arXiv:2304.07622v1 [math.PR] 15 Apr 2023

对称空间上的随机 ϵ-覆盖

SOMNATH CHAKRABORTY

Abstract. 我们设计了一种随机化方案，该方案以概率 $1-\delta$（对任意 $\delta > 0$）成功，可用于构造：(1) 紧黎曼对称空间 $\mathbb{M}$上的等分布 ϵ-覆盖，其中该空间的维数为 $d_{\mathbb{M}}$ 、对径维数为 $\bar{d}_{\mathbb{M}}$；以及 (2) 一个近似 $(\lambda_r, 2)$-设计。该方案使用 $n(\epsilon,\delta)$ 个来自 $\mathbb{M}$的 Haar 随机等距变换，其中

$$n(\epsilon,\delta) := O_{\mathbb{M}}\left(d_{\mathbb{M}} \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + \log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right),$$

并且 λ_r 是 $\mathbb{M}$上拉普拉斯-贝尔特拉米算子的第 r 小特征值。由此得到的 ϵ-覆盖可用于计算 1-Lipschitz˜函数的积分，误差不超过加性误差 $O(\epsilon)$；也可用于比较从数据云计算得到的持久同调与从均匀测度采样的假想数据云所计算的持久同调。

1. 引言

本文旨在设计一种随机化方案，以至少 $1-\delta$的成功概率（对任意 $0 < \delta \leq 1$）在一个 $d_{\mathbb{M}}$维紧致连通黎曼对称空间（$\mathbb{M}, \zeta_{\boldsymbol{o}}$）中构造一个 ϵ-覆盖；其中，$\mathbb{M} = \mathbb{K}/\mathbb{H}$ 是一个紧致连通半单李群，$\mathbb{H} \subseteq \mathbb{K}$ 是一个闭子群，而 $\zeta_{\boldsymbol{o}}$ 是关于原点 $\boldsymbol{o} := \mathbb{H}\boldsymbol{e} \in \mathbb{M}$的测地反射全局等距变换。其基本机制是选取一个字母表，其中包含 $k := O(d_{\mathbb{M}}\ln(1/\epsilon)+\ln(1/\delta))$ 个来自 $\mathbb{K}$的独立 Haar 随机等距变换；再取这些等距变换所有长度为 $\ell := O(d_{\mathbb{M}}\ln(1/\epsilon))$ 的可能拼接，并使其作用于 $\mathbb{M}$中的一个固定（但任意选取的）点。这与几何随机游走理论有很强的相似性，因为该构造的核心思想，本质上是分析空间 $\mathbb{M}$ 上的某个惰性随机游走：该游走在一张 Schrier 图上进行，这张图由一组非空等距变换生成；并证明该游走混合迅速，因为随机 Schrier 图本质上具有类似扩张图的性质。我们证明，如此产生的点集在 ϵ尺度上均匀分布。由此生成的 ϵ-覆盖所需的随机样本数量，远少于朴素蒙特卡洛或其他类似方法（即从 $\mathbb{M}$中抽取大量独立同分布随机样本）；例如，为了在一个 $d_{\mathbb{M}}$维紧黎曼流形 $\mathbb{M}$上生成 ϵ-覆盖，[26] 需要从 $\mathbb{M}$中抽取 $O(d_{\mathbb{M}}\epsilon^{-d_{\mathbb{M}}}\log\epsilon^{-1})$ 个独立同分布随机样本。如此生成的 ϵ-覆盖的对数规模，与假想的 ϵ-网的对数规模相差一个 log log 因子；后者的大小是 $\mathbb{M}$ 的 ϵ-覆盖数的体积下界。从定量角度看，当我们令 $\epsilon \to 0$，并考虑维数和对径维数固定的对称空间 $\mathbb{M}$ 时，我们的结果最有意义。我们的部分动机在于，均匀分布的点可用于计算 $\mathbb{M}$上 Lipschitz 函数的积分。我们构造的 ϵ-覆盖按以下意义均匀分布（概率至少为 $1-\delta$）：该网上的归一化计数测度与 $\mathbb{M}$ 上的 Haar 诱导概率测度之间的 1-Wasserstein

距离。这意味着，对于 $\mathbb{M}$ 上的每个 1-利普希茨函数，其关于归一化计数测度的积分与关于 Haar 诱导概率测度的积分“相差不超过 ϵ”。此外，这种覆盖是 $\mathbb{M}$上的一个显式近似（λ, 2）-设计。当我们能够预言机访问 $\mathbb{M}$中的成对黎曼距离时，这样的 ϵ-覆盖可立即用于高效计算 $\mathbb{M}$的奇异同调。此外，Wasserstein-1 距离的界确保了 $\mathbb{M}$ 中的规范 Haar 诱导概率测度经持久同调映射推前后，与由本文构造的 ϵ-覆盖所支撑的经验测度之间具有较小的普罗霍罗夫距离；这表明，利用此类构造生成的点云，可以以较高概率将持久同调计算到瓶颈距离较小的精度。

我们简要回顾与本文主题相关的早期研究。根据紧致对称空间 $\mathbb{M}$ 的 Schrier 图 $\chi(\mathbb{M}, \mathcal{S})$ 上随机游走的理论可知，若取其等距变换的一个有限集合 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{K}$，则要使该随机游走快速混合至 $\mathbb{M}$ 上的均匀分布，一个充分条件是平均算子 $z_\mu : \mathrm{L}_0^2(\mathbb{M}) \to \mathrm{L}_0^2(\mathbb{M})$ 具有谱隙，其中该算子定义为

$$z_\mu(f)(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{K}} f(\boldsymbol{xg})\, d\mu_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{g}) \tag{1.1}$$

具有谱隙；这里，$\mu_{\mathbb{K}}$ 是支撑在构成 Schrier 图的等距变换群上的归一化经验测度。现阶段，这些算子存在谱隙似乎遥不可及，因此我们通过证明一个较弱但足够的谱隙现象版本来处理这一问题，如下所述。

在 [2], 中，Alon 和 Roichman 证明，对于任意 $\delta > 0$，存在一个 $c(\delta) > 0$, 使得对于任意有限群 G，若随机子集 $S \subset G$ 的阶至少为$c(\delta) \log |G|$, 则由此诱导的凯莱图 $\chi(G, S)$ 的归一化第二大特征值（按绝对值计）较小，即

$$\mathbb{E}\left(|\lambda_2^*(\chi(G,S))|\right) < \delta \tag{1.2}$$

成立。考虑扩张多重图上的随机游走，可知每个元素 $g \in G$ 都是一个长度至多为 $O_\delta(\log |G|)$ 的 S-词。Landau 和 Russell 在 [24] 中给出了这一结果的简短证明（常数略优），并借助表示论重新表述了这个问题。对于不可约表示 $\rho \in G$，设其维数为 d_ρ；设 R 为 G 的正则表示，且 $D = \sum_{\rho \in \hat{G}} d_\rho$。Landau 和 Russell 证明，当随机子集 $S \subset G$ 的阶至少为

$$\left(\tfrac{2\ln 2}{\delta} + o(1)\right)^2 \log |D|$$

这是通过对算子值随机变量应用尾界得到的，正如 Ahlswede 和 Winter [1], 所做的那样，其依据是以下观察：$\chi(G, S)$ 的归一化邻接矩阵就是算子

$$(2|S|)^{-1} \sum_{\boldsymbol{s} \in S} (R(s) + R(s^{-1})), \tag{1.3}$$

用 $\mathbb{C}[G]$的标准基来表述。换言之，[2] 中引用的结果意味着随机凯莱图 $\chi(G, S)$是一个扩展图，并且，

方程 (1.3) 中的算子具有满足方程 (1.2) 的谱隙。当 G 是一个紧致连通单李群，且 μ_G 是 G上的左不变Borel概率测度时，Benoist 和 de Saxc´e 在 [3] 中证明——继 $G = SU_d$ 情形下 Bourgain 和 Gamburd 的早期工作 [5] 之后——方程 (1.1) 中算子存在谱隙等价于 μ 是几乎丢番图的。这一性质已知在 μ 的支撑集足够大（但没有明确界限）且由代数元素构成时成立。不过请注意，这些定性结果大多不适用于随机化计算场景，因为：1. 具有代数元素的集合是李群中的一个零测子集；2. 对所需支撑集大小的论述是定性的；3. 现阶段在计算上无法检验几乎丢番图性质。在 [25], 中，研究了紧李群 G 谱隙问题的定量版本。研究表明，以高概率， G 与随机有限字母表 $S \subset G$ 上固定长度词所成子集之间的豪斯多夫距离，会随着词长增加而指数级快速衰减。

在本文中，我们采用与有限群上的扩张子凯莱图类似的框架，如 [24] 所示。总之，我们关于构造 ϵ-覆盖的分析，围绕着将由 $\mathbb{K}$ 的 Casimir 算子诱导的 $\mathbb{M}$ 热核正交投影到 $L^2(\mathbb{M})$ 的适当有限维子空间上展开。在 [7], ，这一思路被用于生成单位球面 $\mathbb{S}^d$ 上的等分布随机 ϵ-覆盖；单位球面是一个秩一紧致对称空间，而本文将 [7] 中的结果扩展到了任意秩的紧致对称空间。在酉群 U_d这一特殊情形下，Hastings 和 Harrow 此前在 [18, 定理 5]中得到了类似结果，其中词长对维数呈二次依赖；不过，他们的结果以间接方式指定生成元的数量，其对 U_d 参数的依赖并不明确。本文将相应结果推广至 $\mathbb{M} = U_d$（以及任意紧李群的类似结果），作为一个特例；并证明此处得到的界关于 d 呈线性，无论是生成元数量还是词长。事实上，对于这些参数，$(2k)^\ell$ 的取值接近 $\mathbb{M}$ 上一个 ϵ-网大小的体积下界 $(1/\epsilon)^{\Omega(d)}$。此外，从计算机科学的角度来看，我们的方法所生成的随机 ϵ-网具有“简洁”的描述： viz，它由随机子集 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{K}$ 的描述以及最大词长 ℓ 构成。而构造所需的随机等距变换数量仅取决于对称空间本身的参数，而不取决于等距变换群$\mathbb{K}$。我们证明，这样的 ϵ-覆盖能够计算 $\mathbb{M}$ 上 1-利普希茨函数的积分，并且在能够通过预言机访问成对黎曼距离时，能够计算 $\mathbb{M}$ 的奇异同调群。此外，对于任意 $n > 0$, 从 ϵ-覆盖 $\mathcal{S}$ 中随机抽取的 n 个样本的持久同调，与从 $\sigma^{\mathbb{M}}$ 中均匀随机抽取 n 个样本所计算出的持久同调相差 $\sqrt{\epsilon}$ 以内（推论 4.71）。这表明，在持久同调景观中，如此构造的数据云可以作为从 $\mathbb{M}$ 均匀采样得到的假想数据云的替代。

1.1. 主要结果。现在陈述我们的主要结果，即定理 1.4 至 1.6。

在本小节中，$\mathbb{M} = \mathbb{K}/\mathbb{H}$ 是一个维数为 $d_{\mathbb{M}}$、对径维数为 $\bar{d}_{\mathbb{M}}$ 的紧致连通黎曼对称空间，其中 $\sigma^{\mathbb{M}}$ 是 $\mathbb{M}$ 上的概率测度，对应于紧致连通半单李群 $\mathbb{K}$ 上的 Haar 概率测度。

定理1.4. 存在一个常数 $C_{\mathbb{M}} > 0$ ——它仅依赖于 $\mathbb{M}$ ——使得对于任意 $\delta \in (0, \frac{1}{2})$，以下每个陈述成立的概率至少为 $1 - 2\delta$。

令 $\epsilon \in (0, 2^{-e})$，并假设

$$r_{\epsilon,\mathbb{M}} = 2\epsilon\sqrt{\ln \frac{3C_{\mathbb{M}}}{\epsilon^{2d_{\mathbb{M}} - \bar{d}_{\mathbb{M}} - 1}}}$$

足够小。令 $\mathcal{S} \subset \mathbb{K}$ 为一个随机多重集，由独立同分布随机点组成，这些点从 $\mathbb{K}$上的哈尔测度中抽取，满足

$$|\mathcal{S}| \geq 16 \ln 2 \left(2 \ln C_{\mathbb{M}} + \ln \frac{6}{\delta} + \ln\left(\Gamma\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2} + 1\right)\right) + \frac{d_{\mathbb{M}}}{2} \ln \frac{1}{\pi\epsilon} + \ln \frac{1}{\mathfrak{v}_{\mathbb{M}}}\right)$$

其中 $a_d := \frac{2}{\log_2 \log_2(5d)} \log_2(5d)$。令 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{M}$ 并定义 $\hat{\mathcal{S}} := \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{-1}$。假设

$$\ell \geq \frac{d_{\mathbb{M}}}{2} \log_2\left(\tfrac{1}{r\epsilon}\right) + (4 + 3a_d) d_{\mathbb{M}} \log_2\left(\tfrac{1}{\epsilon}\right).$$

Then

(i)（$\mathbb{M}$上的ϵ-覆盖）：对于任意 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{M}$，$\hat{\mathcal{S}}^{\ell}\boldsymbol{p} \subseteq \mathbb{M}$ 是 $\mathbb{M}$ 的一个 $r_{\epsilon,\mathbb{M}}$-覆盖；(ii)（ϵ-覆盖的均匀分布）：$\hat{\mathcal{S}}^{\ell}\boldsymbol{p}$ 上的经验测度 ν 满足

$$\mathrm{W}_1(\sigma^{\mathbb{M}}, \nu) \leq 2\sqrt{d_{\mathbb{M}}}\epsilon\,;$$

这些内容将在下文第4.1节和第4.3节中进一步详细讨论（参见定理 4.10和定理 4.52）。

定理1.5。设 $C_{\mathbb{M}}$ 如定理1.4所述。令 $\mathscr{S} := \hat{\mathcal{S}}^{\ell}\boldsymbol{o}$ —，其中 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{M}$ 是从$\mathbb{K}$上的哈尔测度中独立抽取的等距变换的随机多重子集。令 $\delta \in (0, \frac{1}{2})$。对于任意 $\upsilon \in (0, 1)$以及任意整数 $r > 0$，若

$$|\mathcal{S}| = 16 \ln 2 \ln\left(\frac{C_{\mathbb{M}} \lambda_r^{\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}}}{\delta}\right),$$

and

$$\ell \geq \log_2 \frac{1}{\upsilon} + \log_2 C_{\mathbb{M}} + \frac{d_{\mathbb{M}}}{4} \log_2 \lambda_r + \left(d_{\mathbb{M}} - \tfrac{\bar{d}_{\mathbb{M}}+1}{2}\right) \log_2 \frac{1}{\epsilon},$$

其中 $\epsilon = \lambda_r^{-\frac{d_{\mathbb{M}}+2}{2}} C_{\mathbb{M}}^{-\frac{1}{4}} \upsilon^{\frac{1}{2}}$，则 $\mathscr{S} \subseteq \mathbb{M}$ 以至少 $1 - 2\delta$的概率是一个 υ-近似（λ_r, 2）-设计。

这将在下文第4.2节中进一步详细讨论（参见定理4.24）。

定理 1.6. 设随机子集 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{K}$ 以及整数 ℓ 如定理1.4中所述；那么，对于任意 $\boldsymbol{p}_0 \in \mathbb{M}$，令 $\mathscr{S}_\ell = \hat{\mathcal{S}}^{\ell}\boldsymbol{p}_0$，以下不等式以至少 $1 - \delta$ 的概率对所有整数 $q \geq 0$ 成立：

$$\frac{1}{n} \cdot d_{\mathrm{Pr}}\left(\Phi^{q,n}_{\mathbb{M},\partial_{\mathbb{M}},\sigma^{\mathbb{M}}}, \Phi^{q,n}_{\mathscr{S}_\ell,\partial_{\mathbb{M}},\sigma^{\mathbb{M}}_\ell}\right) \leq \sqrt[4]{2d_{\mathbb{M}}\epsilon} \tag{1.7}$$

相关内容将在下文第 4.4 节中进一步详细讨论（见定理 4.68 和推论 4.71）。

进一步来说，假设 $\mathbb{K}$ 是某个紧致连通矩阵群，例如 SU_d ——行列式为 1 的正交矩阵群。我们假设采用实数计算模型，其中随机向量仅允许进行标准代数运算，而不操作比特。现在，对于定理1.4中所述的 $\mathcal{S}$ 和 ℓ ，我们考虑由 $\mathcal{S}$ 中的元素及其逆元构成的所有长度为 ℓ 的复合变换。将所得矩阵作用于向量 $\boldsymbol{o} = \mathbb{H}\boldsymbol{e}$。那么这些点构成一个等分布覆盖，可用于对 $\mathbb{M}$ 上任意 1-利普希茨函数进行积分，误差不超过 ϵ。由此类点云计算出的持久同调，能够很好地近似由从 $\mathbb{M}$ 中随机抽样形成的点云计算出的持久同调。对于 d 维欧几里得球面的特殊情形，若假设存在一个预言机，在收到查询时输出来自 $\mathbb{K}$ 的独立 d 维随机矩阵，那么整个过程只需向该预言机查询 k 次。请注意，显而易见的等分布覆盖生成方法需要调用该预言机 $\epsilon^{-\Omega(d)}$ 次。与我们采用随机等距变换的方法相比，后一种方法所需的随机性呈指数级增长。

2. Preliminaries

设 $\mathbb{M}$ 是一个连通紧致（实）黎曼对称空间，其维数为 $d_{\mathbb{M}}$ ，对径维数为 $d_{\mathbb{M}}$。若 $\mathbb{K}$ 是 $\mathbb{M}$的等距变换群的单位连通分支，则 $\mathbb{K}$ 是一个在 $\mathbb{M}$上具有传递作用的紧李群，从而可将 $\mathbb{M} = \mathbb{K}/\mathbb{H}$ 识别为闭子群 $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{K}$ ——即 $\mathbb{M}$中一点的等距群。设 θ 为与 $\mathbb{M}$的对称结构相关联的 Cartan 对合。设 $d_{\mathbb{K}}$ 为 $\mathbb{K}$的维数，因此 $d_{\mathbb{H}} = d_{\mathbb{K}} - d_{\mathbb{M}}$。设 $\sigma^{\mathbb{M}}$ 为 $\mathbb{M}$上的典范概率测度，它由 $\mathbb{K}$上的 Haar概率测度 $\sigma^{\mathbb{K}}$ 诱导；再设 $\mu_{\mathbb{M}}$ 为 $\mathbb{M}$上典范的 $\mathbb{K}$不变黎曼顶形式；存在常数$\mathfrak{v}_{\mathbb{M}} > 0$ ，使得 $\sigma^{\mathbb{M}} = \mathfrak{v}_{\mathbb{M}}\mu_{\mathbb{M}}$。回顾一下，对于任意可测的 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{K}$，有

$$\sigma^{\mathbb{M}}(\mathcal{S}) = \int_{\mathbb{M}} \mathbb{I}_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{x})\ d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{K}} \mathbb{I}_{\mathbb{H}\mathcal{S}}(\boldsymbol{x})\ d\sigma^{\mathbb{K}}(\boldsymbol{x})$$

定义在 $\mathbb{M}$ 上、取值于 $\mathbb{C}$ 的平方可积函数的 L^2 范数，始终是相对于概率测度 $\sigma^{\mathbb{M}}$ 而言的。

2.1. 一些代数预备知识。从这里开始，在本文余下部分中，我们假设 $\mathbb{K}$ 是一个半单紧致连通可分李群，而 $\mathbb{H}$ 是一个闭子群。注意，根据半单性判据， $\mathbb{K}$ 的中心是有限的。考虑与对称空间 $\mathbb{M}$ 相关联的 Cartan 分解 $\mathfrak{k} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ ；这里， $\mathfrak{k}$和 $\mathfrak{h}$ 分别是 $\mathbb{K}$ 和 $\mathbb{H}$ 的李代数，而 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathbb{M}$ 在原点 $\boldsymbol{o} := \mathbb{H}\boldsymbol{e}$ 处的切空间。将李代数 $\mathfrak{k}$ 另行实现为 $\mathbb{M}$ 上的 Killing 向量场代数，可得

$$\mathfrak{h} := \{\mathfrak{p} \in \mathfrak{g} : \mathfrak{p}_{\boldsymbol{o}} = 0\}, \qquad \mathfrak{m} := \{\mathfrak{p} \in \mathfrak{g} : (\nabla \mathfrak{p})_{\boldsymbol{o}} = 0\}$$

令 $\mathrm{B}_{\mathbb{K}}$ 表示 $\mathfrak{k}$上的 Killing 型；因此，

$$\mathrm{B}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) := \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}_1} \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{p}_1}) \tag{2.1}$$

我们将由 $\mathrm{B}_{\mathbb{K}}$ 诱导的 $\mathfrak{k}$ 上的范数简单记为 $\|\cdot\|_{\circ}$ 注意，由于 $\mathrm{ad}:\mathfrak{k}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{k})$ 是一个李代数同态，对于任意 $\mathfrak{p}_1$、$\mathfrak{p}_2$、$\mathfrak{p}\in\mathfrak{k}$，都有：

$$\mathrm{B}_{\mathbb{K}}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}_1),\mathfrak{p}_2)=\mathrm{B}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{p}_1,\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}_2))\,.$$

根据 Cartan 半单性判别准则（[22]），$\mathbb{K}$ 半单意味着 $\mathrm{B}_{\mathbb{K}}$ 非退化。$\mathbb{M}$ 上的度量由李群 $\mathbb{K}$的李代数 $\mathfrak{k}$ 上的 Killing 型 $\mathrm{B}_{\mathbb{K}}$ 通过分解 $\mathfrak{k}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{h}$诱导而来。令 $\nabla_{\mathbb{M}}$ 表示相对于此度量定义在 $\mathbb{M}$上的典范 Levi-Civita 联络。曲线 γ 位于 $\mathbb{M}$ 中，当且仅当 $\nabla_{\mathbb{M}}(\dot\gamma,\dot\gamma)=0$ 成立时，它是一条测地线。回顾（[29]），$\mathbb{M}$ 中经过原点的测地线，恰好是 $\mathbb{K}$中与 $\mathbb{H}$横截的测地线在典范投影 $\pi:\mathbb{K}\to\mathbb{M}$下的像；由于 $\mathbb{K}$ 中的测地线就是 $\mathbb{K}$ 中的单参数子群，因此 $\mathbb{M}$中经过原点的测地线也具有相同性质。

由于紧李群 $\mathbb{K}$ 通过酉“正则”表示（$\boldsymbol{s}\cdot\phi$）$(\boldsymbol{x}):=\phi(\boldsymbol{xs})$作用于可分（[20]）Hilbert 空间 $\mathrm{L}^2(\mathbb{M})$，Peter-Weyl 定理（[6]）的理论工具表明，$\mathrm{L}^2(\mathbb{M})$可分解为酉不可约酉 $\mathbb{K}$-表示的正交直和；即

$$\mathrm{L}^2(\mathbb{M})\cong\bigoplus_{n=1}^{\infty}V_{\pi_n}\,, \tag{2.2}$$

其中直和取遍不可约$\mathbb{K}$-表示的等价类 $[\pi_n]$ 的一个子集（V_{π_n}，π_n）。注意，由于李群 $\mathbb{K}$ 的紧致性，可分希尔伯特空间 $\mathrm{L}^2(\mathbb{K})$ 有一个由所有酉不可约表示的矩阵系数构成的标准正交基；这些表示都是有限维的（Peter-Weyl 定理）。特别地，$\mathbb{K}$ 的两两不等价的不可约表示至多可数。记 $\mathcal{D}(\mathbb{M})$ 为 $\mathbb{M}$ 上的光滑函数代数。它是 $\mathbb{K}$ 在 $\mathrm{L}^2(\mathbb{M})$ 上的酉正则表示的一个子表示。

命题 2.3（Helgason，[19]）。每个 V_{π_n} 都是 $\mathcal{D}(\mathbb{M})$ 中由 $\mathbb{M}$ 上的 $\mathbb{K}$-不变微分算子代数确定的联合特征空间。此外，包含于 $\mathcal{D}(\mathbb{M})\subseteq\mathrm{L}^2(\mathbb{M})$ 中的每个不可约$\mathbb{K}$-表示都是一个直和项 V_{π_n}，且重数为一。

为本文之目的，我们需要将 $\mathrm{L}^2(\mathbb{M})$ 到有限维$\mathbb{K}$-不变子空间的正交分解具体化一些。为此，我们简要介绍紧李群表示论中的 Casimir 算子概念。令 $\Delta_{\mathbb{M}}$ 表示相对于 $\mathbb{M}$ 上黎曼度量的拉普拉斯-贝尔特拉米算子。令 $\mathscr{O}(\mathbb{M})$ 表示 $\mathbb{M}$ 上的不变微分函数代数。注意，$\mathbb{M}$ 上的微分算子 D 属于 $\mathscr{O}(\mathbb{M})$，当

$$D(\Phi^{\boldsymbol{s}^{-1}})=D(\Phi)^{\boldsymbol{s}^{-1}} \tag{2.4}$$

对所有 $\boldsymbol{s}\in\mathbb{K}$和 $\Phi\in\mathcal{D}(\mathbb{M})$都成立；这里对所有 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{M}$，$f^{\boldsymbol{s}^{-1}}(\boldsymbol{x}):=f(\boldsymbol{sx})$。与 $\mathbb{M}=\mathbb{K}/\mathbb{H}$ 的（正规）齐性结构相关联的典范投影 $\pi:\mathbb{K}\to\mathbb{M}$ 给出了带有 $\mathbb{K}$-作用的复希尔伯特空间之间的典范识别：

$$\mathrm{L}^2(\mathbb{M})\cong\mathrm{L}^2(\mathbb{K})^{\mathbb{H}}:=\{\phi\in\mathrm{L}^2(\mathbb{K}):\phi^{\mathbb{H}}=\phi\}\,. \tag{2.5}$$

此外，这也适用于光滑函数空间：

$$\mathcal{D}(\mathbb{M}) \cong \mathcal{D}(\mathbb{M})^{\mathbb{H}} := \{\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{M}) : \phi^{\mathbb{H}} = \phi\}\,. \tag{2.6}$$

令 $\{\mathfrak{p}_a : a \in [d_{\mathbb{K}}]\}$ 为 $\mathfrak{k}$的一组基；令 $\{\mathfrak{p}_a^\star : a \in [d_{\mathbb{K}}]\}$ 为 $\mathfrak{k}$的一组 Killing 对偶基。$\mathbb{K}$ 的 Casimir 元 $\Omega_{\mathbb{K}}$ 定义如下：

$$\Omega_{\mathbb{K}} = \sum_{a=1}^{d_{\mathbb{K}}} \mathfrak{p}_a \cdot \mathfrak{p}_a^\star\,.$$

通过换基论证可知，Casimir 算子 $\Omega_{\mathbb{K}}$ 与基的选取无关。因此，我们可以取 $\{\mathfrak{p}_a : a \in [d_{\mathbb{K}}]\}$ 为 $\mathfrak{k}$的一组 Killing 正交归一基，且与 Cartan 分解相容；于是，Casimir 算子为

$$\Omega_{\mathbb{K}} = \sum_{a=1}^{d_{\mathbb{K}}} \mathfrak{p}_a^2\,. \tag{2.7}$$

注意，对任意 $a, b \in [d_{\mathbb{K}}]$，根据爱因斯坦求和约定，有 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}_b}(\mathfrak{p}_a) = (s^c_{a,\,b})\mathfrak{p}_c$，其中某些标量为 $s^c_{a,\,b}$：由此可得

$$0 = \mathrm{B}_{\mathbb{K}}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}_b}(\mathfrak{p}_a), \mathfrak{p}_c) + \mathrm{B}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{p}_a, \mathrm{ad}_{\mathfrak{p}_b}(\mathfrak{p}_c)) = s^c_{a,b} + s^a_{c,b}\,,$$

这意味着 $0 = \mathrm{ad}_{\mathfrak{p}_b}(\Omega_{\mathbb{K}})$。由线性性可得，对每个 $\mathfrak{p} \in \mathfrak{k}$，都有 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}}(\Omega_{\mathbb{K}}) = 0$。实际上，这表明 $\Omega_{\mathbb{K}}$ 属于 $\mathrm{Z}(\mathscr{U}_{\mathfrak{k}})$——泛包络代数 $\mathscr{U}_{\mathfrak{k}}$的中心。

对每个 $\mathfrak{p} \in \mathfrak{k}$，都对应一个线性算子 $\mathrm{D}_{\mathfrak{p}} : \mathcal{D}(\mathbb{K}) \to \mathcal{D}(\mathbb{K})$，定义如下：

$$\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}\,\Phi(\boldsymbol{x}) := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Phi\left(\exp(t\mathfrak{p}) \cdot \boldsymbol{x}\right)\,.$$

定义 2.8。Casimir 算子 $\mathrm{D}_{\mathbb{K},\Omega_{\mathbb{K}}} : \mathcal{D}(\mathbb{K}) \to \mathcal{D}(\mathbb{K})$ 定义如下：

$$\mathrm{D}_{\mathbb{K},\Omega_{\mathbb{K}}} := \sum_{a=1}^{d_{\mathbb{K}}} \mathrm{D}^2_{\mathfrak{p}_a}\,. \tag{2.9}$$

注意，根据上文 (2.6) 中的识别，$\mathrm{D}_{\mathbb{K},\Omega_{\mathbb{K}}}$ 限制为 $\mathcal{D}(\mathbb{M})$ 上的微分算子 $\mathrm{D}_{\mathbb{M},\Omega_{\mathbb{K}}}$ ——即 Casimir-Laplace-Beltrami 算子。现在，对于 $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{K})$，由 $\mathrm{D}_{\mathfrak{p}_a}$ 的定义可得

$$\mathrm{D}_{\mathbb{K},\Omega_{\mathbb{K}}}(\Phi)(\boldsymbol{x}) = \sum_{a=1}^{d_{\mathbb{K}}} \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} \frac{\partial}{\partial t'}\bigg|_{t'=0} \Phi\left(\exp(t'\mathfrak{p}_a) \cdot \exp(t\mathfrak{p}_a) \cdot \boldsymbol{x}\right)\,.$$

令 $\mathrm{D}_{\mathbb{M},\Omega_{\mathbb{K}}}$ 为 $\mathrm{D}_{\mathbb{K},\Omega_{\mathbb{K}}}$ 在 $\mathcal{D}(\mathbb{M})$ 上的限制。以下引理广为人知；证明见 [19]。

引理 2.10。 $\Delta_{\mathbb{M}} = \mathrm{D}_{\mathbb{M},\Omega_{\mathbb{K}}}$。

利用 Rellich-Kondrachov 定理 ([12]) 的标准论证可知，自伴正定算子 $-\mathrm{D}_{\mathbb{M},\Omega_{\mathbb{K}}} = -\Delta_{\mathbb{M}}$ 的预解式是紧的——该算子在稠密子空间 $\mathcal{D}(\mathbb{M})$ 上以强意义定义——因此，$-\mathrm{D}_{\mathbb{M},\Omega_{\mathbb{K}}}$ 仅具有离散谱。令

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$$

为 $-\Delta_{\mathbb{M}}$ 的特征值。谱定理的一个应用给出了 $\mathrm{L}^2(\mathbb{M})$ 关于 $\mathrm{D}_{\mathbb{M},\,\Omega_{\mathbb{K}}}$ 的特征子空间的如下正交分解：

定理 2.11（谱定理）。令 $\mathscr{E}_{\mathbb{M}} = \{\lambda_0, \lambda_1, \cdots\}$ 表示 $-\Delta_{\mathbb{M}}$ 的谱，并且对每个 $\lambda \in \mathscr{E}_{\mathbb{M}}$，令 $\mathcal{H}_\lambda(\mathbb{M}) \subseteq \mathrm{L}^2(\mathbb{M})$ 表示 $\lambda\mathbb{I} + \Delta_{\mathbb{M}}$ 的零空间；则

$$\mathrm{L}^2(\mathbb{M}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathscr{E}_{\mathbb{M}}} \mathcal{H}_\lambda(\mathbb{M})\,. \tag{2.12}$$

注意，每个特征空间 $\mathcal{H}_\lambda$ 都是 $\mathcal{D}(\mathbb{M})$ 的一个子表示。根据命题 2.3 以及 V_{π_n} 的不可约性，对每个 $\lambda \in \mathscr{E}_{\mathbb{M}}$，存在 $n_\lambda \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $V_{\pi_{n_\lambda}} \subseteq \mathcal{H}_\lambda$。令 ω_{n_λ} 为与不可约表示 $(V_{\pi_{n_\lambda}}, \pi_{n_\lambda})$ 对应的最高整权。应用 Casimir-van der Waerden 公式 ({v11)，并结合引理 2.10，可得

$$\lambda := \|\omega_{n_\lambda} + \rho\|^2 - \|\rho\|^2 \tag{2.13}$$

对所有 $n \in \mathbb{Z}_+$ 均成立；此处，ρ 表示 $\mathfrak{k}$ 的正权之和的一半。注意到显然的不等式

$$\|\omega_{n_\lambda}\|^2 \leq \lambda \leq 3\|\omega_{n_\lambda}\|^2 \tag{2.14}$$

对所有满足 $\|\omega_{n_\lambda}\| \geq \|\rho\|$ 的 ω_{n_λ} 均成立。

2.2. 关于 $\mathbb{M}$ 上热核的一些估计。接下来，我们需要应用以下结果，它给出了紧黎曼流形上拉普拉斯-贝尔特拉米算子的特征值和特征空间维数的界。

考虑微分算子

$$\mathcal{H}_{\mathbb{M}} := \frac{d}{dt} - \frac{1}{2}\Delta_{\mathbb{M}}\,. \tag{2.15}$$

对于任意 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{M}$，$\mathbb{M}$ 上的热核 $\mathrm{H}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, t)$ 是以下问题的唯一（光滑）解：

$$\mathcal{H}_{\mathbb{M}} u = 0, \qquad \lim_{t \to 0^+} u(\boldsymbol{x}, t) = \delta_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\,, \tag{2.16}$$

上面的极限是在分布意义下取的。注意，以下恒等式可由 Casimir 算子的 $\mathbb{K}$-不变性和引理 2.10 直接得到：

$$\forall\ \boldsymbol{s} \in \mathbb{K}\,, \qquad \mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}, t) = \mathrm{H}_{\boldsymbol{sp}}(\boldsymbol{sx}, t)\,. \tag{2.17}$$

命题 2.18（Donnelly，[10]）。存在一个常数 $C_{\mathbb{M}} > 0$，它仅取决于 $\mathbb{M}$ 的单射半径下界、$\mathbb{M}$ 的截面曲率（上界）、$\mathbb{M}$ 的体积以及维数 d，使得以下不等式成立：

$$d_\lambda := \dim \mathcal{H}_\lambda \leq C_{\mathbb{M}} \lambda^{\frac{d-1}{4}}\,. \tag{2.19}$$

$\mathbb{M}$ 上热核的傅里叶分解（[17]）为

$$\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}, \epsilon^2) = \sum_{\lambda \in \mathscr{E}_{\mathbb{M}}} e^{-\lambda t} \sum_{j \in [d_\lambda]} \phi_{\lambda,j}(\boldsymbol{p}) \phi_{\lambda,j}(\boldsymbol{x}) \tag{2.20}$$

对于每个$\lambda \in \mathscr{E}_{\mathbb{M}}$，任意固定选择一组有序标准正交基（$\phi_{\lambda,\ 1}$，……，$\phi_{\lambda,\ \dim \mathcal{H}_\lambda}$）。对于任意 $\lambda_\infty > 0$，令

$$\mathrm{H}^{\lambda_\infty}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}, \epsilon^2) := \sum_{\lambda \leq \lambda_\infty} e^{-\lambda t} \sum_{j \in [d_\lambda]} \phi_{\lambda,j}(\boldsymbol{p}) \phi_{\lambda,j}(\boldsymbol{x})$$

对于整数 $\lambda_\infty > 0$，令 $\mathcal{E}_{\lambda_\infty}(\mathbb{M}) \subseteq \mathrm{L}^2(\mathbb{M})$表示直和

$$\mathcal{E}_{\lambda_\infty}(\mathbb{M}) := \bigoplus_{\lambda \in \mathscr{E}_{\mathbb{M}}(\lambda_\infty)} \mathcal{H}_\lambda \,,$$

其中 $\mathscr{E}_{\mathbb{M}}(\lambda_\infty) := \{\lambda \in \mathscr{E}_{\mathbb{M}} : \lambda \le \lambda_\infty\}$。那么，$\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}^{(\lambda)}(\boldsymbol{x}, \epsilon^2)$ 是 $\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}, \epsilon^2)$ 在 $\mathcal{E}_\lambda(\mathbb{M})$ 上的正交投影。

命题 2.21（Nowak 等人，[27]）。存在常数 $C_{\mathbb{M}} > c_{\mathbb{M}} > 0$ ——，它们仅依赖于 d 和 $d_{\mathbb{M}}$ —— 使得对所有 $t \in (0, 1)$ 以及所有 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p} \in \mathbb{M}$，以下结论均成立：

$$\frac{c_{\mathbb{M}} \exp\left(-\frac{\partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})^2}{4t}\right)}{t_{\mathbb{M},\boldsymbol{p}}^{\frac{d_{\mathbb{M}} - \bar{d}_{\mathbb{M}} - 1}{2}} t^{\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}}} \le \mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}, t) \le \frac{C_{\mathbb{M}} \exp\left(-\frac{\partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})^2}{4t}\right)}{t_{\mathbb{M},\boldsymbol{p}}^{\frac{d_{\mathbb{M}} - \bar{d}_{\mathbb{M}} - 1}{2}} t^{\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}}} \,.$$

这里 $t_{\mathbb{M},\,\boldsymbol{p}} := t + \operatorname{diam}(\mathbb{M}) - \partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$。

由该命题可知，对所有点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p} \in \mathbb{M}$ 以及所有 $t > 0$，$\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}, t) \ge 0$。此外，$\mathbb{M}$ 是紧黎曼对称空间（因此，特别是完备且测地完备的，正如 [17] 中所述），故有

$$\int_{\mathbb{M}} \mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}, t)\, d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}) = \mathfrak{v}_{\mathbb{M}} \,, \tag{2.22}$$

一个常数：换言之，$\mathbb{M}$ 是随机完备的。

注 2.23. 对任意 ϵ、$\eta \in (0, 1)$，令

$$r(\epsilon, \eta) := 2\epsilon \sqrt{\ln \frac{3C_{\mathbb{M}}}{\eta \epsilon^{2d_{\mathbb{M}} - \bar{d}_{\mathbb{M}} - 1}}} \tag{2.24}$$

固定 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{M}$；则对于满足 $\partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \ge r(\epsilon, \eta)$ 的任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{M}$，由命题 2.21 可得

$$0 \le \mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}, \epsilon^2) \le \frac{\eta}{3} \,. \tag{2.25}$$

注意，当 $\eta = \Omega(\text{poly } \epsilon)$ 时，对每个常数 $\mathfrak{t} > 0$，都有 $r(\epsilon, \eta) = o(\epsilon^{1-\mathfrak{t}})$。

以下陈述是在证明 [9], 中的引理 5 时得到的，尽管其中未明确说明常数对流形参数的依赖关系；为便于查阅，并明确常数对流形参数的依赖关系，我们在此将该陈述列为一个引理。回顾一下，上文出现的 常数 $C_{\mathbb{M}} > 0$ 仅依赖于 d 和 $d_{\mathbb{M}}$。

引理 2.26. 设 $\mathbb{M}$ 是一个维数为 d 的紧黎曼对称空间。对于 $\epsilon \in (0, 1)$，有：

$$\| \mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}, \epsilon^2) \|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{M})} \le \sqrt{C_{\mathbb{M}} \mathfrak{v}_{\mathbb{M}} 2^{-d_{\mathbb{M}} + \frac{\bar{d}_{\mathbb{M}} + 1}{2}}} \epsilon^{-d_{\mathbb{M}} + \frac{\bar{d}_{\mathbb{M}} + 1}{2}} \tag{2.27}$$

证明。由命题 2.21 中的上界可得

$$\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}, 2\epsilon^2) \le C_{\mathbb{M}} (2\epsilon^2)^{-d_{\mathbb{M}} + \frac{\bar{d}_{\mathbb{M}} + 1}{2}}$$

对 $\epsilon \in (0,1)$ 成立。现在，根据热核的半群性质，有

$$\int_{\mathbb{M}} \mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x},\epsilon^2)^2 \, d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}) = \mathfrak{v}_{\mathbb{M}} \, \mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p},2\epsilon^2) \leq C_{\mathbb{M}} \mathfrak{v}_{\mathbb{M}} (2\epsilon^2)^{-d_{\mathbb{M}}+\frac{\bar{d}_{\mathbb{M}}+1}{2}},$$

由此得证该引理。 □

推论 2.28. 对任意 $\lambda_\infty > 0$，以下不等式对所有 $\epsilon \in (0,1)$ 均成立：

$$\|\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}^{(\lambda_\infty)}(\boldsymbol{x},\epsilon^2)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{M})} \leq \sqrt{C_{\mathbb{M}}\mathfrak{v}_{\mathbb{M}}}\epsilon^{-d_{\mathbb{M}}+\frac{\bar{d}_{\mathbb{M}}+1}{2}} \tag{2.29}$$

证明. 这是显然的，因为

$$\|\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}^{(\lambda_\infty)}(\boldsymbol{x},\epsilon^2)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{M})} \leq \|\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x},\epsilon^2)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{M})}$$

根据希尔伯特空间子空间上的正交投影性质。 □

接下来，我们将重点运用 [11] 中所表述的黎曼流形 $\mathbb{M}$ 上 $\Delta_{\mathbb{M}}$ 的特征值的魏尔渐近公式。

引理 2.30（魏尔）。以下结论成立：

$$\lim_{\lambda_\infty\to\infty} \lambda_\infty^{-\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}} \sum_{\lambda\in\mathscr{E}_{\mathbb{M}}(\lambda_\infty)} d_\lambda = C_{\mathbb{M}}$$

由魏尔定律可知

$$\lim_{\lambda_\infty\to\infty} \left(\lambda_\infty^{-\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}} \sum_{\lambda\in\mathscr{E}_{\mathbb{M}}(4^{\frac{1}{d_{\mathbb{M}}}}\lambda_\infty)} d_\lambda \right) - \lim_{\lambda_\infty\to\infty} \left(\lambda_\infty^{-\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}} \sum_{\lambda\in\mathscr{E}_{\mathbb{M}}(\lambda_\infty)} d_\lambda \right) = C_{\mathbb{M}},$$

特别是，

$$\sum_{\lambda\in\mathscr{E}_{\mathbb{M}}(\lambda_\infty,4^{\frac{1}{d}}\lambda_\infty)} d_\lambda \leq C_{\mathbb{M}} \lambda_\infty^{\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}} \tag{2.31}$$

[1] [1]对所有 $\lambda_\infty > 0$，其中 $\mathscr{E}_{\mathbb{M}}(\lambda_\infty, 4^{\overline{d_{\mathbb{M}}}}\lambda_\infty) := \mathscr{E}_{\mathbb{M}}(4^{\overline{d_{\mathbb{M}}}}\lambda_\infty) \setminus \mathscr{E}_{\mathbb{M}}(\lambda_\infty)$。

3. Truncation of heat kernel

在本节中，我们证明，对于足够大的合适的 λ_∞，热核的 L^2-质量可以用其在子空间 $\mathscr{E}_{\mathbb{M}}(\lambda_\infty) \subseteq \mathrm{L}^2(\mathbb{M})$ 上的正交投影的 L^2-质量很好地近似。我们先介绍一个辅助引理。

引理 3.1。对于任意 $\Delta_{\mathbb{M}}$-特征值 $-\lambda$ 以及 $\mathcal{H}_\lambda$ 的标准正交基 $\phi_{\lambda,\ 1},\cdots,\phi_{\lambda,d_\lambda}$，令 $\psi_\lambda : \mathbb{M}^2 \to \mathbb{C}$ 定义为

$$\psi_\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := \sum_{j=1}^{d_\lambda} \phi_{\lambda,j}(\boldsymbol{x})\overline{\phi_{\lambda,j}(\boldsymbol{y})}.$$

则以下陈述成立：

- ψ_λ 与标准正交基无关；
- $\psi_\lambda \circ (\zeta,\zeta) = \psi_\lambda$ 对任意 $\zeta \in \mathbb{K}$；
- $\psi_\lambda(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}) = d_\lambda$ 对于任意 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{M}$。

证明。标准的基变换论证表明，函数 ψ_λ 与基的选择无关。

对于任意等距变换 $\zeta \in \mathbb{K}$，这些元素

$$\phi_{\lambda,1} \circ \zeta, \cdots, \phi_{\lambda,d_\lambda} \circ \zeta$$

线性无关，因为任何线性关系

$$0 = a_1 \phi_{\lambda,1} \circ \zeta + \cdots + a_{d_\lambda} \phi_{\lambda,d_\lambda} \circ \zeta \,,$$

连同 $\sigma^{\mathbb{M}}$ 的 $\mathbb{K}$-不变性，意味着

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j_1,j_2=1}^{d_\lambda} a_{j_1} \overline{a}_{j_2} \int_{\mathbb{M}} \phi_{\lambda,j_1}(\zeta(\boldsymbol{x})) \overline{\phi_{\lambda,j_2}(\zeta(\boldsymbol{x}))} \, d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}) \\ &= \sum_{j_1,j_2=1}^{d_\lambda} a_{j_1} \overline{a}_{j_2} \int_{\mathbb{M}} \phi_{\lambda,j_1}(\boldsymbol{x}) \overline{\phi_{\lambda,j_2}(\boldsymbol{x})} \, d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}) \\ &= |a_1|^2 + \cdots + |a_{d_\lambda}|^2 \,, \end{aligned}$$

这等价于 $a_1 = \cdots = a_{d_\lambda} = 0$。根据 Casimir-Laplace-Beltrami 算子的 invariance，这些元素

$$\phi_{\lambda,1} \circ \zeta, \cdots, \phi_{\lambda,d_\lambda} \circ \zeta$$

包含在 $\mathcal{H}_\lambda$ 中，因此构成 $\mathcal{H}_\lambda$ 的一个基；此外，根据 $\sigma^{\mathbb{M}}$ 的 $\mathbb{K}$-不变性，这必定是一个标准正交基。由 ψ_λ 的基无关性可知，$\psi_\lambda \circ (\zeta, \zeta) = \psi_\lambda$。

对于第三部分，我们注意到 $\{\phi_{\lambda,j}\}_{j=1}^{d_\lambda}$ 的正交性意味着

$$\begin{aligned} d_\lambda &= \sum_{j=1}^{d_\lambda} \int_{\mathbb{M}} \phi_{\lambda,j}(\boldsymbol{x}) \overline{\phi_{\lambda,j}(\boldsymbol{x})} \, d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}) \\ &= \int_{\mathbb{M}} \psi_\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \, d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}) \\ &= \psi_\lambda(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}) \,, \end{aligned}$$

其中最后一步由恒等式 $\psi_\lambda \circ (\zeta, \zeta) = \psi_\lambda$ 得出。这就证明了引理。□

下文中，我们将紧密（但并非完全相同地）遵循 [25] 中的论证。下面的引理给出了热核的 L^2-质量的主要逼近结果。

引理 3.2. 假设 $\epsilon \in (0, 2^{-e})$；对于任意 $\eta > 0$，令 $\lambda_\infty \geq 4^{\frac{k_\eta}{d_{\mathbb{M}}}}$——其中

$$k_\eta := \max\left(2 + 2\log_2 \tfrac{1}{\eta}, \ \tfrac{1}{2} d_{\mathbb{M}} \log_2 \left(\tfrac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right) + d_{\mathbb{M}} \log_2 \log_2 \left(\tfrac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right)\right); \tag{3.3}$$

则对于任意 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{M}$，以下不等式成立：

$$\| \mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}, \epsilon^2) - \mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}^{\lambda_\infty}(\boldsymbol{x}, \epsilon^2) \|_{\mathrm{L}^2}^2 \leq C_{\mathbb{M}} \eta^2 \,.$$

证明。记 $\mathscr{E}_{\mathbb{M},\,\lambda_\infty} := \{\lambda \in \mathscr{E}_{\mathbb{M}} : \lambda > \lambda_\infty\}$。注意，根据方程 (2.20)，关于 $\mathbb{M}$ 上的 Haar 诱导概率测度积分可得

$$\begin{aligned} \|\,\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x},\epsilon^2) - \mathrm{H}^{\lambda_\infty}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x},\epsilon^2)\|^2_{\mathrm{L}^2} &= \sum_{\lambda\in\mathscr{E}_{\mathbb{M},\lambda_\infty}} e^{-2\lambda\epsilon^2} \sum_{j\in[d_\lambda]} |\phi_{\lambda,j}(\boldsymbol{p})|^2 \\ \text{Lemma 3.1} \;\Rightarrow\quad &\leq \sum_{\lambda\in\mathscr{E}_{\mathbb{M}}(\lambda_\infty)} e^{-2\lambda\epsilon^2} d_\lambda\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

对于任意 $k \in \mathbb{Z}_+$，记

$$\mathcal{I}_k := \left(4^{\frac{k}{d_{\mathbb{M}}}}, 4^{\frac{k+1}{d_{\mathbb{M}}}}\right].$$

有

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda\in\mathscr{E}_{\mathbb{M},\lambda_\infty}} e^{-2\lambda\epsilon^2} d_\lambda &\leq \sum_{k\geq k_\eta} \sum_{\lambda\in\mathcal{I}_k} e^{-2\lambda\epsilon^2} d_\lambda \\ &\leq \sum_{k\geq k_\eta} \left(\sup_{\lambda\in\mathcal{I}_k} e^{-2\lambda\epsilon^2}\right)\left(\sum_{\lambda\in\mathcal{I}_k} d_\lambda\right) \\ eq.\ (2.31)\ \Rightarrow\quad &\leq C_{\mathbb{M}} \sum_{k\geq k_\eta} 2^{1+k} e^{-(2^{\frac{2k+d_{\mathbb{M}}}{d_{\mathbb{M}}}})\epsilon^2}\,. \end{aligned}$$

假设整数 $k \geq 0$ 满足 $2k \geq d_{\mathbb{M}} \log_2\left(\frac{k}{\epsilon^2}\right)$；则可得

$$e^{-(2^{\frac{2k+d_{\mathbb{M}}}{d_{\mathbb{M}}}})\epsilon^2} = (e^{-2^{\frac{2k}{d_{\mathbb{M}}}})^{2\epsilon^2}} \leq e^{-2k}\,.$$

考虑不等式

$$\frac{k}{\log_2\left(\frac{k}{\epsilon^2}\right)} \geq \frac{d_{\mathbb{M}}}{2}\,. \tag{3.5}$$

由对数的单调性，以下不等式等价于上面的方程 (3.5)：

$$k\left(1 - \frac{\log_2\log_2\left(\frac{k}{\epsilon^2}\right)}{\log_2\left(\frac{k}{\epsilon^2}\right)}\right) \geq \frac{d_{\mathbb{M}}}{2}\log_2\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right). \tag{3.6}$$

对于 $u \in [2^e, +\infty)$，函数

$$g(u) = 1 - \frac{\log_2\log_2 u}{\log_2 u}$$

满足 $0 < g(u) < 1$，具有全局最小值 $g(2^e) = 1 - e^{-1}\log_2 e > 0.46$，且单调递增。由于 $\epsilon \in (0, 2^{-e})$ 和 $d_{\mathbb{M}} \geq 1$，条件 $d_{\mathbb{M}}/2\epsilon^2 > 2^e$ 得以满足；要求 $k \geq \frac{1}{2}d_{\mathbb{M}}\log_2(2^e d_{\mathbb{M}})$，我们得出以下不等式蕴含方程 (3.6)：

$$k \geq \frac{d_{\mathbb{M}}}{2}\log_2\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right)\left(1 - \frac{\log_2\log_2\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right)}{\log_2\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right)}\right)^{-1}. \tag{3.7}$$

注意，对于 $d_{\mathbb{M}} \geq 1$ 和 $\epsilon \in (0, 2^{-e})$，有 $\log_2\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right) \geq 2\log_2\log_2\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right)$，由此得到以下不等式：

$$\begin{aligned}\frac{\log_2\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right)+2\log_2\log_2\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right)}{\log_2\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right)} &= 1+\frac{2\log_2\log_2\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right)}{\log_2\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right)}\\ &\geq \left(1-\frac{\log_2\log_2\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right)}{\log_2\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right)}\right)^{-1}\\ &= \frac{\log_2\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right)}{\log_2\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right)-\log_2\log_2\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right)}.\end{aligned}$$

这表明，只要 $k_\eta \geq \frac{1}{2}d_{\mathbb{M}}\log_2\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right)+d_{\mathbb{M}}\log_2\log_2\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right)$，方程 (3.7) 就成立；此时我们有

$$\begin{aligned}\|\,\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x},\epsilon^2)-\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}^{(\lambda_\infty)}(\boldsymbol{x},\epsilon^2)\|_{\mathrm{L}^2}^2 &= C_{\mathbb{M}}\sum_{\lambda\geq 4^{\frac{k_\eta}{d_{\mathbb{M}}}}} e^{-2\lambda\epsilon^2}d_\lambda\\ &\leq C_{\mathbb{M}}\sum_{k\geq k_\eta} 2^{1+k}e^{-(2^{\frac{2k+d_{\mathbb{M}}}{d_{\mathbb{M}}}})\epsilon^2}\\ &\leq C_{\mathbb{M}}\sum_{k\geq k_\eta} 2^{1+k-2k}\\ &\leq 4C_{\mathbb{M}}2^{-k_\eta}\\ &\leq C_{\mathbb{M}}\eta^2.\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

注 3.8. 假设 $d_{\mathbb{M}} \geq 2^e$，且 $\epsilon \in (0, d_{\mathbb{M}}^{-1})$。显然，

$$\frac{1}{2}d_{\mathbb{M}}\log_2\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right) < \frac{3}{4}d_{\mathbb{M}}\log_2\frac{1}{\epsilon^2}.$$

此外，由初等微积分可知，

$$\begin{aligned}\frac{2\log_2\log_2\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right)}{\log_2\frac{1}{\epsilon^2}} &< \frac{2\log_2\log_2\left(\frac{1}{2\epsilon^3}\right)}{\log_2\frac{1}{\epsilon^2}} \qquad \because\ \epsilon < d_{\mathbb{M}}^{-1}\\ &= \frac{\log_2\log_2\left(\frac{1}{2\epsilon^3}\right)}{\log_2\frac{1}{\epsilon}}\\ &< \frac{3\log_2\log_2\left(\frac{1}{\epsilon}\right)}{\log_2\frac{1}{\epsilon}}\\ &< \frac{3\log_2\log_2\left(d_{\mathbb{M}}\right)}{\log_2\left(d_{\mathbb{M}}\right)}.\end{aligned}$$

这表明

$$\frac{1}{2}d_{\mathbb{M}}\log_2\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right)+d_{\mathbb{M}}\log_2\log_2\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right) < \frac{3}{4}d_{\mathbb{M}}\log_2\frac{1}{\epsilon^2}\left(1+\frac{2\log_2\log_2\left(d_{\mathbb{M}}\right)}{\log_2\left(d_{\mathbb{M}}\right)}\right).$$

下面的引理给出了一个可通过解析方法检验的判据，用于判断紧黎曼流形 $\mathbb{M}$ 中的子集 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{M}$ —— 是否为 ϵ- 覆盖。其基本思路是：如果以 $\mathcal{S}$ 中的点为基点的热核加权和在 L^2-范数下接近恒等算子，那么集合 $\mathcal{S}$ 必定是一个覆盖。

引理 3.9。设 $\mathcal{S}\subseteq\mathbb{M}$ 为非空子集。对于 $\epsilon\in(0,1)$，若

$$r_{\epsilon,\mathbb{M}}:=r(\epsilon,1)=2\epsilon\sqrt{\ln\frac{3C_{\mathbb{M}}}{\epsilon^{2d_{\mathbb{M}}-\tilde{d}_{\mathbb{M}}-1}}}$$

足够小，则以下不等式表明 $\mathcal{S}\subseteq\mathbb{M}$ 是一个$2r_{\epsilon,\ \mathbb{M}}$-网 :

$$\left\|1_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x})-\frac{1}{|\mathcal{S}|}\sum_{\boldsymbol{p}\in\mathcal{S}}\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x},\epsilon^2)\right\|_{\mathrm{L}^2}\leq\frac{r_{\epsilon,\mathbb{M}}^{\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}}}{3}\sqrt{\frac{\mathfrak{v}_{\mathbb{M}}\pi^{\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}+1\right)}}\tag{3.10}$$

注 3.11. 引理 3.9 最早发表于 [25], , 其中的表述是以紧李群为基础的。

证明。由注 2.23 可知，不等式

$$\frac{2}{3}\cdot 1_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x})\leq 1_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x})-\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x},\epsilon^2)\leq 1_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x})\tag{3.12}$$

对于满足 $\partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\geq r_{\epsilon,\ \mathbb{M}}$ 的任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}\in\mathbb{M}$ 均成立。记 $\mathrm{B}(\boldsymbol{p},r_{\epsilon,\ \mathbb{M}})\subseteq\mathbb{M}$ 为以 $\boldsymbol{p}\in\mathbb{M}$ 为中心、半径为 $r_{\epsilon,\ \mathbb{M}}$ 的开测地圆盘；因此，$\mathrm{B}(\boldsymbol{x},r_{\epsilon,\ \mathbb{M}}):=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{M}:\partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})<r_{\epsilon,\ \mathbb{M}}\}$。此外，令 $\mathrm{B}_{d_{\mathbb{M}}}\subseteq\mathbb{R}^{d_{\mathbb{M}}}$ 表示以原点为中心的单位欧几里得球；有（见 [16]）

$$\lim_{r\to 0}\frac{\sigma^{\mathbb{M}}(\mathrm{B}(\boldsymbol{x},r_{\epsilon,\mathbb{M}}))}{r_{\epsilon,\mathbb{M}}^{d_{\mathbb{M}}}}=\mathfrak{v}_{\mathbb{M}}\cdot\mathrm{vol}(\mathrm{B}_{d_{\mathbb{M}}})=\frac{\mathfrak{v}_{\mathbb{M}}\pi^{\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}+1\right)}\tag{3.13}$$

现在反设 $\mathcal{S}\subseteq\mathbb{M}$ 不是一个$2r_{\epsilon,\ \mathbb{M}}$-网，于是存在 $\boldsymbol{p}_0\in\mathbb{M}$，使得 $d(\boldsymbol{p}_0,\mathcal{S})>2r_{\epsilon,\ \mathbb{M}}$。由 $\mathbb{M}$ 上黎曼距离的三角不等式可知，对每个 $\boldsymbol{p}\in\mathcal{S}$，$\mathrm{B}(\boldsymbol{p}_0,r_{\epsilon,\ \mathbb{M}})\cap\mathrm{B}(\boldsymbol{p},r_{\epsilon,\ \mathbb{M}})=\emptyset$。记

$$\alpha_{d_{\mathbb{M}}}:=\sqrt{\frac{\mathfrak{v}_{\mathbb{M}}\pi^{\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}+1\right)}},$$

我们由方程 (3.10) 和方程 (3.12) 推导出以下结果:

$$\begin{aligned}\frac{r_{\epsilon,\mathbb{M}}^{\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}}\alpha_{d_{\mathbb{M}}}}{3}&\geq\left\|1_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x})-\frac{1}{|\mathcal{S}|}\sum_{\boldsymbol{p}\in\mathcal{S}}\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x},\epsilon^2)\right\|_{\mathrm{L}^2}\\&=\left\|\frac{1}{|\mathcal{S}|}\sum_{\boldsymbol{p}\in\mathcal{S}}\left|1_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x})-\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x},\epsilon^2)\right|\right\|_{\mathrm{L}^2}\\&\geq\frac{2}{3}\left(\int_{\mathrm{B}(\boldsymbol{p}_0,r_{\epsilon,\mathbb{M}})}d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x})\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}\frac{\sigma^{\mathbb{M}}(\mathrm{B}(\boldsymbol{p}_0,r_{\epsilon,\mathbb{M}}))}{r_{\epsilon,\mathbb{M}}^{d_{\mathbb{M}}}}&=\frac{1}{r_{\epsilon,\mathbb{M}}^{d_{\mathbb{M}}}}\int_{\mathrm{B}(\boldsymbol{p}_0,r_{\epsilon,\mathbb{M}})}d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x})\\&\leq\frac{\alpha_{d_{\mathbb{M}}}^2}{4}\end{aligned}$$

考虑到方程 (3.13)，如果 $r_{\epsilon,\mathbb{M}}>0$ 足够小，这是不可能的。 □

4. Equidistributed cover

接下来，我们将使用以下关于有限维希尔伯特空间上的算子值随机变量的尾界。

引理 4.1（Ahlswede-Winter）。设 V 是有限维（实或复）希尔伯特空间，维数为 $V = D$。设 A_1、$\cdots$、A_k 是取值于 V 上半正定算子锥中的独立同分布随机变量，满足对每个 $j \in [k]$，$A_j \preceq \mathrm{I}$；并且存在某个实数 $\mu \geq 0$，使得对每个 $j \in [k]$，$\mathbb{E}[A_j] = A \succeq \mu \mathrm{I}$。那么，对所有 $\upsilon \in [0, 0.5]$，下式成立：

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} A_j \notin [(1-\upsilon)A, (1+\upsilon)A]\right) \leq 2D\exp\left(\frac{-\upsilon^2\mu k}{2\ln 2}\right) \tag{4.2}$$

□

现在设 $\mathcal{S} \subset \mathbb{K}$ 是一个非空子集。回顾一下，对于任意 $\lambda_\infty > 0$，我们记 $\mathcal{E}^\star_{\lambda_\infty}(\mathbb{M}) \subseteq \mathrm{L}^2_0(\mathbb{M})$ 为直和

$$\mathcal{E}^\star_{\lambda_r}(\mathbb{M}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathscr{E}_{\mathbb{M}}(0,\lambda_\infty)} \mathcal{H}_\lambda\,,$$

其中 $\mathscr{E}_{\mathbb{M}}(0,\lambda_\infty) = \{\lambda \in \mathscr{E}_{\mathbb{M}} : 0 < \lambda \leq \lambda_\infty\}$。注意

$$\dim \mathcal{E}^\star_{\lambda_\infty}(\mathbb{M}) < \dim \mathcal{E}_{\lambda_\infty}(\mathbb{M}) \leq C_{\mathbb{M}} \lambda_\infty^{\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}} \tag{4.3}$$

根据方程 (2.31)。由于 $\Delta_{\mathbb{M}}$ 在 $\mathbb{K}$ 下不变，子空间 $\mathcal{E}^\star_{\lambda_\infty}(\mathbb{M})$ 在所有 $\boldsymbol{s} \in \mathbb{K}$ 对应的算子 $A_{\boldsymbol{s}}$ 下均保持不变，其中 $A_{\boldsymbol{s}}$ 定义为

$$A_{\boldsymbol{s}}(\phi)(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{2}\phi(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{4}(\phi(\boldsymbol{s}\boldsymbol{x}) + \phi(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x}))\,. \tag{4.4}$$

由于测度 $\sigma^{\mathbb{M}}$ 在 $\mathbb{K}$ 下不变，算子 $A_{\boldsymbol{s}} : \mathcal{E}_{\lambda_\infty}(\mathbb{M}) \to \mathcal{E}_{\lambda_\infty}(\mathbb{M})$ 是自伴的。由恒等式可知 $A_{\boldsymbol{s}}$ 的半正定性：

$$\langle A_{\boldsymbol{s}}\phi, \phi\rangle = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{M}} |\phi(\boldsymbol{x}) + \phi(\boldsymbol{s}\boldsymbol{x})|^2 \, d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x})\,.$$

此外，记 $\sigma^{\mathbb{K}}$ 为 $\mathbb{K}$ 上唯一的不变 Haar（概率）测度，则有

$$(\mathbb{E}_{\boldsymbol{s}\sim\sigma^{\mathbb{M}}}[A_{\boldsymbol{s}}])\,\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\phi(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{K}} \phi(\boldsymbol{s}\boldsymbol{x})\; d\sigma^{\mathbb{K}}(\boldsymbol{s}) + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{K}} \phi(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x})\; d\sigma^{\mathbb{K}}(\boldsymbol{s})\,.$$

记 $\tau\colon \mathbb{K} \to \mathbb{M}$ 为映射 $\boldsymbol{s} \mapsto \boldsymbol{s}\boldsymbol{o}$，则有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{K}} \phi(\boldsymbol{s}\boldsymbol{o})\; d\sigma^{\mathbb{K}}(\boldsymbol{s}) &= \int_{\mathbb{K}} (\phi\circ\tau)(\boldsymbol{s})\; d\sigma^{\mathbb{K}}(\boldsymbol{s}) \\ &= \int_{\mathbb{M}} \phi(\boldsymbol{x})\; d(\tau_*\sigma^{\mathbb{K}})\,,\end{aligned}$$

其中 $\tau_*\sigma^{\mathbb{K}}$ 是推前测度，对于 Borel子集 $E \subseteq \mathbb{M}$，其定义为 $\tau_*\sigma^{\mathbb{K}}(E) = \sigma^{\mathbb{K}}(\tau^{-1}(E))$。由于 $\tau_*\sigma^{\mathbb{K}}$ 是 $\mathbb{K}$不变的 Borel概率测度，定义在 $\mathbb{M}$上，因此有$\sigma^{\mathbb{M}} = \tau_*\sigma^{\mathbb{K}}$。因为 $\phi \in \mathcal{E}_{\lambda_\infty}(\mathbb{M}) \subset \mathrm{L}^2(\mathbb{M})$，所以有

$$\int_{\mathbb{K}} \phi(\boldsymbol{x}\boldsymbol{s})\; d\sigma^{\mathbb{K}}(\boldsymbol{s}) = \int_{\mathbb{M}} \phi(\boldsymbol{x})\; d\sigma^{\mathbb{M}} = 0\,.$$

因此，$(\mathbb{E}_{\boldsymbol{s}\sim\sigma^{\mathbb{K}}}[A_{\boldsymbol{s}}])\ \phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\phi(\boldsymbol{x})$，由此可得

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{s}\sim\sigma^{\mathbb{K}}}[A_{\boldsymbol{s}}] = \frac{1}{2}\,\mathrm{I}, \qquad \boldsymbol{s}\in\mathbb{K}$$

此外，对于所有 $\boldsymbol{s}\in\mathbb{K}$，算子 $\mathrm{I}-A_{\boldsymbol{s}}$ 都是半正定的，因为

$$\langle \phi - A_{\boldsymbol{s}}\phi, \phi\rangle = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{M}} |\phi(\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{x}\boldsymbol{s})|^2\, d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x})\,.$$

4.1. 随机覆盖。在下面的引理中，我们推导出 $\mathbb{M}$ 上热核非恒定尾部的 L^2-范数的一个高概率上界。

引理**4.5.** 设 $\mathcal{S}\subset\mathbb{K}$ 是一个非空有限多重子集，其元素是从 $\mathbb{K}$ 上的哈尔测度中独立随机选取的，并设 $\hat{}\mathcal{S} := \mathcal{S}\sqcup\mathcal{S}^{-1}$ 是 $\mathcal{S}$ 中所有元素及其逆元构成的（多重）集合。假设 $\eta>0$ 满足

$$2 + 2\log_2\frac{1}{\eta} \geq \frac{1}{2}d_{\mathbb{M}}\log_2\left(\tfrac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right) + d_{\mathbb{M}}\log_2\log_2\left(\tfrac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right)\,. \tag{4.6}$$

设 $\epsilon\in(0, 2^{-e})$；若

$$\delta := \frac{C_{\mathbb{M}}}{\eta}\exp\left(\tfrac{-|\mathcal{S}|}{16\ln 2}\right)\,,$$

则对于任意整数 $\ell>0$ 以及任意 $\boldsymbol{p}\in\mathbb{M}$，下列不等式成立：（**4.7**）

$$\mathop{\mathbb{P}}_{\mathcal{S}}\left(\left\|\frac{1}{|\hat{\mathcal{S}}|^{\ell}}\sum_{\boldsymbol{s}\in\hat{\mathcal{S}}^{\ell}}\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{s}\boldsymbol{x},\epsilon^2) - 1_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x})\right\|_{\mathrm{L}^2} \leq C_{\mathbb{M}}\left(2^{-\ell}\epsilon^{-d_{\mathbb{M}}+\frac{\bar{d}_{\mathbb{M}}+1}{2}} + \eta\right)\right) \geq 1-2\delta\,.$$

证明。将 $\upsilon=\mu=0.5$ 和 $\lambda_\infty = \eta^{-\frac{2}{d}}$ 代入方程 **(4.2)**，得到

$$\mathop{\mathbb{P}}_{\mathcal{S}}\left(\frac{1}{|\mathcal{S}|}\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{S}}A_{\boldsymbol{s}} \notin \left[\frac{1}{4}\,\mathrm{I}, \frac{3}{4}\,\mathrm{I}\right]\right) \leq \frac{2C_{\mathbb{M}}}{\eta}\exp\left(\frac{-|\mathcal{S}|}{16\ln 2}\right)\,.$$

注意，结合方程 **(4.6)** 和方程 **(4.3)**，并采用 $\lambda_\infty=\eta^{-\frac{2}{d}}$ 的选择，可以确保在需要时应用引理 3.2。现在，在 $\mathcal{E}^{\star}_{\lambda_\infty}(\mathbb{M})$ 上的正定算子锥中拆解不等式 $\frac{1}{4}\,\mathrm{I} \preccurlyeq |\mathcal{S}|^{-1}\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{S}}\bar{A}_{\boldsymbol{s}} \preccurlyeq \frac{3}{4}\,\mathrm{I}$，得到

$$-\frac{1}{4}\,\mathrm{I} \preccurlyeq \left(\frac{1}{|\mathcal{S}|}\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{S}}A_{\boldsymbol{s}} - \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\right) \preccurlyeq \frac{1}{4}\,\mathrm{I}\,.$$

因此，厄米算子 $|\mathcal{S}|^{-1}\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{S}}A_{\boldsymbol{s}} - \frac{1}{2}\,\mathrm{I}$ 的特征值均属于 $[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$，这表明对于所有 $\phi\in\mathcal{E}^{\star}_{\lambda_\infty}(\mathbb{M})$，以下结论成立：

$$\left\|\frac{1}{|\mathcal{S}|}\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{S}}\left(\frac{1}{4}\phi_{\boldsymbol{s}} + \frac{1}{4}\phi_{\boldsymbol{s}^{-1}}\right)\right\|^2_{\mathrm{L}^2} \leq \frac{1}{4}\|\phi\|^2_{\mathrm{L}^2}\,.$$

特别地，有如下集中不等式

$$\mathop{\mathbb{P}}_{\mathcal{S}}\left(\left\|\frac{1}{|\mathcal{S}|}\sum_{\boldsymbol{s}\in\hat{\mathcal{S}}}\frac{1}{4}\phi_{\boldsymbol{s}}\right\|_{\mathrm{L}^2} \leq \frac{1}{4}\|\phi\|_{\mathrm{L}^2}\ \forall\ \phi\in\mathcal{E}^{\star}_{\lambda_\infty}(\mathbb{M})\right) \geq 1 - \frac{2C_{\mathbb{M}}}{\eta}\exp\left(\frac{-|\mathcal{S}|}{16\ln 2}\right)\,,$$

其中，对所有 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{M}$，记 $\phi_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{s}\boldsymbol{x})$。现在，将函数$\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}^{\lambda_\infty}(\boldsymbol{x}, \epsilon^2) - 1_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x})$记作$\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}^{\star\ \lambda_\infty}$, 则有

$$\mathop{\mathbb{P}}_{\mathcal{S}}\left(\left\|\frac{1}{|\hat{\mathcal{S}}|}\sum_{\boldsymbol{s}\in\hat{\mathcal{S}}}\mathrm{H}_{\boldsymbol{s}\boldsymbol{p}}^{\star,\lambda_\infty}\right\|_{\mathrm{L}^2} \le \frac{1}{2}\|\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}^{\star,\lambda_\infty}\|_{\mathrm{L}^2}\right) \ge 1 - \frac{2C_{\mathbb{M}}}{\eta}\exp\left(\frac{-|\mathcal{S}|}{16\ln 2}\right).$$

将此不等式迭代 $\ell > 0$ 次可得

$$\mathop{\mathbb{P}}_{\mathcal{S}}\left(\left\|\frac{1}{|\hat{\mathcal{S}}|^\ell}\sum_{\boldsymbol{s}\in\hat{\mathcal{S}}^\ell}\mathrm{H}_{\boldsymbol{s}\boldsymbol{p}}^{\star,\lambda_\infty}\right\|_{\mathrm{L}^2} \le \frac{1}{2^\ell}\left\|\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}^{\star,\lambda_\infty}\right\|_{\mathrm{L}^2}\right) \ge 1 - \frac{2C_{\mathbb{M}}}{\eta}\exp\left(\frac{-|\mathcal{S}|}{16\ln 2}\right). \tag{4.8}$$

令 $\mathrm{H}^\star$ 表示函数 $\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}, \epsilon^2) - 1_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x})$；则有

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^\star &= (\mathrm{H}^\star - \mathrm{H}^{\star,\lambda_\infty}) + \mathrm{H}^{\star,\lambda_\infty}\\ &= (\mathrm{H} - \mathrm{H}^{\lambda_\infty}) + \mathrm{H}^{\star,\lambda_\infty},\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{H}^{\lambda_\infty} = 1_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}) + \mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}^{\star\ \lambda_\infty}$, 且 $\mathrm{H} = 1_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}) + \mathrm{H}^\star$。然后，在方程 (4.8) 中应用三角不等式——连同引理 3.2 和推论 2.28——可得

$$\begin{aligned}&\mathop{\mathbb{P}}_{\mathcal{S}}\left(\left\|\frac{1}{|\hat{\mathcal{S}}|^\ell}\sum_{\boldsymbol{s}\in\hat{\mathcal{S}}^\ell}\mathrm{H}_{\boldsymbol{s}\boldsymbol{p}}^{\star}\right\|_{\mathrm{L}^2} \le C_{\mathbb{M}}\left(\eta + 2^{-\ell}\epsilon^{-d_{\mathbb{M}}+\frac{\bar{d}_{\mathbb{M}}+1}{2}}\right)\right)\\ \ge\ &\mathop{\mathbb{P}}_{\mathcal{S}}\left(\left\|\frac{1}{|\hat{\mathcal{S}}|^\ell}\sum_{\boldsymbol{s}\in\hat{\mathcal{S}}^\ell}\mathrm{H}_{\boldsymbol{s}\boldsymbol{p}}^{\star}\right\|_{\mathrm{L}^2} \le 2^{-\ell}\|\mathrm{H}^{\star,\lambda_\infty}\|_{\mathrm{L}^2} + \|\mathrm{H}^{\lambda_\infty} - \mathrm{H}\|_{\mathrm{L}^2}\right)\\ \ge\ &\mathop{\mathbb{P}}_{\mathcal{S}}\left(\left\|\frac{1}{|\hat{\mathcal{S}}|^\ell}\sum_{\boldsymbol{s}\in\hat{\mathcal{S}}^\ell}\mathrm{H}_{\boldsymbol{s}\boldsymbol{p}}^{\star,\lambda_\infty}\right\|_{\mathrm{L}^2} \le 2^{-\ell}\|\mathrm{H}^{\star,\lambda_\infty}\|_{\mathrm{L}^2}\right)\\ \ge\ &1 - \frac{2C_{\mathbb{M}}}{\eta}\exp\left(\frac{-|\mathcal{S}|}{16\ln 2}\right),\end{aligned}$$

这就证明了该引理。 □

注 4.9。我们指出，为下一节所用，条件方程 (4.6) 在证明中并未用到，只有在最后才用到。特别地，方程 (4.8) 是独立推导出来的，并未使用方程 (4.6)。

现在我们证明，对于任意 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{M}$ 和随机子集 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{M}$，轨道 $\hat{}\mathcal{S}^\ell\boldsymbol{p} \subseteq \mathbb{M}$ 是一个 $r_{\epsilon,\mathbb{M}}$-覆盖，前提是随机子集的基数和整数 ℓ 足够大。

定理 4.10. 设 $\mathcal{S} \subset \mathbb{K}$ 是一个非空有限多重子集，其元素从 $\mathbb{K}$ 上的哈尔测度中独立随机选取。令 $\delta \in (0, 1\ 2)$，并假设 $\epsilon \in (0, 2^{-e})$ 足够小。设 $\mathcal{S}$ 的基数满足

$$|\mathcal{S}| = 16\ln 2\left(\ln C_{\mathbb{M}} + \frac{d_{\mathbb{M}}}{4}\log_2\left(\tfrac{d_{\mathbb{M}}}{2e^2}\right) + \frac{d_{\mathbb{M}}}{2}\log_2\log_2\left(\tfrac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right) + \ln\frac{1}{e\delta}\right). \tag{4.11}$$

令 $\ell > 0$ 为满足条件的整数

$$\ell \ge \left(d_{\mathbb{M}} - \tfrac{\bar{d}_{\mathbb{M}}+1}{2}\right)\log_2\frac{1}{\epsilon} + \log_2\left(\tfrac{6C_{\mathbb{M}}}{\mathfrak{v}_{\mathbb{M}}}\right) + \frac{d_{\mathbb{M}}}{4}\log_2\left(\tfrac{1}{\pi r_{\epsilon,\mathbb{M}}^2}\right) + \frac{1}{2}\log_2\Gamma\left(\tfrac{d_{\mathbb{M}}}{2}+1\right). \tag{4.12}$$

那么，对于任意 $\boldsymbol{p}_0 \in \mathbb{M}$，随机多重子集 $\mathscr{S} := \hat{\ }\mathcal{S}^{\ell}\boldsymbol{p}_0 \subseteq \mathbb{M}$ 以至少 $1-2\delta$ 的概率构成 $\mathbb{M}$ 的 $r_{\epsilon,\,\mathbb{M}}$-覆盖；其中，

$$r_{\epsilon,\mathbb{M}} = 2\epsilon\sqrt{\ln \frac{3C_{\mathbb{M}}}{\epsilon^{2d_{\mathbb{M}}-\bar{d}_{\mathbb{M}}-1}}}\,.$$

证明。固定 $\boldsymbol{p}_0 \in \mathbb{M}$；为了证明该定理，根据引理 3.9，只需证明

$$\mathop{\mathbb{P}}_{\mathcal{S}}\left(\left\|1_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{|\hat{\mathcal{S}}|^{\ell}}\sum_{\boldsymbol{p}\in\hat{\mathcal{S}}^{\ell}\boldsymbol{p}_0}\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x},\epsilon^2)\right\|_{\mathrm{L}^2} \leq \frac{\alpha_{d_{\mathbb{M}}} r_{\epsilon,\mathbb{M}}^{\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}}}{3}\right) \geq 1-2\delta\,,$$

其中 $\alpha_{d_{\mathbb{M}}}$ 满足 $\alpha_{d_{\mathbb{M}}}^2\,\Gamma\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}+1\right) = \mathfrak{v}_{\mathbb{M}}\pi^{\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}}$。

假设实数 $\eta > 0$ 和整数 $\ell > 0$ 满足以下条件：

$$3C_{\mathbb{M}}(\eta + 2^{-\ell}\epsilon^{-d_{\mathbb{M}}+\frac{\bar{d}_{\mathbb{M}}+1}{2}}) \leq \alpha_{d_{\mathbb{M}}} r_{\epsilon,\mathbb{M}}^{\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}}\,. \tag{4.13}$$

将方程 (4.13) 中的条件应用于引理4.5，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathop{\mathbb{P}}_{\mathcal{S}}\left(\left\|\frac{1}{|\hat{\mathcal{S}}|^{\ell}}\sum_{\boldsymbol{s}\in\hat{\mathcal{S}}^{\ell}}\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}_0}(\boldsymbol{s}\boldsymbol{x},\epsilon^2) - 1_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x})\right\|_{\mathrm{L}^2} \leq \frac{\alpha_{d_{\mathbb{M}}} r_{\epsilon,\mathbb{M}}^{\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}}}{3}\right)\\ &\geq 1 - \frac{2C_{\mathbb{M}}}{\eta}\exp\left(\frac{-|\mathcal{S}|}{16\ln 2}\right)\,,\end{aligned} \tag{4.14}$$

前提是

$$2 + 2\log_2\frac{1}{\eta} \geq \frac{1}{2}d_{\mathbb{M}}\log_2\left(\tfrac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right) + d_{\mathbb{M}}\log_2\log_2\left(\tfrac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right)\,. \tag{4.15}$$

我们在方程 (4.15) 中强制取等号，并要求不等式 $2^{-\ell}\epsilon^{-d_{\mathbb{M}}+\frac{\bar{d}_{\mathbb{M}}+1}{2}} \leq \eta$ 成立，因此，只需满足以下条件，而无需满足方程 (4.13)：

$$2^{-\ell}\epsilon^{-d_{\mathbb{M}}+\frac{\bar{d}_{\mathbb{M}}+1}{2}} \leq \eta \leq \frac{\alpha_{d_{\mathbb{M}}} r_{\epsilon,\mathbb{M}}^{\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}}}{6C_{\mathbb{M}}}\,. \tag{4.16}$$

如果我们设定

$$\ell \geq \left(d_{\mathbb{M}} - \tfrac{\bar{d}_{\mathbb{M}}+1}{2}\right)\log_2\frac{1}{\epsilon} + \log_2\left(\tfrac{6C_{\mathbb{M}}}{\mathfrak{v}_{\mathbb{M}}}\right) + \frac{d_{\mathbb{M}}}{4}\log_2\left(\tfrac{1}{\pi r_{\epsilon,\mathbb{M}}^2}\right) + \frac{1}{2}\log_2\Gamma\left(\tfrac{d_{\mathbb{M}}}{2}+1\right)\,. \tag{4.17}$$

事实上，由于 $\epsilon \in (0, 2^{-e})$ 足够小，我们有 $\epsilon \ll r_{\epsilon,\,\mathbb{M}}$，因此，在方程 (4.15) 中取等号可确保

$$\eta \leq \frac{\alpha_{d_{\mathbb{M}}} r_{\epsilon,\mathbb{M}}^{\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}}}{6C_{\mathbb{M}}}\,.$$

此外，另一个不等式 $2^{-\ell}\epsilon^{-d_{\mathbb{M}}+\frac{\bar{d}_{\mathbb{M}}+1}{2}} \leq \eta$ 成立，因为反向不等式 $2^{-\ell}\epsilon^{-d_{\mathbb{M}}+\frac{\bar{d}_{\mathbb{M}}+1}{2}} > \eta$ 与方程 (4.17) 矛盾。最后，令

$$\delta = \frac{C_{\mathbb{M}}}{\eta}\exp\left(\tfrac{-|\mathcal{S}|}{16\ln 2}\right)\,, \tag{4.18}$$

并回想一下，方程 (4.15) 是一个等式，这可转化为条件

$$|\mathcal{S}| = 16 \ln 2 \left(\ln C_{\mathbb{M}} + \frac{d_{\mathbb{M}}}{4} \log_2 \left(\tfrac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2} \right) + \frac{d_{\mathbb{M}}}{2} \log_2 \log_2 \left(\tfrac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2} \right) + \ln \frac{1}{e\delta} \right) . \tag{4.19}$$

证明至此完成。 □

4.2. 近似（λ, 2）-设计。

定义 4.20. 对于 $\mathbb{M}$ 上拉普拉斯-贝尔特拉米算子 $-\Delta_{\mathbb{M}}$ 的任意特征值 λ，有限子集 $\mathscr{S} \subset \mathbb{M}$ 是一个 λ-设计，当且仅当对于每个 $\phi \in \mathcal{E}_\lambda(\mathbb{M})$，以下等式成立：

$$\int_{\mathbb{M}} \phi(\boldsymbol{x}) \; \sigma^{\mathbb{M}}(d\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\mathscr{S}|} \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathscr{S}} \phi(\boldsymbol{x}) \tag{4.21}$$

最近， [15] 证明了紧黎曼流形上存在规模“较小”的 λ-设计。然而，他们的结果并非构造性的；更一般地说，要高效地算法构造此类最优规模的设计，目前仍遥不可及。

定义 4.22. 设 λ 是拉普拉斯-贝尔特拉米算子 $-\Delta_{\mathbb{M}}$的一个特征值。在 $\mathbb{M}$ 上，一个 υ-近似（λ, 2）-设计是一个有限子集 $\mathscr{S} \subseteq \mathbb{M}$，使得对于每个 $\phi \in \mathcal{E}_\lambda(\mathbb{M})$ 中具有单位 L^2-范数的元素，以下不等式成立：

$$\left| \frac{1}{|\mathscr{S}|} \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathscr{S}} \phi(\boldsymbol{x}) - \int \phi \; d\sigma^{\mathbb{M}} \right| \leq \upsilon \tag{4.23}$$

本节的主要结果是一种随机构造，它以任意高的概率给出一个近似的 (λ,2)-设计。

定理4.24. 设 $\mathscr{S} := \hat{\mathcal{S}}^\ell \boldsymbol{o}$ —，其中 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{M}$是从 $\mathbb{K}$上的哈尔测度中独立选取的等距变换的随机多重子集。设 $\delta \in (0, 1/2)$。对于任意 $\upsilon \in (0,1)$ 以及任意整数 $r > 0$，若

$$|\mathcal{S}| = 16 \ln 2 \ln \left(\tfrac{C_{\mathbb{M}} \lambda_r^{\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}}}{\delta} \right) ,$$

and

$$\ell \geq \log_2 \frac{1}{\upsilon} + \log_2 C_{\mathbb{M}} + \frac{d_{\mathbb{M}}}{4} \log_2 \lambda_r + \left(d_{\mathbb{M}} - \tfrac{\bar{d}_{\mathbb{M}}+1}{2} \right) \log_2 \frac{1}{\epsilon} ,$$

其中 $\epsilon = \lambda_r^{-\frac{d_{\mathbb{M}}+2}{2}} C_{\mathbb{M}}^{-\frac{1}{4}} \upsilon^{\frac{1}{2}}$，则 $\mathscr{S} \subseteq \mathbb{M}$ 以至少 $1 - 2\delta$的概率是一个 υ-近似 (λ_r, 2)-设计。

证明. 对于 $\mathbb{M}$上的每个特征子空间 $\mathcal{H}_\lambda$，固定一个标准正交基，记为 $(\phi_{\lambda,j})_{j=1}^{d_\lambda}$。设 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{K}$ 是一个有限非空多重子集，由相互独立且服从哈尔分布的元素组成，并记作 $\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \sqcup \mathcal{S}^{-1}$。我们首先令 ϕ 为该标准正交基中对应于卡西米尔-拉普拉斯-贝尔特拉米算子 $-\Delta_{\mathbb{M}}$的特征值 λ_ϕ 的一个元素，并力求证明，对于子集 $\hat{\mathcal{S}}^\ell \boldsymbol{o} \subseteq \mathbb{M}$，方程 (4.23) 左侧的值很小。由于

$$\mathrm{H}_{\boldsymbol{o}}(\boldsymbol{x}, \epsilon^2) = \sum_{\lambda \in \mathscr{E}_{\mathbb{M}}} e^{-\lambda\epsilon^2} \sum_{j \in [d_\lambda]} \phi_{\lambda,j}(\boldsymbol{o}) \phi_{\lambda,j}(\boldsymbol{x}) ,$$

有

$$\int_{\mathbb{M}} \phi(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{H}_{\boldsymbol{o}}(\boldsymbol{x}, \epsilon^2) \; d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}) = e^{-\lambda_\phi \epsilon^2} \phi(\boldsymbol{o}) \int_{\mathbb{M}} |\phi(\boldsymbol{x})|^2 d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}) = e^{-\lambda_\phi \epsilon^2} \phi(\boldsymbol{o}) , \tag{4.25}$$

由此可得

$$\left|\frac{1}{|\hat{\mathcal{S}}|^{\ell}}\sum_{\boldsymbol{s}\in\hat{\mathcal{S}}^{\ell}}\phi(\boldsymbol{so})-\int\phi\;d\sigma^{\mathbb{M}}\right|=\left|e^{\lambda_\phi\epsilon^2}\frac{1}{|\hat{\mathcal{S}}|^{\ell}}\sum_{\boldsymbol{s}\in\hat{\mathcal{S}}^{\ell}}\langle\phi,\mathrm{H}_{\boldsymbol{so}}\rangle-\int\phi\;d\sigma^{\mathbb{M}}\right|$$
$$\leq\left\|\sum_{\boldsymbol{s}\in\hat{\mathcal{S}}^{\ell}}\frac{1}{|\hat{\mathcal{S}}|^{\ell}}e^{\lambda_\phi\epsilon^2}\,\mathrm{H}_{\boldsymbol{so}}-1_{\mathbb{M}}\right\|_{\mathrm{L}^2},$$

其中最后一步由 H¨older 不等式得出。我们的目标是使

$$\left\||\hat{\mathcal{S}}|^{-\ell}\sum_{\boldsymbol{s}\in\hat{\mathcal{S}}^{\ell}}e^{\lambda_\phi\epsilon^2}\,\mathrm{H}_{\boldsymbol{so}}-1_{\mathbb{M}}\right\|_{\mathrm{L}^2}\leq e^{\lambda_\phi\epsilon^2}\left\||\hat{\mathcal{S}}|^{-\ell}\sum_{\boldsymbol{s}\in\hat{\mathcal{S}}^{\ell}}\mathrm{H}_{\boldsymbol{so}}-1_{\mathbb{M}}\right\|_{\mathrm{L}^2}+e^{\lambda_\phi\epsilon^2}-1$$

足够小。由于

$$\lambda_\phi\epsilon^2\leq e^{\lambda_\phi\epsilon^2}-1\leq 2\lambda_\phi\epsilon^2 \tag{4.26}$$

若 $0\leq\lambda_\phi\epsilon^2\leq\ln 2$，则只需满足

$$\max\left\{\left\||\hat{\mathcal{S}}|^{-\ell}\sum_{\boldsymbol{s}\in\hat{\mathcal{S}}^{\ell}}\mathrm{H}_{\boldsymbol{so}}-1_{\mathbb{M}}\right\|_{\mathrm{L}^2},\;2\lambda_\phi\epsilon^2\right\}$$

足够小。在一般情形下，对于一个 L^2-范数为 1 的元素 $\phi\in\mathcal{E}_{\lambda_r}$，设

$$\phi=c_1\phi_{\lambda_{k_1},j_1}+\cdots+c_q\phi_{\lambda_{k_q},j_q},$$

上述推导可写成

$$\left|\frac{1}{|\hat{\mathcal{S}}|^{\ell}}\sum_{\boldsymbol{s}\in\hat{\mathcal{S}}^{\ell}}\phi(\boldsymbol{so})-\int\phi\;d\sigma^{\mathbb{M}}\right|$$
$$=\left|\sum_{a=1}^{q}c_a\left(e^{\lambda_{k_a}\epsilon^2}\frac{1}{|\hat{\mathcal{S}}|^{\ell}}\sum_{\boldsymbol{s}\in\hat{\mathcal{S}}^{\ell}}\langle\phi_{\lambda_{k_a},j_a},\mathrm{H}_{\boldsymbol{so}}\rangle-\int_{\mathbb{M}}\phi_{\lambda_{k_a},j_a}d\sigma^{\mathbb{M}}\right)\right|$$
$$\leq\sum_{a=1}^{q}|c_a|\cdot\left\|\sum_{\boldsymbol{s}\in\hat{\mathcal{S}}^{\ell}}\frac{1}{|\hat{\mathcal{S}}|^{\ell}}e^{\lambda_{k_i}\epsilon^2}\,\mathrm{H}_{\boldsymbol{so}}-1_{\mathbb{M}}\right\|_{\mathrm{L}^2}$$

回顾一下，H^{λ_r} 表示热核在 $\mathcal{E}_{\lambda_r}$ 上的正交投影，其中 $r\geq 0$为整数。对于任意 $r_0\geq r$，我们可以在上述计算中用截断热核$\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}^{r_0}$替换$\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}$，从而得到:

$$\left|\frac{1}{|\hat{\mathcal{S}}|^{\ell}}\sum_{\boldsymbol{s}\in\hat{\mathcal{S}}^{\ell}}\phi(\boldsymbol{so})-\int\phi\;d\sigma^{\mathbb{M}}\right|\leq\sum_{a=1}^{q}|c_a|\cdot\left\|\sum_{\boldsymbol{s}\in\hat{\mathcal{S}}^{\ell}}\frac{1}{|\hat{\mathcal{S}}|^{\ell}}e^{\lambda_{k_a}\epsilon^2}\,\mathrm{H}_{\boldsymbol{so}}^{\lambda_{r_0}}-1_{\mathbb{M}}\right\|_{\mathrm{L}^2}$$
$$\leq\left\|\sum_{\boldsymbol{s}\in\hat{\mathcal{S}}^{\ell}}\frac{1}{|\hat{\mathcal{S}}|^{\ell}}e^{\lambda_r\epsilon^2}\,\mathrm{H}_{\boldsymbol{so}}^{\lambda_{r_0}}-1_{\mathbb{M}}\right\|_{\mathrm{L}^2}\cdot\sum_{a=1}^{q}|c_a|$$
$$\leq\sqrt{s}\left(e^{\lambda_r\epsilon^2}\cdot\left\|\sum_{\boldsymbol{s}\in\hat{\mathcal{S}}^{\ell}}\frac{1}{|\hat{\mathcal{S}}|^{\ell}}\,\mathrm{H}_{\boldsymbol{so}}^{\lambda_{r_0}}-1_{\mathbb{M}}\right\|_{\mathrm{L}^2}+2\lambda_r\epsilon^2\right), \tag{4.27}$$

最后一步应用了柯西-施瓦茨不等式和不等式方程 (4.26)。根据方程 (4.3)，我们有

$$s \leq \dim \mathcal{E}_{\lambda_r} = C_{\mathbb{M}} \lambda_r^{\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}}$$

给定 $\upsilon \in (0,1)$，假设我们选取了足够小的 $\epsilon \in (0, 2^{-e})$、足够大的 $\ell > 0$，并且还适当地选取了 $r_0 \geq r$，使得

$$\max\left\{ \lambda_r \epsilon^2, \left\| \sum_{\boldsymbol{s} \in \hat{\mathcal{S}}^\ell} \frac{1}{|\hat{\mathcal{S}}|^\ell} \mathrm{H}_{\boldsymbol{so}}^{\lambda_{r_0}} - 1_{\mathbb{M}} \right\|_{\mathrm{L}^2} \right\} \leq \frac{\upsilon}{\lambda_r^{\frac{d_{\mathbb{M}}}{4}} C_{\mathbb{M}}^{\frac{1}{2}}} . \tag{4.28}$$

由方程 (4.27) 可知，$\hat{}\mathcal{S}^\ell \boldsymbol{o} \subseteq \mathbb{M}$ 是一个 3υ-近似设计。现在，根据引理 2.26，对于任意 $\epsilon \in (0,1)$ 和任意整数 $r_0 \geq 0$，有

$$\left\| \mathrm{H}_{\boldsymbol{so}}^{\lambda_{r_0}} \right\|_{\mathrm{L}^2} \leq \sqrt{C_{\mathbb{M}} \mathfrak{v}_{\mathbb{M}} 2^{-d_{\mathbb{M}} + \frac{\bar{d}_{\mathbb{M}}+1}{2}}} \epsilon^{-d_{\mathbb{M}} + \frac{\bar{d}_{\mathbb{M}}+1}{2}} .$$

并且，由不等式 (4.8)，有

$$\mathop{\mathbb{P}}_{\mathcal{S}} \left(\left\| \frac{1}{|\hat{\mathcal{S}}|^\ell} \sum_{\boldsymbol{s} \in \hat{\mathcal{S}}^\ell} \mathrm{H}_{\boldsymbol{so}}^{\lambda_{r_0}} - 1_{\mathbb{M}} \right\|_{\mathrm{L}^2} \leq \frac{1}{2^\ell} \left\| \mathrm{H}_{\boldsymbol{o}}^{\lambda_{r_0}} \right\|_{\mathrm{L}^2} \right) \geq 1 - \frac{2C_{\mathbb{M}}}{\eta} \exp\left(\frac{-|\mathcal{S}|}{16 \ln 2} \right) ,$$

$_{-\frac{d_{\mathbb{M}}}{}}$，其中 $\eta = \lambda_{r_0}{}^2$。由此可得

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2C_{\mathbb{M}}}{\eta} \exp\left(\frac{-|\mathcal{S}|}{16 \ln 2} \right) \leq & \mathop{\mathbb{P}}_{\mathcal{S}} \left(\left\| \frac{1}{|\hat{\mathcal{S}}|^\ell} \sum_{\boldsymbol{s} \in \hat{\mathcal{S}}^\ell} \mathrm{H}_{\boldsymbol{so}}^{\lambda_{r_0}} - 1_{\mathbb{M}} \right\|_{\mathrm{L}^2} \leq \frac{1}{2^\ell} \left\| \mathrm{H}_{\boldsymbol{o}}^{\lambda_{r_0}} \right\|_{\mathrm{L}^2} \right) \\ \leq & \mathop{\mathbb{P}}_{\mathcal{S}} \left(\left\| \frac{1}{|\hat{\mathcal{S}}|^\ell} \sum_{\boldsymbol{s} \in \hat{\mathcal{S}}^\ell} \mathrm{H}_{\boldsymbol{so}}^{\lambda_{r_0}} - 1_{\mathbb{M}} \right\|_{\mathrm{L}^2} \leq \frac{1}{2^\ell} \sqrt{C_{\mathbb{M}} \mathfrak{v}_{\mathbb{M}}} \epsilon^{-d_{\mathbb{M}} + \frac{\bar{d}_{\mathbb{M}}+1}{2}} \right) \end{aligned}$$

根据方程 (4.28)，我们必须选取 $\epsilon \in (0, 2^{-e})$，使得以下条件成立：

$$\epsilon = \lambda_r^{-\frac{d_{\mathbb{M}}+2}{2}} C_{\mathbb{M}}^{-\frac{1}{4}} \upsilon^{\frac{1}{2}} . \tag{4.29}$$

此外，假设我们选取满足以下条件的整数 $\ell > 0$

$$\ell \geq \log_2 \frac{1}{\upsilon} + \log_2 C_{\mathbb{M}} + \frac{d_{\mathbb{M}}}{4} \log_2 \lambda_r + \left(d_{\mathbb{M}} - \frac{\bar{d}_{\mathbb{M}}+1}{2} \right) \log_2 \frac{1}{\epsilon} \tag{4.30}$$

那么，方程 (4.28) 得以保证。最后，我们设定 $r_0 = r$，对于任意 $\delta \in (0, {}_1{}_2)$，我们设定

$$|\mathcal{S}| = 16 \ln 2 \ln \left(\frac{C_{\mathbb{M}} \lambda_r^{\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}}}{\delta} \right) , \tag{4.31}$$

上述讨论表明，只要令 $\mathscr{S} := \hat{}\mathcal{S}^\ell \boldsymbol{o}$ —，其中 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{M}$ 是等距变换的随机多重子集，其元素从 $\mathbb{K}$ 上的哈尔测度中独立抽取，并要求方程 (4.30) 和方程 (4.31) 成立，那么不等式方程 (4.23) 以至少 $1 - 2\delta$ 的概率成立，正如所需。□

4.3. Wasserstein 距离的界。在本小节中，我们假设可以通过预言机访问查询点处的函数值。我们先简要回顾 $\mathbb{R}^n$ 的子流形的二次暴露性这一概念，该概念最早出现在 [14] 中。

定义4.32. 若紧子流形 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ 在某点 $m \in M$ 处对某个 $R_m > 0$ 二次R_m暴露，则称其在该点处对 $R_m > 0$ 二次暴露，如果存在一个 $\boldsymbol{x}_m \in \mathbb{R}^n$ 使得$M \subseteq B_{R_m}(\boldsymbol{x}_m, \mathbb{R}^n)$且 $m \in \partial B_{R_m}(\boldsymbol{x}_m, \mathbb{R}^n) \cap M$。若 M 在每个 $m \in M$处都对 R_m二次暴露，则称 M 一致二次暴露。

注4.33. 欧几里得球面的任意子流形都是一致二次暴露的。环面 $(\mathbb{S}^1)^d$ 对于 $d > 1$并非一致二次暴露。

注4.34. 令 $\partial_{\mathbb{M}}(\cdot,\cdot)$表示 $\mathbb{M}$上的黎曼距离。根据纳什等距嵌入定理，存在一个等距嵌入

$$\chi : (\mathbb{M},\ \partial_{\mathbb{M}}) \to (\mathbb{R}^{d_{\mathbb{M}}^2+d_{\mathbb{M}}}, \|\ \|_2)\,.$$

令 $R > 0$ 满足：半径为 $R > 0$ 且中心为 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^{d_{\mathbb{M}}^2+d_{\mathbb{M}}}$的闭球 $\mathbb{B}_R(\boldsymbol{x}_0)$满足 $\chi(\mathbb{M}) \subseteq \mathbb{B}_R(0)$。通过连续减小 R，我们可以找到一个 R_0，使得$\chi(\mathbb{M}) \subseteq \mathbb{B}_{R_0}(\boldsymbol{x}_0)$且 $\chi(\mathbb{M}) \cap \mathbb{S}_{R_0}(\boldsymbol{x}_0) \neq \emptyset$，其中 $\mathbb{S}_{R_0}(\boldsymbol{x}_0)$表示半径为 R_0 且中心为 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^{d_{\mathbb{M}}^2+d_{\mathbb{M}}}$的球面。取一点 $\boldsymbol{p} = \chi(\boldsymbol{m}_0) \in \chi(\mathbb{M}) \cap \partial\mathbb{B}_{R_0}(0)$。对于任意 $\boldsymbol{m} \in \mathbb{M}$，令 $\sigma^{\mathbb{M}} : [-1,1] \to \mathbb{M}$ 为一条测地线，使得 $\sigma^{\mathbb{M}}(-1) = \boldsymbol{m}$ 且$\sigma^{\mathbb{M}}(1) = \boldsymbol{m}_0$。令 $\zeta : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ 为满足 $\zeta(\sigma^{\mathbb{M}}(t)) = \sigma^{\mathbb{M}}(-t)$的一个等距变换；则$(\chi \circ \zeta)(\mathbb{M}) = \chi(\mathbb{M}) \subseteq \mathbb{B}_{R_0}(\boldsymbol{x}_0)$，且 $\boldsymbol{p} = (\chi \circ \zeta)(\boldsymbol{m})$。因此，对于任意点 $\boldsymbol{m} \in \mathbb{M}$，存在一个等距嵌入

$$\chi_{\boldsymbol{m}} : (\mathbb{M},\ \partial_{\mathbb{M}}) \to (\mathbb{R}^{d_{\mathbb{M}}^2+d_{\mathbb{M}}}, \|\ \|_2)\,,$$

使得 $\chi_{\boldsymbol{m}}(\mathbb{M})$ 在 $\chi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{m})$ 处是二次暴露的。

引理4.35. 设 $\sigma^{\mathbb{M}}$ 是由 $\mathbb{K}$ 上的哈尔测度诱导的 $\mathbb{M}$ 上的概率测度。对于任意固定的 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{M}$，以及任意 $t > 0$，令其为 $\mathbb{M}$ 上具有密度 $\mathrm{H}_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x}, t)$ 的随机变量，并令 $\boldsymbol{x}_t := \partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{X}_t)$。那么

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{x}_t^2] \leq d_{\mathbb{M}} t \tag{4.36}$$

引理4.35的证明。为简化记号，我们将 $\mathbb{M}$ 上时刻 t 的热核 $\mathrm{H}_t(\boldsymbol{x}) := \mathrm{H}_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x}, t)$ 记作，并令 ν_t^* 为与顶形式相对应的博雷尔测度

$$d\nu_t^* = \mathrm{H}_t(\boldsymbol{x})\ d\sigma^{\mathbb{M}}$$

令 $\{\boldsymbol{x}_u \mid u \in [0,t]\}$ 为 $\mathbb{M}$ 中从 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{M}$ 出发、无穷小生成元为.....的布朗运动

$$\mathcal{H}_{\mathbb{M}} := \frac{d}{dt} - \frac{1}{2}\Delta_{\mathbb{M}}\,.$$

对于每个正整数 $m > 0$，考虑等分划分

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = t$$

其中 $t_{j+1} - t_j = m^{-1}t$ 对于 $j \in \{0, 1, \cdots, m-1\}$。定义 $\{\boldsymbol{x}_j^{(m)}\}_{j=0}^m$ 使得 $\boldsymbol{x}_j^{(m)} = \boldsymbol{x}_{\frac{jt}{m}}$。如注4.34所述，我们固定一个闭等距嵌入

$$\chi_{\boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)}} : (\mathbb{M},\ \partial_{\mathbb{M}}) \to (\mathbb{R}^{d_{\mathbb{M}}^2+d_{\mathbb{M}}}, \|\ \|_2)\,,$$

使得 $\chi_{\boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)}}(\mathbb{M}) \subseteq \mathbb{S}_{R_0}(\boldsymbol{a})$，并且

$$\boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)} \in \chi_{\boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)}}(\mathbb{M}) \cap \mathbb{S}_{R_0}(\boldsymbol{a})\,,$$

确保 $\chi_{\boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)}}(\boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)})$ 处具有二次暴露性。此外，通过对 $\mathbb{R}^{d_{\mathbb{M}}^2+d_{\mathbb{M}}}$ 施加仿射变换，我们可以假设 $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$。

现在将 $\mathbb{M}$ 视为 $\chi_{\boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)}}(\mathbb{M})$。注意，

$$\begin{aligned}\partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{x}_0)^2 &= \|\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}_0\|_2^2 \\ &= \sum_{j=1}^{m} \|\boldsymbol{x}_j^{(m)} - \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)}\|_2^2 + 2\sum_{j=1}^{m} \langle \boldsymbol{x}_j^{(m)} - \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)},\ \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)} \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{m} \partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}_j^{(m)}, \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)})^2 + 2\sum_{j=1}^{m} \langle \boldsymbol{x}_j^{(m)} - \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)},\ \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)} \rangle\,, \end{aligned} \tag{4.37}$$

假设 $\boldsymbol{v}_{j-1}^{(m)} \in T_{\boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)}}(\mathbb{M})$ 是一个单位范数切向量。记 $\mathbb{S}_{R_0} := \mathbb{S}_{R_0}(\boldsymbol{a})$，并令 Π 为到 $T_{\boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)}}(\mathbb{S}_{R_0})$ 上的正交投影。对于任意充分小的 $\epsilon_0 > 0$，Federer 切触条件（见 [13]）蕴含存在 $\boldsymbol{p}_{\epsilon_0} \in \mathbb{M}$ 使得 $\|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)}\|_2 < \epsilon_0$，且

$$\left\| \boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)}}{\|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)}\|_2} \right\|_2 < \epsilon_0\,.$$

若 $\boldsymbol{q} \in \mathbb{S}_{R_0}$ 是连接 $\boldsymbol{p}$ 与 $\Pi(\boldsymbol{p})$ 的线段的交点，则容易验证 $\|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)}\|_2 < \epsilon_0$，且

$$\left\| \boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{q} - \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)}}{\|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)}\|_2} \right\|_2 < \epsilon_0\,.$$

特别地，$T_{\boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)}}(\mathbb{M}) \subseteq T_{\boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)}}\mathbb{S}_{R_0}$。

对于每个 $j \in [m]$，令 $T_{(m)\,j-1}$ 表示点 $\boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)}$ 处的仿射切空间 $T_{\boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)}}(\mathbb{S}_{R_0})$。记

$$\boldsymbol{z}_{j-1}^{(m)} := \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{u} \in T_{j-1}^{(m)}} \|\boldsymbol{u}\|_2, \qquad \boldsymbol{p}_{j-1}^{(m)} := \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{u} \in T_{j-1}^{(m)}} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}_j^{(m)}\|_2\,. \tag{4.38}$$

有如下正交关系：

$$\boldsymbol{p}_{j-1}^{(m)} - \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)} \perp \boldsymbol{z}_{j-1}^{(m)}, \qquad \text{and} \qquad \boldsymbol{x}_j^{(m)} - \boldsymbol{p}_{j-1}^{(m)} \perp \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)} - \boldsymbol{z}_{j-1}^{(m)}\,. \tag{4.39}$$

断言 4.40。

$$\langle \boldsymbol{x}_j^{(m)} - \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)}, \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)} \rangle \le 0 \tag{4.41}$$

断言 4.40 的证明。令 $\boldsymbol{q}_0^{(m)} \in \mathbb{S}_{R_0}$ 为 $\mathbb{S}_{R_0}$ 与连接 $\boldsymbol{x}_0^{(m)}$ 和 $\boldsymbol{z}_{j-1}^{(m)}$ 的线段的交点；类似地，令 $\boldsymbol{q}_j^{(m)} \in \mathbb{S}_{R_0}$ 为 $\mathbb{S}_{R_0}$

与连接 $\boldsymbol{x}_j^{(m)}$ 和 $\boldsymbol{p}_{j-1}^{(m)}$ 的线段的交点。由二次暴露性可得

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}\langle \boldsymbol{x}_j^{(m)} - \boldsymbol{p}_{j-1}^{(m)},\ \boldsymbol{z}_{j-1}^{(m)}\rangle &= \operatorname{sgn}\langle \boldsymbol{x}_j^{(m)} - \boldsymbol{p}_{j-1}^{(m)},\ \boldsymbol{z}_{j-1}^{(m)}\rangle \\ &= \operatorname{sgn}\langle \boldsymbol{q}_j^{(m)} - \boldsymbol{p}_{j-1}^{(m)},\ \boldsymbol{z}_{j-1}^{(m)} - \boldsymbol{q}_0^{(m)}\rangle\end{aligned}$$

令 $\mathbf{n}$ 为指向 $\mathbb{S}_{R_0}$ 内部的 $T_{j-1}^{(m)}$ 的单位法向量；则正交关系

$$\boldsymbol{q}_j^{(m)} - \boldsymbol{p}_{j-1}^{(m)} \parallel \boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{z}_{j-1}^{(m)} - \boldsymbol{q}_0^{(m)} \parallel -\boldsymbol{n}\,,$$

这就证明了该断言。 □

断言 4.42。

$$\mathbb{E}\left[\langle \boldsymbol{x}_j^{(m)} - \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)},\ \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)}\rangle\right] \le 0 \tag{4.43}$$

断言 4.42 的证明。注意到

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{x}_j^{(m)} - \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)},\ \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)}\rangle &= \langle \boldsymbol{p}_{j-1}^{(m)} - \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)},\ \boldsymbol{z}_{j-1}^{(m)}\rangle + \langle \boldsymbol{x}_j^{(m)} - \boldsymbol{p}_{j-1}^{(m)},\ \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)} - \boldsymbol{z}_{j-1}^{(m)}\rangle \\ &\quad + \langle \boldsymbol{x}_j^{(m)} - \boldsymbol{p}_{j-1}^{(m)},\ \boldsymbol{z}_{j-1}^{(m)}\rangle + \langle \boldsymbol{p}_{j-1}^{(m)} - \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)},\ \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)} - \boldsymbol{z}_{j-1}^{(m)}\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x}_j^{(m)} - \boldsymbol{p}_{j-1}^{(m)},\ \boldsymbol{z}_{j-1}^{(m)}\rangle + \langle \boldsymbol{p}_{j-1}^{(m)} - \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)},\ \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)} - \boldsymbol{z}_{j-1}^{(m)}\rangle \\ &\le \langle \boldsymbol{p}_{j-1}^{(m)} - \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)},\ \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)} - \boldsymbol{z}_{j-1}^{(m)}\rangle\,,\end{aligned}$$

最后两步由方程 (4.39) 和方程 (4.41) 得出。应用控制收敛定理（由于 $\mathbb{M}$ 的紧致性）可得

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\left[\langle \boldsymbol{p}_{j-1}^{(m)} - \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)},\ \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)} - \boldsymbol{z}_{j-1}^{(m)}\rangle\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\lim_{m\to\infty} \langle \boldsymbol{p}_{j-1}^{(m)} - \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)},\ \boldsymbol{x}_{j-1}^{(m)} - \boldsymbol{z}_{j-1}^{(m)}\rangle\right] \\ &= 0\,,\end{aligned} \tag{4.44}$$

这就证明了该断言。 □

断言 4.45。对于 $j \in [m]$，令

$$s_j := \mathbb{E}^{\boldsymbol{x}_0}\left[\partial_{\mathbb{M}}\left(\boldsymbol{x}_{t_j}^{(m)}, \boldsymbol{x}_{t_{j-1}}^{(m)}\right)^2\right]\,; \tag{4.46}$$

then

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} s_j \le \frac{1}{2} d_{\mathbb{M}} t\,. \tag{4.47}$$

断言 4.45 的证明。定义 $u(t,\boldsymbol{x}) := \mathbb{E}^{\boldsymbol{x}}[\partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_t)^2]$；则 $u(t,\boldsymbol{x})$ 满足 [21, 定理 4.2。1]初边值问题

$$\mathcal{H}_{\mathbb{M}} u = 0, \qquad \lim_{t\to 0^+} u(t,\boldsymbol{x}) = 0 \tag{4.48}$$

特别地，有

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+} \frac{u(t,\boldsymbol{x})}{t} &= \frac{d}{dt} u(t,\boldsymbol{x})\bigg|_{t=0^+} \\ &= \frac{1}{2}\Delta_{\mathbb{M}} \partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_t)^2\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_t}\end{aligned}$$

对 $\mathbb{M}$ 上的黎曼度量进行局部泰勒展开（见 [16]）可得

$$\Delta_{\mathbb{M}} \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_t)^2 \Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_t} \leq d_{\mathbb{M}} \,. \tag{4.49}$$

由于

$$\begin{aligned} s_j &= \mathbb{E}^{\boldsymbol{x}_0}\left[\partial_{\mathbb{M}}\left(\boldsymbol{x}_{t_j}^{(m)}, \boldsymbol{x}_{t_{j-1}}^{(m)}\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}^{\boldsymbol{x}_0}\left[\partial_{\mathbb{M}}\left(\boldsymbol{x}_{\frac{t}{m}}, \boldsymbol{x}_0\right)^2\right] \end{aligned}$$

对所有 $j \in [m]$，我们得出

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} s_j &= t \lim_{m\to\infty} \frac{\mathbb{E}^{\boldsymbol{x}_0}\left[\partial_{\mathbb{M}}\left(\boldsymbol{x}_{\frac{t}{m}}, \boldsymbol{x}_0\right)^2\right]}{\frac{t}{m}} \\ &\leq \frac{1}{2} d_{\mathbb{M}} t \,, \end{aligned}$$

从而完成该断言的证明。 □

最后，为了完成引理4.35的证明，请注意

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\boldsymbol{x}_t^2] &= \int_{\mathbb{M}} \partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x})^2 \, \mathrm{H}_t(\boldsymbol{x}) \; \sigma^{\mathbb{M}}(d\boldsymbol{x}) \\ &= \mathbb{E}^{\boldsymbol{x}_0}[\partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_t)^2] \,, \end{aligned}$$

其中，最后一个期望是对从 $\boldsymbol{x}_0$ 出发、无穷小生成元为 $\mathcal{H}_{\mathbb{M}}$ （如方程(2.15)所示）的布朗运动 $\{\boldsymbol{x}_t; t \geq 0\}$ 取的。由方程(4.37)、方程(4.44)和方程(4.47)，即可得到该引理。□

接下来，我们需要应用 Kantorovi˘c 和 Rubin˘ste´ın 提出的以下对偶定理，该定理将 1- Wasserstein距离与 1-Lipschitz 函数的积分联系起来；更多细节和证明见 [23] 。

定理 4.50（Kantorovi˘c - Rubin˘ste´ın）。设 $(\mathbb{M}, \partial_{\mathbb{M}})$ 是一个紧连通黎曼流形，且 $\mathscr{P}(\mathbb{M})$ 是 $\mathbb{M}$ 上概率测度的空间，并配备 1-Wasserstein 距离 $W_1(\cdot,\cdot)$。对于任意 $\sigma^{\mathbb{M}}, \nu \in \mathscr{P}(\mathbb{M})$，以下等式成立：

$$W_1(\mu, \nu) = \sup_{\phi \in \mathrm{Lip}_1(\mathbb{M})} \left(\int_{\mathbb{M}} \phi \; d\sigma^{\mathbb{M}} - \int_{\mathbb{M}} \phi \; d\nu\right) \tag{4.51}$$

现在，我们可以正式陈述关于上述构造的覆盖的均匀分布结果。

定理 4.52. 设 $\mathcal{S} \subset \mathbb{K}$ 是一个非空有限多重子集，其元素从 $\mathbb{K}$ 上的哈尔测度中独立随机选取。令 $\delta \in (0, 1\,2)$，并假设 $\epsilon \in (0, 2^{-e})$ 足够小。假设 $\mathcal{S}$的基数满足

$$|\mathcal{S}| = 16 \ln 2 \left(\ln C_{\mathbb{M}} + \frac{d_{\mathbb{M}}}{4} \log_2\left(\tfrac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right) + \frac{d_{\mathbb{M}}}{2} \log_2 \log_2\left(\tfrac{d_{\mathbb{M}}}{2\epsilon^2}\right) + \ln \frac{1}{e\delta}\right) . \tag{4.53}$$

设 $\ell > 0$ 是一个满足以下条件的整数

(4.54)
$$\ell \geq \left(d_{\mathbb{M}} - \frac{\bar{d}_{\mathbb{M}}+1}{2}\right)\log_2\frac{1}{\epsilon} + \log_2\left(\frac{6C_{\mathbb{M}}}{\mathfrak{v}_{\mathbb{M}}}\right) + \frac{d_{\mathbb{M}}}{4}\log_2\left(\frac{1}{\pi r_{\epsilon,\mathbb{M}}^2}\right) + \frac{1}{2}\log_2\Gamma\left(\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}+1\right).$$

固定一个 $\boldsymbol{p}_0 \in \mathbb{M}$，并令 ν 为支撑在随机多重子集 $\mathscr{S} := \hat{}\mathcal{S}^\ell \boldsymbol{p}_0 \subseteq \mathbb{M}$ 上的经验测度；若 ϵ 足够小，则

$$W_1(\sigma^{\mathbb{M}}, \nu) \leq 2\sqrt{d_{\mathbb{M}}\epsilon}.$$

证明。令 $\mathbf{Lip}^{1,0}(\mathbb{M})$ 表示 $\mathbb{M}$ 上均值为零的 $\mathbf{Lip}_1$-函数集合。根据定理 定理 4.50，只需证明

(4.55)
$$\sup_{\phi\in \mathrm{Lip}_{1,0}(\mathbb{M})}\left(\int_{\mathbb{M}}\phi\, d\sigma^{\mathbb{M}} - \int_{\mathbb{M}}\phi\, d\nu\right) < 2\sqrt{d_{\mathbb{M}}\epsilon}$$

注意，对于任意这样的函数 $\phi \in \mathbf{Lip}^{1,0}(\mathbb{M})$，若 $\phi(\boldsymbol{x}_0) = \|\phi\|_{L^\infty}$，则

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{M}}\phi(\boldsymbol{x})\, d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}) \\
&= \int_{\mathbb{M}}\phi(\boldsymbol{x}_0)\, d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}) + \int_{\mathbb{M}}\big(\phi(\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{x}_0)\big)\, d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}) \\
&= \phi(\boldsymbol{x}_0) + \int_{\mathbb{M}}\big(\phi(\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{x}_0)\big)\, d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}) \\
\Rightarrow \qquad \phi(\boldsymbol{x}_0) &\leq \int_{\mathbb{M}}|\phi(\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{x}_0)|\, d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}) \\
&\leq \int_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)\, d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}) \\
&\leq \mathrm{diam}(\mathbb{M})
\end{aligned}$$

当 $t > 0$ 足够小时，令 ν_t^* 为 $\mathbb{M}$ 上密度为下式的 Borel概率测度：

$$\frac{d\nu_t^*(\boldsymbol{x})}{d\sigma^{\mathbb{M}}} = \frac{1}{|\hat{\mathcal{S}}^\ell|}\sum_{\boldsymbol{p}\in\hat{\mathcal{S}}^\ell\boldsymbol{p}_0}\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}, t)$$

那么，对于 $t = \epsilon^2$，有

$$\begin{aligned}
W_1(\sigma^{\mathbb{M}}, \nu_t^*) &= \sup_{\phi\in\mathrm{Lip}_{1,0}(\mathbb{M})}\left|\int_{\mathbb{M}}\phi(\boldsymbol{x})\, d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}) - \int_{\mathbb{M}}\phi(\boldsymbol{x})\, d\nu_t^*(\boldsymbol{x})\right| \\
&\leq \sup_{\phi\in\mathrm{Lip}_{1,0}(\mathbb{M})}\int_{\mathbb{M}}|\phi(\boldsymbol{x})|\cdot\left|1_{\mathbb{M}} - \tfrac{1}{|\hat{\mathcal{S}}|^\ell}\textstyle\sum_{\boldsymbol{p}\in\hat{\mathcal{S}}^\ell\boldsymbol{p}_0}\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}, t)\right| d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}) \\
&\leq \sup_{\phi\in\mathrm{Lip}_{1,0}(\mathbb{M})}\big\|\phi\big\|_{L^\infty}\cdot\int_{\mathbb{M}}\left|1_{\mathbb{M}} - \tfrac{1}{|\hat{\mathcal{S}}|^\ell}\textstyle\sum_{y\in\hat{\mathcal{S}}^\ell\boldsymbol{p}_0}\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}, t)\right| d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}) \\
&\leq \mathrm{diam}(\mathbb{M})\epsilon^{\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}}d_{\mathbb{M}}^{-\frac{d_{\mathbb{M}}}{4}} \qquad (4.56)
\end{aligned}$$

概率至少为 $1-\delta$；这里，最后一步是由方程 (4.15) 中的强制等式得出的。

对于任意函数 $\phi \in \mathbf{Lip}^{1,0}(\mathbb{M})$，定义 $\phi_t : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ 为

$$\tilde{\phi}_t(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\hat{S}^\ell|}\sum_{\boldsymbol{p}\in\hat{S}^\ell\boldsymbol{p}_0}\phi(\boldsymbol{p})\,\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}, t)$$

由 $\mathbb{M}$ 的随机完备性可知，$\int_{\mathbb{M}} \mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x},t)\ d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}) = 1$；因此，令 $t=\epsilon^2$，可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{M}} \tilde{\phi}_{\epsilon^2}(\boldsymbol{x})\ d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{|\hat{S}^\ell|}\sum_{\boldsymbol{p}\in\hat{S}^\ell \boldsymbol{p}_0}\phi(\boldsymbol{p})\int_{\mathbb{M}}\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x},t)\ d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x})\\ &= \int_{\mathbb{M}}\phi(\boldsymbol{x})\ d\nu(\boldsymbol{x})\,, \qquad (4.57)\end{aligned}$$

对于任意 $\phi\in \mathrm{L}^1(\sigma^{\mathbb{M}})$。由 $t=\epsilon^2$ 可知

$$\begin{aligned}W_1(\nu^*_{\epsilon^2},\nu) &= \left|\int_{\mathbb{M}}\phi(\boldsymbol{x})\ d\nu^*_t(\boldsymbol{x}) - \int_{\mathbb{M}}\tilde{\phi}_t(\boldsymbol{x})\ d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x})\right|\\ &= |\hat{\mathcal{S}}|^{-\ell}\left|\sum_{\boldsymbol{p}\in\hat{\mathcal{S}}^\ell\boldsymbol{p}_0}\int_{\mathbb{M}}\big(\phi(\boldsymbol{x})-\phi(\boldsymbol{p})\big)\,\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x},t)\ d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x})\right|\\ &\le |\hat{\mathcal{S}}|^{-\ell}\sum_{\boldsymbol{p}\in\hat{\mathcal{S}}^\ell\boldsymbol{p}_0}\int_{\mathbb{M}}\big|\phi(\boldsymbol{x})-\phi(\boldsymbol{p})\big|\,\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x},t)\ d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x})\\ &\le |\hat{\mathcal{S}}|^{-\ell}\sum_{\boldsymbol{p}\in\hat{\mathcal{S}}^\ell\boldsymbol{p}_0}\int_{\mathbb{M}}\partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})\ \mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x},t)\ d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x})\\ &\le \sqrt{d_{\mathbb{M}}}\epsilon \qquad (4.58)\end{aligned}$$

根据引理4.35，并对 $\partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}) = \partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})\cdot 1_{\mathbb{M}}$ 关于 $\mathrm{H}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x},t)\ d\sigma^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{x})$ 积分时应用 Hölder 不等式。因此，当 $t=\epsilon^2>0$ 足够小时，方程 (4.56)、(4.57) 和 (4.58) 得出

$$\begin{aligned}W_1(\sigma^{\mathbb{M}},\nu) &\le W_1(\sigma^{\mathbb{M}},\nu^*_t) + W_1(\nu^*_t,\nu)\\ &\le \epsilon^{\frac{d_{\mathbb{M}}}{2}} d_{\mathbb{M}}^{-\frac{d_{\mathbb{M}}}{4}} + \sqrt{d}_{\mathbb{M}}\epsilon\\ &\le 2\sqrt{d_{\mathbb{M}}\epsilon}\,.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

注 4.59. 从上述证明（结合注 3.8）可立即看出，若忽略低维情形 $d_{\mathbb{M}}\le 6$，定理 4.52 中的上界可改进为 $2\sqrt{d_{\mathbb{M}}\epsilon}$ 。

4.4. 持久同调。本小节中，我们假设可以通过预言机访问 $\mathbb{M}$ 中的两两测地距离。

定义 4.60。一族

$$\{\chi_x^y : \mathbb{S}_{\boldsymbol{x}} \to \mathbb{S}_y\}_{0\le x\le y}$$

有限单纯复形之间的态射称为持久的，如果对所有 $0\le x\le y\le z$ 以下条件均成立：

$$\chi_y^z \circ \chi_x^y = \chi_x^z$$

注 4.61。从函子角度来说，令 FSC 为有限单纯复形及其态射所构成的范畴。那么，持久族就是从偏序集 $(\mathbb{R},\le)$ 到 FSC 的函子。

定义 4.62。对于一个持久族

$$\{\chi_{\boldsymbol{x}}^{y} : \mathbb{S}_{\boldsymbol{x}} \to \mathbb{S}_{y}\}_{0\leq x\leq y},$$

q 阶持久 p-同调，即 $\mathbb{S}_{\boldsymbol{x}}$ 的 $\mathrm{PH}_{p,q}(\mathbb{S}_{\boldsymbol{x}})$，是自然映射的像

$$(\chi_{\boldsymbol{x}}^{x+q})_{\star} : \mathrm{H}_p(\mathbb{S}_{\boldsymbol{x}}) \to \mathrm{H}_p(\mathbb{S}_{x+q}).$$

此外，当 $\{\chi_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{y}} : \mathbb{S}_x \to \mathbb{S}_y\}_{0\leq x\leq y}$ 是 Vietoris-Rips 复形时，这些群

$$\mathrm{PH}_p(\mathbb{M}) := \chi_{\boldsymbol{x}}^{x+q})_{\star}(\mathrm{H}_p(\mathbb{S}_{\boldsymbol{x}})$$

称为该复形的持久同调。

定义 4.63。设 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{K}$ 是由来自 $\mathbb{K}$ 的独立 Haar 样本组成的随机子集，并令 $\hat{\mathcal{S}} := \mathcal{S} \sqcup \mathcal{S}^{-1}$。对于任意整数 $\ell > 0$，考虑前一节中构造的子集 $\mathscr{S}_\ell := \hat{\mathcal{S}}^{\ell}\boldsymbol{p}_0 \subseteq \mathbb{M}$。固定每个 $\mathscr{S}_\ell$ 中各点的一个排序，使其在 ℓ 的范围内保持一致。对于任意 $x \geq 0$，令 $\mathscr{S}_{\ell,x}$ 为顶点集为 $\mathscr{S}_\ell$、半径为 x 的 Vietoris-Rips 复形。因此，$\mathscr{S}_{\ell,x}$ 中的一个 t-单纯形是满足如下条件的子集 $\{\boldsymbol{m}_0, \ldots, \boldsymbol{m}_t\} \subseteq \mathscr{S}_\ell$：对于每个 $j_1, j_2 \in \{0, 1, \ldots, t\}$，均有 $\partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{m}_{j_1}, \boldsymbol{m}_{j_2}) < x$。对于每个 $0 \leq x \leq y$，令 $\chi^{x}{}_{,\ell}{}^{y} : \mathscr{S}_{\ell,x} \to \mathscr{S}_{\ell,y}$ 为单纯形复形的自然包含映射。因此，态射

$$\chi_{\ell}^{x,y} : \mathscr{S}_{\ell,x} \to \mathscr{S}_{\ell,y},\ 0 \leq x \leq y$$

构成一个有限单纯复形的持久族。

对于维数为 $d_{\mathbb{M}}$ 的紧致连通黎曼对称空间，经过标准论证即可得出以下结果。

引理 4.64. 设 $\tau > 0$ 为 $\mathbb{M}$ 的（下确界）单射半径。假设 $\mathcal{S} \subset \mathbb{K}$ 是一个非空有限多重子集，其元素独立地从 $\mathbb{K}$ 上的哈尔测度中随机选取。令 $\delta \in (0, 1/2)$，并假设 $\epsilon \in (0, 2^{-e})$ 足够小。假设 $\mathcal{S}$ 的基数满足

$$|\mathcal{S}| = 16 \ln 2 \left(\ln C_{\mathbb{M}} + \frac{d_{\mathbb{M}}}{4} \log_2 \left(\tfrac{d_{\mathbb{M}}}{2e^2} \right) + \frac{d_{\mathbb{M}}}{2} \log_2 \log_2 \left(\tfrac{d_{\mathbb{M}}}{2e^2} \right) + \ln \frac{1}{e\delta} \right). \tag{4.65}$$

设 $\ell > 0$ 为满足以下条件的整数

$$\ell \geq \left(d_{\mathbb{M}} - \tfrac{\bar{d}_{\mathbb{M}}+1}{2} \right) \log_2 \frac{1}{\epsilon} + \log_2 \left(\tfrac{6C_{\mathbb{M}}}{\mathfrak{v}_{\mathbb{M}}} \right) + \frac{d_{\mathbb{M}}}{4} \log_2 \left(\tfrac{1}{\pi r_{\epsilon,\mathbb{M}}^2} \right) + \frac{1}{2} \log_2 \Gamma \left(\tfrac{d_{\mathbb{M}}}{2} + 1 \right), \tag{4.66}$$

其中

$$r_{\epsilon,\mathbb{M}} = 2\epsilon \sqrt{\ln \frac{3C_{\mathbb{M}}}{\epsilon^{2d-1}}}$$

满足 $r_{\epsilon,\,\mathbb{M}} < 4^{-1}\tau$；那么，以至少 $1 - 2\delta$ 的概率，$\mathscr{S}_{\ell,\,r_{\epsilon,\,\mathbb{M}}}$ 的几何实现（如定义 4.63 所述）与 $\mathbb{M}$ 同伦等价。

证明。我们假设随机子集 $\mathscr{S}_\ell \subseteq \mathbb{M}$ 是 $\mathbb{M}$ 的 $r_{\epsilon,\,\mathbb{M}}$-覆盖；根据定理 4.10，该假设以至少 $1 - 2\delta$ 的概率成立。这些族

$$\mathscr{O}_{r_{\epsilon,\mathbb{M}}} := \{\mathrm{B}_{r_{\epsilon,\mathbb{M}}}(\boldsymbol{m}) : \boldsymbol{m} \in \mathscr{S}_\ell\},\ \mathscr{O}_{2r_{\epsilon,\mathbb{M}}} := \{\mathrm{B}_{2r_{\epsilon,\mathbb{M}}}(\boldsymbol{m}) : \boldsymbol{m} \in \mathscr{S}_\ell\}$$

以 $\mathscr{S}_\ell$ 中各点为中心的开测地球覆盖——半径分别为 $r_{\epsilon,\,\mathbb{M}} \in (0, \frac{\tau}{4})$ 和 $2r_{\epsilon,\,\mathbb{M}} \in (0, \frac{\tau}{2})$——构成了 $\mathbb{M}$ 的一个开覆盖；此外，$r_{\epsilon,\,\mathbb{M}} \in (0, \frac{\tau}{4})$ 所保证的性质确保这些覆盖中的每个测地球都通过指数映射与一个欧几里得开球微分同胚，而这类测地球的有限交集与欧几里得空间中的星形开子集微分同胚

´空间。因此，根据神经引理，基于 $\mathscr{O}_{r_{\epsilon,\,\mathbb{M}}}$ 和 $\mathscr{O}_{2r_{\epsilon,\,\mathbb{M}}}$ 的 Čech 神经 $\mathscr{C}_{r_{\epsilon,\,\mathbb{M}}}$ 和 $\mathscr{C}_{2r_{\epsilon,\,\mathbb{M}}}$ 分别与 $\mathbb{M}$ 具有相同的同伦型。由于´ Vietoris-Rips 神经 $\mathscr{S}_{r_{\epsilon,\,\mathbb{M}}}$ 与 Čech 神经交错，如

$$\mathscr{C}_{r_{\epsilon,\mathbb{M}}} \subseteq \mathscr{S}_{\ell,r_{\epsilon,\mathbb{M}}} \subseteq \mathscr{C}_{2r_{\epsilon,\mathbb{M}}},$$

引理得证。 □

注 4.67。通过应用 Vietoris-Rips 复形和几何实现函子，抽象黎曼流形 $\mathbb{M}$ 的拓扑不变量可与欧几里得空间中某个子空间的拓扑不变量对应起来（尽管其维数极其庞大）。

回忆（见 [4]），对于带有度量 d_X 和测度 μ_X 的紧致度量测度空间（X，d_X，μ_X），定义

$$\Phi^{q,n}_{X,d_X,\mu_X} := (\mathrm{PH}_q)_\star(\mu_X^{\otimes n}),$$

它是条形码空间 $\mathcal{B}$ 中的一个测度。设 $\mathbb{M}$ 是一个维数为 d、配备黎曼度量 $\partial_{\mathbb{M}}$ 的紧致连通黎曼对称空间，并设 $\sigma^{\mathbb{M}}$ 是由 Haar 测度诱导的 $\mathbb{K}$-不变概率测度。令 $\mathscr{S}_\ell := \hat{}\mathcal{S}^\ell \boldsymbol{p}_0$，并令 $\sigma_\ell^{\mathbb{M}}$ 为支撑在 $\mathscr{S}_\ell$ 上的经验概率测度。

定理 4.68。对于 $\mathbb{M}$ 的任意非空等距变换子集 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{K}$，以及任意整数 $\ell \geq 1$ 和 $q \geq 0$，其中 $n = \lceil \hat{}\mathcal{S} |^\ell$，下列不等式成立：

$$\frac{1}{n} \cdot d_{\mathrm{Pr}}\left(\Phi^{q,n}_{\mathbb{M},\partial_{\mathbb{M}},\sigma^{\mathbb{M}}}, \Phi^{q,n}_{\mathscr{S}_\ell,\partial_{\mathbb{M}},\sigma_\ell^{\mathbb{M}}}\right) \leq \mathrm{W}_1^{\frac{1}{2}}(\sigma^{\mathbb{M}}, \sigma_\ell^{\mathbb{M}}) \tag{4.69}$$

证明。我们按照 [4, 定理 5.2] 中的论证进行。由于 Wasserstein 距离在 $\mathscr{P}(\mathbb{M}\times\mathbb{M})$ 上诱导紧致拓扑——$\mathbb{M}\times\mathbb{M}$ 上概率测度构成的空间，因此存在一个耦合 $\lambda \in \Pi(\sigma^{\mathbb{M}}, \sigma_\ell^{\mathbb{M}})$，使得

$$W_1(\sigma^{\mathbb{M}}, \sigma_\ell^{\mathbb{M}}) = \mathop{\mathbb{E}}_{\lambda}[\partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2)]$$

假设 $W_1(\sigma^{\mathbb{M}}, \sigma_\ell^{\mathbb{M}}) = \epsilon^2_{q,\ n,\ \ell}$ 对于某个 $\epsilon_{q,\ n,\ \ell} > 0$；由此可得

$$\mathbb{P}_\lambda[\partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2) \geq \epsilon_{q,n,\ell}] \leq \epsilon_{q,n,\ell} \tag{4.70}$$

由于 n 重积 $\lambda^{\otimes n}$ 在 $\mathbb{M}^n \times \mathscr{S}_\ell^n$ 上诱导一个概率测度，推前测度 $\hat{}\,\lambda_n := (\mathrm{PH}_q^{\otimes n}, \mathrm{PH}_q^{\otimes n})_\star(\lambda^{\otimes n})$ 是推前测度 $(\mathrm{PH}_q^{\otimes n})_\star(\sigma^{\mathbb{M}})$ 与 $(\mathrm{PH}_q^{\otimes n})_\star(\sigma_\ell^{\mathbb{M}})$ 之间的一个耦合。给定 n 个独立的 λ 样本

$$(\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{s}_1), \cdots, (\boldsymbol{m}_n, \boldsymbol{s}_n),$$

应用三角不等式可得

$$|\partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{m}_j, \boldsymbol{m}_{j'}) - \partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{s}_j, \boldsymbol{s}_{j'})| \leq \partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{m}_j, \boldsymbol{s}_j) + \partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{m}_{j'}, \boldsymbol{s}_{j'})$$

进而得到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\sup_{j,j'\in[n]} (\partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{m}_j, \boldsymbol{s}_j) + \partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{m}_{j'}, \boldsymbol{s}_{j'})) \geq 2\epsilon_{q,n,\ell}\right] &\leq \mathbb{P}\left[\sup_{j\in[n]} \partial_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{m}_j, \boldsymbol{s}_j) \geq \epsilon_{q,n,\ell}\right] \\ &\leq 1 - (1-\epsilon_{q,n,\ell})^n \\ &\leq n\epsilon_{q,n,\ell}\end{aligned}$$

根据 Chazal 等人提出的稳定性定理（见 [8]），我们有

$$\mathbb{P}\left[d_{\mathcal{B}}\left(\mathrm{PH}_q(\{\boldsymbol{m}_j\}), \mathrm{PH}_q(\{\boldsymbol{s}_j\})\right) \geq n\epsilon_{q,n,\ell}\right] \leq n\epsilon_{q,n,\ell},$$

由此证明得证。 □

结合定理 4.52，可直接得到以下推论：

推论 4.71。设非空子集 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{K}$ 如引理 4.64 所述，且整数 $\ell \geq 0$ 满足引理 4.64 中的不等式；则对所有整数 $q \geq 0$，以下不等式以至少 $1-\delta$ 的概率成立：

$$\frac{1}{n} \cdot d_{\mathrm{Pr}}\left(\Phi^{q,n}_{\mathbb{M},\partial_{\mathbb{M}},\sigma^{\mathbb{M}}}, \Phi^{q,n}_{\mathbb{S}_{k,\ell},\partial_{\mathbb{M}},\sigma^{\mathbb{M}}_{\ell}}\right) \leq \sqrt[4]{2d_{\mathbb{M}}\epsilon}\,. \tag{4.72}$$

注 4.73。由上述证明并结合注 4.59 可直接看出，若忽略低维情形 $d_{\mathbb{M}} \leq 6$，推论 4.71 中的上界可改进为 $\sqrt[4]{2d_{\mathbb{M}}\epsilon^2}$ 。

5. Conclusions

在维数为 $d_{\mathbb{M}}$ 、对径维数为 $d_{\mathbb{M}}$ 的紧黎曼对称空间 $\mathbb{M} = \mathbb{K}/\mathbb{H}$ 上，研究了一种随机马尔可夫链，其转移对应于从 $\mathbb{M}$ 的等距变换群的哈尔测度中独立随机选取的等距变换，并确立了该链的有限时间行为。具体而言，四项主要结果中的第一项指出，对于$|\hat{}\mathcal{S}| = O_{\mathbb{M}}(d_{\mathbb{M}} \ln \frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{1}{\delta})$ 个随机等距变换以及 $\ell = O(d_{\mathbb{M}} \ln 1/\epsilon)$，若取对称空间上任意一个固定点在长度为 ℓ 的 $|\mathcal{S}|$ 长随机逆对称子集 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{K}$中所有可能的长度为 ℓ 的复合映射作用下的像，则以高概率得到一个 $r_{\epsilon,\mathbb{M}}$-覆盖。这里得到的 $|\hat{}\mathcal{S}|^{\ell}$ 值接近假想的最优 ϵ-覆盖 $\mathbb{M}$ 的规模体积下界 $(1/\epsilon)^{\Omega(d_{\mathbb{M}})}$。其次，我们证明，该 ϵ-覆盖以至少 $1-2\delta$ 的概率呈等分布，具体而言，支撑在该覆盖上的均匀经验测度与 $\mathbb{M}$ 上的均匀测度之间的 1-Wasserstein 距离不超过 $\sqrt{d_{\mathbb{M}}\epsilon}$ 。接下来，我们证明，只要 $\hat{}|\mathcal{S}| = O(\ln 1/\delta + d_{\mathbb{M}} \ln \lambda_{r_{\epsilon,\mathbb{M}}})$，且 ℓ 如上，则这样的随机子集 $\mathscr{S} \subseteq \mathbb{M}$ 是一个关于 $\mathbb{M}$ 上拉普拉斯-贝尔特拉米算子特征值 λ_r 的近似 λ_r-设计。最后，我们证明，均匀测度的持续推前测度与支撑在随机 ϵ-覆盖上的经验测度的普罗霍罗夫距离至多为 $\sqrt[4]{d_{\mathbb{M}}\epsilon}$。

这些结果分别可用于：(1) 通过考虑由 ϵ覆盖所诱导的空间沃罗诺伊胞，并在 ϵ覆盖上计算函数值，利用局部常值函数近似最小化对称空间上任意给定的 1-利普希茨函数；(2) 近似计算对称空间上 1-利普希茨函数的积分；(3) 近似计算子空间 $\mathcal{E}_{\lambda_r}$ 上光滑函数的积分；(4) 用所构造的 ϵ覆盖近似数据云的持久同调，该数据云是从均匀测度中采样得到的。在前两种情况下，近似值与真实值之间的误差不超过加性误差 ϵ ；而在后两种情况下，误差的阶为 $\sqrt{\epsilon}$ （维数为 ≤ 6 时除外）。

Acknowledgments

作者感谢 Hariharan Narayanan 提出了富有见地的建议。我们感谢德国研究联合会（DFG，德国）通过资助项目 451920280 提供的部分资助。

References

1. R. Ahlswede and A. Winter, *Strong converse for identification via quantum channels*, IEEE 信息论汇刊, 48 (2002), 第 569–579 页。2. N. Alon and Y. Roichman, *Random Cayley graphs and expanders*, 《随机结构与算法》, 5 (1994), 第 271–284 页。3. Y. Benoist and N. de Saxcé, *A spectral gap theorem in simple Lie groups*, 《数学发明》, 205 (2016), 第 337–361 页。4. A. J. Blumberg, I. Gal, M. A. Mandell, and M. Pancia, *Robust statistics, hypothesis test-ing, and confidence intervals for persistent homology on metric measure spaces*, 《计算数学基础》, 14 (2014), 第 745–789 页。5. J. Bourgain and A. Gamburd, *Spectral gaps in* SU(*d*), 巴黎科学院数学报告, 348 (2010), 第 609–611 页。6. T. Bröcker and T. tom Dieck, *Representations of compact Lie groups*, 数学研究生教材第 98 卷，施普林格出版社，纽约，1995年。译自德语手稿；1985年译本的修订重印版。7. S. Chakraborty and H. Narayanan, *Generating an equidistributed net on a sphere using random rotations* 67 2022 231 257 ,《离散与计算几何》, ( ), 第 – 页。8. F. Chazal, V. de Silva, and S. Oudot, *Persistence stability for geometric complexes*, 《几何奉献》, 173 (2014), 第 193–214 页。9. S. Y. Cheng, P. Li, and S. T. Yau, *On the upper estimate of the heat kernel of a complete Riemannian manifold* 103 1981 1021 1063 ,《美国数学杂志》, ( ), 第 – 页。10. H. Donnelly, *Eigenfunctions of the Laplacian on compact Riemannian manifolds*, 《亚洲数学杂志》, 10 (2006), 第 115–125 页。11. J. J. Duistermaat and V. W. Guillemin, *The spectrum of positive elliptic operators andperiodic bicharacteristics*, 《数学发明》, 29 (1975), 第 39–79 页。12. L. C. Evans, *Partial differential equations*, 数学研究生进阶丛书第 19 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，第二版，2010年。13. H. Federer, *Geometric measure theory*, 数学基础丛书第 153 卷，施普林格出版社（纽约），纽约，1969年。14. C. Fefferman, S. Ivanov, M. Lassas, and H. Narayanan, *Fitting a manifold to data with large noise* (in preparation) , 。15. B. Gariboldi and G. Gigante, *Optimal asymptotic bounds for designs on manifolds*, 《偏微分方程分析》, 14 (2021), 第 1701–1724 页。16. A. Gray, *Tubes*, 数学进展丛书第 221 卷，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2004年。附 Vicente Miquel 序言。17. A. Grigor'yan, *Heat kernel and analysis on manifolds*, AMS/IP 高等数学研究丛书第 47 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯；国际出版社，马萨诸塞州波士顿，2009年。18. M. B. Hastings and A. W. Harrow, *Classical and quantum tensor product expanders*, 《量子信息与计算》, 9 (2009), 第 336–360 页。19. S. Helgason, *Groups and geometric analysis*, 数学调查与专著第 83 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2000年。1984年原版的修订重印版。20. E. Hewitt and K. A. Ross, *Abstract harmonic analysis. Vol. II: Structure and analysis forcompact groups.*, 数学基础丛书第 152 卷，施普林格出版社，纽约—柏林，1970年。21. E. P. Hsu, *Stochastic analysis on manifolds*, 数学研究生进阶丛书第 38 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2002年。22. J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, 数学研究生教材第 9 卷，施普林格出版社，纽约—柏林，1978年。第二次印刷，修订版。23. G. Š. Kantorovič, L. V.; Rubinšteĭn, *On a space of completely additive functions*, 《列宁格勒大学学报》, 13 (1958), 第 52–59 页。24. Z. Landau and A. Russell, *Random Cayley graphs are expanders: a simple proof of the Alon-Roichman theorem*, 《电子组合学杂志》, 11 (2004), 研究论文 62，6 页。25. H. Narayanan, *On the distribution of random words in a compact Lie group*, S´em. Lothar. Combin., 84B (2020), 文章 9，12 页。

26. P. Niyogi, S. Smale, and S. Weinberger, *Finding the homology of submanifolds with high confidence from random samples* 39 2008 419 441 , 《离散与计算几何》, ( ), 第 – 页。27. A. Nowak, P. Sjögren, and T. Z. Szarek, *Genuinely sharp heat kernel estimates on compact rank-one symmetric spaces for Jacobi expansions on a ball and on a simplex* , , , 数学年刊, 381（2021年）, 第1455–1476页。28. J. Rogawski and V. S. Varadarajan, *Some comments on Weyl's complete reducibilitytheorem*, 太平洋数学杂志, 260（2012年）, 第687–694页。29. H. Samelson, *On curvature and characteristic of homogeneous spaces*, 密歇根数学杂志, 5（1958年）, 第13–18页。

Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum, 44801 Bochum, Deutschland
Email address: somnath.chakraborty@rub.de