arXiv:2304.07606v1 [math.CO] 15 Apr 2023

单例联盟图链

[1]DavoodBakhshesh、[2]Michael A. Henning*和 [3]Dinabandhu Pradhan†

[1]博季努尔德大学计算机科学系 博季努尔德，伊朗电子邮箱: d.bakhshesh@ub.ac.ir

[2]约翰内斯堡大学数学与应用数学系 奥克兰公园, 2006 南非电子邮箱：mahenning@uj.ac.za

[3]印度理工学院（ISM）丹巴德分校数学与计算系 印度丹巴德电子邮箱：dina@iitism.ac.in

摘要

设 G 是一个图，其顶点集为 V，阶为 $n = |V|$。在 G 中，联盟是两个不同集合 $A \subseteq V$ 和 $B \subseteq V$的组合，这两个集合互不相交，且都不是G的支配集，但它们的并集 $A \cup B$ 是 G的支配集。G 的联盟划分是其顶点集 V的一个划分$\mathcal{P} = \{S_1, \ldots, S_k\}$，其中每个集合 $S_i \in \mathcal{P}$要么是仅含一个顶点的 G的支配集，要么不是支配集，但与某个其他集合$S_j \in \mathcal{P}$构成联盟。联盟数 $C(G)$是 G的联盟划分的最大基数。为表示 G的联盟划分 $\mathcal{P}$，构造联盟图CG($G, \mathcal{P}$)，其中图的每个顶点对应于 $\mathcal{P}$ 中的一个成员，当且仅当对应的集合在 G中构成联盟时，这两个顶点相邻。若 $\mathcal{P}$ 中的每个集合都只含一个顶点，则 G 的联盟划分 $\mathcal{P}$ 称为单元素联盟划分。如果图 G 存在单元素联盟划分，则称 G 为单例划分图。如果存在 G的单元素联盟划分 $\mathcal{P}$，使得联盟图CG($G, \mathcal{P}$)与 H同构，则称图 H 为图 G 的单点联盟图。以初始图 G_1开始的单例联盟图链定义为序列 $G_1 \to G_2 \to G_3 \to \cdots$，其中所有图$G_i$ 都是单例划分图，且CG(G_i, Γ_1) $= G_{i+1}$，其中 Γ_1 表示 G_i的一个单元素联盟划分。本文解决了Haynes等人提出的两个开放问题。我们刻画了所有阶为 n 、最小度为 $\delta(G) = 2$ 且满足 $C(G) = n$的图 G 。此外，我们研究了以满足$\delta(G) \leq 2$的图 G 为起始图的单例联盟图链。

*本研究部分得到约翰内斯堡大学的支持。

†通讯作者。

关键词：联盟数；支配数；联盟划分；联盟图。**AMS学科分类：**05C69

1 引言

设 $G=(V(G)\ E(G))$ 是一个图，其顶点集为 $V(G)$，边集为 $E(G)$，阶为 $n(G)=|V(G)|$，大小为 $m(G)=|E(G)|$。若上下文已明确图 G，则我们写作 V 和 E，而不写 $V(G)$ 和 $E(G)$。图 G 中顶点 v 的开邻域 $N_G(v)$ 是与 v 相邻的顶点集，而 v 的闭邻域是集合 $N_G[v]=\{v\}\cup N_G(v)$。对于集合 $S\subseteq V(G)$，其开邻域是集合 $N_G(S)=\cup_{v\in S}N_G(v)$，闭邻域是集合 $N_G[S]=N_G(S)\cup S$。我们用 $\deg_G(v)=|N_G(v)|$ 表示 G 中 v 的度。若顶点 v 与 $V\setminus\{v\}$ 中所有顶点都相邻，则称其为全顶点，也就是说，若 $N_G[v]=V$，则称其为全顶点。孤立顶点是度为 0 的顶点，无孤立点图是不含孤立顶点的图。G 中的最小度和最大度分别记为 $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$。对于正整数 k，令 $[k]=\{1,\ldots,k\}$。

D 是 V 的一个子集，若 G 中每个不属于 D 的顶点都与 D中的至少一个顶点相邻，则称 D 为 G 中的支配集。G 的支配集的最小基数称为 G的支配数，记作 $\gamma(G)$。图的支配在文献中已得到非常充分的研究。若 $X,Y\subseteq V$，则集合 X 支配集合 Y，当且仅当 $Y\subseteq N_G[X]$，也就是说，每个顶点 $y\in Y$都属于 X，或与 X中的一个顶点相邻。关于图的支配的全面论述，可参见近期所谓的“支配专著” [6–9]。

2020年，Haynes、Hedetniemi、Hedetniemi、McRae和Mohan [1] 引入并研究了图中的联盟概念。他们将一对集合 $A,B\subseteq V$ 定义为$G=(V,E)$中的一个联盟，若 A 和 B 均不是 G中的支配集，但 $A\cup B$ 是 G的支配集。这样的集合对 A 和 B 称为形成联盟，而 A 和 B 称为联盟伙伴。

图 V 的顶点划分 $\mathcal{P}=\{S_1,S_2,\ldots,S_k\}$ 是 G 的联盟划分；如果划分中的每个集合 $S_i\in\mathcal{P}$ 要么是基数为 $|S_i|=1$ 的图 G 的支配集，要么不是图 G 的支配集，但与划分 $\mathcal{P}$ 中的另一个集合 S_j 形成联盟，则称其为图 [1], 的 c-划分。图 G 的联盟划分的最大基数称为图 G 的联盟数，记作 $\mathcal{C}(G)$。Haynes 等人在一系列关于 [1, 3–5] 中联盟的论文里，阐述了这一联盟图论模型的动机。这些论文特别关注树和圈中的联盟数。此外，[4], Haynes等人还根据图的最小度和最大度，给出了图的联盟数上界。

在 [1], Haynes 等人将联盟图定义如下。给定图 G 的一个联盟划分 $\mathcal{P}=\{S_1,\ldots,S_k\}$，将图 G 的一个图称为其联盟图，记作 $\mathrm{CG}(G,\mathcal{P})$，并与该划分对应；其中，顶点对应于 $\mathcal{P}$ 的成员，当且仅当 $\mathcal{P}$ 中对应的成员在图 G 中构成一个联盟时，这两个顶点相邻。在 [3], Haynes 等人研究了树、路径和圈中的联盟图。此外，在 [5]他们证明每个图都是某个图的联盟图。在 [1], Haynes 等人提出了以下开放问题。

问题1（[1]）刻画所有阶为 n、满足 $C(G)=n$ 的图 G。

在 [2], Bakhshesh 等人刻画了所有满足以下条件的图： G 阶为 n 且 $\delta(G) \leq 1$ 其联盟数为 n，从而部分解决了问题1。他们还确定了所有联盟数为 $n-1$的树。本文进一步推进了问题1的解决。为此，我们刻画了所有满足 G 阶为 n 且 $\delta(G) = 2$ 满足 $C(G) = n$的图。

在 [5], Haynes 等人定义了与联盟图相关的以下三个概念：单例划分图、单点联盟图和单例联盟图链。设 G 为一个阶为 n的图。设 Γ_1 为 $V(G)$ 的一个划分，其中 Γ_1 的每个成员都是单元素集（仅含一个元素的集合）。我们称 G 的这种联盟划分为 Γ_1-划分。如果图 G 具有一个 Γ_1-划分，则称其为单例划分图（SP 图）。如果 G 是一个 SP 图，那么联盟图 $\mathrm{CG}(G, \Gamma_1)$ 称为 G的单点联盟图（SC 图）。以初始图 G_1 开头的单例联盟图链定义为一个序列

$$\mathcal{S}_{G_1} := G_1 \to G_2 \to G_3 \to \cdots \to G_k$$

其中所有图 G_i 都是单例划分图，并且对所有 $i \in [k-1]$，$\mathrm{CG}(G_i, \Gamma_1) = G_{i+1}$。序列 $\mathcal{S}_{G_1}$ 的长度定义为 $k-1$。如果 $\mathcal{S}_{G_1}$ 是图 G_i的一个无限序列，则其长度视为无穷大（∞）。按照惯例，如果 $\mathcal{S}_{G_1}$ 中的所有图 G_i 都同构，则 $\mathcal{S}_{G_1}$ 的长度定义为零。我们将从初始图 G_1 出发、长度可能达到最大的序列 $\mathcal{S}_{G_1}$ 记作 G_1-SC 链，其长度记为 $L_{\mathrm{SCC}}(G_1)$。例如， C_4-SC 链和 C_5-SC 链如下所示

$$C_4 \to K_4 \to \overline{K}_4 \quad \text{and} \quad C_5 \to C_5 \to C_5 \to \cdots,$$

分别，而 P_3-SC 链由以下序列给出

$$P_3 \to K_1 \cup K_2 \to P_3 \to K_1 \cup K_2 \to \cdots.$$

因此， $L_{\mathrm{SCC}}(C_4) = 2$, $L_{\mathrm{SCC}}(C_5) = 0$，且 $L_{\mathrm{SCC}}(P_3) = \infty$。在 [5], ，Haynes等人提出了以下开放问题。

问题2（ [5]）研究单例联盟图链。

除了提出问题2之外，Haynes等人还提出了以下问题：“是否存在长度任意大的单例联盟图链？”本文证明，存在图 G ，使得 G-SC 链的长度为无穷大。此外，我们还刻画了所有具有 G的单例联盟图 G 中满足 $\delta(G) \leq 2$的-SC 链。

2 预备知识

本节介绍关于图的联盟数的一些已知结果和初步结果，以及其他定义。在 [2], 作者刻画了所有满足 G $\delta(G) \in \{0, 1\}$的 SP 图。对于满足 $\delta(G) = 0$的图，他们证明了以下结果。

定理 1 ([2]) 若 G 是一个阶为 n 且满足 $\delta(G) = 0$的图，则 $C(G) = n$ 当且仅当$G \cong K_1 \cup K_{n-1}$。

对于恰有一个全顶点的图 $\delta(G) = 1$，他们证明了以下结果。

定理 2（ [2]) 若 G 是一个阶为 $n \geq 3$、满足 $\delta(G) = 1$ 且恰有一个全顶点的图，则 $C(G) = n$ 当且仅当 G 是由图 $K_1 \cup K_{n-1}$ 添加一条连接孤立顶点与完全图 K_{n-1} 中任意顶点的边得到的。

对于满足 $\delta(G) = 1$ 且没有全顶点的图，他们定义了一个图族 $\mathcal{F}_1$，如下所示。

定义 1（ [2]）（图族 $\mathcal{F}_1$）设 G 是按如下方式构造的图。G 的顶点集由 $\{x, y, w\}$ 和两个不相交集合 P、Q 组成，其中 $P \cap Q \cap \{x, y, w\} = \emptyset$ 且 $|P \cup Q| \geq 1$。若 Q 非空，则 $|Q| \geq 2$。为定义边集 $E(G)$，我们先指定 y 为 x 的唯一邻点，因此 $N_G(x) = \{y\}$。接着将 w 与 $P \cup Q$ 中的所有顶点相连，因此 $N_G(w) = P \cup Q$。对于每个顶点 $p \in P$，将其与（$P \cup Q$）$\setminus \{p\}$ 中的所有顶点相连。若 Q 非空，则将 y 与 Q 中的所有顶点相连，因此 $Q \cup \{x\}$ 是 $N(y)$ 的子集。此外，若 $Q \neq \emptyset$，则在 Q 中的顶点之间添加边，也可以不添加任何边，使得 $G[Q]$ 不包含全顶点。最后，在 y 与 P 中的顶点之间添加任意数量的边。令 G 表示由此得到的无孤立点图。令 $\mathcal{F}_1$ 表示由所有以这种方式构造的此类图 G 组成的族。

我们注意到，如果 $G \in \mathcal{F}_1$的阶为 n且不连通，那么$G \cong K_2 \cup K_{n-2}$。在 [2],中，作者给出了以下结果。

定理 3 ([2]**) </style}一个图，其 (**$G) = 1$ 且没有全顶点，当且仅当$G \in \mathcal{F}_1$时，是一个 SP 图 。

若 G 是一个 SP 图，且 x 和 y 是 G 中两个不同的顶点，使得 $\{x\}$ 和 $\{y\}$ 构成一个联盟，那么 $\{x, y\}$ 是 G的支配集，因此对于每个顶点 $v \in V$（G），都有 $\{x, y\} \cap N[v] \neq \emptyset$。我们将其正式表述如下。

观察 1 若 x 和 y 是两个不同的顶点，且不是 SP 图 G中的全顶点，那么$\{x\}$ 和 $\{y\}$ 构成一个联盟，当且仅当对于每个顶点 $v \in V(G)$，都有 $\{x, y\} \cap N[v] \neq \emptyset$。

现在，我们假设 G 是一个具有 $\delta(G) = 1$ 且不含全顶点的 SP 图。根据定理 3，$G \in \mathcal{F}_1$。接下来，我们刻画 H 的 GSC图。为此，我们定义一族 $\mathcal{H}_1$ 图。

定义 2（族 $\mathcal{H}_1$）该族包含所有具有两个不同部分 $A_1 = \{x_1, y_1\}$ 和 $B_1 = P_1 \cup \{w_1\} \cup Q_1$ 的二分图 H，其中 w_1 是一个顶点，而 P_1 和 Q_1 是满足条件的

顶点集合 $|P_1 \cup Q_1| \geq 1$。此外，如果 $Q_1 \neq \emptyset$，那么 $|Q_1| \geq 2$。图 H 的边构造如下： y_1 与 B_1 中的每个顶点都相邻，而 x_1 仅与 P_1 和 w_1 中的顶点相邻（如图 1所示）。

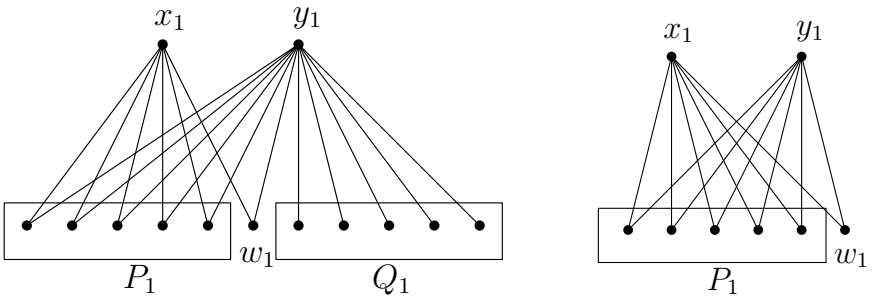

图1：(a)：一个具有 $Q_1 \neq \emptyset$的 $\mathcal{H}_1$ 图。(b)：一个具有 $Q_1 = \emptyset$的 $\mathcal{H}_1$ 图。

在证明下述定理之前，先定义以下记号：设 G 是一个 SP 图， H 是 G的 SC图。对于 G中的顶点 x ，我们将其在 H 中对应的顶点记为 $\tilde{x}$。现在可以证明以下结果了。

定理 4 若 $G \in \mathcal{F}_1$，则$\mathrm{CG}(G, \Gamma_1) \in \mathcal{H}_1$。

证明。设 $G \in \mathcal{F}_1$ 的顶点集为 $V = V(G)$，边集为 $E = E(G)$。因此， $V = \{x, y\} \cup P \cup Q \cup \{w\}$，其中顶点 x、 y和 w 以及顶点子集 P和 Q 满足定义 1 中对属于族 $\mathcal{F}_1$的图所规定的条件。注意， x 是 G 的一个顶点，其最小度为 $\delta(G) = 1$，且 $N_G(x) = \{y\}$。令 $H_1 = \mathrm{CG}(G, \Gamma_1)$。根据观察 1，若 $u \in P \cup \{w\}$，则 $\{u\}$ 和 $\{x\}$ 构成一个联盟，因此 $\tilde{u}$ 与 $\tilde{x}$相邻。若$u \in P \cup Q \cup \{w\}$，则 $\{u\}$ 和 $\{y\}$ 构成一个联盟，因此 $\tilde{u}$ 与 $\tilde{y}$相邻。此外， $\{u\}$ 和 $\{u'\}$之间不存在联盟，其中 u、 $u' \in P \cup Q \cup \{w\}$，因此 $\tilde{u}$ 在H_1中不与 $\tilde{u}'$ 相邻。由于 G 没有全顶点， $\{x\}$ 和 $\{y\}$ 不构成联盟，因此 $\tilde{x}$ 在 H_1中不与$\tilde{y}$ 相邻。若 $q \in Q$，则由于 $G[Q]$ 没有全顶点， $\{q\}$ 和 $\{x\}$ 不构成联盟，因此$\tilde{q}$ 在 H_1中不与 $\tilde{x}$ 相邻。根据图 H_1的这些性质，我们推知 H_1 满足族 $\mathcal{H}_1$ 的条件，因此 $H_1 \in \mathcal{H}_1$。□

3 最小度为二的 SP 图

本节中，我们刻画所有阶为 n 、满足 $\delta(G) = 2$ 和 $C(G) = n$ 的图 G 。我们首先给出一族图 $\mathcal{F}_2$ 。

定义 3（族 $\mathcal{F}_2$） 设 G 是按如下方式构造的图。G 的顶点集定义为 $V = \{x, y, z\} \cup L_1 \cup R_1 \cup R_2 \cup L_2 \cup W$，其中 L_1， R_1， R_2，以及 L_2 是两两不相交的集合，并且

其中，集合 W 可能与集合 $L_1 \cup R_1 \cup R_2 \cup L_2$ 相交。顶点 x 在 G 中的度为 2，其唯一的邻点是 y 和 z，因此 $N_G(x) = \{y, z\}$。现在我们按如下方式向 G 添加其他边。

(a) 族 $\mathcal{F}_2^1$。在此情形下，集合 W、L_1、L_2 和 R_2 定义为空集，而集合 R_1 非空。我们将两个顶点 y 和 z 分别与 R_1 中的每个顶点相连，但不在 y 和 z 之间添加边。此外，我们在 R_1 中的顶点之间添加边，也可以不添加任何边。由此得到的图 G 满足 $\delta(G) = 2$，且没有全顶点。令 $\mathcal{F}_2^1$ 为以这种方式构造的所有此类图 G 组成的族。图2a 展示了该族 $\mathcal{F}_2^1$ 中的一张图示例。

(b) 族 $\mathcal{F}_2^2$。在此情形下，集合 W、L_2 和 R_2 定义为空集，而集合 L_1 和 R_1 均非空。我们将顶点 y 与 $L_1 \cup R_1$ 中的每个顶点相连，但不在 y 和 z 之间添加边。我们将顶点 z 与 R_1 中的每个顶点相连，但不与 L_1 中的任何顶点相连。此外，我们添加 L_1 中顶点之间的所有边，从而形成团 $G[L_1]$。此外，我们在 R_1 中的顶点之间添加边，也可以不添加任何边。最后，我们向 G 添加任意其他边，同时保持最小度为 2（回想一下，顶点 x 在 G 中的度为 2），且不产生任何全顶点。由此得到的图 G 满足 $\delta(G) = 2$，且没有全顶点。令 $\mathcal{F}_2^2$ 为以这种方式构造的所有此类图 G 组成的族。图2b 展示了该族 $\mathcal{F}_2^2$ 中的一张图示例。

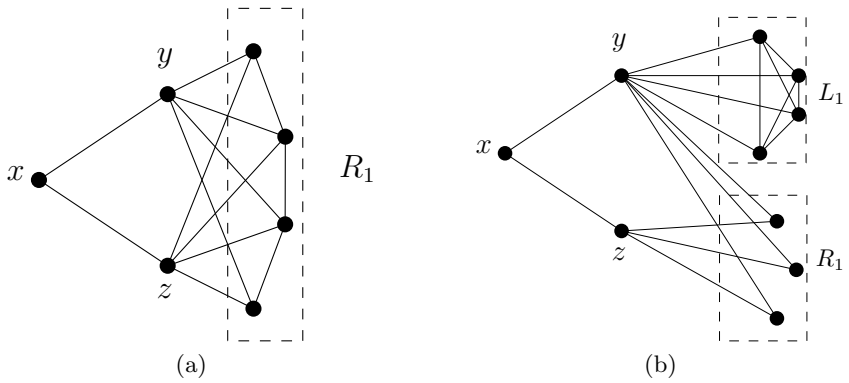

图2：(a)：$\mathcal{F}_2^1$ 中的一个图；(b)：$\mathcal{F}_2^2$中的一个图

(c) 族 $\mathcal{F}_2^3$。在这种情况下，集合 L_1、R_2 和 W 均非空。此外，集合 $L_2 \subseteq W$ 虽然可能 $L_2 = \emptyset$。我们添加 W 中各顶点之间的所有边，形成团 $G[W]$，并将 W 中的每个顶点与 $L_1 \cup R_1 \cup R_2$ 中的所有顶点相连。我们将顶点y 与 $L_1 \cup R_1$中的每个顶点相连，但不在 y 和 R_2之间添加边。我们将顶点z 与 $R_1 \cup R_2$中的每个顶点相连，但不在 z 和 L_1之间添加边。如果 R_1 非空，则将 R_1 中的每个顶点与 L_1 或 R_2中的所有顶点相连。

现在，要么我们不添加边 yz，此时添加顶点 L_1 之间的所有边以形成团 $G[L_1]$，并添加顶点 R_2 之间的所有边以形成团 $G[R_2]$；要么我们添加边 yz，此时将 L_1 中的每个顶点分别连接到 L_1 或 R_2 中的所有顶点，并对 R_2 中的每个顶点也进行相同操作。

最后，我们添加任意额外的边到 G，同时保持最小度为 2（回想一下，顶点 x 在 G中的度为 2），且不产生任何全顶点。所得图 G满足 $\delta(G) = 2$ 且没有全顶点。令 $\mathcal{F}_2^3$ 为由所有以这种方式构造的图组成的族G。族 $\mathcal{F}_2^3$ 中的图示例如图 3所示。

族 $\mathcal{F}_2$定义为 $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2^1 \cup \mathcal{F}_2^2 \cup \mathcal{F}_2^3$。

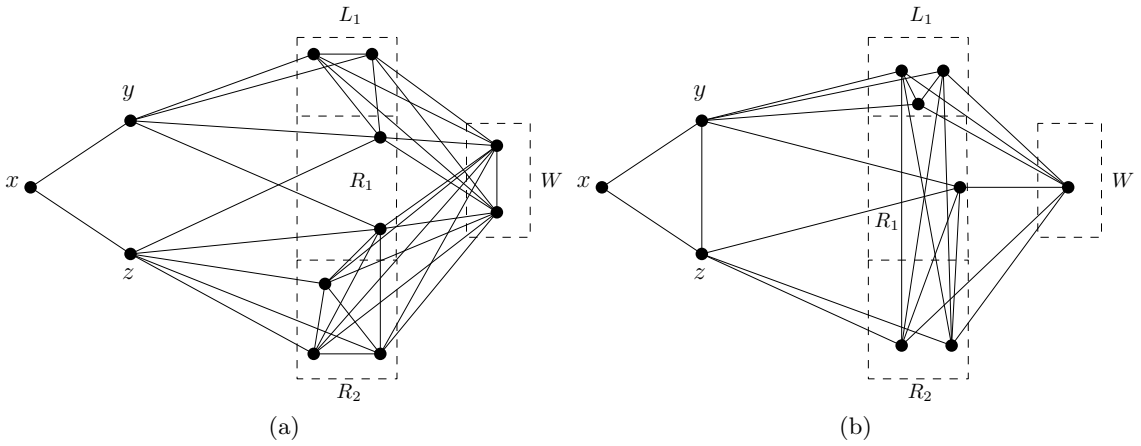

图3： $\mathcal{F}_2^3$中的两个不同的图。(a)：$(y,\ z) \notin E$。(b)：$(y,\ z) \in E$。

接下来，我们确定没有全顶点的 SP-圈。圈的联盟数在 [1] 中确定。特别地，Haynes 等人 [1] 证明，若 G 是圈 C_n，则 $C(C_n) = n$ 当且仅当 $3 \leq n \leq 6$。由于 C_3 有一个全顶点，我们在此考虑 $4 \leq n \leq 6$ 的圈 C_n。若 G 是 4-圈 $xyazx$，则取 $R_1 = \{a\}$，可推得 $G \in \mathcal{F}_2^1$。若 G 是 5-圈 $xyabzx$，则取 $W = \{a, b\}$、$L_1 = \{a\}$、$R_2 = \{b\}$ 和 $R_1 = L_2 = \emptyset$，可推得 $G \in \mathcal{F}_2^3$。若 G 是 6-圈$xyabczx$，则取 $W = \{b\}$、$L_1 = \{a\}$、$R_2 = \{c\}$ 和 $R_1 = L_2 = \emptyset$，可推得 $G \in \mathcal{F}_2^3$。我们将这些观察正式表述如下。

观察2 对于 $n \geq 3$，如果 C_n 是一个SP 图，那么 $4 \leq n \leq 6$ 和 $G \in \mathcal{F}_2$。

接下来我们证明，如果 G 是一个具有 $\delta(G) = 2$ 且不含全顶点的 SP 图，那么 G 属于族 $\mathcal{F}_2$。

Theo余5 如果 G 是一个SP 图，具有 $\delta(G) = 2$ 且不含全顶点，那么 $G \in \mathcal{F}_2$.

证明。设 $G = (V, E)$ 是一个 SP 图，满足 $\delta(G) = 2$，且没有全顶点；设 G 的阶为 n，因此 $C(G) = n$。设 x 是 G 中一个度为 2 的顶点，其邻点为 y 和 z，因此$N_G[x] = \{x, y, z\}$。此外，设 $\mathcal{P}$ 是 G 的一个单元素联盟划分。根据观察 1，$\mathcal{P}\backslash\{\{x\}, \{y\}, \{z\}\}$ 中的所有集合都与 $\{x\}$、$\{y\}$ 或 $\{z\}$ 中至少一个形成联盟，而 $\mathcal{P}\backslash\{\{x\}, \{y\}, \{z\}\}$ 中没有任意两个集合形成联盟。接下来，令 $V_x = V\backslash\{x, y, z\}$，因此 $V = N_G[x] \cup V_x$。我们进一步给出一系列断言。

断言1 如果 $\{x\}$ 与 $\{y\}$ 和 $\{z\}$都形成联盟，那么 $G \in \mathcal{F}_2$。

证明。假设 $\{x\}$ 同时与 $\{y\}$ 和 $\{z\}$形成联盟。因此， $\{x,y\}$ 和 $\{x,z\}$都是 G的支配集。于是， y 和 z 中的每一个都与 V_x中的所有顶点相邻。由于 G 没有全顶点，可知 $yz \notin E$。对于每个顶点 $u \in V_x$，集合 $\{u,y\}$ 和 $\{u,z\}$ 都是 G的支配集，因此 $\{u\}$ 同时与 $\{y\}$ 和 $\{z\}$形成联盟。于是，令 $R_1 = V \setminus \{x,y,z\}$ 和$W = L_1 = L_2 = R_2 = \emptyset$，我们可推得 $G \in \mathcal{F}_2^1$（见定义3）。因此， $G \in \mathcal{F}_2$。(□)

断言2 如果 $\{x\}$ 仅与 $\{y\}$ 和 $\{z\}$中的一个形成联盟，那么 $G \in \mathcal{F}_2$。

证明。假设 $\{x\}$ 仅与 $\{y\}$ 和 $\{z\}$中的一个形成联盟。如有必要，重新命名顶点 y 和 z ，我们可以假设 $\{x\}$ 与 $\{y\}$ 形成联盟，但不与 $\{z\}$形成联盟。因此， $\{x,y\}$ 是 G中的一个支配集，这意味着顶点 y 与 V_x中的所有顶点都相邻。由于 G 没有全顶点，可得 $yz \notin E$。由于 $\{x,z\}$ 不是支配集，存在一个顶点 V_x，它与 z不相邻。令 $V_x = L_1 \cup R_1$，其中 L_1 和 R_1 分别是 V_x 中与 z 不相邻和与 z相邻的顶点集合。由于 $\{x,z\}$ 不是支配集， L_1 必非空。令 $u \in V_x$。如果 $u \in R_1$，那么由于 $uz \in E$ 以及V_x 中的所有顶点都与 y相邻，集合 $\{u\}$ 和 $\{y\}$ 形成一个联盟。现在，假设 $u \in L_1$。由于 z 并非同时与 u 和 y相邻，集合 $\{u\}$ 和 $\{y\}$ 不形成联盟。因此， $\{u\}$ 必须与 $\{z\}$ 或 $\{x\}$形成联盟。如果 $\{u\}$ 与 $\{x\}$形成联盟，那么 V_x 中的所有顶点都与 u相邻。如果 $\{u\}$ 与 $\{z\}$形成联盟，那么 L_1 中的所有顶点都与 u相邻。两种情况下， $G[L_1]$ 都是一个团。令 $W = L_2 = R_2 = \emptyset$，可推得 $G \in \mathcal{F}_2^2$（见定义3）。因此， $G \in \mathcal{F}_2$。(□)

断言3 如果 $\{x\}$ 既不与 $\{y\}$ 也不与 $\{z\}$形成联盟，那么 $G \in \mathcal{F}_2$。

证明。假设 $\{x\}$ 既不与 $\{y\}$ 也不与 $\{z\}$形成联盟。由于 $\mathcal{P}$ 是 G的单元素联盟划分，因此存在一个顶点 $w \in V_x$，使得 $\{x\}$ 和 $\{w\}$ 形成联盟。令W 为所有满足 $\{w\}$ 和 $\{x\}$ 形成联盟的顶点 $w \in V_x$ 组成的集合。因此， $\{x,w\}$ 是 G 的支配集，这意味着顶点 w 与 $V_x \setminus \{w\}$ 中的所有顶点都相邻。因此， $G[W]$是一个团。令 L_1 为 V_x 中与 y 相邻但与 z不相邻的所有顶点组成的集合。进一步令 R_1 为 V_x 中同时与 y 和 z相邻的所有顶点组成的集合，并令R_2 为 V_x 中与 z 相邻但与 y不相邻的所有顶点组成的集合。令 L_2为 V_x 中既不与 y 也不与 z 相邻的所有顶点组成的集合（见图4）。注意到 L_1、 R_1、 R_2和 L_2两两不相交。由于 $W \subseteq V_x = L_1 \cup R_1 \cup R_2 \cup L_2$，我们注意到$W \cap (L_1 \cup R_1 \cup R_2 \cup L_2) \neq \emptyset$。由于 $\{x,y\}$ 不是支配集， $R_2 \cup L_2 \neq \emptyset$；又由于 $\{x,z\}$不是支配集， $L_1 \cup L_2 \neq \emptyset$。接下来我们进一步讨论两个子断言。

断言 3.1 如果 $\{y\}$ 和 $\{z\}$ 形成联盟，那么 $G \in \mathcal{F}_2$。

证明。 假设 $\{y\}$ 和 $\{z\}$ 构成一个联盟。因此， $\{y,z\}$ 是一个支配集，所以在这种情况下，我们注意到 $L_2 = \emptyset$。

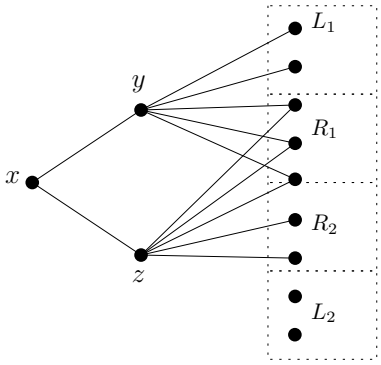

图4：展示命题的证明 3。

假设 $yz \notin E$。我们首先证明 $G[R_2]$ 是一个团。设 $r_2 \in R_2$。由于 y 既不与 r_2 相邻，也不与 z相邻，因此集合 $\{r_2\}$ 和 $\{z\}$ 不构成联盟。因此，$\{r_2\}$ 与$\{y\}$或 $\{x\}$构成联盟。若 $\{r_2\}$与 $\{x\}$构成联盟，则 $r_2 \in W$。根据我们先前的观察，$G[W]$是一个团，这意味着 r_2 与 $R_2 \setminus \{r_2\}$中的所有顶点相邻。若 $\{r_2\}$ 与$\{y\}$构成联盟，则 $\{r_2, y\}$ 是 G的一个支配集，这再次意味着 r_2 与 $R_2 \setminus \{r_2\}$中的所有顶点相邻。因此，$G[R_2]$ 是一个团。我们接着证明，R_1 中的每个顶点都与 L_1 或 R_2 中的所有顶点相邻（也可能同时与 L_1 和 R_2中的所有顶点相邻）。设 $r_1 \in R_1$。若 $\{r_1\}$ 与 $\{x\}$构成联盟，则$r_1 \in W$。若 $\{r_1\}$ 与 $\{y\}$构成联盟，则 R_2 中的每个顶点都必须与 r_1相邻。若 $\{r_1\}$与 $\{z\}$构成联盟，则 L_1 中的每个顶点都必须与 r_1相邻。因此，r_1 与 L_1 或 R_2中的所有顶点相邻。我们第三步证明 $G[L_1]$ 是一个团。设 $l_1 \in L_1$。若 $\{l_1\}$ 与 $\{x\}$构成联盟，则 $l_1 \in W$。现在，由于 $yz \notin E$ 和 z 不与 l_1相邻，$\{l_1\}$ 不会与 $\{y\}$构成联盟。若 $\{l_1\}$ 与 $\{z\}$构成联盟，则 l_1 必须与 L_1中的其他所有顶点相邻。因此，$G[L_1]$ 是一个团。根据上述结构性质，我们推断 $G \in \mathcal{F}_2^3$（见定义 3）。因此，在 $yz \notin E$的情况下，我们有 $G \in \mathcal{F}_2$。

因此，我们可以假设 $yz \in E$，否则所需结论便成立。我们证明，R_2 中的每个顶点都与 L_1 或 $R_2 \setminus \{r_2\}$中的所有顶点相邻。令 $r_2 \in R_2$。如果 $\{r_2\}$ 与 $\{x\}$结成联盟，那么 $r_2 \in W$。如果 $\{r_2\}$ 与 $\{z\}$结成联盟，那么 r_2 与 L_1中的所有顶点相邻。如果 $\{r_2\}$ 与 $\{y\}$结成联盟，那么 r_2 必定与 R_2中的所有其他顶点相邻。因此，我们得出结论：R_2 中的每个顶点都与 L_1 或 $R_2 \setminus \{r_2\}$中的所有顶点相邻。接下来，我们证明，R_1 中的每个顶点都与 L_1 或 R_2中的所有顶点相邻。令 $r_1 \in R_1$。如果 $\{r_1\}$ 与 $\{x\}$结成联盟，那么 $r_1 \in W$。如果 $\{r_1\}$ 与 $\{z\}$结成联盟，那么 L_1 中的所有顶点都必须与 r_1相邻；如果 $\{r_1\}$ 与 $\{y\}$结成联盟，那么 R_2 中的所有顶点都必须与 r_1相邻。因此，我们得出结论：R_1 中的每个顶点都与 L_1 或 R_2中的所有顶点相邻。最后，我们证明，L_1 中的每个顶点都与 R_2 或 $L_1 \setminus \{l_1\}$中的所有顶点相邻。令 $l_1 \in L_1$。如果 $\{l_1\}$ 与 $\{x\}$结成联盟，那么 $l_1 \in W$。如果 $\{l_1\}$ 与 $\{y\}$结成联盟，那么 R_2 中的所有顶点都必须与 l_1相邻；如果 $\{l_1\}$ 与 $\{z\}$结成联盟，那么 l_1 必须与 $L_1 \setminus \{l_1\}$中的所有顶点相邻。因此，我们得出结论：L_1 中的每个顶点都与 R_2 或 $L_1 \setminus \{l_1\}$中的所有顶点相邻。根据上述结构性质，我们推知 $G \in \mathcal{F}_2^3$（见定义 3）。因此，我们再次得到$G \in \mathcal{F}_2$。(□)

命题 3.2 如果 $\{y\}$ 和 $\{z\}$ 不构成联盟，那么 $G \in \mathcal{F}_2$。

证明。假设 $\{y\}$ 和 $\{z\}$ 不构成联盟，这意味着 $L_2 \neq \emptyset$。我们证明$L_2 \subseteq W$。反过来，假设 $L_2 \setminus W \neq \emptyset$。令 $l_2 \in L_2 \setminus W$。因此，$\{x\}$和 $\{l_2\}$不构成联盟，所以 $\{l_2\}$ 与 $\{y\}$ 或 $\{z\}$构成联盟。在这两种情况下，由于 L_2 中的顶点都不与 y 或 z相邻，顶点 l_2 与 L_2中的其他每个顶点都相邻。如果 $yz \notin E$，那么由于 y 和 z 都不与 l_2相邻，集合 $\{l_2\}$ 既不与 $\{y\}$ 也不与 $\{z\}$构成联盟，矛盾。因此， $yz \in E$。令 $q \in L_1 \cup R_2 \cup R_2$。如果 $\{q\}$ 与 $\{x\}$构成联盟，那么$q \in W$，所以 q 与 l_2相邻。如果 $\{q\}$ 与 $\{y\}$ 或 $\{z\}$构成联盟，那么由于 l_2 既不与 y 也不与 z相邻，我们再次推得 l_2 与 q相邻。因此，我们得出结论： l_2 与 $L_1 \cup R_1 \cup R_2$的每个顶点都相邻。如前所述， l_2 与 L_2中的其他每个顶点都相邻。因此，l_2 与 V_x中的其他每个顶点都相邻，这意味着 $\{x\}$ 和 $\{l_2\}$ 确实构成联盟，因此$l_2 \in W$，矛盾。因此， $L_2 \subseteq W$。按照断言 3.1 的证明中处理集合 $L_2 = \emptyset$的类似方法，我们推得 $G \in \mathcal{F}_2^3$（见定义 3），因此 $G \in \mathcal{F}_2$。（□）

断言 3 的证明由断言 3.2 和3.2推出。（□）

定理 5 的证明由断言 1、2 和 3推出。 □

接下来我们考虑含有全顶点的图 G，其中 $\delta(G) = 2$。

定理 6 若 $G = (V, E)$ 是一个阶为 n、带有 $\delta(G) = 2$ 的图，则以下性质成立 .

(a) 若 G 恰含有一个全顶点，记为 f，则 $C(G) = n$ 当且仅当 $G[V \setminus \{f\}] \in \mathcal{F}_1$。(b) 若 G 恰含有两个全顶点，则 $C(G) = n$ 当且仅当 $G \cong (K_1 \cup K_{n-3}) + K_2$。(c) 若 G 至少含有三个全顶点，则 $G \cong C_3$。

证明。(a) 假设 G 恰好包含一个全顶点，记为 f。如果 $C(G) = n$，那么由于 f 是一个全顶点，$C(G[V\setminus\{f\}]) = n-1$。由于 G恰好有一个全顶点， $G[V\setminus\{f\}]$没有全顶点。由于 $G[V \setminus \{f\}]$ 的最小度为 1，根据定理 3，图 $G[V \setminus \{f\}]$ 属于族 $\mathcal{F}_1$。反过来，如果 $G[V \setminus \{f\}] \in \mathcal{F}_1$，那么 G 没有全顶点，并且 $C(G[V \setminus \{f\}]) = n - 1$。将 $\{f\}$加入 $G[V \setminus \{f\}]$的单元素联盟划分中，得到 G的一个单元素联盟划分，因此 $C(G) = n$。

(b) 假设 G 恰好包含两个全顶点，记为 f_1 和 f_2。令 $G_{1,\,2} = G[V \setminus \{f_1, f_2\}]$。由于 $\delta(G) = 2$，图 $G_{1,\,2}$ 含有一个孤立顶点，因此 $G_{1,\,2}$ 的最小度为零。如果 $C(G) = n$，那么 $C(G_{1,\,2}) = n-2$，因此根据定理 1，有 $G_{1,\,2} \cong K_1 \cup K_{n-3}$。通过加回全顶点 f_1和 f_2重构图 G，可得 $G = (K_1 \cup K_{n-3}) + K_2$。反过来，如果 $G = (K_1 \cup K_{n-3}) + K_2$，那么 $C(G) = n$。

(c) 假设 G 至少包含三个全顶点，分别为 f_1、f_2 和 f_3。如果 $n \geq 4$，那么 $\delta(G) \geq 3$，这与我们关于 $\delta(G) = 2$ 的假设矛盾。因此， $n = 3$，由此可得 $G = C_3$。 □

在证明若 $G \in \mathcal{F}_2$，则 $C(G) = n$ 之前，我们先介绍一族图 $\mathcal{H}_2$。随后，我们将建立 CG(G, Γ_1) 与族 $\mathcal{H}_2$ 之间的联系，其中 $G \in \mathcal{F}_2$。

定义 4（族 $\mathcal{H}_2$） 族 $\mathcal{H}_2$ 由以下方式构造的所有图 H 组成。

(a) 族 $\mathcal{H}_2^1$。令 $H=(V,E)$ 为按以下方式构造的图。令 $V=\{x',y',z'\}\cup R_1'$，其中 $R_1'\neq\emptyset$。添加 $\{x',y',z'\}$ 中所有顶点之间的边，形成一个团，因此$H[\{x',y',z'\}]=K_3$。将 R_1' 中的每个顶点都连接到 y' 和 z'。令 R_1' 为 H 中的一个独立集。此外，我们添加边，将顶点 x' 与 R_1' 中的顶点相连；也可以不添加与 x' 相 incident 的其他边（ $x'y'$ 和 $x'z'$ 除外）。令 $\mathcal{H}_2^1$ 为由所有以这种方式构造的图 H 组成的族。图5a 展示了族 $\mathcal{H}_2^1$ 中的一个图示例。

(b) 族 $\mathcal{H}_2^2$。令 $H=(V,E)$ 为按如下方式构造的图。令 $V=\{x',y',z'\}\cup R_1'\cup L_1'$，其中 $R_1'\neq\emptyset$ 和 $L_1'\neq\emptyset$。将顶点 y' 与 R_1'中的每个顶点相连，并将顶点 z' 与 L_1'中的每个顶点相连。我们将顶点 y' 同时与顶点 x' 和 z'相连。然而，我们不在 x' 和 z'之间添加边，也不在 L_1' 中的任何顶点与y'之间添加边。令 $L_1'\cup R_1'$ 为 H的一个独立集。可以向 H添加额外的边，也可以不添加任何边。根据构造， L_1' 中的每个顶点要么度为 1，且 z' 是其唯一的邻点；要么度为 2，且 x' 和 z' 是其两个邻点。令 $\mathcal{H}_2^2$ 为以这种方式构造的所有此类图 H 组成的族。族 $\mathcal{H}_2^2$ 中的一个图的示例如图 5b 所示。

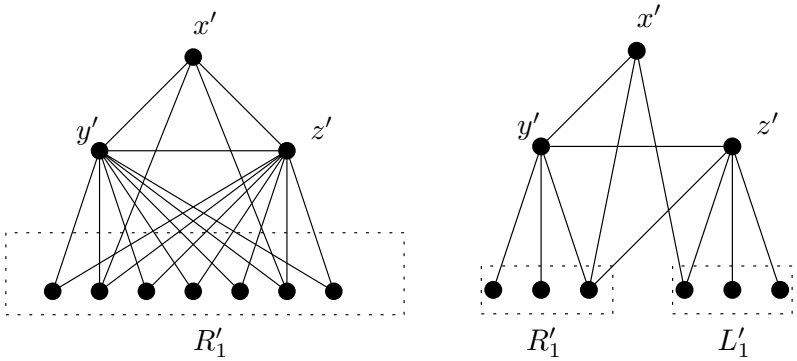

图5：（a）： $\mathcal{H}_2^1$ 中的一个图（b）： $\mathcal{H}_2^2$中的一个图

(c) 族 $\mathcal{H}_2^3$。令 $H=(V,E)$ 为按如下方式构造的图。令 $V=\{x',y',z'\}\cup L_1'\cup R_1'\cup R_2'\cup W'$，其中 $W'\neq\emptyset$，且 L_1'、R_1'、R_2' 和 W' 是两两不相交的集合。此外，这些集合 L_1'、 R_1' 和 R_2' 中有些集合（也可能是全部）可以为空。我们不在集合 $L_1'\cup R_1'\cup R_2'\cup W'$ 中的顶点之间添加边，因此该集合是 H 中的一个独立集。我们不添加边 $x'y'$ 和 $x'z'$。我们将 R_1' 中的每个顶点都连接到 y' 和 z' 中至少一个顶点。我们将 x' 连接到 W' 的所有顶点，但不添加连接 x' 与集合 $\{y',z'\}\cup L_1'\cup R_1'\cup R_2'$ 中某个顶点的边。我们将 L_1' 中的每个顶点以及 R_2' 中的每个顶点，都连接到 y' 和 z' 中至少一个顶点。族 $\mathcal{H}_2^3$ 中的两个图如图 6 所示。

族 $\mathcal{H}_2$ 定义为 $\mathcal{H}_2=\mathcal{H}_2^1\cup\mathcal{H}_2^2\cup\mathcal{H}_2^3$。

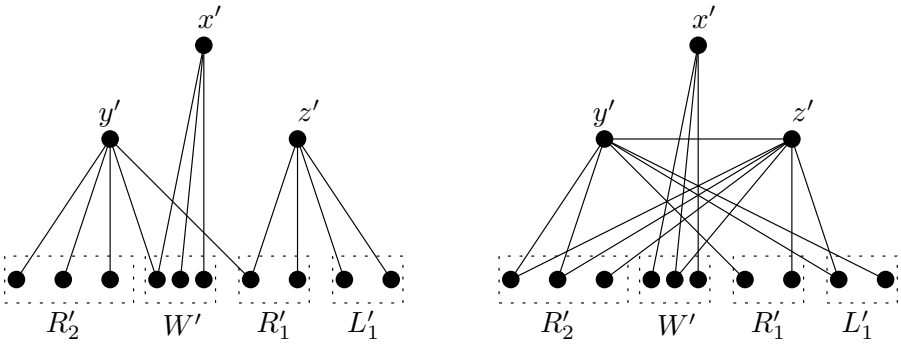

图 6：$\mathcal{H}_2^3$中的两个图。

现在我们可以证明以下结果。

定理 7 若 $G \in \mathcal{F}_2$，则 G 是一个SP 图，且 $\mathrm{CG}(G, \Gamma_1) \in \mathcal{H}_2$。

证明。 设 $G \in \mathcal{F}_2$ 的阶为 n，并设 $G = (V, E)$。我们采用定义 3中用于构造图 G的记号。设 $\{x, y, z\} \subseteq V$和 $N_G(x) = \{y, z\}$。在下文中，令$V_x = V \setminus \{x, y, z\}$，因此 $V = N_G[x] \cup V_x$。

若 G 是一个 SP 图，也就是说，若 $C(G) = n$，则令 $H_2 = \mathrm{CG}(G, \Gamma_1)$，其中回忆一下， Γ_1 表示 G的一个单元素联盟划分。在这种情况下（当 $C(G) = n$时），根据观察 1，对于每个顶点 $u \in V \setminus \{x, y, z\}$，集合 $\{u\}$ 与集合 $\{x\}$、$\{y\}$和 $\{z\}$中的至少一个形成联盟。此外，当 a、$b \in V_x$时，集合 $\{a\}$ 和 $\{b\}$ 之间不存在联盟。我们还采用先前的记号：若 G 是一个 SP 图，则对于 G中的顶点 v，将 H_2 中对应的顶点记作 $\tilde{v}$。

根据定义 3，族 $\mathcal{F}_2$定义为 $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2^1 \cup \mathcal{F}_2^2 \cup \mathcal{F}_2^3$。因此， G属于以下族之一： $\mathcal{F}_2^1$、 $\mathcal{F}_2^2$或 $\mathcal{F}_2^3$。接下来，我们给出以下三个断言。

断言 4 如果 $G \in \mathcal{F}_2^1$，则 $C(G) = n$且 $H_2 \in \mathcal{H}_2^1$。

证明。假设 $G \in \mathcal{F}_2^1$。在这种情况下，顶点 y和 z都与 R_1的所有顶点相邻。如果 $u \in R_1$，那么 $\{u\}$ 会分别与 $\{y\}$ 和 $\{z\}$形成联盟。此外，$\{x\}$、$\{y\}$和 $\{z\}$ 中任意两个集合都会形成联盟。因此， $C(G) = n$。现在考虑图 $H_2 = \mathrm{CG}(G, \Gamma_1)$。对于每个顶点 $u \in R_1$， H_2 中的顶点 $\tilde{u}$ 与 $\tilde{y}$ 和 $\tilde{z}$都相邻。此外， $H_2[\{\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{x}\}]$ 是一个团。因此，图 H_2 属于定义 4 中定义的族 $\mathcal{H}_2^1$ 。因此， $H_2 \in \mathcal{H}_2$。□

断言 5 如果 $G \in \mathcal{F}_2^2$，那么 $C(G) = n$且 $H_2 \in \mathcal{H}_2^2$。

证明。 假设 $G \in \mathcal{F}_2^2$。回想一下，在这种情况下， $L_1 \neq \emptyset$和 $R_1 \neq \emptyset$。令 $l_1 \in L_1$。由于$G[L_1]$ 是一个团，顶点 l_1 与 L_1中的每个其他顶点都相邻。由于顶点 z 与

$R_1 \cup \{x\}$ 中的所有顶点都相邻，并且由于顶点 l_1 支配集合 $L_1 \cup \{y\}$，集合 $\{l_1, z\}$ 是 G的一个支配集，这意味着集合 $\{l_1\}$ 和 $\{z\}$ 构成一个联盟。令 $r_1 \in R_1$。由于顶点 y 与 $L_1 \cup R_1 \cup \{x\}$ 中的每个顶点都相邻，且顶点 r_1 与顶点 z相邻，因此集合 $\{r_1, y\}$ 是 G的一个支配集，这意味着集合 $\{r_1\}$ 和 $\{y\}$ 构成一个联盟。此外，由于顶点 x 与顶点 z相邻，集合 $\{x\}$ 和 $\{y\}$ 构成一个联盟。因此，$C(G) = n$。

现在考虑图 $H_2 = \mathrm{cg}(G, \Gamma_1)$。由于 $\{x\}$ 和 $\{y\}$ 构成一个联盟，$\tilde{x}$ 与 $\tilde{y}$ 在 H_2中相邻；又由于 $\{y\}$ 和 $\{z\}$ 构成一个联盟，$\tilde{y}$ 与 $\tilde{z}$相邻。若 $r_1 \in R_1$，则 $\tilde{r_1}$ 与 相邻于 $\tilde{y}$。若 $l_1 \in L_1$，则 l_1 与 $\tilde{z}$相邻。由于 z 既不与 y 相邻，也不与 $l_1 \in L_1$相邻，集合 $\{y, l_1\}$ 不是支配集，这意味着 l_1 不与 $\tilde{y}$相邻。由于 $L_1 \neq \emptyset$，集合 $\{x, z\}$ 不是支配集，因此 $\{x\}$ 和 $\{z\}$ 不构成联盟，这意味着 $\tilde{x}$ 不与 $\tilde{z}$相邻。若 $r_1 \in R_1$，则由于 L_1 和 R_1 之间在 G中可能存在边，我们注意到 $\tilde{z}$ 可能与 $\tilde{r_1}$相邻。因此，图 H_2 属于定义 4 中定义的族 $\mathcal{H}_2^2$。因此，$H_2 \in \mathcal{H}_2$。(□)

断言 6 如果 $G \in \mathcal{F}_2^3$，则 $C(G) = n$ 且 $H_2 \in \mathcal{H}_2^3$。

证明。假设 $G \in \mathcal{F}_2^3$。回顾定义可知，$L_1 \neq \emptyset$、$R_2 \neq \emptyset$ 和 $W \neq \emptyset$，并且若$L_2 \neq \emptyset$，则 $L_2 \subseteq W$。此外，W可能与 $L_1 \cup R_1 \cup R_2 \cup L_2$相交。令 $w \in W$。由于 $G[W]$是一个团，且 w 与 $L_1 \cup R_1 \cup R_2 \cup L_2$ 中的所有顶点都相邻，因此集合 $\{w\}$ 与 $\{x\}$构成一个联盟。注意，W可能与 $L_1 \cup R_1 \cup R_2 \cup L_2$相交。令 $R_1 \neq \emptyset$，并令 $r_1 \in R_1$。根据定义，顶点 r_1 与 L_1 或 R_2中的所有顶点都相邻。如果 r_1 与 L_1中的所有顶点都相邻，那么$\{r_1\}$ 和 $\{z\}$ 构成一个联盟；如果 r_1 与 R_2中的所有顶点都相邻，那么 $\{r_1\}$ 和 $\{y\}$ 构成一个联盟。

首先，假设 $yz \notin E(G)$。在这种情况下，$G[L_1]$ 和 $G[R_2]$ 都是团。因此，如果$l_1 \in L_1$，那么 $\{z, l_1\}$ 是 G的支配集，所以 $\{l_1\}$ 和 $\{z\}$ 构成一个联盟。此外，如果$r_2 \in R_2$，那么 $\{y, r_2\}$ 是 G的支配集，所以 $\{r_2\}$ 和 $\{y\}$ 构成一个联盟。

其次，假设 $yz \in E(G)$。在这种情况下，每个顶点 $l_1 \in L_1$ 都与 L_1 或 R_2的所有顶点相邻，而每个顶点 $r_2 \in R_2$ 都与 L_1 或 R_2的所有顶点相邻。如果 $l_1 \in L_1$和 l_1 与 L_1的所有顶点相邻，那么 $\{l_1\}$ 和 $\{z\}$ 构成一个联盟；如果 l_1 与 R_2的所有顶点相邻，那么 $\{l_1\}$ 和 $\{y\}$ 构成一个联盟。类似地，如果 $r_2 \in R_2$，那么 $\{r_2\}$ 与 $\{z\}$ 或 $\{y\}$构成一个联盟。

由上述性质可推知 $C(G) = n$。现在考虑图 $H_2 = \mathsf{CG}(G, \Gamma_1)$。由于 $L_1 \neq \emptyset$ 且 $R_2 \neq \emptyset$，集合 $\{x\}$ 既不与 $\{y\}$ 也不与 $\{z\}$形成联盟。因此，$\tilde{x}$ 在 H_2 中既不与 $\tilde{y}$ 相邻，也不与 $\tilde{z}$ 相邻。若 $w \in W$，则顶点集 $\{x\}$ 与 $\{w\}$形成联盟，因此$\tilde{w}$ 与 $\tilde{x}$相邻。若 $R_1 \neq \emptyset$ 且 $r_1 \in R_1$，则 $\{r_1\}$ 与 $\{y\}$ 或 $\{z\}$ 形成联盟，因此 $\tilde{r_1}$ 与 $\tilde{y}$ 或 $\tilde{z}$相邻。若 $yz \notin E(G)$，则对于 $l_1 \in L_1$ 和 $r_2 \in R_2$，我们知道$\{l_1\}$ 与 $\{z\}$形成联盟，且 $\{r_2\}$ 与 $\{y\}$形成联盟。因此，l_1 与 $\tilde{z}$相邻，且 $\tilde{r_2}$ 与 $\tilde{y}$相邻。若 $yz \in E(G)$，则对于 $l_1 \in L_1$ 和 $r_2 \in R_2$，我们知道 $\{l_1\}\tilde{}$和 $\{r_2\}$ 各自都与 $\{y\}$ 或 $\{z\}$形成联盟。因此，l_1 和 $\tilde{r_2}$ 都与 $\tilde{z}$或 $\tilde{y}$相邻。设 $W' = W$、$L_1' = L_1 \setminus W$、$R_1' = R_1 \setminus W$、$R_2' = R_2 \setminus W$、$x' = \tilde{x}$、$y' = \tilde{y}$和 $z' = \tilde{z}$。若$u \in W \setminus L_1 \cup R_1 \cup R_2$，则 $\{u\}$ 和 $\{x\}$ 不形成联盟，因此 x' 不相邻

与 $L_1' \cup R_1' \cup R_2'$ 中的 H_2任何顶点都不相邻。注意，若 $L_2 = \emptyset$，则 $\tilde{y}$ 在 H_2中与 $\tilde{z}$ 相邻；若$L_2 \neq \emptyset$，由于 L_2 中存在一个在 $\{y, z\}$中没有邻点的顶点， $\tilde{y}$ 在 H_2中与 $\tilde{z}$ 不相邻。因此，图 H_2 属于定义中所定义的族4。因此，$H_2 \in \mathcal{H}_2$。□

定理 7 的证明由以下断言 4、 5 和 6得出。 □

4 G-SC 链

本节将刻画所有具有 $0 \leq \delta(G) \leq 2$ 的 SP 图 G 的 G-SC 链。

4.1 G-SC 链，其中 $\delta(G) = 0$

我们首先考虑 SP 图 G 包含一个孤立顶点的情形。我们将证明以下定理。

定理 8 如果 G 是一个阶为 n 、具有 $\delta(G) = 0$ 的 SP 图，则以下性质成立。

(a) 若 $n = 1$，则 $G = K_1$, $L_{\mathrm{SCC}}(G) = 0$，且 G-SC 链为 $K_1 \to K_1 \to K_1 \to \cdots$ *(b)* 若 $n = 2$，则 $G = K_2$, $L_{\mathrm{SCC}}(G) = \overline{\infty}$，且 G-SC 链为 $K_2 \to K_2 \to K_2 \to K_2 \overline{\to} \cdots$ *(c)* 若 $\overline{n > 3}$，则 $G \cong K_1 \cup K_{n-1}$, $L_{\mathrm{SCC}}(G) = 1$，且 G-SC 链为 $G \to K_{1,n-1}$。 *(d)* 若 $n = 3$，则 $G = K_1 \cup K_2$, $L_{\mathrm{SCC}}(G) = \infty$，且 G-SC 链为

$$K_1 \cup K_2 \to P_3 \to K_1 \cup K_2 \to P_3 \to \cdots$$

证明。设 G 是一个阶为 n 、具有 $\delta(G) = 0$ 的 SP 图。若 $n = 1$，则 $G = K_1$。此时，K_1-SC 链由序列 $K_1 \to K_1 \to K_1 \to \cdots$ 给出。这证明了 (a) 部分。

(b) 若 $n = 2$，则 $G = \overline{K_2}$。在这种情况下，$\overline{\mathrm{CG}}(K_2, \Gamma_1) = K_2$。由于 $\mathrm{CG}(K_2, \Gamma_1)\overline{\ } = K_2$，因此 K_2-SC 链由以下序列给出

$$\overline{K_2} \to K_2 \to \overline{K_2} \to K_2 \to \cdots .$$

(c) 和 (d)：假设 $n \geq 3$。根据定理 1， $G \cong K_1 \cup K_{n-1}$。现在考虑图 $\mathrm{CG}(G, \Gamma_1)$。令 q为 G的孤立顶点， $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ 为 K_{n-1}的顶点集。因此，集合 $\{x_i\}$与 $\{q\}$构成一个联盟，所以对于所有 $i \in [n-1]$， $\tilde{x_i}$在 $\mathrm{CG}(G, \Gamma_1)$ 中与 $\tilde{q}$相邻。根据观察 1，当 $1 \leq i < j \leq n-1$时，集合 $\{x_i\}$与 $\{x_j\}$之间不存在联盟。因此，$\mathrm{CG}(G, \Gamma_1)$ 是星图 $K_{1,n-1}$。现在考虑图 $K_{1,n-1}$，其最小度为 1，且恰有一个全顶点。根据定理 2，图$K_{1,n-1}$ 是 SP 图，当且仅当$n = 3$。因此，若 $n > 3$，则 G-SC 链由序列 $G \to K_{1,n-1}$给出，这证明了 (c) 部分。最后，假设 $n = 3$。在这种情况下， $G = K_1 \cup K_2$ 且 $\mathrm{CG}(G, \Gamma_1) = K_{1,2} \cong P_3$。由于 $\mathrm{CG}(P_3, \Gamma_1) = K_1 \cup K_2$， $G = K_1 \cup K_2$ 的 G-SC 链由以下序列给出

$$K_1 \cup K_2 \to P_3 \to K_1 \cup K_2 \to P_3 \to \cdots$$

由此完成了 (d) 部分以及定理 8 的证明。 □

4.2 G-SC 链，其中 $\delta(G) = 1$

本节讨论 SP 图 G 的最小度为 1 的情形。我们先讨论 G 包含一个全顶点的情形。

定理 9 若 G 是一个阶为 n、满足 $\delta(G) = 1$ 且包含一个全顶点的SP 图，则以下性质成立。

(a) 若 $n = 2$，则 $G = K_2$, $L_{\mathrm{SCC}}(G) = \infty$，且 G-SC 链为 $K_2 \to K_2 \to \overline{K_2} \to K_2 \ldots$(b) 若 $n > 3$ 且 $L_{\mathrm{SCC}}(G) = 1$，则 G-SC 链为 $G \to K_1 \cup K_{1,n-2}$.(c) 若 $n = 3$，则 $G = P_3$, $L_{\mathrm{SCC}}(G) = \infty$，且 G-SC 链为

$$P_3 \to K_1 \cup K_2 \to P_3 \to K_1 \cup K_2 \ldots$$

证明。设 G 是一个阶为 n、满足 $\delta(G) = 1$ 且 G 至少包含一个全顶点的 SP 图。若 $n = 2$，则 $G = K_2$。在这种情况下，由于 $\mathrm{CG}(K_2, \Gamma_1) = K_2$，$K_2$-SC 链由序列 $K_2 \to \overline{K_2} \to K_2 \to K_2 \cdots$ 给出。这证明了 (a) 部分。

(b) 和 (c)：假设 $n \geq 3$。在这种情况下，图 G 恰有一个全顶点。根据定理 2，G 是通过在孤立顶点（记作 q）与完全图 K_{n-1} 中的一个顶点（记作 x）之间添加一条边，由 $K_1 \cup K_{n-1}$ 得到的。现在考虑 $\mathrm{CG}(G, \Gamma_1)$。根据观察 1，若 y 是完全图 K_{n-1} 中一个不同于 x 的任意顶点，则集合 $\{y\}$ 与 $\{q\}$ 构成一个联盟，因此在 $\mathrm{CG}(G, \Gamma_1)$ 中，$\tilde{y}$ 与 $\tilde{q}$ 相邻。此外，完全图 K_{n-1} 中任意两个不同于 x 的顶点都不能构成联盟。全顶点 x 不与任何其他集合构成联盟。因此，$\mathrm{CG}(G, \Gamma_1) \cong K_1 \cup K_{1,n-2}$。然而，$K_1 \cup K_{1,n-2}$ 是 SP 图，当且仅当 $n = 3$。因此，若 $n > 3$，则 G-SC 链由序列 $G \to K_1 \cup K_{1,n-2}$ 给出，这证明了 (b) 部分。最后，假设 $n = 3$。在这种情况下，$G \cong P_3$ 和 $\mathrm{CG}(P_3, \Gamma_1) = K_1 \cup K_2$。由于 $\mathrm{CG}(K_1 \cup K_2, \Gamma_1) = P_3$，$G$ 的 G-SC 链由序列给出

$$P_3 \to K_1 \cup K_2 \to P_3 \to K_1 \cup K_2 \ldots$$

由此完成了 (c) 部分及定理9的证明。 □

接下来先讨论 SP 图 G 不含全顶点的情形。

定理 10 若 G 是一个SP 图，其阶为 n，且满足 $\delta(G) = 1$，并且不含全顶点，则该G-SC 链是以下链之一，其中 H_1 是族 $\mathcal{H}_1$中的一个图。

(a) $G \to H_1$, (b) $G \to C_4 \to K_4 \to \overline{K_4}$, 或(c) $G \to K_{2,\ n-2} \to K_1 + K_{1,\ n-2}$。

证明。设 G 是一个阶为 n 且满足 $\delta(G) = 1$ 的不含全顶点的 SP 图。根据定理 3，$G \in \mathcal{F}_1$。根据定理 4，$H_1 = \mathrm{CG}(G,\ \Gamma_1) \in \mathcal{H}_1$。若 H_1 不是 SP 图，则 G-SC 链就是链 $G \to H_1$。因此，我们可以假设 H_1 是一个 SP 图。现在我们计算 H_1的 SC 图。根据构造，族 $\mathcal{H}_1$ 中的所有图的阶至少为 4，这意味着 $n \geq 4$。

接下来证明 $Q_1 = \emptyset$。若 $H_1 \cong P_4$，则显然有 $Q_1 = \emptyset$。现在假设 H_1不同构于 P_4。反设 $Q_1 \neq \emptyset$。在这种情况下，$|Q_1| \geq 2$，且图H_1如图 1(a) 所示，其顶点集为 $\{x_1, y_1\} \cup P_1 \cup \{w_1\} \cup Q_1$。$Q_1$中的每个顶点在 H_1中的度均为 1，因此 H_1 至少有 $|Q_1| \geq 2$ 个度为 1 的顶点。由于族 $\mathcal{F}_1 \setminus \{P_4\}$ 中的每个连通图恰有一个度为 1 的顶点，即定义 1 中的顶点 x，图 $H_1 \notin \mathcal{F}_1$。因此，根据定理 3，图 H_1 不是 SP 图，这与我们的假设矛盾。

因此，$Q_1 = \emptyset$。在这种情况下，图 H_1 如图1(b)所示。根据族 $\mathcal{H}_1$ 中满足 $Q_1 = \emptyset$的图的构造，我们有 $H_1 \cong K_{2,\ n-2}$。如果 $n = 4$，那么 $G \cong C_4$。如前所述，C_4-SC 链为 $C_4 \to K_4 \to K_4$。因此，我们可以假设 $n \geq 5$。

沿用先前构造族 $\mathcal{H}_1$中的图时使用的记号，令 $B_1 = P_1 \cup \{w_1\}$。此外，令 $A_1 = \{x_1, y_1\}$。因此，H_1 是完全二部图 $K_{2,n-2}$，其部集为A_1 和 B_1，其中 $|A_1| = 2$ 且 $|B_1| = n - 2 \geq 3$。如果 $a \in A_1$ 且 $b \in B_1$，那么集合 $\{a\}$ 和$\{b\}$ 在 H_1中构成一个联盟。此外，集合 $\{x_1\}$ 和 $\{y_1\}$ 在 H_1中构成一个联盟。然而，如果 b_1 和 b_2 是 B_1中的两个不同顶点，那么由于 $n \geq 5$，集合 $\{b_1\}$ 和 $\{b_2\}$ 不构成联盟。因此，H_1 的单点联盟图与 $K_1 + K_{1,n-2}$同构，其中“+”表示联结运算。然而，由于图 $K_1 + K_{1,n-2}$ 有两个全顶点，与任意联盟划分相关联的 $K_1 + K_{1,n-2}$ 的联盟图都有两个孤立顶点，因此不是 SP 图。因此，在 $n \geq 5$的情况下，G-SC 链为$G \to K_{2,n-2} \to K_1 + K_{1,\ n-2}$。□

4.3 G-SC 链，其中 $\delta(G) = 2$

本节考虑 SP 图 G 的最小度为 2 的情况。我们先证明以下结果。

定理 11 若 G 是一个阶为 n、具有 $\delta(G) = 2$ 且至少包含一个全顶点的 SP 图，则 $L_{\mathrm{SCC}}(G) = 1$。

证明。设 $G = (V, E)$ 是一个阶为 n、具有 $\delta(G) = 2$ 且至少包含一个全顶点的 SP 图。注意到 $n \geq 3$。若 $n = 3$，则 $G = K_3$。在这种情况下，$\mathrm{CG}(G, \Gamma_1) = K_3$。由于 K_3 不是 $\overline{\text{SP}}$ 图，G-$\overline{\text{SC}}$ 链就是链 $K_3 \to K_3$，因此 $L_{\mathrm{SCC}}(G) = 1$。所以我们可以假设 $n \geq 4$，否则所需结论便成立。因此，G 至多有两个全顶点。令$I = \mathrm{CG}(G, \Gamma_1)$。若 G 有两个全顶点，则 I 有两个孤立顶点，因此根据定理 1，图 I 不是 SP 图。这意味着在这种情况下，G-SC 链就是链 $G \to I$，因此 $L_{\mathrm{SCC}}(G) = 1$。所以，我们可以假设 G 恰有一个全顶点，记为 f。根据定理 6，$G' = G[V \setminus \{f\}] \in \mathcal{F}_1$。令 $H' = \mathrm{CG}(G', \Gamma_1)$。根据定理 4，$H' \in \mathcal{H}_1$。由于 G 有一个全顶点，G 的单点联盟图 I 含有一个孤立顶点，这意味着 $I \cong K_1 \cup H'$。若I 是 SP 图，则根据定理 1，$H' \cong K_{n-1}$。然而，根据族 $\mathcal{H}_1$ 的定义（见定义 2），图 H' 与 K_{n-1} 不同构，矛盾。因此，I 不是 SP 图，这意味着 G-SC 链再次是链 $G \to I$，因此 $L_{\mathrm{SCC}}(G) = 1$。□

接下来，假设 即 G 是一个带有 $\delta(G) = 2$ 且不包含全顶点的 SP 图。令 $B =$

$\mathrm{CG}(G,\ \Gamma_1)$。根据定理 7，$B \in \mathcal{H}_2$。如果 B 不是 SP 图，则 G-SC 链是 $G \to B$，因此L_{SCC}（G）$= 1$。因此，在下文中我们可以假设 B 是一个 SP 图。根据定义 4，单点联盟图 $B \in \mathcal{H}_2$ 属于以下三个族之一：$\mathcal{H}_2^1$、$\mathcal{H}_2^2$或 $\mathcal{H}_2^3$。对于图 B，我们依次考察这三种可能性。在以下三个引理中，我们采用定义 4中的记号。

引理 1 若 $B \in \mathcal{H}_2^1$，则 G-SC 链是以下链之一。

(a) $G \to B \to \overline{K_4}$, (b)
$G \to B \to K_3 \overline{\cup} K_2$, (c)
$G \to B \to K_2 \overline{\cup} K_2$ 或(d)
$G \to B \to K_2 \cup P_3$。

证明。假设单点联盟图 $B \in \mathcal{H}_2^1$（如图 5a 所示）。在这种情况下，图 B 有两个全顶点（即 y' 和 z'）或三个全顶点（即 x'、y'和 z'）。因此，单元素集 $\{z'\}$ 和 $\{y'\}$（当 B 有三个全顶点时，单元素集 $\{x'\}$ 也同样如此）包含在 B的任意联盟划分中。令 B' 为从 B 中移除所有全顶点后得到的图。令 B' 的阶为 n'，因此 $n' = n-2$ 或 $n' = n-3$。注意，B 是 SP 图，当且仅当 B' 是 SP 图。

如果 $n' = n-3$，那么$\overline{B'} \cong K_{n'}$。显然，$B'$ 是 SP 图，当且仅当 $B' \cong K_1$ 或$\overline{B'} \cong K_2$。于是，$B \cong K_4$ 或 $B \cong \overline{K_2} + K_3$。因此，$G$-SC 链是如下序列

$$G \to B \to \overline{K}_4, \text{ if } B \cong K_4,$$

或如下序列

$$G \to B \to \overline{K}_3 \cup K_2, \text{ if } B \cong \overline{K_2} + K_3.$$

现在，假设 $n' = n-2$。根据族 $\mathcal{H}_2^1$ 中图的构造，顶点 x' 在 B 中的度为 2，或者顶点 x' 在 B 中的度至少为 3。此外，如果 x' 在 B 中的度为 2，那么独立集 R_1' 中的每个顶点的度都为 2，且在 B 中仅与 y' 和 z' 相邻；而如果 x' 在 B 中的度至少为 3，那么我们可以将集合 R_1' 划分为两个集合 R_1',2 和 R_1',3，其中 R_1',2 中的每个顶点的度都为 2，且在 B 中仅与 y' 和 z' 相邻；R_1',3 中的每个顶点的度都为 3，且在 B 中仅与 x'、y' 和 z' 相邻。因此，如果 x' 在 B 中的度为 2，那么 $B' = \overline{K_{n'}}$；而如果 x' 在 B 中的度至少为 3，那么对于某个整数 $r \geq 1$，有 $B' = K_r \cup K_{1,n'-r-1}$，此时 $n' \geq r+2$。注意，由于 $n' = n-2$，我们必有 $r \geq 1$。在这两种情况下，图 B' 都至少包含一个孤立顶点。

根据我们先前的观察，B 是 SP 图当且仅当 B' 是 SP 图。此外，图 B' 至少包含一个孤立顶点。根据定理1，B' 是 SP 图当且仅当$B' \cong K_1 \cup K_{n'-1}$。如先前所见，要么 $B' = K_{n'}$，要么 $B' = K_r \cup K_{1,\ n'-r-1}$，其中$r \geq 1$ 是某个整数，且在此情形下$n' \geq r+2$。因此，B' 是 SP 图当且仅当 $B' \cong K_2$ 或$B' \cong K_1 \cup K_2$。

通过将删除的顶点 y' 和 z' 加回图 B'，重构图 B，我们推断 B 是 SP 图，当且仅当它同构于由

K_4 删除一条边得到的图（如图7(a)所示），或由 K_4 添加一个新顶点，并将其连接到完全图的两个顶点上得到的阶为5的图（如图7(b)所示）。此外，若 $B = K_4 - e$，则 CG(B, Γ_1) $\cong K_2 \cup K_2$；而若 B 是由 K_4 添加一个度为2的新顶点得到的，则 CG(B, Γ_1) $\cong K_2 \cup P_3$。在这两种情况下，CG(B, Γ_1) 都不是 SP 图。因此， G-SC 链为 $G \nrightarrow B \rightarrow K_2 \cup K_2$ 或 $G \rightarrow B \nRightarrow K_2 \cup P_3$。 □

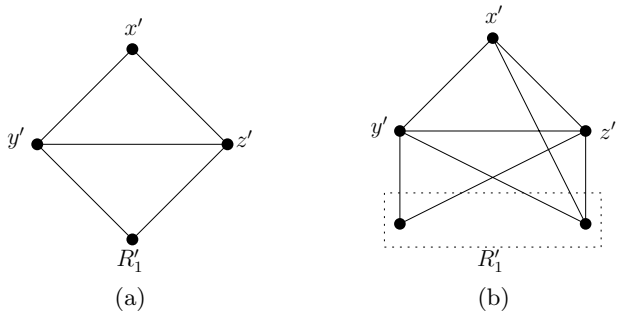

图7: （a）：带有 $B' \cong K_2$. 的图 B。（b）：带有 $B' \cong K_1 \cup K_2$.的图 B

设 M_1、M_2和 M_3 为图 8所示的三个图。此外，设 M_4 由M_3 通过添加一条边得到，该边连接M_3 中度为 $n-2$ 的顶点的一个叶邻点与 M_3 中度为 2 的顶点。

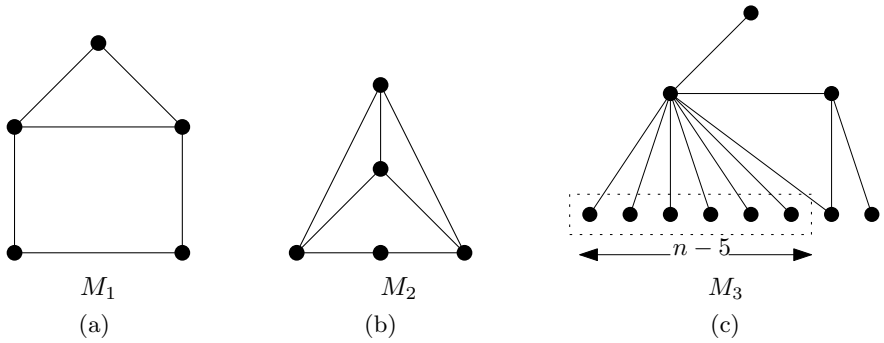

图8: （a）：图 M_1。（b）：图 M_2。（c）：图 M_3。

现在我们可以给出以下引理。

引理 2 若 $B \in \mathcal{H}_2^2$，则 G-SC链是以下链之一，其中 H_1 是族 $\mathcal{H}_1$中的一个图。

(a) $G \rightarrow B \rightarrow H_1$, (b) $G \rightarrow B \rightarrow C_4 \rightarrow K_4 \rightarrow K_4$。(c)
$G \rightarrow B \rightarrow K_{2,\ n-2} \rightarrow K_1 + \overline{K}_{1,\ n-2}$, (d)
$G \rightarrow M_1 \rightarrow \big(K_2 + (K_1 \cup K_2)\big) \rightarrow K_2 + K_3 \rightarrow K_3 \cup K_2$,

(e) $G \to M_2 \overline{\to} K_2 + K_3 \overline{\to} K_3 \cup K_2$, (f) $G \to B \to K_3 \circ K_1$, (g) $G \to B \to M_3$, (h) $G \to B \to M_4$, (i) $G \to B \to K_2 + K_{n-2}$, 或(j) $G \to B \to (K_2 + K_{n-2}) + e$。

证明。 设单点联盟图 $B \in \mathcal{H}_2^2$ （如图 5b所示）。此时， $L_1' \neq \emptyset$ 且 $R_1' \neq \emptyset$。此外，集合 $L_1' \cup R_1'$ 是一个独立集，并且 L_1' 的每个顶点都与 z' 相邻，也可能与 x'相邻。根据构造，有 $n(B) \geq 5$ 且 $1 \leq \delta(B) \leq 2$。根据假设， B 是一个 SP 图。

首先，设 $\delta(B) = 1$。根据 B的构造， B中不存在全顶点。因此，由定理 10， B-SC 链由定理 10陈述中的 (a)、(b) 或 (c) 部分所给出，其中 H_1 是族 $\mathcal{H}_1$中的一个图。因此， G-SC 链由引理 2陈述中的 (a)、(b) 或 (c) 部分所给出。

因此，我们可以假设 $\delta(B) = 2$，否则引理所需的结论便成立。回想一下，根据构造，顶点 y' 不与 L_1' 中的任何顶点相邻，但与 R_1' 中的每个顶点相邻。因此，在 $\delta(B) = 2$ 的情况下，顶点 x' 必须与 L_1' 中的所有顶点相邻（见图 5b），所以 L_1' 中的每个顶点在 B 中的度均为 2（其两个邻点为 x' 和 z' ）。此外， R_1' 中的每个顶点都与 y' 相邻，并且与 x' 和 z' 中至少一个相邻。

断言 7 若 $|L_1'| = |R_1'| = 1$，则 *G-SC 链由引理 2 的陈述中的 (d) 或 (e) 部分给出。*

证明。 假设 $|L_1'| = |R_1'| = 1$。令 $R_1' = \{r_1\}$ 和 $L_1' = \{z_1\}$。根据我们先前的观察，顶点 z_1 的度为 2，其两个邻点为 x' 和 z' 。此外，顶点 r_1 与 y' 相邻，并且至少与 x' 和 z'中的一个相邻。如果 r_1 恰好与 x' 和 z'中的一个相邻，那么 $B \cong M_1$。如果r_1 同时与 x' 和 z'相邻，那么 $B = M_2$。在这两种情况下， B 都是一个 SP 图。如果 $B \cong M_1$，那么 G-SC 链是如下序列

$$G \to M_1 \to \left(\overline{K}_2 + (K_1 \cup K_2)\right) \to \overline{K}_2 + K_3 \to \overline{K}_3 \cup K_2,$$

而如果 $B \cong M_2$，那么 G-SC 链是如下序列

$$G \to M_2 \to \overline{K}_2 + K_3 \to \overline{K}_3 \cup K_2.$$

因此，在这种情况下，当 $|L_1'| = |R_1'| = 1$时， G-SC 链由引理2陈述中的 (d) 或 (e) 部分给出。□

根据断言 7，我们可以假设 $|L_1'| \geq 2$ 或 $|R_1'| \geq 2$，否则引理所需的结论便可得出。因此， $L_1' \cup R_1'$ 是 B中的一个基数至少为 3 的独立集。因此，若 u 和v 是 $L_1' \cup R_1'$中的任意两个顶点，则集合 $\{u\}$ 和 $\{v\}$ 不构成联盟。

令 $r_1 \in R'_1$。由于 y' 与 L'_1中的任何顶点都不相邻，因此集合 $\{r_1\}$ 只与$\{x'\}$ 或 $\{z'\}$构成联盟。若 $\{r_1\}$ 与 $\{x'\}$构成联盟，则 z' 必与 r_1相邻，且 x' 必与 $R'_1 \setminus \{r_1\}$中的所有顶点相邻。若 $\{r_1\}$ 与 $\{z'\}$构成联盟，则 x' 必与 r_1相邻，且 z' 必与 $R_1 \setminus \{r_1\}$中的所有顶点相邻。此性质对 R'_1中的所有顶点都成立。因此，若 $|R'_1| \geq 3$，则可推知 R'_1 与 $\{x', z'\}$ 之间的所有边都存在，至多有一条边例外。若 $|R'_1| = 2$，则可推知 x' 和 z' 都至少与 R'_1 中的一个顶点相邻；并且如前所述， R'_1 中的每个顶点都至少与 x' 和 z'中的一个相邻。特别地，当 $|R'_1| = 2$时，可推知 R'_1 与 $\{x', z'\}$ 之间的所有边都存在，至多有两条边例外。

断言 8 如果 R'_1 与 $\{x', z'\}$ 之间的所有边均存在，但恰好缺少两条边，那么*G-SC* 链由引理 2陈述中的 *(f)* 部分给出。

证明。假设 R'_1 与 $\{x', z'\}$ 之间的所有边均存在，但恰好缺少两条边。在这种情况下， $R'_1 = \{r_1, r_2\}$ ，并且在必要时对顶点重新命名后，我们可以假设 r_1 与 x' 相邻，但与 z'不相邻； r_2 与 z' 相邻，但与 x'不相邻。因此， $\{r_1\}$ 与 $\{z'\}$构成联盟，而 $\{r_2\}$ 与 $\{x'\}$构成联盟。如果 $|L'_1| \geq 2$ 和 $z_1 \in L'_1$，那么集合 $\{z_1\}$ 无法与 B中的任何其他单元素集构成联盟，这与我们关于 B 是 SP 图的假设相矛盾。因此， $|L'_1| = 1$。令 $L'_1 = \{z_1\}$。由此可知， $\{z_1\}$ 仅与集合 $\{y'\}$构成联盟，集合 $\{x'\}$ 分别与集合 $\{y'\}$ 和 $\{z'\}$构成联盟，而集合 $\{y'\}$ 与 $\{z'\}$ 构成联盟。然而， B中不存在其他联盟。因此，在这种情况下， B 的单点联盟图为 CG$(B, \Gamma_1) \cong K_3 \circ K_1$，其中 $K_3 \circ K_1$ 表示 K_3 的冠积，如图 9 所示。然而， $K_3 \circ K_1$ 不是 SP 图，因此在这种情况下， G-SC 链是序列 $G \to B \to K_3 \circ K_1$ ，由引理 2 陈述中的 (f) 部分给出。(□)

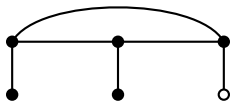

图 9： $K_3 \circ K_1$ 的冠积

根据断言 8，我们可以假设我们可以假设 R'_1 与 $\{x', z'\}$ 之间的所有边都存在，但至多有一条边除外。

断言 9 如果 R'_1 与 $\{x', z'\}$ 之间的所有边都存在，但恰好有一条边除外，那么*G-SC* 链由引理陈述中的 *(g)* 或 *(h)* 部分给出 2。

证明。 假设 R'_1 与 $\{x', z'\}$ 之间的所有边都存在，但恰好有一条边除外。由对称性，并在必要时重新命名 x' 和 z'，我们可以假设 x' 恰好与 R' 中的一个顶点不相邻。

假设 $|L'_1| \geq 2$。在此情况下，图 B 是一个 SP 图，而 B 的单点联盟图是图 M_3。例如，若 B 是左侧所示的图

图10，那么 B 的单点联盟图是图 CG(B, Γ_1) $= M_3$，如图10右侧所示。不过在这种情况下，图 CG($\tilde{u}$,B, Γ_1) 中不存在顶点 $\{\tilde{z_1}\}$，使其与 $\{\tilde{u}\}$形成联盟，这意味着 CG(B, Γ_1) 不是 SP 图，因此 G-SC 链是引理 $G \to B \to M_3$ 2 陈述中第 (g) 部分给出的序列。

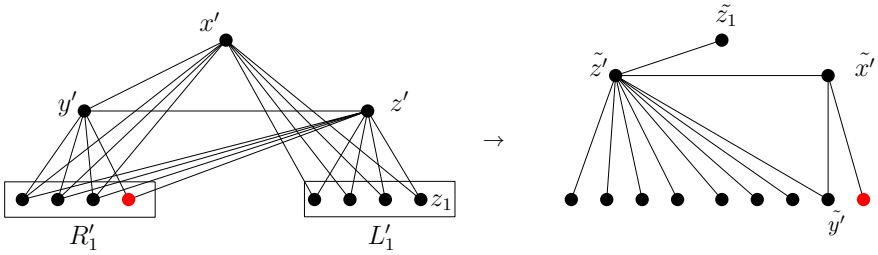

图 10：左：图 B。右：图 CG(B, Γ_1)。

因此，我们可以假设 $|L'_1| = 1$。令 $L'_1 = \{z_1\}$。由于 $|L'_1| + |R'_1| \geq 3$，我们注意到$|R'_1| \geq 2$。在此情况下，集合 $\{z_1\}$ 与集合 $\{y'\}$ 和 $\{z'\}$分别构成联盟，而当 $|L'_1| \geq 2$ 时，前一种情况下的所有其他联盟均保持不变。图 B 再次是一个 SP 图，而 B 的单点联盟图是图 M_4。在图 10 中 $L'_1 = \{z_1\}$的情形下，图 M_4 是通过在图 10 右侧的图 M_3 中添加顶点 y' 与 $\tilde{z_1}$之间的边得到的。然而，注意到$|R'_1| \geq 2$，我们再次推断，在图 CG(B, Γ_1) 中不存在顶点 $\tilde{u}$，使得 $\{\tilde{z_1}\}$ 与 $\{\tilde{u}\}$构成联盟。这意味着 CG(B, Γ_1) 不是 SP 图，因此，G-SC 链是引理 2 陈述中 (h) 部分给出的序列 $G \to B \to M_4$。□

现在我们最后一次回到引理 2的证明。根据断言9，我们可以假设 R'_1 与 $\{x', z'\}$ 之间的所有边均存在。

假设 $|L'_1| \geq 2$。在这种情况下，集合 $\{y'\}$ 只与集合 $\{x'\}$和 $\{z'\}$形成联盟。集合 $\{x'\}$ 和 $\{z'\}$ 分别与划分 Γ_1中的其他每个单元素集形成联盟。此外， $R'_1 \cup L'_1$ 中的每个顶点只与集合 $\{x'\}$ 和$\{z'\}$形成联盟。因此在这种情况下，图 B 是一个 SP 图，而 B 的单点联盟图是图 CG(B, Γ_1) $= K_2 + K_{n-2}$。然而，图 $K_2 + K_{n-2}$ 包含两个全顶点，因此不是单点联盟图，并且注意 $n \geq 6$。例如，如果 B 是图 11 左侧所示的图，那么 B 的单点联盟图就是图 CG(B, Γ_1) $= K_2 + K_{n-2}$，如图 11 右侧所示。因此，CG(B, Γ_1) 不是 SP 图，并且 G-SC 链是引理 2 陈述中第 (i) 部分给出的序列 $G \to B \to K_2 + K_{n-2}$。

因此，我们可以假设 $|R'_1| \geq 2$ 和 $|L'_1| = 1$。令 $L'_1 = \{z_1\}$。在此情况下，集合 $\{z_1\}$ 与集合 $\{x'\}$、 $\{y'\}$ 和 $\{z'\}$中的每一个都形成联盟，而在 $|L'_1| \geq 2$ 时前一种情况下的所有其他联盟均保持不变。因此，在此情况下，图 B 是一个 SP 图，而 B的单点联盟图是图 CG(B, Γ_1) $= (K_2 + K_{n-2}) + e$，它由 $K_2 + K_{n-2}$通过在独立集中的两个顶点之间添加一条边得到。（在图 11 的示例中，当 $L'_1 = \{z_1\}$时，图 11 右侧图中添加的边是连接 $\{\tilde{z_1}\}$ 和 $\{y'\}$的边。）然而，图 $(K_2 + K_{n-2}) + e$ 包含两个全顶点和

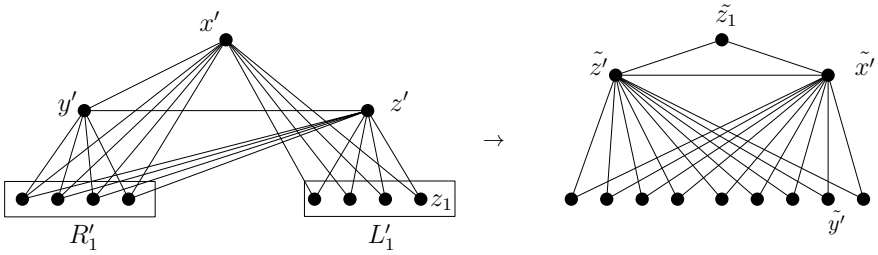

图 11：左：图 B。右：图 CG(B, Γ_1)。

不是单点联盟图，注意 $n \geq 6$。因此，CG(B、Γ_1) 不是 SP 图，并且 G-SC 链是序列 $G \to B \to (K_2 + K_{n-2}) + e$，由引理 2的陈述中的 (j) 给出。引理 2的证明至此完成。 □

接下来考虑图 B 属于族 $\mathcal{H}_2^3$ 的情况。

引理3 若 $B \in \mathcal{H}_2^3$，则 G-SC 链是以下链之一，其中 H_1 是族 $\mathcal{H}_1$ 中的一个图。

(a) $G \to B \to H_1$, (b) $G \to B \to C_4 \to K_4 \to K_4$, (c) $G \to B \to K_{2,n-2} \to K_1 + K_{1,n-2}$, (d) $G \to C_5 \to C_5 \to \cdots$, (e) $G \to M_1 \to \big(K_2 + (K_1 \cup K_2)\big) \to K_2 + K_3 \to K_3 \cup K_2$, (f) $G \to K_3 + K_2 \to K_2 + K_3 \to K_3 \cup K_2$, (g) $G \to \big(K_2 + (K_1 \cup K_2)\big) \to K_2 + K_3 \to K_3 \cup K_2$, (h) $G \to B \to$ CG(B, Γ_1) $\to K_4$, (i) $G \to B \to$ CG(B, Γ_1) $\to K_3 \cup K_2$, (j) $G \to B \to$ CG(B, Γ_1) $\to K_2 \cup K_2$, (k) $G \to B \to$ CG(B, Γ_1) $\to K_2 \cup P_3$, (l) $G \to B \to$ CG(B, Γ_1) $\to H_1$, (m) $G \to B \to$ CG(B, Γ_1) $\to C_4 \to K_4 \to K_4$. (n) $G \to \overline{B} \to$ CG(B, Γ_1) $\to K_{2,n-2} \to K_1 + K_{1,n-2}$, (o) $G \to \overline{B} \to M_1 \to \big(K_2 + (K_1 \cup K_2)\big) \to K_2 + K_3 \to K_3 \cup K_2$, (p) $G \to B \to M_2 \to K_2 + K_3 \to K_3 \cup K_2$, (q) $G \to B \to$ CG(B, Γ_1) $\to K_3 \circ K_1$, (r) $G \to B \to$ CG(B, Γ_1) $\to M_3$, (s) $G \to B \to$ CG(B, Γ_1) $\to M_4$, (t) $G \to B \to$ CG(B, Γ_1) $\to K_2 + K_{n-2}$, (u) $G \to B \to$ CG(B, Γ_1) $\to (K_2 + K_{n-2}) + e$, (v) $G \to K_{3,n-3} \to K_{3,n-3} \to \cdots$, 或 (w) $G \to (K_1 \cup K_2) + K_{n-3} \to P_3 + K_{n-3} \to K_1 \cup K_{2,n-3}$.

证明。假设单点联盟图 $B = \mathrm{CG}(G, \Gamma_1) \in \mathcal{H}_2^3$ （如图 6a 所示）。回忆一下，根据假设，图 G 是一个 SP 图，具有 $\delta(G) = 2$，且没有全顶点，因此根据定理5，我们有 $G \in \mathcal{F}_2$。由于 $\mathrm{CG}(G, \Gamma_1) = B \in \mathcal{H}_2^3$，我们从定理 7 的证明中得知 $G \in \mathcal{F}_2^3$ （如图 3 所示）。采用我们的记号来定义族 $\mathcal{F}_2^3$和 $\mathcal{H}_2^3$，令 $X = R_1 \cup R_2 \cup L_1 \subset V(G)$，并令 $X' = R_1' \cup L_1' \cup R_2' \subset V(B)$。

我们首先证明 $X' = \emptyset$。反设 $|X'| \geq 1$。假设 $|X'| = 1$。根据图 $G \in \mathcal{F}_2^3$ 的构造， W中的每个顶点都与 $X \cup L_2$ 中的所有顶点相邻。此外，$G[W]$是一个团。由于 $|X'| = 1$，我们有 $|(X \cup L_2) \setminus W| = 1$。令 $(X \cup L_2) \setminus W = \{g\}$，因此$\tilde{g} \notin W'$。根据此前关于集合 W 中顶点的性质，集合 $\{g\} \cup W$构成一个团。集合 $\{g\}$ 和 $\{x\}$ 在 G中构成一个联盟。因此，根据 B 的构造，顶点 $\tilde{g} \in W'$，矛盾。于是， $|R_1' \cup L_1' \cup R_2'| \geq 2$。不失一般性，设 $R_1' \neq \emptyset$。令 $q_1, q_2 \in X'$。根据定义 4 中 $B \in \mathcal{H}_2^3$ 的构造，我们有 $W' \neq \emptyset$，且 x'仅与 W'中的所有顶点相邻。因此，由于 x'不与 q_1, q_2, y'和 z'中的任何顶点相邻，集合$\{q_1\}$不是 $\{u\}$的联盟伙伴，其中 u 是 $B \setminus \{q_1\}$中的一个顶点。因此， B 不是 SP 图，矛盾。

因此， $X' = \emptyset$，这意味着图 $B \in \mathcal{H}_2^3$ 的顶点集是 $V(B) = \{x', y', z'\} \cup W'$。回想一下， W' 是一个独立集，并且 W' 中的每个顶点都与 x' 相邻。因此，如果 $w' \in W'$，那么在图 B 中，我们有 $N(w') \subset \{x', y'z'\}$，于是 $\delta(B) \leq 3$。

假设 $\delta(B) = 0$。由于 x' 与 W' 的所有顶点都相邻，在这种情况下，我们必有 $\deg_B(z') = 0$ 或 $\deg_B(y') = 0$。根据假设， B 是一个 SP 图，因此由定理 1 可得 $B \cong K_1 \cup K_{n-1}$。然而，由于 x' 既不与 y' 相邻，也不与 z' 相邻，因此在这种情况下无法构造出这样的 B。所以， $1 \leq \delta(B) \leq 3$。

假设 $\delta(B) = 1$。如果 $|W'| = 1$，那么根据 $G \in \mathcal{F}_2^3$ 的构造， $|W| = 1$；又由于在 B 中， x' 不同时与 y' 和 z' 相邻，因此 $\delta(G) = 0$，这与假设矛盾。因此， $|W'| \geq 2$，由构造可知， B 中不存在全顶点。因此，对 SP 图 B 应用定理10， B-SC 链是定理10陈述中 (a)、(b) 或 (c) 部分给出的链之一。因此， G-SC 链由引理3陈述中的 (a)、(b) 或 (c) 部分给出。因此，我们可以假设 $\delta(B) \geq 2$。

假设 $\delta(B) = 2$。由于 x' 仅与 W' 的所有顶点相邻，且 $\delta(B) = 2$，因此我们有$|W'| \geq 2$。假设$|W'| = 2$，于是 B的阶为5。所有阶为5的可能 SP 图为 C_5、M_1、 $K_3 + K_2$和 $\big(K_2 + (K_1 \cup K_2)\big)$。因此，在这种情况下， G-SC 链由引理 3陈述中的 (d)、(e)、(f) 或 (g) 部分给出。

因此，我们可以假设在这种情况下 $\delta(B) = 2$，有 $|W'| \geq 3$。由于 B 是无孤立点SP图，根据定理5，我们有 $B \in \mathcal{F}_2$。因此， $B \in \mathcal{F}_2^1 \cup \mathcal{F}_2^2 \cup \mathcal{F}_2^3$。我们证明 $B \notin \mathcal{F}_2^3$。反设 $B \in \mathcal{F}_2^3$。考虑顶点 x、 y 和 z，以及定义 $\mathcal{F}_2^3$ 中使用的集合 W、 R_1、 L_1、 R_2和 L_2 （见定义 3）。

由于 $|W'| \geq 3$，顶点 x'在 B中的度至少为 3。由于顶点 x在 $\mathcal{F}_2^3$中的度为 2，顶点 $x' \neq x$。如果 $x = z'$且 $y = y'$，那么 $z \in W'$。因此， $W = \{x\}$且 $W' = X \cup L_2$。由于 W'是 B的独立集， $X \cup L_2$的顶点之间没有边，这与族 $\mathcal{F}_2^3$的定义矛盾。如果 $x = z'$、 $y \in W'$且 $z \in W'$，那么 y'、$z' \notin W$。因此， $W \subseteq W'$。如果 $|W \cap W'| = 1$，那么不难看出 $R_2 = \emptyset$或 $L_1 = \emptyset$ （见定义 3），这就

产生矛盾。如果 $|W \cap W'| > 1$，那么由于 W'是一个独立集， $G[W]$不是团，这就产生矛盾。对 x、 y 和 z 的其他选择情况，同理也会导致矛盾。因此， $B \notin \mathcal{F}_2^3$。于是， $B \in \mathcal{F}_2^1 \cup \mathcal{F}_2^2$。因此，根据定理 7， CG($B, \Gamma_1$) $\in \mathcal{H}_2$；根据定义 4，我们推得 CG(B, Γ_1) $\in \mathcal{H}_2^1$ 或 CG(B, Γ_1) $\in \mathcal{H}_2^2$。因此，利用引理1和引理2， G-SC 链由引理3陈述中的第 (l)、(m)、(n)、(o)、(p)、(q)、(r)、(s)、(t) 或 (u) 部分给出。

因此，我们可以假设 $\delta(B) = 3$。若 y' 与 z'不相邻，则$B \cong K_{3,\ n-3}$。此时， G-SC 链由引理3陈述中的第 (v) 部分给出。若 y' 与 z'相邻，则$B \cong (K_1 \cup K_2) + K_{n-3}$。此时， G-SC 链由引理3陈述中的第 (w) 部分给出。引理3的证明至此完成。 □

由引理1、2和3可立即得到以下结果。

定理12 若 G 是一个阶为 n 、满足 $\delta(G) = 2$ 且不含全顶点的SP 图，则$L_{\mathrm{SCC}}(G) = \infty$ 或 $L_{\mathrm{SCC}}(G) \leq 5$。

5 结论

本文解决了 Haynes等人提出的两个开放问题（见 [1, 5]）。第一个问题是刻画所有阶为 G 、最小度为 n $\delta(G) = 2$，且满足$C(G) = n$的图。第二个问题是研究单例联盟图链。我们证明了存在长度无限的单例联盟图链。此外，我们刻画了以满足 G $\delta(G) \leq 2$的图 G 为起始图的单例联盟图链。刻画以满足$\delta(G) \geq 3$的图为起始图的单例联盟图链，将是一个值得研究的问题。

参考文献

[1] T. W. Haynes、J. T. Hedetniemi、S. T. Hedetniemi、A. A. McRae 和 R. Mohan，《图中的联盟导论》。*AKCE*国际图与组合学杂志 **17** (2020) 第2期，653–659页。[2] D. Bakhshesh、M. A. Henning 和 D. Pradhan，《关于树的联盟数》。马来西亚数学科学学会通报 **46** (2023)，第3期，论文编号95。[3]T. W. Haynes、J. T. Hedetniemi、S. T. Hedetniemi、A. A. McRae 和 R. Mohan，《路径、圈和树的联盟图》。离散数学与图论(2020) DOI: https://doi.org/10.7151/dmgt.2416。[4] T. W. Haynes、J. T. Hedetniemi、S. T. Hedetniemi、A. A. McRae 和 R. Mohan，《联盟数的上界》。澳大拉西亚组合学杂志**80** (2021)，第3期，442–453页。[5] T. W. Haynes、J. T. Hedetniemi、S. T. Hedetniemi、A. A. McRae 和 R. Mohan，《联盟图》。组合优化通讯 **8** (2023)，第2期，423–430页。

[6] T. W. Haynes、S. T. Hedetniemi 和 M. A. Henning（编），图中的支配主题。丛书：数学进展，第64卷，施普林格，尚佩恩，2020年。viii + 545页。[7] T. W. Haynes、S. T. Hedetniemi 和 M. A. Henning（编），图中的支配结构。丛书：数学进展，第66卷，施普林格，尚佩恩，2021年。viii + 536页。[8] T. W. Haynes、S. T. Hedetniemi 和 M. A. Henning（编），图的支配：核心概念 丛书：施普林格数学专著，施普林格，尚佩恩，2023年。xxii + 677页。[9] M. A. Henning 和 A. Yeo，图的全支配。丛书：施普林格数学专著，施普林格，尚佩恩、纽约，2013年。xiv + 178 页。