}(|w|)^{1+\varepsilon} + L_1 |w|^{1+\varepsilon} + L_1$$
$$\mathrm{sp}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\psi) \le L_1 \mathsf{TM}_{\mathcal{T}}(|w|) + L_1 |w| + L_1$$

由 (a)–(d), $u_{k,\ m}(\mathcal{I}_{j,\ \varepsilon}) = v_{j,\ m}$ 对所有 $j \in \overline{k}$ 均成立。因此, 由于 $w_{j,\ \varepsilon}(v_{j,\ m}) = w_m(i_j) = 1$ 对所有 $j \in \overline{k}$, $u_{m,\ 1}(\mathcal{I}_{j,\ \varepsilon}) = 1$。结合 (e), $u_{k,\ m} = 1$。

由类似的论证, $u_{0,\ 1}(\mathcal{I}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon} - \mathcal{I}_{1,\ \varepsilon}) = 1$, 且 $u_{0,\ 1}(\mathcal{I}_{1,\ \varepsilon}) = v_{1,\ 0}$。

现在, 根据推论 14.9, 存在 $K_1 \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathsf{TMSP}^{\mathrm{TTape}^\varepsilon_{\mathcal{T}}, i_1} \le (K_1 n^{1+\varepsilon}, K_1)$。因此, 由于 $w_{1,\varepsilon}(v_1, 0) = w$, 根据 i_j-图灵带的定义, 对于 $\mathsf{TTape}^\varepsilon_{\mathcal{T}, i_1}$ 的操作集, 存在 $(u', u'') \in \mathsf{IO}^{s,f}$ 集合, 使得 $u'(b) = w$, $u'(\mathcal{I}_{i_1,\varepsilon}) = 1$, $u''(b) = 1$, 并且 $u''(\mathcal{I}_{i_1,\varepsilon}) = v_{1,0}$。

因此，存在一个 EXP(set) 的计算 χ ，它 EXP-实现 $(u', u'') \in \mathrm{IO}^{s,\ f}$ 集合，且满足 $\mathrm{tm}_{\mathrm{set}}(\chi) \leq K_1|w|^{1+\varepsilon} + K_1$, $\mathrm{sp}_{\mathrm{set}}(\chi) \leq K_1|w| + K_1$。

因此，令 $u_b \in \mathrm{GL}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}$ 满足：对于所有 $i \in \mathcal{I}^{\exp}{}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon} - \{b\}$， $u_b(b) = w$ 且 $u_b(i) = 1$ ，则引理 8.9(1) 得到一个计算 χ' ，它是 EXP(wacc$^\varepsilon$) 的计算，介于配置 (u_b, q') 和 $(u_{1,0}, p_{s_\mathcal{T}})$ 之间，且具有与 χ 相同的复杂度界。

由于 $s_0 = s_\mathcal{T}$ 和 $s_m = f_\mathcal{T}$， χ' 和 ψ 可以连接起来，形成一个计算 ϕ ，它是 EXP(wacc$^\varepsilon$) 的计算，介于 (u_b, q') 和 $(1, p_{f_\mathcal{T}})$ 之间，并满足：

$$\begin{aligned}
\mathrm{tm}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\phi) &= \mathrm{tm}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\psi) + \mathrm{tm}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\chi') \\
&\leq L_2 \mathsf{TM}_\mathcal{T}(|w|)^{1+\varepsilon} + L_2|w|^{1+\varepsilon} + L_2 \\
\mathrm{sp}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\phi) &= \max(\mathrm{sp}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\psi), \mathrm{sp}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\chi')) \\
&\leq L_2 \mathsf{TM}_\mathcal{T}(|w|) + L_2|w| + L_2
\end{aligned}$$

对于 $L_2 = L_1 + K_1$。

接下来，考虑操作 swap $=$ swap$^A(a, b)$。根据引理 14.1，存在关系 $(t_a, t_b) \in \mathrm{IO}^{s\ f}_{\mathrm{swap}}$，其中 $t_a(a) = t_b(b) = w$ 且 $t_a(b) = t_b(a) = 1$。此外，存在一个常数 $K_2 \in \mathbb{N}$ ，使得 $\mathrm{TMSP}_{\mathrm{swap}} \leq (K_2 n + K_2, K_2 n + K_2)$。因此，存在一个计算 τ ，它是 EXP(swap) 的计算，并使 $(t_a, t_b) \in \mathrm{IO}^{s\ f}_{\mathrm{swap}}$，得到 EXP-实现，且满足 $\mathrm{tm}^{\mathrm{swap}}(\tau)$， $\mathrm{sp}^{\mathrm{swap}}(\tau) \leq K_2|w| + K_2$。

于是，令 $u_w \in$ 广义线性群$_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}$ 由 $u_w(a) = w$ 和 $u_w(i) = 1$ 给出，其中对所有 $i \in \mathcal{I}^{\exp}{}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon} - \{a\}$ 都成立。再次由引理 8.9(1)可得一个计算 τ'，它介于 (u_w, q) 与 (u_b, q') 之间，且具有与 τ 相同的复杂度界。

如上所述，随后可将 τ' 与 ϕ 结合，得到一个计算 ζ ，其复杂度为 EXP(wacc$^\varepsilon$)，介于 (u_w, q) 与 $(1, p_{f_\mathcal{T}})$ 之间，并满足：

$$\begin{aligned}
\mathrm{tm}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\zeta) &= \mathrm{tm}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\phi) + \mathrm{tm}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\tau') \\
&\leq L_3 \mathsf{TM}_\mathcal{T}(|w|)^{1+\varepsilon} + L_3|w|^{1+\varepsilon} + L_3 \\
\mathrm{sp}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\zeta) &= \max(\mathrm{sp}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\phi), \mathrm{sp}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\tau')) \\
&\leq L_3 \mathsf{TM}_\mathcal{T}(|w|) + L_3|w| + L_3
\end{aligned}$$

对于 $L_3 = L_2 + K_2$。

最后，注意到 u_w 和 1 满足动作 act$_0$ 中包含的所有守卫片段，因此可通过 e_s 和 e_f 将 κ 扩展，从而得到一个计算 γ_w ，它介于 $(u_w, \mathrm{wacc}^\varepsilon_s)$ 与 $(u_w, \mathrm{wacc}^\varepsilon_f)$ 之间，并满足 $\mathrm{tm}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\gamma_w) = \mathrm{tm}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\zeta) + 2$ ，且 $\mathrm{sp}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\gamma_w) = \mathrm{sp}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}(\zeta)$。然而， γ_w 对 $(w, 1) \in \mathrm{IO}^{s,\ f}{}_{\mathrm{wacc}^\varepsilon}$ 实现 EXP，因此结论成立。

□

References

[1] J. Birget、A. Olshanskii、Eliyahu Rips 和 Mark Sapir。群的等周函数与字问题的计算复杂性。 *Annals of Mathematics*，156，1998年12月。[2] ´Etienne Ghys 和 Pierre de la Harpe。《关于米哈伊尔·格罗莫夫之后的双曲群》。1990年。[3] 米哈伊尔·格罗莫夫。 *Hyperbolic groups*。施普林格，1987年。[4] G. Higman。有限表示群的子群。 *Proceedings of the Royal Society of London. Series A Mathematical and Physical Sciences* 262 1311 455 475, 1961 , ():–。 [5] Graham Higman、B. H. Neumann 和 Hanna Neuman。群的嵌入定理。 *Journal of the London Mathematical Society* 1 24 4 247 254, 1949 , s-():–。

[6] Alexander Yu. Olshanskii。群的多项式有界德恩函数。 *Journal of Combinatorial Algebra*，2017年。[7] Alexander Yu. Olshanskii。伯恩赛德簇中有限表示群的子群。 *arXiv: Group Theory*，2019年。[8] Alexander Yu. Olshanskii 和 M.V.Sapir。共轭问题与希格曼嵌入。2002年。

[9] Alexander Yu. Olshanskii 和 Mark V. Sapir。非可和有限呈示挠循环群。 *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*，96:43–169，2001年。[10] Alexander Yu. Olshanskii 和 Mark V. Sapir。具有二次 Dehn 函数的群中的共轭问题。*Bulletin of Mathematical Sciences*，2020年。[11] A.yu Ol'shanskii。具有次二次等周不等式的群的双曲性。 *International Journal of Algebra and Computation* 01 01 2012 ，，。

[12] P´eter P. P´alfy。 *Groups and lattices*，第2卷， *London Mathematical Society Lecture Note Series*，第428–454页。剑桥大学出版社，2003年。[13] Mark Sapir。有限表示群的等周谱，2018年。[14] Mark V. Sapir、Jean-Camille Birget 和 Eliyahu Rips。群的等周函数与等直径函数。*Annals of Mathematics*，156(2):345–466，2002年。[15] Francis Wagner。具有二次 Dehn 函数的群的挠子群。 *arXiv: Group Theory*，2020年。