arXiv:2304.07624v1 [math.LO] 15 Apr 2023

构造方案：将结构从 ω转移到 ω_1

JORGEANTONIO CRUZ CHAPITAL、OSVALDO GUZMAN GONZALEZ、和 STEVO TODORCEVIC

Abstract. 本文对构造方案进行了结构分析，并利用这一分析给出了若干组合对象的简单新构造方法。这些组合对象一直受到集合论学家和拓扑学家的关注。随后，我们继续研究与构造方案相关的捕获公理。由此，我们推导出若干不可数结构的存在性；已知这些结构独立于集合论的通常公理。最后，我们证明捕获公理 $FCA(part)$ 可由 Jensen 的 $\diamondsuit$ 原理推出。

本文旨在继续发展第三作者在 [111] 中引入的一种技术，用于构造基数为 ω_1（即第一个不可数基数）的数学对象。为说明这种构造方案的本质，假设我们想要构造一个基数为 ω_1的特定结构。最直接的做法或许是通过可数近似，经过 ω_1 多个步骤来构造该对象。典型例子包括从 [63] 或 [54] 构造 Aronszajn 树，以及从 [94], [57] 或 [123][1]构造豪斯多夫间隙。本文的主题是构造方案和捕获方案的方法。在我们的方法中，所需结构并非由其可数子结构构造而成，而是由其有限子结构构造而成。此外，整个构造只需可数多个步骤。这种方法基于（大量）同构有限结构的合并；与典型的可数近似构造方法相比，这种方法的风格截然不同。为了解这一点，读者不妨将我们的 Aronszajn 树或豪斯多夫间隙构造（见定理 5）与上述先前的构造方法进行比较。例如，豪斯多夫间隙的经典构造通常被认为很困难（例如，见 [59]），而我们的构造相当简单，只需几行。

通过有限逼近来构建不可数结构的想法并不新鲜。例如，R. Jensen 的间隙 1-morass（见 [25]）及其经 D. Velleman 简化后的形式（见 [125]）此前就采用过这种方法。他们的动机是在给定阶段通过 amalgamate 两个有限结构来构造模型论结构。使用构造方案后，这种方法得到了极大改进：在给定阶段可以 amalgamate 许多有限的同构结构。能够 amalgamate 不止两个结构，极大地

关键词：构造方案、捕获方案、菱形原理、morass。美国数学学会分类号：03E02、03E35、03E65、03E75。第一作者和第二作者部分获得了 PAPIIT 项目 IN101323 和 CONACyT 项目 A1-S-16164 的资助。第二作者还获得了 PAPIIT 项目 IA102222 的资助。第三作者部分获得了 NSERC（455916）、CNRS（IMJ-PRG-UMR7586）和 SFRS（7750027-SMART）的资助。[1]当然，还有其他构造这些对象的方法，并不依赖于规模为 ω_1 的递归，参见 [108]。

提升了该方法的灵活性。

粗略地说，构造方案是具有强相干性质的有限集的集合。这些性质使我们能够递归地沿着构造方案进行，并对若干个（不只是两个）同构有限结构进行合并。与 Jensen 小层系和 Velleman 小层系的情形一样， ω_1 上的构造方案的存在性仅凭 ZFC就可以得到，无须诉诸任何额外公理。然而，在我们方法的某些应用中，构造方案还需具备进一步的“捕获性质”；通俗地说，这意味着它能够在“同构位置”上“捕获”不可数集的某些部分。我们将在第 5 节中对其作形式化介绍和说明。要存在捕获构造方案，我们需要超越 ZFC。值得指出的是，构造方案的研究最初是由涉及度量结构（如赋范空间和布尔代数）的问题所推动的。论文 [111]介绍了捕获构造方案在泛函分析和拓扑学中的若干应用。一般理论在 [58], [69] 和 [70]中得到了进一步发展。

本文构造了大量集合论学家和拓扑学家感兴趣的组合对象。这里提出的构造与最初的构造大不相同。采用构造或捕获方案往往能大大简化已有的构造（例如定理 2 和 9 就是如此）。在其他情况下，此前则没有已知的直接构造（见定理 6）。

阅读本文不需要事先了解构造方案和捕获方案。事实上，我们力求让本文成为这一迷人主题的入门读物。我们希望能激发更多读者的兴趣，尤其是那些在各自领域熟悉粘合技巧的读者，并为他们提供一种强大的工具，以构造自己感兴趣的结构。

在第 2 节中，我们介绍构造方案的概念，并推导其基本性质。在第 3 节中，我们研究构造方案与 [108] 中所研究的序数度量之间的关系。在第 4 节中，我们运用构造方案，构造许多在集合论、拓扑学和无限组合学中颇受关注的结构。这些构造大多彼此独立，因此读者可以从自己最感兴趣的部分开始阅读。为方便读者，我们在此列出本节中将要介绍的构造。随着第 4 节内容的展开，我们会提供进一步阅读的参考文献和历史性说明：

(1) 特殊阿隆佐恩树。阿隆佐恩树是 ω_1非紧致性最著名的例子。阿隆佐恩树是一棵高度为 ω_1的树，其各层均可数，但没有共尾分支。确保一棵（高度为 ω_1的）树没有共尾分支的一种简单方法，是使它成为“特殊”树，也就是说，可以用可数个反链覆盖它（等价地说，这些反链可以嵌入有理数中）。Aronszajn 证明了这类树的存在。

(2) Countryman 线。设 $(X, <)$ 是一个全序。除平凡情形外，X^2 不是线性序。由此，询问要用多少条链才能覆盖它便有了意义。Countryman 线是一种不可数线性序，其平方仅用可数多条链就能覆盖。乍看之下，这些序似乎十分矛盾

以至于 Countryman 猜想它们并不存在。然而，Shelah 首先证明了 Countryman 线确实存在（见 [96]）。

(3) 豪斯多夫间隙。布尔代数 $\mathscr{P}(\omega)/fin$ 的一个有趣特征是它并不完备。要看出这一点，最简单的方法如下：设 $\{A_\alpha \mid \alpha \in 2^\omega\} \subseteq [\omega]^\omega$ 是一个 AD 族。对于每个 $H \subseteq 2^\omega$，考虑集合 $\mathcal{A}_H = \{[A_\alpha] \mid \alpha \in H\}$（其中 $[A_\alpha]$ 是 $\mathscr{P}(\omega)/fin$ 中 A_α 的等价类）。通过简单的计数论证可知，必定存在某个 $H \subseteq 2^\omega$，使得 $\mathcal{A}_H$ 没有上确界。尽管这是一个非常简单的论证，我们往往更关注 $\mathscr{P}(\omega)/fin$ 不完备性的具体例子。最漂亮的例子是（豪斯多夫）间隙。此外，间隙很重要，因为它们代表了我们在将结构嵌入到 $(\omega)/fin$ 上时可能遇到的障碍（这种情况的一个极具说明性的例子是 [119] 的定理 8.8）。豪斯多夫间隙的经典构造需要非常巧妙的论证，才能仅用 ω_1 多步完成 2^ω 多项任务。借助构造方案，我们可以非常容易地证明它们确实存在。

(4) 卢津-琼斯几乎不交族。这个主题讨论几乎不交族（AD）及其分离性质。卢津族是一个大小为 ω_1 的 AD 族，其中任意两个不可数子族都无法分离。另一方面，琼斯族是一个 AD 族，具有这样的性质：它的每个可数子族都能与其补集分离。很容易证明，这两类族都存在。然而，构造一个同时具有卢津族和琼斯族性质的族要复杂得多，因为这两种性质之间存在张力。在 [42] 中给出了一个极其困难且高度复杂的卢津-琼斯族构造。借助构造方案，我们能够非常容易地构造出卢津-琼斯族。值得指出的是，这些族可用于构造泛函分析中的有趣例子（参见 [40]）。

(5) Luzin 相干函数族。现在我们来考察先前讨论过的豪斯多夫间隙的一种推广。Luzin 相干函数族是由一个预塔支撑的相干函数系统，并且我们对其施加一个强非平凡性条件。这些族的重要性在于，它们能给出许多上同调意义下不同的间隙。Talayco 最早在 [104]中研究了它们。后来，Farah 证明了这类族的存在（参见 [34]）。Farah 的证明极其非构造性且间接，因为它诉诸凯斯勒完备性定理。我们将利用构造方案构造这类族。据我们所知，此前没有已知的直接构造。

在第 5 节中，我们研究捕获的不同概念；这些是我们可以要求构造方案具备的额外强性质（我们以公理化的方式进行研究）。此类方案的存在性无法仅由 ZFC 推出。随后，我们将运用此类方案构造若干组合结构，而这些结构的存在性已知独立于 ZFC。同样，我们将简要介绍利用捕获方案构造的结构：

(1) 苏斯林树。苏斯林树是一种 Aronszajn 树，其中每个反链都是可数的。苏斯林假设（HS）断言不存在苏斯林树。我们现在知道，HS 与 ZFC相互独立。苏斯林直线是一个相关概念，由苏斯林在研究实数的序时引入。库雷帕最先认识到，存在苏斯林直线当且仅当存在苏斯林树。文献中关于苏斯林树的应用和构造层出不穷。我们

将使用捕获方案构造这类树的两种类型：相干苏斯林树和完全苏斯林树。这两类树截然相反。对相干树进行力迫时，它会彻底破坏其 ccc性；而对于完全苏斯林树，它的许多子树仍然保持 ccc。

(2) 苏斯林下半格。若在苏斯林树的定义中，将「是树」这一条件放宽为只需是下半格，便得到苏斯林下半格的概念。Dilworth、Odell 和 Sari 在巴拿赫空间的研究背景下引入了这一概念（见[27]）。随后，Raghavan 和 Yorioka 对其进行了研究（见 [89]）。他们证明了许多结果，其中包括： $\diamondsuit$-原理蕴含$\mathscr{P}(\omega)$包含一个苏斯林下半格。我们利用一个捕获方案也得到了相同的结果。

(3) 纠缠集。Cantor 的一个著名定理指出，任意两个没有端点的可数稠密线性序都同构。将这一结论直接推广到基数为 ω_1 的线性序并不成立。因此，我们希望将范围限制在实数的子序上。若一个不可数 $B \subseteq \mathbb{R}$ 满足如下条件，我们称其为 ω_1-稠密：只要 U 是一个开区间，且该区间与 U 的交集非空，就有 $|U \cap \mathbb{B}| = \omega_1$。Baumgartner 的一个重要定理指出， PFA蕴含任意两个 ω_1-稠密实数集都同构（见 [8]）。这一命题如今称为 Baumgartner 公理（$BA(\omega_1)$）。纠缠集是 $\mathbb{R}$ 的一个子集，具有非常强的组合性质。纠缠集的存在意味着 Baumgartner 公理不成立。Abraham 和 Shelah 引入纠缠集，是为了证明 $BA(\omega_1)$并非 Martin 公理的推论（见 [6]）。我们将利用一个捕获方案构造纠缠集。由此，某些捕获方案的存在与 Baumgartner 公理相矛盾。

(4) 独立相干函数族。现在我们回到对由相干函数族得到的间隙的研究，正如我们在定理 6 中所做的那样。不过，这一次我们希望我们的间隙族是“独立的”。这意味着，我们可以填补或冻结任意一个子族，而不填补或冻结该族中的任何其他间隙。Yorioka 在假设 $\diamondsuit$ 原理成立的情况下得到了类似结果 [129] （Abraham 和 Shelah 在 [3] 证明了苏斯林树的对应结果）。

(5) ccc 可摧毁的二重有界着色，且无单射集。若每种颜色至多出现 2 次，则称着色 $c : [\omega_1]^2 \longrightarrow \omega_1$ 是二重有界的。若颜色在集合 $A \subseteq \omega_1$ 中不重复出现，则称集合 $A \subseteq \omega_1$ 是 c-单射的。Galvin 最先提出疑问：是否存在一种二重有界着色，使其不含不可数单射集？他证明，在连续统假设成立的情况下，这种着色确实存在。另一方面，第三作者证明，在 PFA 下不存在这种着色。多年后，Abraham、Cummings 和 Smyth 证明， MA 与存在一种不含不可数单射集的二重有界着色相容（见 [2]）。听闻这一结果后，Friedman 要求给出一个具体例子：一种不含不可数单射集的二重有界着色，但可通过某个 ccc 偏序加入这样的集合。在 [2] 中，假设 CH 且苏斯林假设不成立，构造了这样一个例子。我们还将找到一个带有捕获方案的例子。

在书籍 [119], 中，第三作者发展了一种基于无界函数族的振荡理论。多年来，人们发现了该理论的大量应用。例如，振荡理论是证明 PFA蕴含

连续统为 ω_2 （见 [11]）的关键。我们将使用捕获方案发展一种类似的理论。经典振荡理论与基于捕获方案的振荡理论之间的一个重要区别是，后者基于有界函数族。利用这一新的振荡理论，我们可以证明以下对象的存在：

（1）第六种 Tukey 类型。Tukey 序是比较有向偏序的有用工具。它旨在研究有向偏序在共尾意义下的行为。Tukey 于 [122] 引入了它，以研究拓扑学中的收敛。可数有向偏序的 Tukey 分类非常简单：每个可数有向偏序都图基等价于 1 或 ω。大小为 ω_1 的有向集，其 Tukey 分类则有趣得多。目前至少有五种 Tukey 类型：1 、 ω 、 ω_1 、 $\omega \times \omega_1$ 和 $[\omega_1]^{<\omega}$。我们可能会想，是否存在一个大小为 ω_1 的有向偏序，它不图基等价于这五种类型中的任何一种。在 [41], ，Isbell 证明了 CH 蕴含第六种 Tukey 类型的存在。第三作者在 [116], 中大大改进了这一结果，他证明了 CH 蕴含存在 2^{ω_1} 种不同的 Tukey 类型。另一方面，他在同一篇论文中证明， PFA 蕴含现在存在六种 Tukey 类型。在这里，我们从一个捕获方案中找到了第六种 Tukey 类型。

(2) $\omega_1 \not\to (\omega_1, \omega+2)^2_2$。给定 $\alpha < \omega_1$，划分 $\omega_1 \to (\omega_1, \alpha)^2_2$ 表示对于每个 c： $[\omega_1]^2 \longrightarrow 2$, 要么存在一个不可数的 0-单色集，要么存在一个序型为 α 的 1-单色集。Erd¨os 和 Rado 的著名结果（推广了 Dushnik、Miller 和 Erd¨os 的一条定理）是 $\omega_1 \to (\omega_1, \omega+1)^2_2$。我们不禁会想，这条定理能否得到改进。结果表明，这一命题独立于 ZFC。适当迫使公理蕴含，对于每个 $\alpha < \omega_1$ ，都有 $\omega_1 \to (\omega_1, \alpha)^2_2$ （见 [110]）；而 $\mathfrak{b} = \omega_1$ 蕴含 $\omega_1 \not\to (\omega_1, \omega+2)^2_2$。我们将从振荡理论证明一个类似的结果。

(3) ccc 偏序的非生产性。两个 ccc 偏序的乘积何时仍然是 ccc? 这个问题长期以来一直引起集合论学家的兴趣。一方面，Martin 公理蕴含 ccc 偏序的乘积是 ccc。另一方面，苏斯林假设不成立则蕴含相反的结论。Galvin 在 CH 下（见 [63]），以及第三作者在 $\mathfrak{b} = \omega_1$ 下的 [119] 中，构造出了两个 ccc 偏序的乘积不是 ccc 的相容例子。作为本节所发展出的振荡理论的一项应用，我们发现了新的情形，其中存在乘积不是 ccc 的 ccc偏序。

(4) 苏斯林预塔。在 [106], 中，第三作者发展了他所提出的振荡理论的一种类似版本，这次以非贫乏塔为基础。在研究这种振荡时，Borodulin-Nadzieja 和 Chodounsk´y 引入了苏斯林预塔的概念。若预塔 $\mathcal{T} = \{T_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ 的每个不可数子集 $\mathcal{T}$ 都含有两个彼此 $\subseteq$ 不可比较的元素，则称其为苏斯林预塔。苏斯林预塔的存在性独立于 ZFC。可以证明，开放图公理禁止此类族的存在；而在假设 $\mathfrak{b} = \omega_1$ 的情况下，可以构造出苏斯林预塔（见 [13]）。我们将把由捕获方案得到的振荡理论应用于构造一个苏斯林预塔。

（5）S-空间。遗传可分性和遗传林德洛夫性在某种意义上互为对偶。我们不禁会问，这两种性质是否总是重合。这个问题只有在正则空间的范畴中才有意义。 S-空间是正则、遗传可分但非林德洛夫的空间。对 S-空间（以及对偶

概念 L-空间）的研究曾是集合论拓扑中最活跃的领域之一。在若干集合论假设下（如 CH 或苏斯林假设的否定），可以构造S-空间。第三作者首次成功证明，不存在 S-空间这一命题是一致的（见 [119]）。本文将运用由捕获方案得到的振荡理论来构造若干 S-空间。

下表总结了许多可通过捕获方案实现的、与集合论和拓扑学相关的构造。

结果	捕获公理
第六种 Tukey 类型	CA_2
$\omega_1 \not\to (\omega_1, \omega+2)^2_2$	CA_2
ccc的非生产性	CA_2
苏斯林预塔	CA_2
S空间	CA_2
苏斯林下半格	CA_2
$BA(\omega_1)$的失败	CA_2
可破坏间隙（参见 [70]）	$CA_2(part)$
ccc可摧毁的二重有界着色	CA_3
完全苏斯林树	FCA
相干苏斯林树	$FCA(part)$
纠缠集	FCA
独立相干函数族函数	FCA

最后，在第 7 节中，我们证明，假设 Jensen 的♢原理成立，则捕获构造方案存在。最初，这一结论作为断言出现在 [111], 中，但其中勾勒的证明并不完整。本文给出一个完整的证明。不过，对于这一主题，我们仍有许多需要学习和理解的地方。本文将陆续提及一些尚未解决的问题及进一步研究的方向。

1. 符号与预备知识

我们的记号相当标准。大多数概念将在其首次出现的节中定义。与集合论相关的未定义概念可参见 [54]或 [63]。如有必要，我们会尽力指出更具体的参考文献。不过，为方便读者起见，我们仍将回顾本文中贯穿使用的一些主要概念。

量词 $\forall^\infty$ 和 $\exists^\infty$ 应分别理解为“除有限多个之外的所有”和“无穷多个”。量词 $\exists!$ 表示“存在唯一一个”。

给定一个集合 X,$\mathscr{P}(X)$ 表示其幂集。给定基数 κ, $[X]^\kappa$ 表示所有基数为 X 的 $\mathscr{P}$ 子集的集合 t

以及 $[X]^{<\kappa}$ 表示所有基数严格小于 κ. 的 X 子集的集合。我们用 LIM 表示小于 ω_1 的所有极限序数构成的集合。对于 A、$B \in \mathscr{P}(\omega)$，若 $A\backslash B$ 有限，则记作 $A \subseteq^* B$；若 $A \subseteq^* B$ 且 $B \subseteq^* A$.，则记作 $A =^* B$。遵循这一记号，只要 $A \subseteq^* B$ 且 $A \neq^* B$，我们就记作 $A \subsetneq^* B$。类似地，若 f、g 是定义域为 X、陪域为某个有序集的两个函数，若 $\{x \in X \mid g(x) \leq f(x)\}$ 有限，则记作 $f <^* g$；若前述集合还为空，则记作 $f < g$。

若 $\mathcal{D}$ 是一个以 R 为根的 Δ-系统，则 $|\mathcal{D}| \geq 2$ 且当 A、$B \in \mathcal{D}$ 不同时，$A \cap B = R$。若 X 是一个序数集，且 $A \in [X]^{<\omega}$ 非空，则 $n < |A|$、$A\,(n)$ 表示按通常序排列的 A 中的第 n 个元素。给定 $S \subseteq |A|$，定义 $A[S]$ 为 $\{A(n) \mid n \in S\}$。若 B 也是 $[X]^{<\omega}$ 的非空元素，且对每个 $\alpha \in A$ 都有 $\alpha < \beta$ 和 $\beta \in B$，则记作$A < B$. 最后，若 C、$D \in [X]^{<\omega}$，则当 $C \subseteq D$ 且只要 $c \in C$ 并且$d \in D$ 满足 $d \leq c$时，我们记 $C \sqsubseteq D$ 为 $d \in C$。

设 $(X, <)$ 是一个偏序集。给定 X 中的两个元素，比如 x 和 y，若 $x \leq y$ 或 $y < x$，则称 x 和 y 可比较。若存在 $z \in X$ 使得 $z \leq x$ 和 $z \leq y$，则称 x 和 y 相容。若 x 和 y 不可比较，则称它们不可比较；若它们不相容，则称它们不相容。用 (x, y) 和 $[x, y]$ 分别表示集合 $\{z \in X \mid x < z < y\}$ 和 $\{z \in X \mid x \leq z \leq y\}$。$(x, y]$ 和 $[x, y)$ 的定义类似。若对于任意 $x, y \in A$，都有 $(x, y) \subseteq A$，则称 $A \subseteq X$ 是一个区间。若 A 中任意两个元素都可比较，则称 A 是一条链。另一方面，若 A 中所有元素两两不可比较，则称 A 为 pie。一个更常用的类似概念是反链。若 A 中任意两个元素都不相容，则称 A 为反链。若 X 中的每个元素都小于某个 A 中的元素，则称 A 为共尾集。我们将 X 的共尾性定义为 $cof(X) = \min\{|A| \mid A \subseteq X \text{ 是共尾的 }\}$。最后，若 X 的每个非空子集都有一个极小元，则称 X 是良基的。在这种情况下，存在唯一的函数 $rank$：$X \longrightarrow Ord$，使得对于每个 $x \in X$，都有 $rank(x) = \sup\{rank(y) + 1 \mid y < x\}$。对于每个序数 α，令 $X_\alpha = \{x \in X \mid rank(x) = \alpha\}$，并令 $Ht(X) = \min\{\alpha \in Ord \mid X_\alpha = \emptyset\}$。

最后补充一点：每当 α和 β是序数时，$\beta\backslash\alpha = \{\xi \in \beta \mid \xi \geq \alpha\} = [\alpha, \beta)$。我们会交替使用这两种记号，在我们认为其中一种比另一种更合适时采用相应的记号。特别是，当我们想表达 k是一个大于或等于 n. 的自然数时，可以写作 $k \in \omega\backslash n$。当我们想说明相应的集合是一个区间时，则使用另一种记号。

2. Construction Schemes

定义 1（类型）。如果一个序列 $\tau = \{(m_k, n_{k+1}, r_{k+1})\}_{k\in\omega} \subseteq \omega^3$ 满足以下条件，我们就称它为一种类型：

(a) $m_0 = 1$, (b) $\forall k \in \omega\backslash 1\big(\, n_k \geq 2 \,\big)$, (c)
$\forall r \in \omega\ \exists^\infty k \in \omega\big(\, r_k = r \,\big)$, (d)
$\forall k \in \omega\big(\, m_k > r_{k+1} \,\big)$, (e)
$\forall k \in \omega\backslash 1\big(\, m_{k+1} = r_{k+1} + (m_k - r_{k+1})n_{k+1} \,\big)$.

此外，我们称 τ 的一个划分 ω，即 $\mathcal{P}$，与 τ 相容，当且仅当：

(c') $\forall P \in \mathcal{P}\,\forall r \in \omega\,\exists^\infty k \in P(\ r_k = r\ )$。

很容易看出，前一定义中的点（b）和（e）蕴含 m_k 的序列是递增的。

注意，若 X 是无限集且 $\mathcal{F} \subseteq [X]^{<\omega}$，则 $(\mathcal{F}, \subsetneq)$ 是良基的。因此，对每个序数 α，我们都可以像预备知识部分那样定义 $\mathcal{F}_\alpha$。在这个特例中，我们有 $\mathcal{F} = \bigcup_{k\in} \mathcal{F}_k$。此外，若 $\mathcal{F}$ 在 $[X]^{<\omega}$ 中共尾，则当 $k \in \omega$ 时，$\mathcal{F}_k \neq \emptyset$

ω

定义 2（构造方案，[111]）。设 $\{(m_k, n_{k+1}, r_{k+1})\}_{k\in\omega}$ 为一种类型，且 X 为一个序数集。我们称 $\mathcal{F} \subseteq [X]^{<\omega}$ 为定义在 X 上、类型为 $\{(m_k, n_{k+1}, r_{k+1})\}_{k\in\omega}$ 的构造方案，如果：

(1) $\mathcal{F}$ 在 $[X]^{<\omega}$ 中共尾，(2) $\forall k \in \omega\ \forall F \in \mathcal{F}_k \big(\ |F| = m_k\ \big)$，

(3) $\forall k \in \omega\ \forall F, E \in \mathcal{F}_k \big(\ E \cap F \sqsubseteq E, F\ \big)$，(4)

$\forall k \in \omega\ \forall F \in \mathcal{F}_{k+1}\ \exists! F_0, \ldots, F_{n_{k+1}-1} \in \mathcal{F}_k$ 使得

$$F = \bigcup_{i<n_{k+1}} F_i.$$

此外，$\{F_i\}_{i<n_{k+1}}$[2] 构成一个以 $R(F)$ 为根的 Δ-系统，使得 $|R(F)| = r_{k+1}$ 一个 d

$$R(F) < F_0 \backslash R(F) < \cdots < F_{n_{k+1}-1} \backslash R(F).$$

以下定理在 [111] 中得到了隐含证明。另一种证明见 [69]。

定理1（[111]）。对于每一种类型 $\{(m_k, n_k, r_k)\}_{k\in\omega}$，都存在一个该类型的、定义在 ω_1 上的构造方案。

事实证明，[125] 中定义的简化摩拉斯与构造方案密切相关。实际上，正如 [69] 中指出的，人们可以将构造方案看作某种广义的简化（$\omega_1, 1$）-morass。鉴于此，为完整起见，我们认为有必要给出其定义。希望进一步了解 morass 及其应用的读者，可以参阅 [26], [32], [60], [95], [102], [125], [126], 和 [127]。

定义3（简化（$\omega, 1$）-morass）。设 $\mathcal{A} \subseteq [\omega_1]^{<\omega}$。我们称：

- $\mathcal{A}$ 是齐次的，如果对于每个 X、$Y \in \mathcal{A}$，$rank(X) = rank(A)$ 蕴含 X 与 Y 具有相同的序型，并且 $\{Z \in \mathcal{A} \mid Z \subseteq Y\} = f[\{Z \in \mathcal{A} \mid Z \subseteq X\}]$，其中 f 是从 X 到 Y. 的唯一递增双射
- $\mathcal{A}$ 是有向的，如果对于每个 X、$Y \in \mathcal{A}$，都存在 $Z \in \mathcal{A}$ 使得 $X \cup Y \subseteq Z$.
- $\mathcal{A}$ 是局部几乎有向的，当且仅当对于每个 $X \in \mathcal{A}$，要么 $\{Z \in \mathcal{A} \mid Z \subsetneq X\}$ 是有向的，要么存在互不相同的 Y、$Z \in \mathcal{A}$，使得 $Y \cup Z \subseteq X$、$Y \cap Z \sqsubseteq Y$、Z 且 $Y \backslash Z < Z \backslash Y$.

最后，如果 $\mathcal{A}$ 是齐次、有向、局部几乎有向且满足 $\bigcup \mathcal{A} = \omega_1$. 的简化 $(\omega, 1)$-morass。

我们通过证明一些关于构造方案的基本事实来结束本节，这些事实将在全文中用到。尽管其中一些证明可见于 [69] 或 [111]，但为方便读者，我们决定在此一并给出。作为这些结果的直接推论，定义在 ω_1 上、类型为 $\{(m_k, 2, r_{k+1})\}_{k\in\omega}$ 的构造方案尤其是简化的 $(\omega, 1)$-morass。

[2]我们将称 $\{F_i\}_{i<n_{k+1}}$ 为 F. 的典范分解

在本节余下部分，除非另有说明，我们固定一个类型为 $\{(m_k, n_k, r_{k+1})\}_{k\in\omega_1}$的对象。

引理 1. 设 X 是一个序数集，$\mathcal{F}$ 是定义在 X、$l \in \omega$ 和 $F \in \mathcal{F}_l$上的构造方案。对于每个 $k \leq l$，都有 $F = \bigcup\{G \in \mathcal{F}_k \mid G \subseteq F\}$。

证明. 通过对 l 进行归纳即可完成证明，这直接由定义 2 的第 (4) 部分得出。□

由于序列 $\{m_k\}_{k\in\omega}$ 严格递增，$\mathcal{F}$ 中每个元素的秩完全由其基数决定。

推论 1. 设 X 是一个无限序数集，$\mathcal{F}$ 是定义在 X 和$k \in \omega$上的构造方案。则 $X = \bigcup \mathcal{F}_k$。

证明. 只需证明 $X \subseteq \bigcup \mathcal{F}_k$。为此，设 $\alpha \in X$。由于 X 是无限集，我们可以取一个有限 $A \subseteq X$，使得 $\alpha \in A$ 且 $|A| \geq m_k$。根据定义 2 的第 (1) 部分，存在 $F \in \mathcal{F}$，使得 $A \subseteq F$。注意 $|F| \geq m_k$。因此，若 $l \in \omega$满足 $F \in \mathcal{F}_l$，则$l \geq k$。利用引理 1 以及 $\alpha \in F$这一事实，我们得出存在 $G \in \mathcal{F}_k$，使得$\alpha \in G$. □

构造方案的一个重要特点是，定义 2 的第 (3) 点有一种变体，其中 $\mathcal{F}$ 的元素具有不同的秩。

引理 2. 设 X 是一个序数集，$\mathcal{F}$ 是关于 X、$k \leq l \in \omega$、$E \in \mathcal{F}_k$ 和 $F \in \mathcal{F}_l$ 的构造方案：

(a) $E \cap F \sqsubseteq E$.(b) 若 $k < l$ 且 $E \subseteq F$，则存在 $i < n_l$ 使得 $E \subseteq F_i$。

证明. 首先证明 (a) 部分。为此，注意到由引理 1 可得 $E \cap F = \bigcup\{G \cap E \mid G \in \mathcal{F}_k \text{ 和 } G \subseteq F\}$。根据定义 2 中的第 (3) 点，这个等式表明 $E \cap F$ 是 E 的若干初始段的并。因此，结论得证。

现在证明 (b) 部分。为此，令 $\alpha =$ 为 E 的最大值。我们知道 $E \subseteq F$，因此存在 $i < n_k$，使得 $\alpha \in F_i$。根据 (a) 部分，$\alpha \in E \cap F_i \sqsubseteq E$。这意味着 $E \cap F_i = E$，所以 $E \subseteq F_i \subseteq F$。□

不过请注意，如果 $k < l$、$F \in \mathcal{F}_l$ 和 $E \in \mathcal{F}_k$，一般来说，$E \cap F$ 并不一定是 F的初始段。以下很容易看出这一点：任取一个 $F \in \mathcal{F}_{l+1}$（对于任意的 $l \in \omega$），并令 $\{F_i\}_{i<n_{l+1}}$ 为其典范分解。由于 $n_{l+1} \geq 2$，因此 $F_1 \cap F$ 不是 F的初始段。

引理3. 设 X、Y是序数的无限集合，$\mathcal{F}$、$\mathcal{G}$分别是定义在 X和 Y上的构造方案。若 $X \subseteq Y$ 且 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$，则 $\mathcal{F} = \{G \in \mathcal{G} \mid G \subseteq X\}$.

证明. 首先注意，若 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$，则它们具有相同的类型。在此假设下，显然 $\mathcal{F} \subseteq \{G \in \mathcal{G} \mid G \subseteq X\}$。对于另一个包含关系，取 $G \in \mathcal{G}$使得 $G \subseteq X$。再取 $\alpha = \max G$ 以及 $k \in \omega$，使得 $G \in \mathcal{G}_k$。根据推论 1，存在 $F \in \mathcal{F}_k$，且 α 是其元素。由于 $F \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$，我们知道 $\alpha \in F \cap G \sqsubseteq G$。由 α 在 G 中的极大性可知，这意味着 $F \cap G = G$。换言之，$G \subseteq F.$。由于 F 和 G 是基数为 m_k的有限集，因此 $F = G$。由此，我们得出 $G \in \mathcal{F}$。

□

命题 1. 设 X 是一个有限的序数集。当且仅当对于某个 $k \in \omega$，$|X| = m_k$ 时，X 上存在构造方案。此外，如果 X 上存在构造方案，则该方案唯一。

证明. 对于“仅当”部分，假设 $X.$ 上存在构造方案 $\mathcal{F}$ 。根据定义 2 的第 (1) 部分，我们知道存在 $F \in \mathcal{F}$ ，使得 $X \subseteq F.$ 。这意味着 $X = F$，因此对于某个 $k \in \omega.$，$|X| = |F| = m_k$ 。

我们通过对 k 进行归纳，证明充分性及唯一性。

（基步）若 $k = 0$，则 $X = \{\alpha\}$。显然， $\mathcal{F} = \{X\}$ 是 $X.$ 上唯一的构造方案。

（归纳步骤）考虑 $k \in \omega\backslash 1$，并假设我们已对每个 $i < k$ 以及满足 $|Y| = m_i$ 的每个有限序数集 Y 证明了该命题。令 X 为一个基数为 $m_k.$ 的序数集。根据定义 1 中的第（ e ）部分，集合

$$X_i = X[r_k] \cup X\left[[(m_{k-1} - r_k) \cdot (i), (m_{k-1} - r_k) \cdot (i+1))\right]$$

对每个 $i < n_k$ 都是良定义的，且基数为 m_{k-1}。归纳假设保证，对每个 $i < n_k$ ，都存在一个 X_i 上唯一的构造方案 $\mathcal{F}^i$ 。我们断言

$$\mathcal{F} = \bigcup_{i<n_k} \mathcal{F}^i \cup \{X\}$$

是 X 上的构造方案。
显然， $\mathcal{F}$ 满足定义 2 的条件 (1)、(2) 和 (4)。为了证明条件 (3)，取 $l \in \omega$ 和 $F, G \in \mathcal{F}_l$。由于 $|X| = m_k$ 和 $F \subseteq X, l \leq k$。若 $l = k$ ，则 F 和 G必定等于 X。因此，我们可以不失一般性地假设 $l < k$。这样一来，存在 $i, j < n_k$，使得 $F \in \mathcal{F}^i$和 $G \in \mathcal{F}^j$。若 $i = j$，回想一下 $\mathcal{F}^i$ 是一个构造方案，即可得出结论。当 $i \neq j$时，考虑 $\phi :\ X_i \longrightarrow X_j$ 唯一的递增双射。注意到 $\{\phi[H] \,|\, H \in \mathcal{F}^i\}$是 X_j上的一个构造方案，因此根据归纳假设，该集合等于 $\mathcal{F}^j$。此外， $\phi[F] \in \mathcal{F}^j_l$，且 ϕ在限制于 $X[r_k]$时是恒等映射。这样， $F \cap X[r_k] = \phi(F) \cap X[r_k]$。这意味着$F \cap G = X[r_k] \cap F \cap G = X[r_k] \cap \phi[F] \cap G$。但是， $\phi[F] \cap G$ 是 G 的一个初始段，而$X[r_k]$ 是 X_j的一个初始段。因此，它们的交集（即 $F \cap G$）是 G的一个初始段。

为了证明 $\mathcal{F}$ 的唯一性，取 $\mathcal{F}'$ 为 X 上任意一个构造方案。利用定义 2 的第 (4) 部分和引理 2 的第 (b) 部分，我们知道

$$\mathcal{F}' = \bigcup_{i<n_k} \{G \in \mathcal{F} \,|\, G \subseteq X_i\} \cup \{X\}.$$

注意，对于每个 $i < n_k$， $\{G \in \mathcal{F} \,|\, G \subseteq X_i\}$ 都是 X_i 上的构造方案。由于 X_i 上存在唯一的构造方案，因此该集合必定等于 $\mathcal{F}^i$。这一观察完成了证明。

□

定义4. 设 X 是一个基数为 m_k 的序数集，其中 $k \in \omega$。我们将$\mathcal{F}(X)$称为 $X.$上的唯一构造方案。

特别地，如果 X 是任意序数集， $\mathcal{F}$ 是在 X 和 $F \in \mathcal{F}$ 上的构造方案，那么 $\mathcal{F}(F) = \{G \in \mathcal{F} \,|\, G \subseteq F\}$。

推论 2. 设 X、Y 是基数相同的序数有限集。若 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 分别是基于 X 和 Y 的构造方案，且 $h :\ X \longrightarrow Y$ 是唯一的递增

双射，则

$$\mathcal{G} = \{h[F] \mid F \in \mathcal{F}\}.$$

证明。对此，只需注意到 $\{h[F] \mid F \in \mathcal{F}\}$ 是 Y. 上的构造方案。根据引理 1 的唯一性部分，结论成立。□

作为推论 2 及其之前观察的一个具体实例，我们有：当 $F \in \mathcal{F}_k$时，$\{G \in \mathcal{F} \mid G \subseteq F\} = \{F[G] \mid G \in \mathcal{F}(m_k)\}$。本文将隐式地贯穿使用这一事实。我们指出，一般而言，序数的无限集合可能拥有多个构造方案，也可能一个都没有。

3. Construction schemes, ordinal metrics and related functions

本节研究序数度量与构造方案之间的联系。序数度量由第三作者引入；它们与序数上的游走一同，已被证明是研究 ω_1 不可或缺的工具。书籍 [108] 包含了大量关于它们的信息，以及它们与序数上的游走之间关系的信息。

定义 5. 令 X 为一个序数集，且 $\rho\colon X^2 \longrightarrow \omega$ 为任意函数。对于每个 $F \in [X]^{<\omega}\backslash\{\emptyset\}$ 和 $k \in \omega$，我们将 F 的 k-闭包定义为：

$$(F)_k = \{\alpha \in X \mid \exists \beta \in F\backslash\alpha\,(\,\rho(\alpha,\beta) \leq k\,)\}$$
$$(F)_k^- = (F)_k \cap \max(F) = (F)_k\backslash\{\max(F)\}.$$

此外，我们将 F 的直径定义为

$$\rho^F = \max\{\rho(\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta \in F\}.$$

当 F 满足 $F = (F)_k$. 时，称其为 k-闭的。此外，若 F 是 k-闭的且 $k = \rho^F$，我们就简称 F 为闭的。每当 $\alpha \in \omega_1$ 时，我们将 $(\{\alpha\})_k$ 和 $(\{\alpha\})_k^-$ 分别简写为 $(\alpha)_k$ 和 $(\alpha)_k^-$ 。

注 1. 给定 $\rho\colon X^2 \longrightarrow \omega$ 和 $\beta \in X$，我们有 $(\beta)_k = \{\alpha \leq \beta \mid \rho(\alpha,\beta) \leq k\}$.

定义 6（序数度量）。令 X 为一个序数集。若 $\rho : X^2 \longrightarrow \omega$ 满足

(a) $\forall \alpha,\beta \in X\,(\ \rho(\alpha,\beta) = 0$ 当且仅当 $\alpha = \beta)$, (b) $\forall \alpha,\beta \in X$ $(\ \rho(\alpha,\beta) = \rho(\beta,\alpha)\ )$, (c) $\forall \alpha,\beta,\gamma \in X\,(\ \alpha < \beta,\gamma \to \rho(\alpha,\beta) \leq$ $\max(\rho(\alpha,\gamma)\ \rho(\beta,\gamma))\ )$. (d) $\forall \beta \in X\,\forall k \in \omega(\ |(\beta)_k| < \omega\ )$,

读者或许已经注意到，前面的定义重新组织了超度量[3]的定义。不过请注意，三角不等式的一个实例缺失了。从这个意义上说，我们可以将 $(\beta)_k$ 理解为以 β 为中心、半径为 k 的球与 β的交集。在度量空间理论中，我们通常想要了解给定空间中各点的性质。为此，我们研究它们的基本邻域逐渐缩小时的行为。序数度量往往以相反的方式发挥作用。这里，我们通常想构造一个结构，其元素由我们空间中的点参数化。为此，我们通过分析 β 与其他

[3]一个度量 d 在空间 X 上是超度量，当且仅当对于所有 $x,y,z \in X$， $d(x,y) \leq \max(d(x,z)\ d(z,y))$.

$(\beta)_k$ 中的点之间的相互作用，随着 k 增大，

以下引理是定义和三角不等式的直接推论。

引理 4. 设 $\rho\colon X^2 \longrightarrow \omega$ 是定义在序数集 X 上的序数度量。给定 $A \in [X]^{<\omega}\backslash\{\emptyset\}$，考虑 $k = \rho^A$ 和 $\gamma = \max A$。

(1) $\rho(\alpha,\gamma) \leq k$ 对每个 $\alpha \in (A)_k$,

(2) $(A)_k = (\gamma)_k$, (3) $(A)_k$ 是闭的且 $\rho^{(A)_k} = k$

现在，我们考虑一些与序数度量相关的概念。在这些定义中，每当我们说 F 是极大闭集时，我们指的是 F 是闭的，并且不存在闭集 G 使得 $\rho^F = \rho^G$ 且 $F \subsetneq G$.

定义 7. 设 $\rho\colon X^2 \longrightarrow \omega$ 是一个序数度量。我们称 ρ 为:

(1) 若 $\sup\{|F| \mid F \in [X]^{<\omega}\backslash\{\emptyset\}, F$是闭的且对每个$k \in \omega$.都有 $\rho^F \leq k\} < \omega$，则称其为局部有限；(2) 若对于任意满足 $\rho^F = \rho^G$ 的极大闭集 $F, G \in [X]^{<\omega}\backslash\{\emptyset\}$，都有 $|F| = |G|$，并且若 $h\colon F \longrightarrow G$ 是从 F 到 G的唯一递增双射，则对每个 $\alpha, \beta \in F$.都有 $\rho(h(\alpha)\ h(\beta)) = \rho(\alpha,\beta)$，则称其为齐次；(3) 若对每个 $0 < k \in \omega$ 以及每个满足 $\rho^F = k$ 的极大闭集 $F \in [X]^{<\omega}\backslash\{\emptyset\}$，都存在 $j_F \in \omega\backslash 1$ $F_0, \ldots, F_{j_F} \in [X]^{<\omega}\backslash\{\emptyset\}$使得

- $F = \bigcup_{i<j_F} F_i$,
- 对于每个 $i < j_F$, F_i 都是一个极大闭集，且满足 $\rho^{F_i} = k - 1$,
- $\{F_i\}_{i<j_F}$ 构成一个以 $R(F)$ 为根的 Δ-系，使得

$$R(F) < F_0\backslash R(F) < \cdots < F_{j_F-1}\backslash R(F).$$

命题 2. 设 X 是一个序型大于 ω 的无限序数集，并设$\rho\colon X^2 \longrightarrow \omega$ 是一个局部有限、齐次且正则的序数度量。集合

$$\mathcal{F}^\rho = \bigcup\{F \in [X]^{<\omega}\backslash\{\emptyset\} \mid F \textit{ is maximal closed}\}$$

是 X 上的一个构造方案。

证明。首先证明 $\mathcal{F} = \mathcal{F}^\rho$ 满足定义 2 的第 (1) 部分。为此，任取一个 $A \in [X]^{<\omega}$，并令 $k = \rho^A$。如引理 4 所述，$(A)_k$ 是闭的，且 $\rho^{(A)_k} = k.$。由于 ρ 局部有限，必存在一个闭的 $F \in [X]^{<\omega}$，满足 $\rho^F = k$，它包含 $(A)_k$，并且满足 $|F| = \max\{|G| \mid G \in [X]^{<\omega}\backslash\{\emptyset\}, G$ 是闭的 $\rho^G \leq k$，且 $(A)_k \subseteq G\}$。最后这个性质说明 F 是一个极大闭集，因此结论成立。

我们断言，对于每个 $k \in \omega$，$\{F \in \mathcal{F} \mid, \rho^F = k\} \neq \emptyset$，并且这个集合恰好是 $\mathcal{F}$ 中相对于包含关系秩为 k 的元素组成的集合，即 $\mathcal{F}_k.$。为证明这一点，设 $\beta \in X$ 满足 $\beta \cap X$ 是无限的。这样的 β 存在，因为 X 的序型大于 ω。根据定义 6 的 (d) 部分，我们知道存在 $\alpha \in \beta \cap X$，使得 $\rho(\alpha,\beta) > k$。考虑满足 $\{\alpha,\beta\} \subseteq F$ 的 $F \in \mathcal{F}$。注意，$F^\rho \geq \rho(\alpha,\beta) > k.$。反复利用 ρ 的正则性，我们可以找到一个极大闭 $G \in [X]^{<\omega}\backslash\{\emptyset\}$，包含于 F，且满足 $\rho^G = k$。这就证明了断言的第一部分。事实上，前面的论证表明，对于每个 $F \in \mathcal{F}$ 以及每个 $k < F^\rho$，都存在包含于 F 的 $G \in \mathcal{F}$，使得 $\rho^G = k$。断言的第二部分直接由此得出。

ρ的齐性意味着对于每个 F, $|F| = |G| = m_k$ $G \in \mathcal{F}_k$，而定义 6 的第 (1) 部分意味着对于每个 $F \in \mathcal{F}_0$, $|F| = 1$。特别是，这证明了定义 2 的第 (2) 部分。

对于 $k \in \omega\backslash 1$ 和 F，$G \in \mathcal{F}_k$，令 j_F、$j_G \in \omega\backslash 1$ 和 F_0、……、F_{j_F}、……、G_0、$F_{j_G} \in [X]^{<\omega}\backslash\{\emptyset\}$ 分别证明 ρ 对 F 和 G 的正则性。利用 ρ 的齐性，可以证明 $j_F = j_G$，并且如果 h： $F \longrightarrow G$ 是唯一的递增双射，那么对于每个 $i \leq j_F$，$G_i = h[F_i]$。因此，特别是，$h[R（F）] = R（G）$。这样，如果我们定义 $r_k = |R（G）|$，并且 $n_k = j_G + 1$，不难看出定义 2 的第 (4) 部分得以满足。

现在只剩下证明定义 2 的第 (3) 部分。为此，设 $k \in \omega$ 和 $F, G \in \mathcal{F}_k$。令$\beta \in F \cap G$和 $\alpha \in G$满足 $\alpha < \beta$。由于 $\alpha, \beta \in G$和 $\rho^G = k$，我们知道 $\rho(\alpha, \beta) \leq k$。但 $F = (F)_k$和 $\beta \in F$，这意味着 $\alpha \in F$。由于 α是任意的，我们得出结论： $F \cap G \sqsubseteq G$。□

事实证明，每个构造方案都会自然地产生一个局部有限、齐性且正则的序数度量。

定义 8. 设 $\mathcal{F}$ 是序数集 X上的一个构造方案。我们将$\rho_{\mathcal{F}}$： $X^2 \longrightarrow \omega$ 定义如下：

$$\rho(\alpha, \beta) = \min\{k \in \omega \mid \exists F \in \mathcal{F}_k(\ \{\alpha, \beta\} \subseteq F\ )\}.$$

如果根据上下文可以明确 $\mathcal{F}$，我们就将 $\rho_{\mathcal{F}}$ 简单记为 ρ.

注意，由于 $\mathcal{F}$ 在 $[X]^{<\omega}$中共尾，因此 ρ 是良定义的

引理 5. 设 $\mathcal{F}$ 是定义在序数集 X上的一个构造方案。对于满足 $\beta \in F$的每个 $\beta \in X$、$k \in \omega$ 和 $F \in \mathcal{F}_k$，有 $(\beta)_k = F \cap (\beta + 1)$ 且 $(\beta)_k^- = F \cap \beta$.

证明。根据 ρ的定义，$F \cap (\beta + 1) \subseteq (\beta)_k$ 且 $(\beta)_k \subseteq \beta + 1$。只需证明 $(\beta)_k \subseteq F$。为此，取 $\alpha \in (\beta)_k$ 以及满足 $\{\alpha, \beta\} \subseteq G$的 $G \in \mathcal{F}_{\rho(\alpha,\beta)}$。根据$k$-闭包的定义，我们知道 $\rho(\alpha, \beta) \leq k$。由此，我们可以使用引理 2 得出$G \cap F \sqsubseteq G$。由于 $\beta \in G \cap F$，这意味着 $\alpha \in G \cap F \subseteq F$，因此证毕。□

本文中将频繁使用前一个引理，而不再明确引用它。

命题 3. 设 $\mathcal{F}$ 是定义在序数集 X上的构造方案。那么，$\rho_{\mathcal{F}}$ 是一个局部有限、齐次且正则的序数度量。

证明. 首先证明 $\rho = \rho_{\mathcal{F}}$ 是一个序数度量。显然，ρ 满足定义 6 中的条件 (a) 和 (b)，而条件 (d) 则直接由引理 5 得出。我们将分两种情形证明 (c)。

($\beta < \gamma$) 设 $E \in \mathcal{F}_{\rho(\alpha,\gamma)}$ 和 $F \in \mathcal{F}_{\rho(\beta,\gamma)}$ 分别包含 $\{\alpha, \gamma\}$ 和 $\{\beta, \gamma\}$。根据引理 2，要么 $E \cap F \sqsubseteq E$，要么 $E \cap F \sqsubseteq F$。由于 $\gamma \in E \cap F$，这意味着 $\alpha \in F$ 或 $\beta \in E$，因此 $\rho(\alpha, \beta) \leq \rho(\beta, \gamma)$ 或 $\rho(\alpha, \beta) \leq \rho(\alpha, \gamma)$。

（$\gamma < \beta$）设 $F \in \mathcal{F}_{\rho(\alpha,\beta)}$、$E \in \mathcal{F}_{\rho(\alpha,\gamma)}$ 和 $G \in \mathcal{F}_{\rho(\beta,\gamma)}$，它们分别包含 $\{\alpha, \beta\}$、$\{\alpha, \gamma\}$ 和 $\{\beta, \gamma\}$。正如我们在引理 5 中证明的，若 $\gamma \notin F$，则 $\rho(\gamma, \beta) > \rho(\alpha, \beta)$，因此不失一般性，我们可以假设 $\gamma \in F$。现在，取$\{F_i\}_{i<n_{\rho(\alpha,\beta)}}$，即 F 的典范分解，并取 $j < n_{\rho(\alpha,\beta)}$，使得 $\beta \in F_j$。反设 $\rho(\alpha, \beta) > \max(\rho(\alpha, \gamma)\ \rho(\beta, \gamma)$。在这种情况下，我们可以利用引理 2 得出 $\beta \in F_j \cap G \sqsubseteq G$。由于 $\gamma < \beta$，我们有 $\gamma \in F_j \cap G$，这意味着 $\gamma \in F_j \cap E \sqsubseteq E$。因此 $\alpha \in F_j$，但这意味着 $\{\alpha, \beta\} \subseteq F_j$。这与 F 的极小性矛盾，因此得证。

现在我们证明 ρ 是局部有限、齐次且正则的。首先，我们声称对于每个$k \in \omega$

$$\mathcal{F}_k = \{F \in [X]^{<\omega} \backslash \{\emptyset\} \mid F \text{ is maximal closed with } \rho^F = k\}.$$

为证明这一点，设 $G \in [X]^{<\omega}$ 是一个满足 $\rho^G = l$ 的闭集，并令 $\beta = \max G.$。取满足 $\beta \in F$的 $F \in \mathcal{F}_l$。对于每个 $\alpha \in G$，我们知道存在 $k \leq l$和包含 $\{\alpha, \beta\}$的 $H \in \mathcal{F}_k$。我们知道 $\beta \in F \cap H \sqsubseteq H$，这意味着 $\alpha \in F \cap H \subseteq F.$。由此可证 $G \subseteq F$。由于 G是任意的，证毕。

由这个等式可知， ρ 是局部有限的。正则性和齐性直接由定义 2 的第 (4) 部分及推论 2 得出。□

仔细分析命题 2 和命题 3 的证明，可得以下推论。

推论 3. 设 X 是一个序型大于 ω的无限序数集。若 $\mathcal{F}$ 是 X 上的一个构造方案，且 $\rho : X^2 \longrightarrow \omega$ 是一个局部有限、齐次且正则的序数度量，则：

- $\mathcal{F}^{\rho_{\mathcal{F}}} = \mathcal{F}$,
- $\rho_{\mathcal{F}^\rho} = \rho$.

我们以如下说明结束本小节：对于 ω_1 上的序数度量，定义 6 中缺失的三角不等式绝不可能成立。

命题 4。 ω_1 上不存在超度量序数度量。

证明。假设 ρ 如前所述，并设 M 是 $H(\omega_2)$ 的一个可数初等子模型，且 ρ 属于其中。令 $\gamma \in \omega_1 \backslash M$，并任取一个 $\alpha \in M \cap \omega_1$。设 k 为 $\rho(\alpha, \gamma)$。利用初等性，我们可以找到大于 $(\gamma)_k \cap M$ 的 $\beta \in M \cap \omega_1$，使得 $k = \rho(\alpha, \beta)$。根据 k-闭包的定义，我们有 $\rho(\beta, \gamma) > k = \max(\rho(\alpha, \beta)\ \rho(\alpha, \gamma))$。□

3.1. 与构造方案相关的更多函数。除了与构造方案相关的序数度量之外，在进入应用领域之前，我们还需要分析两个重要函数。第一个是 Δ 函数，第二个是 Ξ 函数。在本小节余下部分，我们固定一个序数集 X.

定义 9。 设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的一个构造方案。我们定义 Δ： $\omega_1^2 \longrightarrow \omega + 1$ 如下：

$$\Delta(\alpha, \beta) = \min\{k \in \omega \mid |(\alpha)_k| \neq |(\beta)_k| \} \cup \{\omega\}$$

引理 6。设 $\alpha \quad \beta \in X$ 是互不相同的序数，且 $k \in \omega$。若 $|(\alpha)_k| = |(\beta)_k|$，则 $k < \Delta(\alpha, \beta)$.

证明。设 $F, G \in \mathcal{F}_k$，使得 $\alpha \in F$ 且 $\beta \in G$，并设 h： $F \longrightarrow G$ 为递增双射。利用 ρ 的齐性，我们得出，对于每个 $l \leq k$， $h[(\alpha)_l] = (h(\alpha))_l$。根据假设， $h(\alpha) = \beta$，因此得证。□

注 2。根据 ρ 的定义，只要 $\alpha < \beta$，就有 $(\alpha)_{\rho(\alpha,\beta)} \subsetneq (\beta)_{\rho(\alpha,\beta)}$，这意味着 $\Delta(\alpha, \beta) \leq \rho(\alpha, \beta)$。特别地， $\Delta(\alpha, \beta) = \omega$ 当且仅当 $\alpha = \beta$。

引理 7. 设 α、 β、 $\delta \in \omega_1$ 是互不相同的序数，使得 $\Delta(\alpha, \beta) < \Delta(\beta, \delta)$。那么 $\Delta(\alpha, \delta) = \Delta(\alpha, \beta)$。

证明。定义 k 为 $\Delta(\alpha,\beta)-1$。根据 Δ 定义中的极小性条件，我们有 $|(\alpha)_k| = |(\beta)_k|$。注意到 k 严格小于 $\Delta(\beta,\delta)$。由此，$|(\beta)_k| = |(\delta)_k|$。因此，$\Delta(\alpha,\delta) \geq k+1 = \Delta(\alpha,\beta)$。另一方面，$|(\beta)_{k+1}| = |(\delta)_{k+1}|$。这意味着 $|(\alpha)_{k+1}| \neq |(\delta)_{k+1}|$，进而推出 $\Delta(\alpha,\delta) \leq \Delta(\alpha,\beta)$. □

引理 8. 设 $\mathcal{F}$ 是定义在 X、$\{\alpha,\beta\} \in [X]^2$、$k = \Delta$ 上的构造方案（α、β）-1，且 ϕ 是从 $(\alpha)_k$ 到 $(\beta)_k$ 的递增双射。假设 δ、$\gamma \in$（α）$_k$ 满足 $\delta < \gamma$，并且 ϕ（δ）$\neq \delta$。则有以下结论：

（a）ϕ（γ）$\neq \gamma$，（b）ρ（α、β）$\geq \Delta$（δ、ϕ（δ））（c）Δ（δ、ϕ（δ））$\geq \Delta$（γ、ϕ（γ））,（d）Δ（γ、ϕ（γ））$\geq \Delta$（α、β）。

证明。为证明（a），我们首先注意到 $\delta \notin$（α）$_k \cap$（β）$_k$。这由以下事实可知：ϕ（δ）$\neq \delta$。由于（α）$_k \cap$（β）$_k \sqsubseteq$（α）$_k$，且 $\gamma > \delta$，因此 $\gamma \notin$（α）$_k \cap$（β）$_k$ 也成立。最后这句话等价于说 ϕ（γ）$\neq \gamma$。

现在证明 (b)。为此，设 $F \in \mathcal{F}_{\rho(\alpha,\beta)}$，使得 $\{\alpha,\beta\} \subseteq F$.。根据 k 的定义，$(\alpha)_k \cup (\beta)_s \subseteq F$。这意味着 δ 和 $\phi(\delta)$ 都属于 F.。由此，$(\delta)^{-}_{\rho\,(\alpha,\beta)} = \delta \cap F \neq \phi(\delta) \cap F = (\phi(\delta))^{-}_{\rho\,(\alpha,\beta)}$，因此 $\rho(\alpha,\beta) \geq \Delta(\delta,\phi(\delta))$。

为证明 (d)，注意到 $\phi[(\gamma)_k] = (\phi(\gamma))_k$。这意味着 $\Delta(\gamma,\phi(\gamma)) \geq k+1 = \Delta(\alpha,\beta)$。最后证明 (c)。根据假设，$\gamma \in (\alpha)_k$，这意味着 $(\gamma)_k = (\alpha)_k \cap (\gamma+1)$。此外，根据第 (d) 点，$(\gamma)_k \subseteq (\gamma)_r$ 也成立，其中 $r = \Delta(\gamma,\phi(\gamma)) - 1$。由这些事实（并利用 $\delta < \gamma$），我们得出 $\delta \in (\gamma)_r$。类似地，可以推得 $\phi(\delta) \in (\phi(\gamma))_r$。最后，设 ψ 为从 $(\gamma)_r$ 到 $(\phi(\gamma))_r$ 的递增双射。ρ 的齐性意味着 $\psi|_{(\gamma)_k} = \phi|_{(\gamma)_k}$。特别地，$\psi(\delta) = \phi(\delta)$，这意味着 $\psi[(\delta)_r] = (\phi(\delta))_r$。由此可得 $\Delta(\delta,\phi(\delta)) \geq r+1 = \Delta(\gamma,\phi(\gamma))$，证明至此结束。□

定义10. 设 $\mathcal{F}$ 是 X 和 $\alpha \in X$上的一个构造方案。Ξ_α：$\omega \longrightarrow \omega \cup \{-1\}$是定义如下的函数：

$$\Xi_\alpha(k) = \begin{cases} 0 & if\ k = 0 \\ -1 & if\ k > 0\ and\ |(\alpha)_k| \leq r_k \\ \frac{|(\alpha)_k| - |(\alpha)_{k-1}|}{m_{k-1} - r_k} & otherwise \end{cases}$$

正如我们将在下一个命题中看到的，函数 Ξ_α 告诉我们 α.位于典范分解的哪一部分

命题5. 设 $\mathcal{F}$ 是 X、$\alpha \in X$ 和 $k \in \omega\backslash 1$上的一个构造方案。若 $F \in \mathcal{F}_k$ 满足 $\alpha \in F$，且 $\{F_i\}_{i<n_k}$ 是其典范分解，则：

(a) $\Xi_\alpha(k) = -1$ 当且仅当 $\alpha \in R(F)$，(b) 如果 $i < n_k$ 满足 $\alpha \in F_i\backslash R(F)$，则 $\Xi_\alpha(k) = i$.

证明。（a）根据 Ξ的定义显然成立。为证明（b），假设 i 如所述。由于$F = R(F) \cup \big(\bigcup F_j \big)$ 且 $R(F) < F_0 \backslash R(F) < \cdots < F_{n_k-1} \backslash R(F)$，我们得出$_{j<n_k}$

$$(\alpha)_k = F \cap (\alpha+1) = R(F) \cup \big(\bigcup_{j<i} (F_j \backslash (R(F)) \cup (F_i \backslash R(F) \cap (\alpha+1)) \big)$$

$$= (F_i \cap (\alpha+1)) \cup \big(\bigcup_{j<i} F_j \big).$$

最后一个等式之前出现的集合两两不相交。这意味着

$$|(\alpha)_k| - |(\alpha)_{k-1}| = \big(\sum_{j<i} (m_{k-1} - r_k) \big) = i(m_{k-1} - r_k).$$

两边除以 $m_{k-1} - r_k$，即可得到我们要证明的等式。 □

引理 9。设 $\mathcal{F}$ 是关于 X 、 $\alpha < \beta \in X$ 和 $k \in \omega \backslash 1$的一个构造方案。那么：

（a）若 $k < \Delta(\alpha, \beta)$，则 $\Xi_\alpha(k) = \Xi_\beta(k)$。（$b$）若 $k = \rho(\alpha, \beta)$，则 $0 \leq \Xi_\alpha(k) < \Xi_\beta(k)$。（$c$）若 $k > \rho(\alpha, \beta)$，则要么 $\Xi_\alpha(k) = -1$，要么 $\Xi_\alpha(k) = \Xi_\beta(k)$。

证明。（a）只是 $\Delta(\alpha, \beta)$ 的定义的直接结果。为了证明（b），固定满足 $\{\alpha, \beta\} \subseteq F$ 的 $F \in \mathcal{F}_{\rho(\alpha,\beta)}$。我们知道存在 i、$j < n_k$，使得 $\alpha \in F_i$ 且 $\beta \in F_j$。由于 F_i、$F_j \in \mathcal{F}_{\rho(\alpha,\beta)-1}$，根据 ρ 的极小性可得 $\alpha \notin F_j$ 且 $\beta \notin F_i$。特别地，这意味着 $i \neq j$ 且 α、$\beta \notin R(F)$。因此，由命题5可知，$\Xi_\alpha(k) = i$，且 $\Xi_\beta(k) = j$。此外，由于 $\alpha < \beta$，所以 $i < j$。

现在，我们证明（c）。为此，假设 $\Xi_\alpha(k) \neq -1$，并令 $F \in \mathcal{F}_k$ 满足 $\{\alpha, \beta\} \subseteq F$。由于 $\alpha < \beta$，我们还有 $\Xi_\beta(k) \neq -1$。因此，存在满足 $\beta \in F_j \backslash R(F)$ 的 $j < n_k$。注意，$\alpha \in (\beta)_{k-1} = (\beta+1) \cap F_j$ 且 $\alpha \notin R(F)$。这意味着 $\Xi_\alpha(k) = j = \Xi_\beta(k)$，故证毕。□

引理10. 设 $\mathcal{F}$ 是关于 X、$\{\alpha, \beta\} \in [X]^2$ 和 $k = \Delta$（α，β）的构造方案。那么 Ξ_α（k）和 Ξ_β（k）均不相同，且大于或等于 0。

证明. 设 F、$G \in \mathcal{F}_k$ 满足 $\alpha \in F$ 和 $\beta \in G$。此外，设 $\phi : F \longrightarrow G$ 为递增双射。注意到 Δ（α，β）$= \Delta$（ϕ（α）β）$\leq \rho$（ϕ（α）β）$\leq k$。因此，我们可以利用引理 9 的第（c）部分，得出 $\Xi_{\phi(\alpha)}$（k）和 Ξ_β（k）均不相同，且大于或等于 0。最后，只需注意 Ξ_α（k）$= \Xi_{\phi(\alpha)}$（k）

. □

鉴于前述引理，我们可以改进引理 8 的第（d）部分。

引理 11. 设 $\mathcal{F}$ 是关于 X、$\{\alpha, \beta\} \in [X]^2$、$\Delta = \Delta$（$\alpha$，$\beta$）的构造方案，且 ϕ 是从（α）$_{\Delta-1}$ 到（β）$_{\Delta-1}$ 的递增双射。若 $\gamma \in$（α）$_{\Delta-1}$ 满足 ϕ（γ）$\neq \gamma$，则 Δ（γ，ϕ（γ））$> \Delta$ 当且仅当 Ξ_γ（Δ）$= -1$。此外，若 Ξ_γ（Δ）≥ 0，则 Ξ_γ（Δ）$= \Xi_\alpha$（Δ），且 $\Xi_{\phi(\gamma)}$（Δ）$= \Xi_\beta$（Δ）。

证明。根据引理 8 的第（d）点，我们总有 Δ（γ，ϕ（γ））$\geq \Delta$（α，β）。若 Ξ_γ（Δ）$= -1$，则引理10 中第（c）部分的结论应用于 γ 和 ϕ（γ）时不成立。鉴于此，Δ 必须与 Δ（γ，ϕ（γ））不同。

现在假设 $\Xi_\gamma(\Delta) \geq 0$。根据假设，我们有 $\rho(\alpha, \gamma) \leq \Delta - 1$。这样，我们可以利用引理 9 的（$c$）部分，得出 $\Xi_\alpha(\Delta) = \Xi_\gamma(\Delta)$。基于同样的理由，$\Xi_\beta(\Delta)$ 等于 $\Xi_{\phi(\gamma)}(\Delta)$。再次对 α 和 β 应用引理 10，可得 $\Xi_\gamma(\Delta)$ 与 $\Xi_{\phi(\gamma)}(\Delta)$ 不同。因此，$\Delta(\gamma, \phi(\gamma)) \leq k + 1 = \Delta(\alpha, \beta)$。□

推论 4。设 $\mathcal{F}$ 是定义在 $\omega_1, \xi < \alpha < \beta \in \omega_1$ 上的构造方案。若 $\rho(\xi,\beta) < \rho(\alpha,\beta)$，则 $\rho(\xi,\alpha) < \rho(\alpha,\beta)$。

证明。由于 ρ 是一种序数度量，$\rho(\xi,\alpha) \leq \max\{\rho(\xi,\beta)\ \rho(\alpha,\beta)\} = \rho(\alpha,\beta)$。反设 $\rho(\alpha,\beta) = \rho(\xi,\alpha)$。注意，由引理 9 的 (b) 部分可得 $0 \leq \Xi_\xi(\rho(\alpha,\beta)) < \Xi_\alpha(\rho(\alpha,\beta)) < \Xi_\beta(\rho(\alpha,\beta))$。另一方面，由于 $\rho(\alpha,\beta) > \rho(\beta,\xi)$，引理 9 的 (c) 部分推出，要么 $\Xi_\xi(\rho(\alpha,\beta)) = -1$，要么 $\Xi_\xi(\rho(\alpha,\beta)) = \Xi_\beta(\rho(\alpha,\beta))$。这两种情况都与前面的不等式矛盾，因此证明完毕。□

4. Theorems in ZFC

本节将在 ZFC 的框架下研究各种不可数结构。尽管这些对象大多已得到充分研究，且已有多种证明其存在性的方法，但我们旨在通过展示这些结构的新构造来说明构造方案的价值，其中有些构造比其经典对应版本简洁得多。

4.1. 一个卢津-琼斯族。对于可数无限集 X，若族 $\mathcal{A} \subseteq [X]^\omega$ 满足：当 A、$B \in \mathcal{A}$ 不同时，$A \cap B =^* \emptyset$，则称其为几乎不交族。几乎不交族是现代组合集合论研究的核心对象之一。构造具有特殊性质的几乎不交族通常很困难，在大多数情况下，这促使人们发展出强有力的工具（见 [5], [16], [21], [22], [30], [39], [98] 和 [87]）。几乎不交族在解决拓扑学和分析学中的许多问题时也发挥了核心作用。例如，J. van Mill 和 E. Watell 在 [124] 提出的选择问题，后来由 M. Hrušák 和 I. Martínez-Ruíz 在 [51] 中解决。若读者想进一步了解几乎不交族，可参阅 [45], [49], 和 [48]。

定义 11. 设 $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1}$ 是一个几乎不交族。我们称：

若对每个 $\beta \in \omega_1$ 和 $n \in \omega$，$\bullet$ $\mathcal{A}$ 都是有限的，则称 $\bullet$ $\mathcal{A}$ 为卢津族。

若对每个 $\beta \in \omega_1$，都存在 $C \in [\omega]^\omega$，使得对每个 $\alpha \leq \beta$，$A_\alpha \subseteq^* C$，且对每个 $\gamma > \beta$.，$A_\gamma \cap C =^* \emptyset$，则称 $\bullet$ $\mathcal{A}$ 为琼斯族。

若 $\bullet$ $\mathcal{A}$ 同时是卢津族和琼斯族，则称其为卢津-琼斯族。

第一个卢津族由 N. N. Luzin 于 [72] 构造。F. B. Jones 于 [56] 隐式地构造了一个琼斯族。虽然乍看之下，卢津性质和琼斯性质似乎不相容，但第二作者 M. Hrušák 与 P. Koszmider 于 [42] 构造了一个卢津-琼斯族（其基础是 Koszmider 在 [62] 的工作）。我们想指出，所提到的这个族是通过使用简化摩拉斯，以一种高度复杂的构造得到的。在这里，我们使用构造方案，以初等方法构造一个卢津-琼斯族。读者可以比较这两种证明，从而了解构造方案与简化摩拉斯之间的相似之处和差异。

定理 2. 存在一个卢津-琼斯族。

证明。令 $\mathcal{F}$为类型为 $\{(m_k, 2, r_{k+1})\}_{k\in\omega}$ 的构造方案。对于每个 $k \in \omega\backslash 1$，令

$$N_k = \{k\} \times m_{k-1} \times \big((m_{k-1} - r_k)k\big).$$

我们的目标是在 N_k的并集上构造一个卢津-琼斯族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1}$，我们将其称为 N。为此，取任意一个 $\alpha \in \omega_1$。给定 $k \in \omega$，我们定义 $A^k_\alpha \subseteq N_k$ 如下：

(1) 若 $\Xi_\alpha(k) \leq 0$，令 $A^k_\alpha = \{k\} \times \{|(\alpha)^-_k|\} \times (m_{k-1} - r_k)k$。

(2) 若 $\Xi_\alpha(k) = 1$，令 $A^k_\alpha = \{k\} \times [r_k, m_{k-1}) \times [(|(\alpha)^-_k| - m_{k-1})k, (|(\alpha)^-_k| - m_{k-1} + 1)k)$。

现在，我们将 A_α 定义为 $\bigcup_{k\in\omega} A^k_\alpha$ 和 $\mathcal{A}$ 定义为 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1}\setminus\{0\}$

首先，我们证明 $\mathcal{A}$ 几乎不相交。为此，设 $\alpha < \beta \in \omega_1$ 和 $k \in \omega\setminus 1$ 满足 $\alpha \in (\beta)^-_k$。根据 ρ 的定义，$\rho(\alpha, \beta) \leq k < k + 1$。因此，由引理 9 可知，要么 $\Xi_\alpha(k + 1) = -1$，要么 $\Xi_\alpha(k + 1) = \Xi_\beta(k + 1)$。由此显然可得 $A^{k+1}_\alpha \cap A^{k+1}_\beta = \emptyset$.。前面的论证意味着

$$A_\alpha \cap A_\beta = \bigcup_{k\in\omega\setminus\{\emptyset\}} \left(A^k_\alpha \cap A^k_\beta\right) \subseteq \bigcup_{k\leq\rho(\alpha,\beta)} U_{k+1}.$$

为了证明 $\mathcal{A}$ 是卢津集，我们首先说明，若 $\alpha < \beta$ 且 $k = \rho(\alpha, \beta)$，则 $|A_\alpha \cap A_\beta| \geq k$。由此可知 $\{\alpha < \beta \mid A_\alpha \cap A_\beta < k\} \subseteq (\beta)_k$。因此，设 α、β 和 k 如前所述。只需注意，引理 9 保证 $\Xi_\alpha(k) = 0 < \Xi_\beta(k) = 1$。这样一来，$A^k_\alpha \cap A^k_\beta = \{k\} \times \{|(\alpha)^-_k|\} \times [(|(\alpha)^-_k| - m_{k-1})k, (|(\alpha)^-_k| - m_{k-1} + 1)k)$。显然，该集合的基数为 k，且它包含于 $A_\alpha \cap A_\beta$。至此，证明完毕。

我们通过证明 $\mathcal{A}$ 是一个琼斯族来结束证明。为此，对每个 $\beta \in \omega$，定义 C_β 为 $\bigcup\left(\bigcup A^k_\alpha\right)$，并注意，对于每个 $\alpha \in \omega_1$，若 $\alpha \leq \beta$，则 $A_\alpha \subseteq^* C_\beta k\in\omega\setminus 1 \quad \alpha\in(\beta)_k$；若 $\alpha > \beta$，则 $A_\alpha \cap C_\beta =^* \emptyset$. □

4.2. Countryman 线与 Aronszajn 树。Countryman 线是一类特殊的线性序，其存在性由 R. S. Countryman 在20世纪70年代提出。在 [96], S. Shelah 首次证明了它们在 ZFC 中存在。多年后，第三作者利用序数上的游走找到了一个简易构造（见 [108]）。有兴趣进一步了解 Countryman 线的读者可以搜索 [52], [78], 或 [108]。另一方面，Aronszajn 树是 N. Aronszajn 于20世纪30年代构造的一类特殊的树。它们的存在意味着，将 K¨onig 引理自然推广到 ω_1 是不成立的。有关 Aronszajn 树的更多信息，我们建议搜索 [50], [63], [64], [73], [80], [81], [86], [108] 或 [113]。

定义 12（Countryman 线）。我们称全序集 $(X, <)$ 为 Countryman 线，当且仅当 X 不可数，且 X^2 可由可数多个链[4]覆盖。

将我们的构造与 [108] 中的构造进行比较很有意思。在我们的情形中，难点主要在于证明我们的序具有传递性，而将平方分解为可数多个链则非常容易。在 [108] 中的构造里，证明该序具有传递性很容易，主要难点则在分解部分。看来这两种构造的性质各不相同。

定义 13。设 $\mathcal{F}$ 是一个构造方案。对于每个 $\{\alpha, \beta\} \in [\omega_1]^2$，递归地判定是否 $\alpha <_\mathcal{F} \beta$，其中以下任一条件成立：

(a) $|(\alpha)_\Delta \cap (\beta)_\Delta| \geq r_\Delta$ 和 $|(\alpha)_\Delta| < |(\beta)_\Delta|$ (或等价地 $\Xi_\alpha(\Delta) < \Xi_\beta(\Delta)$)[5]。 ($b$) $|(\alpha)_\Delta \cap (\beta)_\Delta| < r_\Delta$ 和 $\min(\alpha)_\Delta\setminus(\beta)_\Delta <_\mathcal{F} \min(\beta)_\Delta\setminus(\alpha)_\Delta$。

[4]这里，我们考虑 X^2 上由 $(x, y) \leq (w, z)$ 定义的序，当且仅当 $x \leq w$ 且 $y \leq z$。[5]这两个条件等价，是引理 10 和引理 9 中 (a) 部分的直接推论。

这里 $\Delta = \Delta(\alpha, \beta)$。

换言之，取 $E, F \in \mathcal{F}_\Delta$，使得 $\alpha \in E$ 且 $\beta \in F$。我们知道 $E \cap F$ 是二者的初始段。这个交集可能包含也可能不包含 R（分别为 E）或 R（分别为 F）。若 $R(E) \subseteq E \cap F$（这意味着 $R(E) = R(F)$），则当 $|E \cap \alpha| < |F \cap \beta|$ 时，我们构造 $\alpha <_{\mathcal{F}} \beta$。另一方面，若 $R(E) \not\subseteq E \cap F$，那么我们以与 $\min(E \backslash F)$ 和 $\min(F \backslash E)$ 相同的方式关联 α 和 β。

引理 12. 设 $\{\alpha, \beta\} \in [\omega_1]^2$, $\Delta = \Delta(\alpha, \beta)$，且 ϕ 是从 $(\alpha)_{\Delta-1}$ 到 $(\beta)_{\Delta-1}$ 的递增双射。给定满足 $\phi(\gamma) \neq \gamma$ 的 $\gamma \in (\alpha)_{\Delta-1}$，以下陈述等价：

(1) $\alpha <_{\mathcal{F}} \beta$,

(2) $\gamma <_{\mathcal{F}} \phi(\gamma)$。

证明。我们同时证明两个方向的蕴含。证明采用归纳法进行。设α、β、Δ、ϕ和 γ满足假设，并假定我们已对每个 $\alpha' < \alpha$ 和 $\beta' < \beta$证明了该引理。开始之前，注意到$(\alpha)_\Delta \cap (\beta)_\Delta = (\gamma)_\Delta \cap (\phi(\gamma))_\Delta$。这是因为 $\phi(\gamma) \neq \gamma$.

在 $\Xi_\gamma(\Delta) \geq 0$的情形下，我们可以运用引理 11，得出 $\Delta(\gamma, \phi(\gamma)) = \Delta$, $\Xi_\gamma(\Delta) = \Xi_\alpha(\Delta)$且 $\Xi_\beta(\Delta) = \Xi_{\phi(\gamma)}$。结合这一事实和开头的观察，即可得到所需的等价关系。另一方面，若 $\Xi_\gamma(\Delta) = -1$，则必然有 $|(\alpha)_\Delta \cap (\beta)_\Delta| < r_\Delta$。根据引理 11，我们还有 $k = \Delta(\gamma, \phi(\gamma)) > \Delta$。令 $\delta = \min(\alpha)_\Delta \backslash (\beta)_\Delta$。于是$\phi(\delta) = \min(\beta)_\Delta \backslash (\alpha)_\Delta$ 且 $\delta \in (\gamma)_\Delta \subseteq (\gamma)_{k-1}$。令 $\psi : (\gamma)_{k-1} \longrightarrow (\phi(\gamma))_{k-1}$ 为递增双射。ρ 的齐性保证 $\phi(\delta) = \psi(\delta)$。利用归纳假设，我们得出 $\gamma <_{\mathcal{F}} \phi(\gamma)$当且仅当 $\delta <_{\mathcal{F}} \phi(\delta)$。根据定义，并且由于$|(\alpha)_\delta \cap (\beta)_\delta| < r_\Delta$，我们还有 $\alpha <_{\mathcal{F}} \beta$ 当且仅当 $\delta <_{\mathcal{F}} \phi(\delta)$。证明完毕。□

根据 ρ 的齐性，我们可以直接利用下面的推论推广引理 12。

推论 5. 设 $\{\alpha, \beta\} \in [\omega_1]^2$, $z < \Delta(\alpha, \beta)$，且 ϕ 是从 $(\alpha)_z$ 到 $(\beta)_z$ 的递增双射。给定满足 $\phi(\gamma) \neq \gamma$ 的 $\gamma \in (\alpha)_z$，以下陈述等价：

(1) $\alpha <_{\mathcal{F}} \beta$,

(2) $\gamma <_{\mathcal{F}} \phi(\gamma)$。

证明. 令 $\psi : (\alpha)_{\Delta(\alpha,\beta)-1} \longrightarrow (\beta)_{\Delta(\alpha,\beta)-1}$ 为递增双射。要证明该推论，只需注意到 $\psi|_{(\alpha)_z} = \phi$.

□

命题 6. $(\omega_1, <_{\mathcal{F}})$ 是一个全序。

证明. 这项任务中唯一不平凡的部分是证明传递性。为此，取互异的 $\alpha, \beta, \delta \in \omega_1$。我们将通过归纳法证明，$\alpha <_{\mathcal{F}} \beta <_{\mathcal{F}} \delta <_{\mathcal{F}} \alpha$ 和 $\alpha <_{\mathcal{F}} \delta <_{\mathcal{F}} \beta <_{\mathcal{F}} \alpha$ 均不成立。假设对于每个 $\alpha' < \alpha$, $\beta' < \beta$ 和 $\delta' < \delta$，我们都已证明这一事实。令 $s_1 = \Delta(\alpha, \beta)$,$s_2 = \Delta(\alpha, \delta)$ 和 $s_3 = \Delta(\beta, \delta)$。对于 $x, y \in \{\alpha, \beta, \delta\}$，令 $c(x, y) = \min(x)_{\Delta(x,y)} \backslash (y)_{\Delta(x,y)}$。根据引理 7，不失一般性地，设 $s_1 = s_2 = s_3$ 或 $s_1 = s_2 < s_3$。这两种情况的处理方式类似，因此我们只证明后一种；为此，我们将考虑以下子情况：

(1) 如果 $|(\alpha)_{s_1} \cap (\beta)_{s_1}| \geq r_{s_1}$ 且 $|(\alpha)_{s_2} \cap (\delta)_{s_2}| \geq r_{s_2}$，我们利用这一事实：由于 $s_3 > s_1$，因此 $|(\beta)_{s_1}| = |(\delta)_{s_1}|$。由此可知，或者 $\alpha <_{\mathcal{F}} \beta$，$\delta$，或者 β，$\delta <_{\mathcal{F}} \alpha$。

(2) 如果 $|(\alpha)_{s_1} \cap (\beta)_{s_1}| < r_{s_1}$ 且 $|(\alpha)_{s_2} \cap (\delta)_{s_2}| \geq r_{s_2}$，不难看出 $(\alpha)_{s_1} \cap (\beta)_{s_1} = (\beta)_{s_1} \cap (\delta)_{s_1}$。根据 $<_{\mathcal{F}}$ 的定义，α 和 β 的关联方式与 $c(\alpha, \beta)$ 和 $c(\beta, \alpha)$ 相同。推论 5 表明，δ 和 β 的关联方式与 $c(\beta, \alpha)$ 和 $\min(\delta)_{s_1} \setminus \big((\beta)_{s_1} \cap (\delta)_{s_1}\big)$ 相同。根据归纳假设，证毕。

(3) 若 $|(\alpha)_{s_1} \cap (\beta)_{s_1}| < |(\alpha)_{s_2} \cap (\delta)_{s_2}| < r_{s_1}$，则与前一种情形一样，会出现 $(\alpha)_{s_1} \cap (\beta)_{s_1} = (\beta)_{s_1} \cap (\delta)_{s_1}$。取 ϕ 从 $(\delta)_{s_1}$ 到 $(\beta)_{s_1}$ 的递增双射。根据定义，α 和 β 的关联方式与 $c(\alpha, \beta)$ 和 $c(\beta, \alpha)$ 相同。此外，$c(\alpha, \beta) \in (\delta)_{s_1}$，且 $\phi(c(\alpha, \beta)) = c(\beta, \alpha) \neq c(\alpha, \beta)$。根据推论 5，$\delta$ 和 β 的关联方式与 $c(\alpha, \beta)$ 和 $c(\beta, \alpha)$ 相同。这意味着要么 $\alpha, \delta <_{\mathcal{F}} \beta$，要么 $\beta <_{\mathcal{F}} \alpha, \delta$.

(4) 若 $|(\alpha)_{s_1} \cap (\beta)_{s_1}| = |(\alpha)_{s_2} \cap (\delta)_{s_2}| < r_{s_1}$、$\alpha$ 和 β 的关系方式与 $c(\alpha, \beta)$ 和 $c(\beta, \alpha)$ 相同。此外，α 和 δ 的关系方式与 $c(\alpha, \delta) = c(\alpha, \beta)$ 和 $c(\delta, \alpha)$ 相同。最后，只需使用归纳假设即可。

Th剩下的子情况都等价于前面的某一种，因此证明完成。 e.

□

定理 3（Countryman 线）。$(\omega_1, <_{\mathcal{F}})$ 是一条 Countryman 线。

证明。剩下唯一要做的是证明 ω_1^2 可以划分为 ω 条链。为此，只需证明 $D = \{(\alpha, \beta) \in \omega_1^2 \mid \alpha < \beta\}$ 也满足同样的性质。对每个 $x, y, z \in \omega$，定义

$$P(x, y, z) = \{(\alpha, \beta) \in D \mid |(\alpha)_z| = x,\ |(\beta)_z| = y \text{ and } \rho(\alpha, \beta) = z\}.$$

显然，所有 $P(x, y, z)$ 构成的集合是可数的，且覆盖 D，因此我们将证明每个 $P(x, y, z)$ 都是一条链。为此，取 (α, β)、$(\delta, \gamma) \in P(x, y, z)$，并假设 $\alpha <_{\mathcal{F}} \delta$。由于 $|(\beta)_z| = |(\gamma)_z|$，我们得到 $\Delta(\beta, \gamma) > z$。现在，令 ϕ 为从 $(\beta)_z$ 到 $(\gamma)_z$ 的递增双射。于是 $\phi(\alpha) = \delta$。因此，由引理 12，

$\beta <_{\mathcal{F}} \gamma$. □

请记住，偏序 $(T, <)$ 是一棵树，当且仅当对任意 $t \in T$，$t \downarrow_T = \{x \in T \mid x < t\}$ 都是良序。特别地，任何树都是良基的。

定义 14（Aronszajn 树）。设 $(T, <)$ 是一棵树。若 $Ht(T) = \omega_1$，且对每个 $\alpha < \omega_1$.，T_α 都是可数的，则称 T 为一棵 ω_1-树。此外，如果 T 是一棵没有不可数链的 ω_1-树，则称它为 Aronszajn 树。

可以从 Countryman 线自然地定义一棵 Aronszajn 树（见 [113]）。在 [69], 中，读者可以找到一种构造（使用构造方案），得到一个满足以下条件的函数族 $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \omega_1}$:

- f_α：对每个 $\alpha \in \omega_1$，$\alpha \longrightarrow \omega$ 都是一一映射，
- $f_\beta|_\alpha =^* f_\alpha$ 对每个 $\alpha < \beta \in \omega_1$.

这样的族自然生成一棵 Aronszajn 树，其元素是所有满足以下条件的函数$g : \alpha \longrightarrow \omega$：存在一个大于或等于 α 的 $\beta \in \omega_1$，使得 $g =^* f_\beta|_\alpha$。这类树称为相干阿罗森树。

另一类重要的树称为特殊树。我们称一个 ω_1-树，即 $(T, <)$，为特殊树，如果它可以表示为可数个反链的并。由于任意链与每个反链至多相交于一个点，因此可知每棵特殊树都是 Aronszajn 树。相干 Aronszajn 树通常是特殊树，但它们并不总是如此（参见 [108]

和 [50]）。在下面的定理中，我们给出从一个构造方案构造特殊树的简单方法。

定理 4. 存在一棵特殊的 Aronszajn 树。

证明。设 $\mathcal{F}$是一个类型为 $\{(m_k, 2, r_{k+1})\}_{k\in\omega}$的构造方案。给定 $\beta \in \omega_1$，考虑函数 ρ_β：$\beta+1 \longrightarrow \omega$ 定义为 $\rho_\beta(\alpha) = \rho(\alpha, \beta)$。令

$$T = \{f \in \omega^{<\omega_1} \mid \exists \beta \in \omega_1 \, (dom(f) = \beta + 1 \ and \ f =^* \rho_\beta)\}.$$

给定 $\alpha < \beta \in \omega_1$，容易看出，对每个 $\xi \in (\alpha+1)\backslash(\alpha)^{\rho(\alpha,\beta)}$，都有 $\rho_\alpha(\xi) = \rho_\beta(\xi)$。由此，我们得出，对每个 $f \in T$和 $\alpha \in dom(f)$，都有 $f|_{\alpha+1} \in T$。因此，$(T, \subseteq)$ 是一棵 ω_1-树。现在，我们将证明它实际上是一棵特殊树。为此，任取一个 $f \in \mathcal{F}$，并令 β_f 满足 $dom(f) = \beta_f + 1$。现在，令 $k_f \in \omega$ 为满足以下性质的最小自然数：

(1) 对每个 $\xi \notin (\beta_f)^{k_f}$，$\rho_{\beta_f}(\xi) = f(\xi)$；

(2) 对每个 $\xi \in (\beta_f)^{k_f}$，$f(\xi) \leq k_f$。

对于每个 $k, s \in \omega$，令 $T(k, s)$ 为所有满足 $k = k_f$ 且 $|(\beta_f)_k| = s.$ 的 $f \in T$ 所组成的集合。我们声称这个集合是 $T(k, s)$ 中的一个反链。事实上，取不同的 $f, g \in T(k, s)$。如果 $\beta_f = \beta_g$，则无事可做，因此不妨假设 $\beta_f < \beta_g$。由于 $|(\beta_f)_k| = s = |(\beta_g)_k|$，于是 $\rho(\beta_f, \beta_g) > k$。根据 k_f 和 k_g 的定义，可得 $f(\beta_f) \leq k < \rho(\beta_f, \beta_g) = g(\beta_f)$。这就证明了上述断言。最后只需注意到 $T = \bigcup_{k,s\in\omega} T(k, s)$。□

4.3. 间隙与相干族。设 X 为一个可数无限集。若一个族 $\mathcal{T} \subseteq [X]^\omega$ 在 $\subsetneq^*$ 下是良序的，且其序型等于序数 κ，则称 $\mathcal{T} \subseteq [X]^\omega$ 为一个（递增的） κ-预塔（或简称预塔）。当我们用一个有序集为预塔建立指标时，约定按保持序的方式进行。注意，每个预塔都有一个与之关联的秩函数，该函数由 $\subsetneq^*$ 定义。

定义 15（预间隙与间隙）。设 $\mathcal{A}$ 为一个 κ-预塔，$\mathcal{B}$ 为一个 λ-预塔，二者都定义在可数集 X 上。若对于每个 $A \in \mathcal{A}$ 和 $B \in \mathcal{B}$，只要 $rank$，就有 $A \cap B = \emptyset$（A）$= rank$（B），则称（$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$）是一个（κ，λ）-预间隙（或简称预间隙）。此外，若（$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$）是一个（κ，λ）-预间隙，并且不存在 $C \subseteq X$ 使得 $A \subseteq^* C$，且对于所有 $A \in \mathcal{A}$ 和 $B \in \mathcal{B}$ 都有 $B \subseteq^* X\backslash C$，则称（$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$）是一个（$\kappa$，$\lambda$）-间隙（或简称间隙）。

利用佐恩引理的简单应用即可推出间隙的存在。然而，这样做并不能确定其相关预塔的序型。1909年，F. Hausdorff 在 ZFC 中巧妙地构造了一个 (ω_1, ω_1)-间隙。这样的间隙满足以下性质。

定义 16（豪斯多夫条件）。设 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 是 ω 上的一个 (ω_1, ω_1)-预间隙。若 $\{B \in \mathcal{B} \mid rank(B) < rank(A)$ 且 $B \cap A \subseteq k\}$ 对每个 $A \in \mathcal{A}$ 和 $k \in \omega.$ 都是有限的，则称 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 满足豪斯多夫条件。

以下是一个略有不同的变体。

定义 17（卢津条件）。设 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 是无限集 X 上的 (ω_1, ω_1)-预间隙。若 $\{B \in \mathcal{B} \mid rank(B) < rank(A)$ 且对每个$A \in \mathcal{A}$ 和 $k \in \omega.$，$|B \cap A| \leq k\}$ 有限，则称 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 为卢津预间隙

不难看出，每个豪斯多夫预间隙实际上都是一个间隙，而每个卢津预间隙都是豪斯多夫的。在 [69], 中，介绍了一种利用构造方案构造豪斯多夫间隙的方法。这里，我们给出另一种构造。对于想进一步了解塔和间隙的读者，我们建议阅读 [13], [15], [36], [85] ,[94], [108], [112], [119], [120] 和 [128]。

定理 5. 设 $\mathcal{F}$ 是一个类型为 $\{(m_k, 2, r_{k+1})\}_{k\in\omega}$. 的构造方案。对每个 $\alpha \in \omega_1$，定义

$$A_\alpha = \{2k + \Xi_\alpha(k) \mid k \in \omega\backslash 1,\ and\ \Xi_\alpha(k) \geq 0\},$$
$$B_\alpha = \{2k + (1 - \Xi_\alpha(k)) \mid k \in \omega\backslash 1,\ and\ \Xi_\alpha(k) \geq 0\}.$$

那么，$(\{A_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1}, \{B_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1})$ 是一个豪斯多夫间隙。

证明。由于对于无穷多个 $k's$ 都有 $r_k = 0$，显然每个 A_α 和 B_α 都是无限的。根据定义，对于每个 $\alpha \in \omega.$，都有 $A_\alpha \cap B_\alpha = \emptyset$。根据引理 9 的 (c) 部分，我们有 $A_\alpha\backslash A_\beta \subseteq \{2k + \Xi_\alpha(k) \mid k \leq \rho(\alpha, \beta),$ 且 $\Xi_\alpha(k) \geq 0\}$，并且 $B_\alpha\backslash B_\beta \subseteq \{2k + (1 - \Xi_\alpha(k)) \mid k \leq \rho(\alpha, \beta),$ 且 $\Xi_\alpha(k) \geq 0\}$，只要 $\alpha < \beta.$。这意味着 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1}$ 和 $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1}$ 都是 ω_1-预塔。为证明豪斯多夫条件成立，取 $\beta \in \omega_1$ 和 $k \in \omega$。我们断言 $\{\alpha < \beta \mid A_\beta \cap B_\alpha \subseteq k\} \subseteq (\beta)_k$。为此，任取满足 $\rho(\alpha, \beta) \geq k.$ 的 $\alpha < \beta$。根据引理 9 的 (b) 部分，$\Xi_\alpha(\rho(\alpha, \beta)) = 0$，且 $\Xi_\beta(\rho(\alpha, \beta)) = 1$。这意味着 $2\rho(\alpha, \beta) + 1 \in A_\beta \cap B_\alpha$，故得证。

□

每个定义在集合 X 上的 (ω_1, ω_1)-预间隙（例如 $(\{A_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1}, \{B_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1})$），都有一个与之相关的 ω_1-预塔 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1}$，定义为：$T_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$ 对每个 $\alpha \in \omega_1.$。若令 f_α 为 A_α 在定义域 T_α 上的特征函数，则对每个 $\alpha < \beta \in \omega_1.$，都有 $f_\alpha =^* f_\beta|_{T_\alpha}$。由此可见，原预间隙是间隙，当且仅当不存在满足以下条件的 $f\colon X \longrightarrow 2$，使得对所有 $\alpha \in \omega_1$，都有 $f_\alpha =^* f|_{T_\alpha}$（参见 [11], ，第 96–98 页）。基于这些观察，可以提出预间隙的各种推广。以下定义由 I. Farah 在 [34] 中提出。此前，D. E. Talayco 在 [104] 中以及 C. Morgan 在 [85] 中也研究过这一主题。

定义 18. 由 ω_1-预塔 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1\backslash\omega}$ 支撑的相干函数族是一个函数族 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1\backslash\omega}$，满足：

(1) $\forall\alpha \in \omega_1\backslash\omega\,(f_\alpha\colon T_\alpha \longrightarrow \alpha)$, (2)
$\forall\alpha < \beta \in \omega_1\backslash\omega\,(f_\alpha|_{T_\alpha\cap T_\beta} =^* f_\beta|_{T_\alpha\cap T_\beta})$.

此外，若对所有 $\xi < \mu < \beta \in \omega_1\backslash\omega$ 及所有 $k \in \omega$，集合

$$\{\alpha \in \beta\backslash\mu \mid |f_\alpha^{-1}[\{\xi\}] \cap f_\beta^{-1}[\{\mu\}]| \leq k\}$$

都是有限的，我们称 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1\backslash\omega}$ 是豪斯多夫的。

设 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1\backslash\omega}$ 是由某个预塔支撑的相干函数族。给定 ξ、$\alpha \in \omega_1\backslash\omega$ 且 $\xi < \alpha$，令 $A^\xi_\alpha = f_\alpha^{-1}[\{\xi\}]$。注意，在这种情况下，$\mathcal{A}^\xi = \{A^\xi_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1\backslash\xi}$ 是一个预塔。此外，给定 $\xi < \mu$，$(\mathcal{A}^\xi, \mathcal{A}^\mu)$ 是一个预间隙[6]。

定义 19. 设 $\mathfrak{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1\backslash\omega}$ 是由一个 ω_1-预塔支撑的相干函数族。若对每个 $\xi < \mu \in \omega_1\backslash\omega$，$(\mathcal{A}^\xi, \mathcal{A}^\mu)$ 都是卢津型（分别为豪斯多夫型）的，则称 $\mathfrak{F}$ 为卢津型（分别为豪斯多夫型）。

[6]这里，我们稍微滥用了记号，将 $\mathcal{A}^\xi$ 视为 $\{A^\xi_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1\backslash\xi}$.

在 [34], 中， ZFC 构造了一个由 ω_1-预塔支撑的卢津相干函数族。该构造使用了力迫，并借助了关于 $L^{\omega}(Q)$ 的凯斯勒完备性定理（参见 [61]）。现在，我们给出这一对象的直接构造。此前尚无已知的直接构造。

定理 6. 存在一个由 ω_1-塔支撑的卢津相干函数族。

证明. 令 $\mathcal{F}$为一个类型为 $\{(m_k, 2, r_{k+1})\}_{k\in\omega}$的构造方案。令 $N = \bigcup N_k$，其中$k\in\omega$每个 N_k 都等于 $\{k\} \times k \times r_k \times r_k \times k$. 给定 $\alpha \in \omega_1\backslash\omega$，令

$$T_\alpha = \bigcup\{N_k \,|\, \Xi_\alpha(k) \geq 0\} = \{(k, i, j, s) \in \omega^3 \,|\, \Xi_\alpha(k) \geq 0 \ and \ (i, j, s) \in r_k \times r_k \times k\}.$$

给定 $\alpha < \beta \in \omega_1$，我们有 $T_\alpha \cap N_k \subseteq T_\beta \cap N_k$ 对每个 $k > \rho(\alpha, \beta)$都成立。这由引理 9 的第（c）部分得出。因此特别地， $T_\alpha \subseteq^* T_\beta$。这意味着 $\mathcal{T} = \{T_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1}$ 是一个预塔。

对每个 $\alpha \in \omega_1\backslash\omega$，按如下方式定义 $f_\alpha : T_\alpha \longrightarrow \alpha$：

$$f_\alpha(k, i, j, s) = \begin{cases} (\alpha)_k(i) & if\ \Xi_\alpha(k) = 0 \\ (\alpha)_k(j) & if\ \Xi_\alpha(k) = 1 \end{cases}$$

我们声称， $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1\backslash\omega}$ 是由 $\mathcal{T}$支撑的相干函数族。为此，令$\alpha < \beta \in \omega_1$，并任取一个 $(k, i, j, s) \in T_\alpha \cap T_\beta$，使得 $k > \rho(\alpha, \beta)$（注意，除有限多个外，所有 k都满足此性质）。根据 T_α的定义，可知 $\Xi_\alpha(k) \geq 0$。由于 $k > \rho(\alpha, \beta)$，我们可以应用引理 9，得出 $\Xi_\alpha(k) = \Xi_\beta(k)$。由此不难看出， $f_\alpha(k, i, j, s) = f_\beta(k, i, j, s)$。

最后，我们证明这个族是卢津的。为此，令 $\xi < \mu < \beta \in \omega_1$ 且 $k \in \omega$。我们声称，若 $l = \max(k, \rho(\{\xi, \mu, \beta\}))$，则 $\{\alpha \in \beta\backslash\mu \,|\, |f_\alpha^{-1}[\{\xi\}] \cap f_\beta^{-1}[\{\mu\}]| \leq k\} \subseteq (\beta)_l$。事实上，任取 $\alpha \in \beta\backslash(\mu \cup (\beta)_l)$。为简便起见，将 $\rho(\alpha, \beta)$记为 t。根据引理 9 的部分（b）， $\Xi_\alpha(t) = 0$ 且 $\Xi_\beta(t) = 1$。此外， $\xi, \mu \in (\beta)_t \cap \alpha = (\alpha)_t^-$。这样一来， $\Xi_\xi(t) \leq \Xi_\mu(t) \leq \Xi_\alpha(t) < \Xi_\beta(t)$。由于 $t > \max(\rho(\xi, \beta)\ \rho(\mu, \beta))$，结合引理 9 的部分（$b$），我们得出$\Xi_\xi(t) = \Xi_\mu(t) = -1$。因此， $i = |(\xi)_t^-|$ 和 $j = |(\xi)_t^-|$ 都严格小于 r_t。这意味着，对每个 $s < t$，都有$(t, i, j, s) \in T_\alpha \cap T_\beta$。此外，对于所有这样的 s，我们有 $f_\alpha(t, i, j, s) = (\alpha)_t(i) = \xi$，且 $f_\beta(t, i, j, s) = \mu$。因此，$\{t\} \times \{i\} \times \{j\} \times t \subseteq f_\xi^{-1}[\{\alpha\}] \cap f_\mu^{-1}[\{\beta\}]$。由于此集合的基数为 t，大于k，证毕。□

5. Beyond ZFC

定理 2 是构造方案如何应用的典型例子。我们希望构造一个不可数对象 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1}$；为此，对于每个 $\alpha \in \omega_1$，我们定义 A_α 的一列近似，记作 $\{A_\alpha^k\}_{k\in\omega}$。通常， A_α^k 的定义完全取决于 $|(\alpha)_k|$。这意味着，只要 α、$\beta \in \omega_1$ 和 $k < \Delta$（α、β），相应的近似 A_α^k 和 A_β^k 就相同。每当 $k = \rho$（α、β）时，我们就以这样的方式定义近似 A_α^k 和 A_β^k，使得可以利用引理 9 的 (b) 部分来迫使 A_α 与 A_β 发生某种相互作用。对于卢津-琼斯族，在这一步我们迫使 A_α 和 A_β 的交集至少包含 k 个元素。最后，对于每个 $k > \rho$（α、β），我们确保以这样的方式定义近似，使得可以利用引理 9 的 (c) 部分

对我们有利。在卢津-琼斯族的情形中，只要 k 大于 $\rho(\alpha,\beta)$，我们就强制 A^k_α 和A^k_β 互不相交。这意味着，在构造中，只有当 $\Delta(\alpha,\beta) \leq k < \rho(\alpha,\beta)$ 时，我们无法控制 A^k_α 与 A^k_β之间相互作用。这样一来，最理想的情形是$\Delta(\alpha,\beta) = \rho(\alpha,\beta)$。本节将关注这样一些构造方案：许多对序数都满足这一等式。

回想一下，对每个 $C \in [\omega_1]^{<\omega}$，$\rho^C = \max\{\rho(\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta \in F\}$。此外，若 $F \in \mathcal{F}$，则当且仅当 $F \in \mathcal{F}_l$时，$\rho^F = l$

定义20。设 $\mathcal{F}$ 是一个构造方案，且 $\mathcal{C} = \{c_i\}_{i<k} \subseteq [\omega_1]^{<\omega}$。对于 $F \in \mathcal{F}$，我们称 F 捕获了 $\mathcal{C}$（或者称 $\mathcal{C}$ 被 F捕获），如果：

(1) $n_{\rho^F} \geq |\mathcal{C}|$，(2) $\forall i < k$（$c_i \subseteq F_i$和 $c_i \backslash R(F) \neq \emptyset$）（3）$\forall i < k$（$\phi_i[c_0] = c_i$ 其中 ϕ_i 是从 F_0 到 F_i 的递增双射）。

此外，如果 $n_{\rho^F} = k$，我们就说 F 完全捕获了 $\mathcal{C}$。

注释3。给定 $\mathcal{C} \subseteq [\omega_1]^{<\omega}$ 和 $F \in \mathcal{F}$，我们有：F 捕获 $\mathcal{C}$ 当且仅当 $n_{\rho^F} \geq |\mathcal{C}|$，并且存在 $c \subseteq m_{\rho^F-1}$ 使得 $\max(c) \geq r_{\rho^F}$且 $\mathcal{C} = \{F_i[c] \mid i < |\mathcal{C}|\}$。

不难看出，如果 $\mathcal{C}$ 被 $\mathcal{F}$中的某个元素捕获，那么该元素必属于 $\mathcal{F}_{\rho^{\mathcal{C}}}$。。在这种情况下，$\mathcal{F}_{\rho^{\mathcal{C}}}$ 中包含 $\bigcup\mathcal{C}$ 的每个元素也会捕获 $\mathcal{C}$。每当 $C \in [\omega_1]^{<\omega}$时，我们稍微滥用一下记号，说 F 捕获（分别为完全捕获）C，而不说对 $\{\{\alpha\} \mid \alpha \in C\}$也同样成立。关于这种情况，我们有以下等价关系。其证明留给读者。

命题7. 设 $\mathcal{F}$ 是一个构造方案，且 $C \in [\omega_1]^{<\omega}$ 非空。C 被 $\mathcal{F}_l$ 中的某个元素捕获，当且仅当对每个 $i < |C|$，$\Xi_{C(i)}(\rho^C) = i$，并且对所有 α、$\beta \in C$，$\Delta(\alpha,\beta) = \rho(\alpha,\beta) = l$。

定义 21 ([70]). 设 $\mathcal{F}$ 是一个构造方案，$\mathcal{P}$ 是 ω 和 $n \in \omega\backslash 1$的一个划分。若对每个不可数的 $S \subseteq [\omega_1]^{<\omega}$、$P \in \mathcal{P}$ 和 $k \in \omega$，都存在 $\mathcal{C} \in [S]^n$、$k < l \in P$ 和 $F \in \mathcal{F}_l$ 捕获 $\mathcal{C}$，则称 $\mathcal{F}$ 是 n-$\mathcal{P}$-捕获的。每当 $\mathcal{P} = \{\omega\}$时，我们就简称 $\mathcal{F}$ 是 n-捕获的。

定义 22 ([111]). 设 $\mathcal{F}$ 是一个构造方案，$\mathcal{P}$ 是 ω的一个划分。若对每个不可数的 $S \subseteq [\omega_1]^{<\omega}$、$P \in \mathcal{P}$ 和 $k \in \omega$，都存在 $\mathcal{C} \in [S]^{<\omega}$、$k < l \in P$ 和 $F \in \mathcal{F}_l$ 完全捕获 $\mathcal{C}$，则称 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{P}$-完全捕获的。每当 $\mathcal{P} = \{\omega\}$时，我们就简称 $\mathcal{F}$ 是完全捕获的。

现在，我们引入构造方案的捕获公理。这些公理已在 [58], [69], [70]和 [111]中得到研究。

- 完全捕获公理 [FCA]：存在每一种可能类型的完全捕获构造方案。

- 带划分的完全捕获公理 [FCA(part)]：对于每种类型 τ 以及与 τ相容的每个划分 $\mathcal{P}$，都存在一个 $\mathcal{P}$-完全捕获构造方案。

- n-捕获公理 [CA$_n$]：存在每种可能类型的 n-捕获构造方案，且满足对每个 $k \in \omega\backslash 1$, $n \leq n_k$。

带划分的 • n-捕获公理 [CA$_n$(part)]：对于每种类型 τ，只要满足 $n \leq n_k$ 对每个 $k \in \omega\backslash 1$ 以及每个与 τ相容的划分 $\mathcal{P}$，就存在一个 $\mathcal{P}$-n-捕获构造方案。

5.1. 苏斯林树的类型。本小节研究一类特殊的阿隆佐恩树，称为苏斯林树。T. Jech 和 S. Tennenbaum 分别独立证明了在 [55] 和 [105] 中苏斯林树存在的一致性。后来，R. Jensen 证明，苏斯林树的存在可由 $\diamondsuit$-原理推出。最后，R. M. Solovay 和 S. Tennenbaum 证明，ZFC 与苏斯林树不存在相一致（见[101]）。

定义 23. 设 $(T, <)$ 是一棵 ω_1-树。我们称 T为苏斯林树，若 $(T, >)$ 不含不可数链或反链。

定义 24. 设 $(T, <)$ 是一棵苏斯林树。若存在一个函数族 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1}$ 使得：我们称 T 是相干的。

(1) $\forall\alpha \in \omega_1$ ($f_\alpha : \alpha \longrightarrow \omega$), (2)
$\forall\alpha < \beta \in \omega_1$ ($f_\alpha =^* f_\beta|_\alpha$), (3)
$T = \{f_\alpha|_\xi \mid \xi < \alpha < \omega_1\}$ 和 $<=\subseteq$.

过去，人们对相干性质进行了广泛研究，因为它们具有许多重要的力迫性质（参见 [17], [18], [65], [67], [68] 和 [73]）。

定理 7（FCA(part)）。存在一棵相干苏斯林树。

证明。设 $\mathcal{F}$ 是一个类型为 $\{(m_k, n_{k+1}, r_{k+1})\}_{k\in\omega}$ 、 $\mathcal{P}$-完全捕获的构造方案，其中对每个 $k \in \omega$ 都有 $n_{k+1} \geq 2^{m_k - r_{k+1}} + 1$，并且对某些无限集 P_c 和 P_a 有 $\mathcal{P} = \{P_c, P_a\}$。给定 $k \in \omega$，将从 $m_k\backslash r_{k+1}$ 到 2 的所有函数组成的集合（允许重复）枚举为 $\{g_i^k\}_{0<i<n_{k+1}}$。现在，令 $\beta \in \omega_1$ 并定义 $f_\beta : \beta \longrightarrow 2$ 如下：

$$f_\beta(\xi) = \begin{cases} 1 & if\ \Xi_\xi(\rho) = 0, \Xi_\beta(\rho) = 1\ and\ \rho \in P_c \\ g_i^\rho(|(\xi)_\rho^-|) & if\ \Xi_\xi(\rho) = 0, \Xi_\beta(\rho) = i > 1\ and\ \rho \in P_a \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

这里，$\rho = \rho(\xi, \beta)$。
取 $\alpha < \beta \in \omega_1$。我们将证明 $f_\alpha =^* f_\beta|\alpha$。为此，考虑任意一个满足 $\xi \notin (\alpha)^{\rho(\alpha,\beta)}$ 的 $\xi < \alpha$。由于 ρ 是序数度量，我们可以利用定义 6 的 (c) 部分得出 $\rho(\xi, \alpha) = \rho(\xi, \beta)$。我们稍微滥用一下记号，将这个数简称为 ρ。根据引理 9 的 (c) 部分，或者 $\Xi_\alpha(\rho) = -1$，或者 $\Xi_\alpha(\rho) = \Xi_\beta(\rho)$。但是，根据引理 9 的 (b) 部分，$\Xi_\xi(\rho) < \Xi_\alpha(\rho)$。因此，$\Xi_\alpha(\rho)$ 等于 $\Xi_\beta(\rho)$。根据 f_α 和 f_β 的定义，$f_\beta(\xi) = f_\alpha(\xi)$。
现在，我们将证明 $T = \{f_\alpha|_\xi \mid \xi < \alpha < \omega_1\}$ 是一棵苏斯林树。首先，我们来证明它没有不可数链。为此，取 $S \in [T]^{\omega_1}$，并令

$$\mathcal{C} = \{\, \{\xi, \alpha\} \in [\omega_1]^2 \mid f_\alpha|_\xi \in S\}.$$

不失一般性，我们可以假设存在 $k \in \omega$，使得对每个$\{\xi, \alpha\} \in \mathcal{C}$都有 $\rho(\xi, \alpha) = k$，并且只要 $\{\xi, \alpha\}$，就有 $\{\xi, \alpha\} \cap \{\delta, \beta\} = \emptyset$，$\{\delta, \beta\} \in \mathcal{C}$。由于 $\mathcal{F}$尤其是，

$\mathcal{P}$-3-捕获，存在大于 k 的 $l \in P_c$、 $F \in \mathcal{F}_l$，以及被 F 捕获的 $\{\xi_0, \alpha_0\}$、$\{\xi_1, \alpha_1\}$、$\{\xi_2, \alpha_2\} \in \mathcal{C}$。注意， $\xi_0 < \xi_1 < \xi_2$， $\rho(\xi_0, \alpha_1) = \rho(\xi_0, \alpha_2) = l$， $\Xi_{\xi_0}(l) = 0$，$\Xi_{\alpha_1}(l) = 1$，且 $\Xi_{\alpha_2}(l) = 2$。因此， $f_{\alpha_1}(\xi_0) = f_{\alpha_1}|_{\xi_1}(\xi_0) = 1$，且 $f_{\alpha_2}(\xi_0) = f_{\alpha_2}|_{\xi_2}(\xi_0) = 0$。这意味着 S 不是一条链。

最后，我们证明 T没有不可数反链。为此，令 $A \in [T]^{\omega_1}$。不失一般性，我们可以假设 A 的每个元素都具有 f_α 的形式，其中 $\alpha \in \omega_1$。现在，令 $\mathcal{D} = \{\alpha \in \omega_1 \mid f_\alpha \in A\}$。由于 $\mathcal{F}$是 $\mathcal{P}$-完全捕获的，因此存在被 F捕获的 $l \in P_a$、 $F \in \mathcal{F}_l$和$\{\alpha_0, \dots, \alpha_{n_l-1}\} \subseteq \mathcal{D}$。令 $g\colon\ m_{l-1}\backslash r_l \longrightarrow 2$定义如下：

$$g(j) = \begin{cases} f_{\alpha_0}(F(j)) & \text{if } F(j) < \alpha_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

取满足 $g = g_i^l$的 $0 < i < l$。我们断言 $f|_{\alpha_0} = f_{\alpha_i}|_{\alpha_0}$。为此，任取$\xi < \alpha_0$。如果 $\xi \in F_0\backslash R(F)$，那么根据 g_i^l的定义， $f_{\alpha_i}(\xi) = f_{\alpha_0}(\xi)$。如果 $\xi \in R(F)$，那么根据引理 9 的部分 (a)（因为 $\Delta(\alpha_0, \alpha_i) = l$），$f_{\alpha_i}(\xi) = f_{\alpha_0}(\xi)$。剩下的唯一情况是 $\xi \notin F \cap \alpha_0 = (\alpha)_l^-$。但我们在前一段中证明了，每当出现这种情况时， $f_{\alpha_0}(\xi) = f_{\alpha_i}(\xi)$。证明了这一断言后，我们得出结论： A不是反链。□

假设 T 是相干苏斯林树， G 是基于 T 的泛滤子（将其视为一种力迫概念）。在泛扩张 T 中，至少有 ω_1 个不可数分支。事实上，函数$\bigcup G\colon\ \omega_1 \longrightarrow \omega$ 确定了穿过 T. 的一条不可数分支。利用 T 是相干的这一点，不难看出，对 $\bigcup G$ 进行任何有限修改，都具有相同的性质。其根本原因在于，在基模型中， T 有许多非平凡自同构。
我们的下一个目标是构造与相干苏斯林树截然不同的苏斯林树。这些树不仅自同构群是平凡的，而且事实上，用它们进行力迫时只会新增一条不可数分支。若读者有兴趣进一步了解苏斯林树的自同构，可查阅 [38]。

定义 25. 给定 $k \in \omega$ 和 $\{(T_i, <_i)\}_{i<k}$ 个树的族，我们定义它们的树积

$$\bigotimes_{i<k} T_i = \{t \in \prod_{i<k} T_i \mid \forall i < k \left(rank(t(0)) = rank(t(i))\right)\}.$$

对于这个集合，我们定义一个典范序如下：

$$s < t \text{ if and only if } s(i) <_i t(i) \text{ for each } i < k$$

不难看出， $\bigotimes T_i$ 总是一棵树。此外，Aronszajn$_{i<k}$树的树积总是 Aronszajn。遗憾的是，对于苏斯林树的树积，我们不能得出相同的结论。事实上，一棵苏斯林树与其自身的树积永远不是苏斯林树。给定一棵树 $(T, <)$ 和 $t \in T$，我们令 $T|_t$ 为 T 中所有与 t. 可比较的元素组成的集合。每当 $\beta \leq Ht(T)$ 时， $T|_\beta$ 表示该集合

$$\bigcup_{\alpha<\beta} T_\alpha.$$

定义 26. 设 $(T, <)$ 是一棵树。我们称 T 是完全苏斯林的，如果对于$_{i<k}$任意不同的 $t_0, \dots, t_{k-1} \in T$，且它们的秩都相同， $\bigotimes T|_{t_i}$ 都是苏斯林树。

定理 8（FCA）。存在一棵完全 Suslin 树。

在继续之前，我们将说明整个证明中会用到的粘合。为此，设 $(T, <_T)$ 和 $(L, <_L)$ 是两棵有限树，并令 R 为 T 与 L 的交集。假设两个序限制在 R 上时一致，并且存在 $l <$min$(Ht(T)\ Ht(L))$，使得 $R = T|_l = L|_l$. 设 $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in T_l}$ 是 L 中的一个分支集合，满足对每个 $t \in T_l$ 都有 $B_t \cap R = t\downarrow_T$。对于 $x, y \in T \cup L$，若出现以下任一情况，我们令 $x <_{\mathcal{B}} y$：

- x、$y \in T$ 和 $x <_T y$,
- x、$y \in L$ 和 $x <_L y$,
- 存在 $t \in T_l$，使得 $x \in B_t$ 和 $t \leq_T y$.

我们称 $(T \cup L, <_{\mathcal{B}})$ 为通过 $\mathcal{B}$ 对 T 和 L 进行的粘合。

命题 8. $(T \cup L, <_{\mathcal{B}})$ 是一棵树。

证明。首先检查 $<_{\mathcal{B}}$ 是一个偏序。为此，只需证明传递性。设 x、y、$z \in T \cup L$ 满足 $x <_{\mathcal{B}} y$ 和 $y <_{\mathcal{B}} z$。我们断言，x、$z \in L$ 和 $y \in T$ 不可能同时成立。反设它们确实同时成立。注意到 $y <_{\mathcal{B}} z$ 蕴含 $y \in L$，这意味着 $y \in R$。但这是不可能的，因为 $x <_{\mathcal{B}} y$ 蕴含 $rank(y) \geq l$. 因此，唯一的非平凡情形是 x、$y \in L$ 和 $z \in T$ 同时成立，或 $x \in L$ 与 y、$z \in T$ 同时成立。在第一种情形下，取 $t \in T_l$，使得 $y \in B_t$ 和 $t \leq_T z$。由于 B_t 是一条分支，$x \in B_t$，从而 $x <_{\mathcal{B}} z$。在第二种情形下，取 $t \in T_l$，使得 $t \leq_T y$ 和 $x \in B_t$。只需注意 $t <_T z$。因此，$x <_{\mathcal{B}} z$.

为完成证明，取 $y \in T \cup L$。注意，若 $y \in L$，则 $y\downarrow_{T\cup L} = y\downarrow_L$。另一方面，若 $y \in T\backslash L$ 且 $t \in T_l$ 满足 $t \leq_T y$，则 $y\downarrow_{T\cup L} = B_t \cup y\downarrow_T$。在这两种情况下，相应的集合都是全序。□

设 $(T, <)$ 是一棵有限树，且 $l < Ht(T)$。我们称 $C \subseteq T$ 是 l-Good 的，若对于每个 $y \in C$，都有 $rank(y) \geq l$，并且对于任何其他的 $z \in C$，都有 $(y\downarrow_T) \cap (z\downarrow_T) \subseteq T|_l$。后一性质等价于说，$y\downarrow_T \cap T_l$ 中唯一的元素不属于 $z\downarrow_T$。

定理 8 的证明。固定一个类型为 $\tau = \{(m_k, n_{k+1}, r_{k+1})\}_{k\in\omega}$ 的对象，使得对于每个 $k \in \omega.$，都有 $n_{k+1} \geq m_k(k+1)2^{m_k}$。令 $\mathcal{F}$ 为一个类型为 $\tau.$ 的完全捕获构造方案。对于每个 $F \in \mathcal{F}$，令

$$T^F = \bigcup_{l<m_{\rho^F}} \{F(l)\} \times ((\rho^F + 1)2^l).$$

给定 F、$G \in \mathcal{F}$，使得 $\rho^F = \rho^G$，令 $\phi_{F,\ G}$：$T^F \longrightarrow T^G$ 为自然双射。也就是说，对于每个 $j < m_{\rho^F}$，都有 $\phi_{F,\ G}(F(j)\ s) = (G(j)\ s)$。

若 $\rho^F = k$，则 $|T^F| \leq m_k(k+1)2^{m_k} \leq n_{k+1}$。这意味着我们可以将 $\mathscr{P}(T^F)$（可能有重复）枚举为 $\{C_i^F\}_{i<n_{k+1}}$。此外，我们可以按这样的方式进行枚举：$C_0^G = \emptyset$ 且 $C_i^G = \phi_{F,\ G}[C_i^F]$，只要 F、$G \in \mathcal{F}_k$ 且 $i < n_{k+1}$。

我们的目标是对每个 $k \in \omega$ 和 $F \in \mathcal{F}_k$，定义 T^F 上的偏序 $<_F$，使其满足以下要求：

(1) $(T^F, <_F)$ 是一棵树；(2) $Ht(T^F) = m_k$；(3) $\forall l < m_k(\ T_l^F = \{F(l)\} \times ((k+1)2^l)\ )$；(4) T^F 的每个非极大元在 $T^F.$ 中恰有 2 个直接后继

此外，我们还要求：

(a) $\phi_{F,\ G}$ 对于每个满足 $\rho^F = \rho^G.$ 的 F、$G \in \mathcal{F}$，都是序同构

(b) 对每个 $k \in \omega$，如果 $F \in \mathcal{F}_{k+1}$ 且 $i < n_{k+1}$，那么 $<_F \cap (F_i \times F_i) = <_{F_i}$.(c) 对每个 $k \in \omega \backslash 1$，如果 $F \in \mathcal{F}_k$ 且 $C \subseteq T^{F_0}$ 是 r_k-Good，那么存在 $i < n_k$ 使得$x <_{T^F} \phi_{F_0,\ F_i}(x)$ 对每个 $x \in C$.

该构造通过递归完成。

(基步) 对每个 $F \in \mathcal{F}_0$，令 $<_F = \emptyset$.

(递归步) 令 $k \in \omega$，并假设我们已对每个 $G \in \mathcal{F}_k$ 定义了 $<_G$。令 $F \in \mathcal{F}_{k+1}$，并对每个 $i < n_{k+1}$ 将 T^i 定义为

$$\bigcup_{l<i(m_k-r_{k+1})+m_k} \{F(l)\} \times ((k+1)2^l).$$

首先，我们将递归地定义序 $<_F$ 在每个 T^i 上的限制，即 $<_i$。若$i = 0$，注意到 $T^i = T^{F_0}$。因此，令 $<_i$ 直接等于 $<_{F_0}$。现在，假设我们对某个 $i < n_{k+1} - 1$ 已定义了 $<_i$，且将条件 (1)、(2)、(3)、(4) 和 (b) 按显然的方式相对化后均成立。 $T^i \cap T^{F_{i+1}} = T^0|_{r_{k+1}}$，所以我们可以按前文所述将这些树合并。唯一缺少的是一个合适的分支集合。为此，考虑 $C^{F_0}_{i+1}$。若此集合在 T^i 中是 r_{k+1}-Good，则令 C 为包含它的极大 r_{k+1}-Good 集合。否则，令 C 为任意一个极大 r_{k+1}-Good 集合。由于C 是 r_{k+1}-Good 的，对每个 $x \in T^{i+1}_{r_{k+1}}$， C 中至多有一个大于或等于 $\phi^{-1}_{F_0}$ 的元素$_{F_{i+1}}(x)$。由极大性可知，这样的元素确实存在。将其记为 c_x。对每个$x \in T^{i+1}_{r_{k+1}}$，令 B_x 为 T^i 中满足 $c_x \in B_x$ 的一条分支，并考虑 $\mathcal{B} = \{B_x\}_{x \in T^{i+1}_{r_{k+1}}}$。根据 c_x 的定义， $\phi^{-1}_{F_0}$、$_{F_{i+1}}(x) \in B_x$.。因此，由条件的第 (a) 部分可得，对每个 x，都有 $B_x \cap T^0 = x \downarrow_{T^{F_{i+1}}}$。这样，关系 $<_{\mathcal{B}}$ 就将 $T^i \cup T^{F_{i+1}}$ 变成一棵树。最后，只需将序 $<_{\mathcal{B}}$ 扩展到 T^{i+1}，使所有条件都成立。最后补充一点，注意在$C^{F_0}_{i+1} \subseteq C$ 的情形下，对每个 $y \in C^{F_0}_{i+1}$，都存在 x 使得 $y \in B_x$，这意味着 $y = c_x$。因此，$\phi^{-1}_{F_0}$、$_{F_1}(x) <_{F_0} y$。由条件的第 (a) 部分可知$x <_{F_{i+1}} \phi_{F_0}$、$_{F_1}(y)$。于是，根据 $<_{\mathcal{B}}$ 的定义，不等式 $y <_{\mathcal{B}} \phi_{F_0}$、$_{F_1}(y)$ 成立。

一旦我们为每个 $i < n_{k+1} - 1$ 定义了 $<_i$，就令 $<_F$ 为 T 上的一个序，它扩展每个 $<_i$，并满足条件 (1)、(2)、(3) 和 (4)。根据构造，条件 (b) 和 (c) 自动满足。此外，显然我们可以将 $<_F$ 的定义从某个 $F \in \mathcal{F}_{k+1}$ 复制到任何其他 $G \in \mathcal{F}_{k+1}$，以确保条件 (a) 得到满足。这样，我们就完成了递归。
令 $T = \omega_1 \times \omega$ 并观察

$$T = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} T_F.$$

此外， $\{T_F\}_{F \in \mathcal{F}}$ 在 $[T]^{<\omega}$ 中共尾。因此，自然可以将 $<_T$ 定义为

$$\bigcup_{F \in \mathcal{F}} <_F .$$

由条件 (1)、(a)、(b) 和共尾性，我们得出 $(T, <_T)$ 是一棵树。条件 (3) 保证$H(T) = \omega_1$。此外，$T_\alpha = \{\alpha\} \times \omega$对每个 $\alpha \in \omega_1$ 都成立。因此，$(T, <_T)$ 是一棵 ω_1-树。剩下唯一要证明的是，所有合适的树积都是苏斯林的。为此，设$l \in \omega$ 且 $t(0) \ldots, t(l-1) \in T$是秩相同且彼此不同的元素，设其秩为 α.。给定 $i < l$,

令 $q_i \in \omega$，使得 $t(i) = (\alpha, q_i)$。我们将证明

$$L = \bigotimes_{i<l} T|_{t_i}$$

是苏斯林的。根据条件 (4)，L 的每个元素至少有 2 个后继。众所周知，只需证明 L 没有不可数反链即可。这是因为 L 的每个元素上方都至少有两个彼此不相容的元素。

设 $\mathcal{A} \in [L]^{\omega_1}$。对于每个 $x \in \mathcal{A}$ 和 $i < l$，都存在 $s_i^x \in \omega$，使得 $x(i) = (\beta_x, s_i^x)$，其中 $\beta_x = rank_T(x(0))$。通过细化论证，我们可以假设对每个 $i < l$，都存在 $s_i \in \omega$，使得对于每个 $x \in \mathcal{A}.$，$s_i^x = s_i$。注意，在这种情况下，只要 $x \neq y$，就有 $\beta_x \neq \beta_y$。再进行最后一次细化，我们可以假设只要 $x \in \mathcal{A}.$，就有 $\beta_x > \alpha$。令$S = \{\{\alpha, \beta_x\} \mid x \in \mathcal{A}\}$。由于 $\mathcal{F}$ 完全捕获，因此存在 $k > \max(\{s_j\}_{j<l} \cup \{q_j\}_{j<l}) + 1, F \in \mathcal{F}_k$ 和 $\{x_i\}_{j<n_k} \subseteq [\mathcal{A}]^{n_k}$，使得 F 捕获 $\{\{\alpha, \beta_{x_j}\}\}_{j<n_k}$。由于 k 足够大，我们可得，对于每个 $j < n_k$ 和每个 $i < l$，$t(i)\ x_j(i) \in T^{F_j}$。根据 L 的定义，并且由于$\alpha \in R(F)$，对于每个 $i \neq j$，我们有

$$x_0(i) \downarrow_{T^{F_0}} \cap x_0(j) \downarrow_{T^{F_0}} = t(i) \downarrow_{T^{F_0}} \cap t(j) \downarrow_{T^{F_0}} \subseteq T^{F_0}|_{r_k}.$$

因此，$C = \{x_0(i)\}_{i<l}$ 是 r_k-良好的。这意味着存在 $j < n_k$，使得

$$x_0(i) <_F \phi_{F_0,F_j}(x_0(i)) = x_j(i)$$

对每个 $i < l$都成立。因此 $x_0 < x_j$，于是得证。 □

最初，[70] 证明了存在 3-捕获构造方案蕴含存在苏斯林树，但遗憾的是，我们认为该证明存在一个间隙。这使我们提出了以下问题。

问题 1。 对于某个 $n \in \omega \backslash \{0\}$，$CA_n(part)$是否蕴含存在苏斯林树? ?

一般来说，了解通过不同形式的捕获可以构造出哪类苏斯林树，将会很有意思。

5.2. 苏斯林下半格。若（$L, <, \wedge$）是下半格，则意味着（$L, <$）是偏序，且对每个 $x, y \in L$，$\sup\{z \in X \mid z \leq x \text{ 和 } z \leq y\}$ 存在，并等于 $x \wedge y$。

定义 27（[27]）。设（$X, <, \wedge$）是下半格。若（$X, <, \wedge$）满足以下条件，则称其为苏斯林：

（1）（$X, <$）是良基的，（2）X 是不可数的，（3）X 不含任何不可数链，也不含由两两不可比较元素组成的不可数集。

在本小节余下部分中，两两不可比元素组成的集合称为 pie[7]。S. J. Dilworth、E. Odell 和 B. Sari 最早于 [27], 在巴拿赫空间的背景下研究了苏斯林下半格。在 [89], D. Raghavan 和 T. Yorioka 证明，假设 $\diamondsuit$-原理成立，则存在一个苏斯林下半格 $\mathbb{S}$，它是 $(\mathscr{P}(\omega) \subseteq, \cap)$ 的子结构，并且对每个 $n \in \omega$，$\mathbb{S}^n$ 都不包含任何不可数 pie。满足这一性质的偏序称为强力 pie。

[7]注意，在力迫的意义下，反链与饼是不同的

在下面的定理中，我们证明，只需有 CA_2 ，就足以构造出具有上述性质的苏斯林下半格。

定理 9（CA_2）。存在 $\mathbb{S} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ ，使得（$\mathbb{S}$， $\subseteq$， $\cap$）是一个强力 pie 的苏斯林下半格。

证明。固定一个类型 $\tau = \{(m_k, 2, r_{k+1})\}_{k\in\omega}$。对每个 $k \in \omega$，考虑 $A_k = m_k \times 2^k$ 和 $U_k = \{k\} \times m_k \times 2^{k-1}$。由于当 $k = 0$ 时，最后一个表达式没有意义，我们令 $U_0 = \{(0, 0, 0)\}$。另外，令 $\phi_k : A_k \longrightarrow A_{k+1}$ 定义如下:

$$\phi_k(a,b) = \begin{cases} (a,b) & if\ (a,b) \in r_{k+1} \times 2^k \\ (a + (m_k - r_{k+1}), b) & in\ other\ case \end{cases}$$

注意， $A_k \cup \phi_k[A_k] = m_{k+1} \times 2^k.$。作为准备工作的最后一部分，令

$$N_k = \bigcup_{i\leq k} U_k.$$

我们的首要目标是对每个 $k \in \omega$ 构造一个族 $\{S^k_x\}_{x\in A_k} \subseteq \mathscr{P}(N_k)$ ，使得若 $\mathbb{S}^k = \{\emptyset\} \cup \{S^k_x\}_{x\in A_k}$，则以下条件成立:

(a) $(\mathbb{S}^k, \subseteq, \cap)$ 是一个下半格。(b) $\mathbb{S}^k_0 = \{\emptyset\}$ 和 $\mathbb{S}^k_{i+1} = \{S^k_x\}_{x\in\{i\}\times 2^k}$ 对所有 $i < m_k$ 都成立（其中 $\mathbb{S}^k_i$ 是 $\mathbb{S}^k$ 中秩为 i的所有元素的集合）。(c) 对所有 $x \in A_k$、 $S^{k+1}_x = S^k_x$ 和 $S^{k+1}_{\phi_k\ x\,()} \cap N_k = S^k_x$. 特别地， $S^k_x \subseteq S^{k+1}_{\phi_k\ x\,()}$.(d) 函数 $\psi_k : \mathbb{S}^k \longrightarrow \mathbb{S}^{k+1}$ 定义如下:

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \emptyset & if\ x = \emptyset \\ S^{k+1}_{\phi_k(y)} & if\ x = S^k_y \end{cases}$$

对每个 $k \in \omega.$，都是一个嵌入

该构造通过对 k进行递归来完成。

(基步) 若 $k = 0$，则 $A_k = \{(0,0)\}$。在这种情况下，我们令 $S^0_{(0,0)} = \{(0,0,0)\}$。显然，所有条件均成立。

（递归步）假设我们已针对某个 $k \in \omega$ 定义了 $\mathbb{S}^k$ ，并且所有条件均已满足。为了定义 $\mathbb{S}^{k+1}$，我们先将 A_{k+1} 分成三个象限:

- $C_0 = A_k$,
- $C_1 = [m_k, m_{k+1}) \times 2^k$,
- $C_2 = m_{k+1} \times [2^k, 2^{k+1})$,

现在，任取一个 $x \in A_{k+1}$ ，并考虑以下情形:

(*i*) 若 $x \in C_0$，令 $S^{k+1}_x = S^k_x$。(*ii*) 若 $x \in C_2$，则对于某个 $a < m_{k+1}$ 和 $2^k \leq b < 2^{k+1}$，有 $x = (a, b)$。在这种情况下，令$S^{k+1}_x = \{k + 1\} \times (a + 1) \times \{b - 2^k\}$。(*iii*) 若 $x \in C_1$，令 $z = \phi^{-1}_k(x)$，并考虑 $D_x = \{b < 2^k \mid S^k_{(r_{k+1},b)} \subseteq S^k_z\}$. 注意， D_x 将 $\mathbb{S}^k_{r_k+1}$ 中小于 $S^k_z.$ 的元素编码。在这种情况下，令

$$S^{k+1}_x = S^k_z \cup \big(\bigcup_{b\in D_x} \{k + 1\} \times m_k \times \{b\}\big).$$

由此可直接得出条件 (c) 得到满足。特别地， $\mathbb{S}^k \subseteq \mathbb{S}^{k+1}$。我们将通过证明 $\mathbb{S}^{k+1}$ 在交集运算下封闭，来证明它是一个下半格。为此，取 x、 $y \in A_{k+1}$，并考虑以下几种情况：

(1) 如果 x、 $y \in C_0$，那么 S^{k+1}_x、 $S^{k+1}_y \in \mathbb{S}^k$。根据递归假设，我们有 $S^{k+1}_x \cap S^{k+1}_y \in \mathbb{S}^k \subseteq \mathbb{S}^{k+1}$。(2) 如果 x、 $y \in C_1$，令 $x' = \phi_k^{-1}(x)$ 和 $y' = \phi_k^{-1}(y)$。现在考虑两种子情况。如果$D_x \cap D_y = \emptyset$，这意味着 $S^{k+1}_x \cap S^{k+1}_y = S^k_{x'} \cap S^k_{y'} \in \mathbb{S}^k$。另一方面，如果 D_x 和 D_y 的交集非空，这意味着对于某个$w \in [r_{k+1}, m_k) \times 2^k$，有 $S^k_{x'} \cap S^k_{y'} = S^k_w$。由于 $\mathbb{S}^k$ 满足条件 (a) 和 (b)，因此 $D_x \cap D_y = D_{\phi_k(w)}$。由此我们得出结论： $S^{k+1}_x \cap S^{k+1}_y = S^{k+1}_{\phi_k w}$( )·(3) 如果 x、 $y \in C_2$，不失一般性，我们可以假设 x 的第一坐标小于或等于 $y.$ 的第一坐标。在这种情况下，如果 x 和 y 共享第二坐标，则 $S^{k+1}_x \cap S^{k+1}_y = S^{k+1}_x$；或者，如果它们的第二坐标相等，则 $S^{k+1}_x \cap S^{k+1}_y = \emptyset$。(4) 如果 $x \in C_0$ 和 $y \in C_1$，根据定义，我们有 $S^{k+1}_x \cap S^{k+1}_y = S^k_x \cap S^k_{\phi^{-1}(y)}$。(5) 如果 $x \in C_0$ 和 $y \in C_2$，那么 $S^{k+1}_x \cap S^{k+1}_y = \emptyset$.(6) 最后，如果 $x \in C_1$ 和 $y \in C_2$，令 $a < m_{k+1}$ 和 $2^k \leq b < 2^{k+1}$，使得 $y = (a, b)$。如果 $b - 2^k \in D_x$，我们有 $S^{k+1}_x \cap S^{k+1}_y = S^{k+1}_{c\,b}$(,)，其中 $c =$ 是 $\{a, r_{k+1}\}$ 的最小值。另一方面，如果 $b - 2^k \notin D_x$，则交集为空。

这样，我们就完成了对条件 (a) 成立性的证明。仔细考察情形 (1)、(2) 和 (3) 中的等式后，我们还可以得出结论：条件 (d) 对 $\mathbb{S}^{k+1}$ 成立。现在只剩下检查条件 (b)。为此，首先注意，对于每个 $(a, b) \in C_0 \cup C_2$， $rank(S^{k+1}_{(a,b)}) = a + 1$ 显然成立。为了证明对所有$x = (a, b) \in C_1$ 也成立，我们对第一坐标使用归纳法。基例是 $a = m_k$。此时，我们有 $S^{k+1}_x = S^{k+1}_{(r_{k+1},b)} \cup S^{k+1}_{(m_k-1,b+2^k)}$。此外， $\mathbb{S}^{k+1}$ 中任何包含于 S^{k+1}_x的元素，也包含于 $S^{k+1}_{(r_k,b)}$ 或 $S^{k+1}_{(m_k-1,b+2^k)}$之中。这意味着

$$rank(S^{k+1}_{(m_k,b)}) = \max\{r_{k+1} + 1, m_k + 1\} = m_k + 1.$$

对于归纳步骤，假设我们已经证明，对于每个（c， d）， $\in C_1$ 具有 $c < a$。令 L为所有（$a-1$， d）的集合，其中 $S^{k+1}_{(a-1,\ d)}$ （恰当地）包含于 S^{k+1}_x中。根据归纳假设，可以推出，对于每个 $y \in L$， $rank$（S^{k+1}_y） $= a$。关键在于注意到， $\mathbb{S}^{k+1}$ 中恰当地包含于 S^{k+1}_x的每个元素，也包含于某个 $y \in L$中的 S^{k+1}_y。于是，根据这一事实， $rank$（S^{k+1}_x） $= a + 1$。

现在，令 $\mathcal{F}$ 为一个类型为 τ的2-捕获构造方案。对于每个 $k \in \omega$，令 $f_k : \omega_1 \times \omega \longrightarrow \omega^2$ 定义为 f_k（α， b） = （|（α）^-_k|， b）。现在，对于每个 $x \in \omega_1 \times \omega$，令

$$S_x = \bigcup_{k \in \omega} S^k_{f_k(x)}.$$

最后，令 $\mathbb{S} = \{\emptyset\} \cup \{S_x\}_{x \in \omega_1 \times \omega^\omega}$。我们将证明 $\mathbb{S}$ 是苏斯林下半格。与之前一样，只需证明它在取交集时封闭。因此，取 $x = (\beta, b)$ $y = (\delta, d) \in \omega_1 \times \omega_\omega$。由条件 (c) 和 (d)，对每个 $S_x \cap N_k = S^k_{f_k(x)}$ 以及 $S_y \cap N_k = S^k_{f_k(y)}$

$k \in \omega$。注意，$f_k(x)\ f_k(y) \in A_k$，其中 $k = \max\{\rho(\beta,\delta)\ b, d\}$。由条件 (a)，我们知道 $S^k_{f_k}(x) \cap S^k_{f_k}(y) \in \mathbb{S}^k$。如果这个交集为空，我们可以利用条件 (d) 得出 $S_x \cap S_y$ 也为空。另一方面，如果对于 $(a,b) \in A_k$，有 $S^k_{f_k}(x) \cap S^k_{f_k}(y) = S^k_{(a,c)}$，那么$a < |(\beta)^-_k|$。因此，存在 $\alpha \in (\beta)_k$，使得 $|(\alpha)^-_k| = a$。这样，$S^k_{f_k}(x) \cap S^k_{f_k}(y) = S^k_{f_k}(\alpha,c)$。由条件 (c) 和 (d)，我们得出 $S_x \cap S_y = S_{(\alpha,c)}$。此外，条件 (b) 意味着$\mathbb{S}$ 是良基的，且其秩函数满足以下性质：

- $rank(\emptyset) = 0$,
- $rank(\alpha, b) = \alpha + 1$ 若 $\alpha \in \omega$,
- $rank(\alpha, b) = \alpha$ 若 $\alpha \in \omega_1 \backslash \omega$.

我们不必证明 $\mathbb{S}$没有不可数链，因为它是 $(\mathscr{P}(N) \subseteq, \cap)$ 的子结构，其中 $N = \bigcup_{i \in \omega} N_i$.

剩下唯一要做的就是证明 $\mathbb{S}$ 是强力 pie。为此，设 $n \in \omega$ 和 $\mathcal{A}$是 $\mathbb{S}^n$的一个不可数子集。对每个 $x \in \mathcal{A}$，取 (α^x_i, b^x_i) 使得对所有 $i < n$ 都有 $x(i) = S_{(\alpha^x_i, b^x_i)}$。不失一般性，$\alpha^x_0 \leq \cdots \leq \alpha^x_{n-1}$。此外，我们可以假设只要 x 和 y 是 $\mathcal{A}$. 中的不同元素，就有 $\alpha^x_0 > \alpha^y_{n-1}$ 或 $\alpha^x_{n-1} < \alpha^y_0$ 。最后，我们可以假设存在 $b_0, \ldots, b_{n-1} \in \omega$，使得对每个 $i < n$和 $x \in \mathcal{A}$都有 $b^x_i = b_i$。由于 $\mathcal{F}$是 2-捕获的，我们知道存在 $k > \max\{b_i \mid i < n\}$, $F \in \mathcal{F}_k$和 $x, y \in \mathcal{A}$，使得 F捕获 $\{\{\alpha^x_i\}_{i<n}, \{\alpha^y_i\}_{i<n}\}$。在这种情况下，对每个 $i < n$，都有 $f_k(x(i))\ f_k(y(i)) \in A_k$。由于 x 和 y 的第一坐标关于指标构成一个非递减序列，我们得出 $|(\alpha^x_i)^-_{k-1}| = |\alpha^x_i \cap F_0| = |\alpha^y_i \cap F_1| = |(\alpha^y_i)^-_{k-1}|$。由于 i中每个值的第二坐标都相等，这意味着 $\phi_k(f_k(x(i))) = f_k(y(i))$。

根据条件 (4)，$S^k_{f_k(x(i))} = S^k_{f_k(y(i))} \cap N_k \subseteq S^k_{f_k(y(i))}$。根据先前的论证，这意味着 $S_{x(i)} \subseteq S_{y(i)}$ 对每个 $i < n$都成立。因此，x 和 y 表明 $\mathcal{A}$ 不是一个 pie。□

对于上述给出的构造，我们使用了某一特定类型。这是为了便于计算。不过，只需进行一些小的修改，就可以检验出该证明对每一种类型都成立。

在 [58], 中已经证明，存在 n-捕获构造方案并不意味着存在 $(n+1)$-捕获构造方案。由于 $\diamondsuit$-原理蕴含完全捕获构造方案的存在，定理 9 似乎朝着解决以下问题迈进了一步。

问题 2（[89]）。$ZFC + CH$ 是否蕴含苏斯林下半格的存在?

5.3. 纠缠集。现在我们转而研究纠缠集。这些对象由 U. Abraham 和 S. Shelah 在 [6], 中引入，作为证明 MA 不蕴含任意两个 $\aleph_1$-稠密的实数集[8] 都是同构的一种方法；这一原理称为 Baumgartner 公理（缩写为 $BA(\omega_1)$）。希望进一步了解纠缠集的读者也可以参阅 [19], [43], [76], [117], [119] 和 [130]。

定义 28。设 $k \in \omega$、$t\colon\ k \longrightarrow \{>, <\}$，且 $a = \{a_0, \ldots, a_{k-1}\}$、$b = \{b_0, \ldots, b_{k-1}\} \in [\mathbb{R}]^k$以递增方式枚举并互不相交。我们称 (a,b) 实现了 t，如果

$$a_i\ t(i)\ b_i$$

对每个 $i < k.$，我们用 $T(a,b)$ 表示由 (a,b) 实现的唯一 t。

定义 29。设 $\mathcal{E} \in [\mathbb{R}]^{\omega_1}$ 和 $k \in \omega.$。我们称:

[8] $A \subseteq \mathbb{R}$ 称为 $\aleph_1$-稠密的，当且仅当对每个 $a < b \in \mathbb{R}$，都有 $|(a,b) \cap A| = \omega_1$。

- $\mathcal{E}$ 称为 k-纠缠的，当且仅当对于每个由两两不交集组成的不可数族 $\mathcal{A} \subseteq [\mathcal{E}]^k$，以及$t$：$k \longrightarrow \{>, <\}$，都存在 $a \neq b \in \mathcal{A}$，使得 $T(a, b) = t$.
- $\mathcal{E}$ 是纠缠的，当且仅当对于每个 $k \in \omega$，它都是 k-纠缠的。

下面的引理将在定理 10 的证明中隐式使用。非正式地说，它表明：当给定集合 $\mathcal{E}$ 以实数的指标族形式呈现给我们时，可以重新定义纠缠的概念。

引理 13. 设 $k \in \omega$ 和 $\mathcal{E} \in [\mathbb{R}]^{\omega_1}$ 被递增枚举为 $\{r_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1}$。那么，当且仅当对于每个不可数族 $\mathcal{C} \subseteq [\omega_1]^k$ 的两两不交集以及t：$k \longrightarrow \{>, <\}$ 存在互不相同的 c、$d \in \mathcal{C}$，使得 $\mathcal{E}$ 是 k-纠缠的，其中

$$r_{c(i)}\, t(i)\, r_{d(i)}$$

对于每个 $i < k$.

证明。假设 $\mathcal{E}$ 是 k-纠缠的。设 $\mathcal{C} \subseteq [\omega_1]^k$ 是一个不可数的两两不交集族，并且 t：$k \longrightarrow \{>, <\}$。给定 $c \in \mathcal{C}$，令 h_c：$k \longrightarrow k$ 为满足以下条件的唯一函数：当且仅当 $i < j$ 时，$r_{c(h(i))} < r_{c(h_c(j))}$ 对每个 i、$j < k$成立。通过细化 $\mathcal{C}$，不失一般性地设存在 h，使得对所有 $c \in \mathcal{C}$都有 $h = h_c$。关键观察是，当 $c \in \mathcal{C}$时，h 编码了 $\{r_{c(i)}\}_{i<k}$ 的递增枚举（相对于实数而言）。也就是说，$r_{c(h(0))} < \cdots < r_{c(h(k-1))}$。现在，令 $t' = t \circ h$。根据上述观察，并且由于$\mathcal{E}$ 是 k-纠缠的，存在互不相同的 c、$d \in \mathcal{C}$，使得

$$T(\{r_{c(h(i))}\}_{i<k}, \{r_{d(h(i))}\}_{i<k}) = t'.$$

最后，任取一个 $i < k$，并令 $i' = h^{-1}(i)$。那么 $r_{c(h(i'))}\, t'(i') r_{d(h(i'))}$。但是$r_{c(h(i'))} = r_{c(i)}$, $t'(i') = t(i)$，且 $r_{d(h(i'))} = r_{d(i)}$，这意味着 $r_{c(i)}\, t(i) r_{d(i)}$。因此证明完毕。剩余蕴含的证明完全类似。□

作为第三个应用，我们证明，纠缠集的存在性可由完全捕获构造方案的存在性推出。

定义 30。设 $(X, <)$ 是一个线性序。给定函数 $f, g \in X^\omega$，我们称 $f <_{lex} g$，若 $f(n) < g(n)$，其中 $n = \min\{k \in \omega \mid f(k) \neq g(k)\}$。

注 4。$(X^\omega, <_{lex})$ 是一个线性序；当 X 是一个可数集时，它可以嵌入 $\mathbb{R}$。

定理 10（FCA）。存在一个纠缠集。

证明。设 $\mathcal{F}$ 是一个类型为 $\{(m_k, n_{k+1}, r_{k+1})\}_{k\in\omega}$ 的完全捕获构造方案，使得 $n_{k+1} \geq 2^{m_k} + 1$ 对每个 $k \in \omega$. 都成立。根据注 2，我们可以将 $(\mathbb{Z}^\omega, <_{lex})$ 视为 $\mathbb{R}$ 的子集。这样，只需定义一个纠缠集 $\mathcal{E} = \{f_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1} \subseteq \mathbb{Z}^\omega$。

首先，将 $\mathscr{P}(m_k \backslash r_{k+1})$（可能有重复）枚举为 $\{C_i^k\}_{0<i<n_{k+1}}$，对每个 $k \in \omega$ 均如此。现在，给定 $\alpha \in \omega_1$，按如下方式定义 f_α：$\omega \longrightarrow \mathbb{Z}$：

$$f_\alpha(k) = \begin{cases} 0 & \text{if } k = 0 \text{ or } \Xi_\alpha(k) = -1 \\ \Xi_\alpha(k) & \text{if } \Xi_\alpha(k) \geq 0 \text{ and } |(\alpha)^-_{k-1}| \in C^{k-1}_{\Xi_\alpha(k)} \\ -\Xi_\alpha(k) & \text{if } \Xi_\alpha(k) \geq 0 \text{ and } |(\alpha)^-_{k-1}| \notin C^{k-1}_{\Xi_\alpha(k)} \end{cases}$$

为证明 $\mathcal{E}$ 是纠缠的，令 $k \in \omega$、t：$k \longrightarrow \{>, <\}$，并设 $\mathcal{C} \subseteq [\omega_1]^k$ 是一个两两不交集的不可数族。由于 $\mathcal{F}$ 完全捕获，因此存在 $l > 0$、$F \in \mathcal{F}_l$ 和

$\{c_1, \ldots, c_{n_l-1}\} \in [\mathcal{C}]^{n_l}$ 被 F 捕获。由于 $c_i's$ 两两不交，因此对所有 $i < n_l$，都有 $c_i \subseteq F_i \backslash R(F)$。注意，对每个 i、$r < n_l$ 和 $j < k$，$f_{c_i}(j)|_l = f_{c_r}(j)|_l$。令 $0 < z < n_l$ 满足 $C_z^{l-1} = \{ |(c_0(j))_{l-1}^-| \mid j < k \text{ 且 } t(j) =< \}$。根据定义，只要 $t(j) =<$ 且在 $t(j) =>$ 的情况下 $f_{c_z}(j)(l) = -z$，就有 $f_{c_z}(j)(l) = z$。这意味着 $T(c_0, c_z) = t$，因此得证。□

与定理 8 的情形一样，定理 10 引出了以下问题。

问题 3. $CA_n(part)$ 是否意味着存在某个 $n \in \omega \backslash 1$ 对应的纠缠集?

5.4. 多色 Ramsey 理论中的一个结果。Ramsey 理论诞生于 [90]。在那篇论文中，F. P. Ramsey 写下了一个引理，如今称为 Ramsey 定理。也就是说，若 k、$l \in \omega$ 和 c：$[\omega]^k \longrightarrow l$ 是任意着色，则存在 $A \in [\omega]^\omega$，使得 $c|_{[A]^k}$ 是单色的。经典 Ramsey 理论关注的是这类结果。非正式地说，我们可以认为，它的目标是在混沌中寻找秩序。相反，多色 Ramsey 理论旨在寻找混沌。[118], 中有一个这样的例子，第三作者证明存在着色 c：$[\omega_1]^2 \longrightarrow \omega_1$，使得对于每个 $A \in [\omega_1]^{\omega_1}$，都有 $c[[A]^2] = \omega_1$。为此，他首先构造了一个函数 ϕ：$[\omega_1]^2 \longrightarrow \omega_1$，它具有如下性质：对于每个不可数 A，$\phi[[A]^2]$ 都包含 ω_1 的一个闭无界子集。不难看出，如果 $\mathcal{F}$ 是一个构造方案，那么定义为 $\phi(\alpha, \beta) = \min(\beta)_{\Delta(\alpha,\beta)} \backslash \alpha$ 的函数 ϕ 满足这一性质。

定义 31. 设 c：$[\omega_1]^2 \longrightarrow \omega_1$ 是一个着色，$A \subseteq \omega_1$ 和 κ 是基数（可能为有限基数）。我们称：

- c 是 κ-有界的，如果 $|c^{-1}[\{\xi\}]| < \kappa$ 对每个 $\xi \in \omega_1$.
- A 是单射的，如果 $c|_{[A]^2}$ 是单射的。

关于每个二重有界着色 c：$[\omega_1]^2 \longrightarrow \omega_1$ 是否都有一个不可数单射集的问题，最早由 F. Galvin 于20世纪80年代初提出；他证明了 CH 意味着这个问题的答案是否定的。在 [115], 中，第三作者证明了这是相容的；特别是，PFA 意味着每个 ω-有界的 c：$[\omega_1]^2 \longrightarrow \omega_1$ 都有一个不可数单射集。

在 [2], 中，U. Abraham、J. Cummings 和 C. Smyth 证明了以下情形是相容的：存在一个二重有界着色 c：$[\omega_1]^2 \longrightarrow \omega_1$，在任何 ccc 力迫扩张中都没有不可数单射集。听闻这一结果后，S. Friedman 要求给出一个具体例子：一个没有不可数单射集的二重有界着色，但在某个 ccc 力迫扩张中会获得一个不可数单射集（ccc- 可摧毁）。在假设 CH 且存在一棵苏斯林树的条件下，[2] 给出了这样一个例子。这里我们使用 3-捕获构造方案来构造一个这样的例子。

定理1 1（CA_3）。存在一个着色 $c : [\omega_1]^2 \longrightarrow \omega_1$，满足以下性质：
（1） c是 2-有界的，（2） c没有不可数单射集，（3） c是 ccc-可摧毁的。

证明。令 $\mathcal{F}$ 为一个任意类型的 3-捕获构造方案。令 ψ：$\omega_1 \times \omega \times \omega \longrightarrow \omega_1$ 为一个双射，并如下定义 $c : [\omega_1]^2 \longrightarrow \omega$：

$$c(\alpha, \beta) = \begin{cases} \psi(\beta, \rho(\alpha, \beta), |(\alpha)_{\rho(\alpha,\beta)}|) & \text{if } \alpha < \beta \text{ and } \Xi_\beta(\rho(\alpha, \beta)) \geq 3 \\ \psi(\beta, \rho(\alpha, \beta), |(\alpha)_{\rho(\alpha,\beta)-1}|) & \text{if } \alpha < \beta \text{ and } \Xi_\beta(\rho(\alpha, \beta)) < 3 \end{cases}$$

为证明 c 是二重有界着色，令 $\xi \in \omega_1$，并假设 $\{\alpha_0, \beta_0\}$、$\{\alpha_1, \beta_1\}$ 和 $\{\alpha_2, \beta_2\}$是 $c^{-1}[\{\xi\}]$的元素。我们将证明其中两个集合相等。由于 ψ 是一一映射，$\beta_0 = \beta_1 = \beta_2$ 且 $\rho(\alpha_0, \beta_0) = \rho(\alpha_1, \beta_1) = \rho(\alpha_2, \beta_2)$。我们分别将这些值记为 β 和 k。因此，对任意 $i, j < 3$，$\rho(\alpha_i, \alpha_j) \leq \max(\rho(\alpha_i, \beta), \rho(\alpha_j, \beta)) = k$。第一种情况是 $\Xi_\beta(k) \geq 3$。此时，$|(\alpha_0)_k| = |(\alpha_1)_k| = |(\alpha_2)_k|$。特别地，$\Delta(\alpha_0, \alpha_1) > k$。根据注 2，这种情况唯一可能发生的方式是 $\alpha_0 = \alpha_1$，所以结论成立。剩下的情况是 $\Xi_\beta(k) < 2$。此时，对每个 $i < 3$，都有 $0 \leq \Xi_{\alpha_i}(k) < 2$。这意味着存在 $i < j < 3$使得 $\Xi_{\alpha_i}(k) = \Xi_{\alpha_j}(k)$。根据 c的定义，我们还知道 $|(\alpha_i)_{k-1}| = |(\alpha_j)_{k-1}|$。换言之，$\Delta(\alpha_i, \alpha_j) \geq k$。同样，根据注 2，$\alpha_i = \alpha_j$。

现在，我们证明 c没有不可数单射集。为此，设 $S \in [\omega_1]^{\omega_1}$。由于 $\mathcal{F}$ 是 3-捕获的，存在 $l \in \omega$、$F \in \mathcal{F}_l$和 $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\} \in [S]^3$，它被 F捕获。特别地，$\Xi_{\alpha_2}(l) = 2$，且对每个 $i < 2$，以下性质都成立：

- $\rho(\alpha_i, \alpha_2) = l$,
- $|(\alpha_i)_{l-1}| = |(\alpha_2)_{l-1}|$.

换言之，$c(\alpha_0, \alpha_2) = c(\alpha_1, \alpha_2)$。

最后，我们证明 c 是 ccc-可摧毁的。为此，设 $\mathbb{P} = \{p \in [\omega_1]^{<\omega} \mid p$ 是单射，并以反向包含为序。我们断言 $\mathbb{P}$ 是 ccc。由于 $\mathcal{F}$ 是 3-捕获的（因此也是 2-捕获的），若$\mathcal{A} \in [\mathbb{P}]^{\omega_1}$，则存在 p、$q \in \mathcal{A}$、$l \in \omega$ 和 $F \in \mathcal{F}_l$，它们捕获 p 和 q。根据 c的定义，很容易看出 $p \cup q$ 是单射。因此，$\mathcal{A}$ 不是反链；又由于 $\mathcal{A}$ 是任意的，$\mathbb{P}$ 是 ccc. 。最后，由于 $\mathbb{P}$ 是 ccc 且不可数，存在 $p \in \mathbb{P}$ 迫使泛滤子不可数（见 [63]）。证明至此完成。□

5.5. ZFC 之外的相干函数族。通过力迫来摧毁一个 (ω_1, ω_1)-间隙（例如 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$）有一种显然的方法。只需使用一个会坍缩 ω_1 的力迫概念进行力迫。在泛扩张中，$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 将成为一个可数的预间隙，这意味着它不再是间隙。因此，关于 (ω_1, ω_1)-间隙可破坏性的问题，只有对于不会坍缩 ω_1. 的力迫概念才有意义

定义 32. 设 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 是一个 (ω_1, ω_1)-预间隙。如果存在一个力迫概念 $\mathbb{P}$，以保留 ω_1 的方式进行力迫，使得在通过 $\mathbb{P}$ 的某个泛扩张中，$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 不是间隙，则称 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 是可摧毁的。如果这种情况不会发生，则称该间隙是不可摧毁的。

有时，可以在使另一个间隙变得不可摧毁的同时摧毁一个间隙。考虑以下概念：

定义 33. 设 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 是一个 (ω_1, ω_1)-预间隙，且 $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in X}$和 $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in X}$。我们定义以下力迫概念：

- $\chi_0(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \{\sigma \in [X]^{<\omega} \mid \big(\bigcup_{\alpha \in \sigma} A_\alpha\big) \cap \big(\bigcup_{\alpha \in \sigma} B_\alpha\big) = \emptyset\}$
- $\chi_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \{\sigma \in [X]^{<\omega} \mid \forall \alpha \neq \beta \in \sigma \left((A_\alpha \cap B_\beta) \cup (A_\beta \cap B_\alpha) \neq \emptyset\right)\}$

二者均按反向包含排序。每当 $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \omega_1 \setminus \omega}$ 是由某个 ω_1-塔支撑的相干函数族，$i \in 2$ 和 $s \in [\omega_1 \setminus \omega]^2$时，我们将 $\chi_i(\mathcal{A}^{s(0)}, \mathcal{A}^{s(1)})$ 简记为 $\chi_i(s)$。

事实证明，力迫概念 χ_0 和 χ_1 分别刻画了预间隙何时是间隙以及何时是可摧毁的。

定理 12（[24], [94], [119], [129]）。设（$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$）是一个（ω_1，ω_1）-预间隙：

- $\chi_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是 ccc 当且仅当 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是一个间隙。在这种情况下， $\chi_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 强制 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 不可摧毁。

- $\chi_0(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是 ccc 当且仅当 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 可摧毁。在这种情况下，在经由 $\chi_0(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 的某个泛扩张中，$(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 不是间隙。

定义34。我们称由 (ω_1,ω_1)-间隙构成的族 $\{(\mathcal{A}_i,\mathcal{B}_i)\}_{i\in I}$ 独立，当且仅当：

$$\prod_{c\in C}\chi_{s(c)}(\mathcal{A}_c,\mathcal{B}_c)$$

对于每个 $\mathcal{C}\in[I]^{<\omega}$ 和 s， ccc 是 $\mathcal{C}\longrightarrow 2.$: 此外，由某个预塔（例如 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1\backslash\omega}$）支撑的相干函数族称为独立，当且仅当 $\{(\mathcal{A}^{c(0)},\mathcal{A}^{c(1)})\}_{c\in[\omega_1\backslash\omega]^2}$ 独立。

上述定义的意义在于，如果 $\{(\mathcal{A}_i,\mathcal{B}_i)\}_{i\in I}$ 是由 (ω_1,ω_1)-间隙构成的独立族，那么对于每个 $F:I\longrightarrow 2$，有限支撑积

$$\prod_{i\in I}^{FS}\chi_{F(i)}(\mathcal{A}_i,\mathcal{B}_i)$$

是 ccc。这可以用于编码，方式类似于 U. Abraham 和 S. Shelah 在 [3] 中所做的。

在 [129], 中，T. Yorioka 证明了，假设 ♢原理成立，则存在一个由 2^{ω_1} 个间隙组成的独立族。在本小节中，我们将构造一个由间隙组成的独立族 fro FCA。为此，我们需要以下命题（见 [112]）。

命题 9. 设 $\{(\mathcal{A}_c,\mathcal{B}_c)\}_{c\in\mathcal{C}}$ 是一个由有限个(ω_1,ω_1)-间隙组成的族，且 $s:\mathcal{C}\longrightarrow 2$。若在 $\mathbb{P}=\prod_{c\in\mathcal{C}}\chi_{s(c)}$ $(\mathcal{A}_c,\ \mathcal{B}_c)$ 中不存在不可数反链 $\mathcal{A}$，使得对于所有 $g\in\mathcal{A}$ 和$c\in\mathcal{C}$，都有 $|g(c)|=1$，则 $\mathbb{P}$ 是 ccc.

定理13（FCA）。存在一个由ω_1-预塔支撑的独立相干函数族。

证明。这里的构造与定理 6 中的构造类似。固定一个类型 $\{(m_k,n_{k+1},r_{k+1})\}_{k\in\omega}$，使得对所有 $k\in\omega$ 都有 $n_{k+1}>2^{r_{k+1}^2}$，并令 $\mathcal{F}$ 为该类型的一个完全捕获构造方案。对每个 $k\in\omega\backslash 1$，定义 N_k 为 $\big(\{k\}\times[r_k]^2\big)\cup\big(\{k\}\times(m_k-r_k)\big)$，并令 N 为所有 N_k' 的（不相交）并集。此外，以满足 $S_0^k=S_1^k=[r_k]^2$ 的方式将 $\mathscr{P}([r_k]^2)$（可能含有重复项）枚举为 $\{S_i^k\}_{i<n_k}$。

我们先定义一个位于 N 上的 ω_1-预塔。给定 $\alpha\in\omega_1\backslash\omega$ 和 $k\in\omega\backslash 1$，我们定义 T_α^k 如下：

(1) If $\Xi_\alpha(k)=-1$, let $T_\alpha^k=\emptyset$.
(2) If $i=\Xi_\alpha(k)\geq 0$, let $T_\alpha^k=\big(\{k\}\times S_i^k\big)\cup\big(\{k\}\times(|(\alpha)_k^-|-r_k)\big)$.

最后，令 $T_\alpha=\bigcup_{k\in\omega\backslash 1}T_\alpha^k$。证明 $\mathcal{T}=\{T_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1\backslash\omega}$ 是一个 ω_1-塔的方法与定理 6 中的证明类似。事实上，可以证明，只要 $k>\rho(\alpha,\beta)$，就有 $T_\alpha^k\subseteq T_\beta^k$。这一结论的细节留给读者。

我们将定义由 $\mathcal{T}$ 支持的相干函数族。为此，令$\beta \in \omega_1\backslash\omega$。为了定义 f_β： $T_\beta \longrightarrow \beta$，考虑 $\alpha < \beta$ 和任意一个 $k \in \omega$。我们将描述 α 在 f_β 中限制到 T^k_β 上的纤维（即，$f^{-}1_\beta[\{\alpha\}] \cap T^k_\beta$）。如果 $k < \rho(\alpha,\beta)$，则令$f^{-1}_\beta[\{\alpha\}] \cap T^k_\beta = \emptyset$。如果 $k \geq \rho(\alpha,\beta)$，则考虑以下几种情况：

(a) 若 $\Xi_\alpha(k) \geq 0$，令 $f^{-1}_\beta[\{\alpha\}] \cap T^k_\beta = \{(k, |(\alpha)^-_k| - r_k)\}$。(b) 若 $\Xi_\alpha(k) = -1$ 且 $\Xi_\beta(k) = 0$，令 $M^{(\alpha,\beta)}_k = \{s \in S^k_i \mid s(0) = |(\alpha)^-_k|\}$ 并

$$f^{-1}_\beta[\{\alpha\}] \cap T^k_\beta = \{k\} \times M^{(\alpha,\beta)}_k.$$

(c) 若 $\Xi_\alpha(k) = -1$ 且 $i = \Xi_\beta(k) > 0$，令 $M^{(\alpha,\beta)}_k = \{s \in S^k_i \mid s(1) = |(\alpha)^-_k|\}$ 并

$$f^{-1}_\beta[\{\alpha\}] \cap T^k_\beta = \{k\} \times M^{(\alpha,\beta)}_k.$$

(d) 若 $\Xi_\beta(k) = -1$， $T^k_\beta = \emptyset$ 那么无需进行任何操作。

容易验证，每个函数都是良定义的，并且 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1\backslash\omega}$ 是由 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1\backslash\omega}$ 支持的相干函数族。事实上，读者可以验证，对于所有 $\alpha < \beta \in \omega_1\backslash\omega$和 $k > \rho(\alpha,\beta)$，都有 $f_\alpha|_{T^k_\alpha\cap T^k_\beta} = f_\beta|_{T^k_\alpha\cap T^k_\beta}$。为了证明我们的函数族是独立的，取非空的 $\mathcal{C} \in [[\omega_1\backslash\omega]^2]^{<\omega}$ 和 s： $\mathcal{C} \longrightarrow 2$. 我们将证明

$$\mathbb{P} = \prod_{c\in\mathcal{C}} \chi_{s(c)}(c)$$

是 ccc。为此，取一个不可数的 $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}$。我们将证明 $\mathcal{A}$ 不是反链。根据命题 9，我们可以假设对于每个 $g \in \mathcal{A}$ 和每个 $c \in C$， $g(c)$ 都只有一个元素。为了使证明尽可能简洁，我们将 $g(c)$ 与其唯一元素等同。不失一般性，我们可以假设，对于每个 g、$h \in \mathcal{A}$ 和 c， $v \in \mathcal{C}$、 $g(c) < g(v)$ 当且仅当 $h(c) < h(v)$。此外，我们可以假设只要 $c \in \mathcal{C}$，就有 $g(c) > c(1)$。考虑 $\{\bigcup\mathcal{C} \cup im(g) \mid g \in \mathcal{A}\}$ 和 $k > \max\{\rho(c(0)\ c(1)) \mid c \in \mathcal{C}\}$。由于 $\mathcal{F}$ 是完全捕获的，因此存在 $l > k$、 $F \in \mathcal{F}_l$ 和 g_0、.....、 $g_{n_l-1} \in \mathcal{A}$，使得 F 捕获

$$\{\bigcup\mathcal{C} \cup im(g_0), \ldots, \bigcup\mathcal{C} \cup im(g_{n_l-1})\}.$$

令 $S = \{\{|(c(0))^-_l|, |(c(1))^-_l|\} \mid c \in \mathcal{C}$和 $s(c) = 1\}$ 以及满足 $S = S^l_i$ 的 $0 < i < n_l$。回想一下，当且仅当对于任意 $c, v \in \mathcal{C}$，若 $g_i(c) < g_i(v)$，则 $g_0(c) < g_0(v)$。因此，$\rho(g_0(c)\ g_i(c)) = \Delta(g_0(c)\ g_i(c))$ 对每个 $c \in \mathcal{C}$ 都成立。特别是，这意味着

$$f^{-1}_{g_0(c)}[\{c(0)\}] \cap f^{-1}_{g_i(c)}[\{c(1)\}] = \left(f^{-1}_{g_0(c)}[\{c(0)\}] \cap f^{-1}_{g_i(c)}[\{c(1)\}]\right) \cap T^l_{g_0(c)}.$$

由于 $\Xi_{g_0(c)}(l) = 0$ 且 $\Xi_{c(0)}(l) = -1$，我们知道

$$f^{-1}_{g_0(c)}[\{c(0)\}] \cap T^l_{g_0(c)} = \{l\} \times \{s \in [r_k]^2 \mid s(0) = |(c(0))^-_l|\}.$$

这是因为 $S^l_0 = [r_l]^2$。另一方面

$$f^{-1}_{g_0(c)}[\{c(0)\}] \cap T^l_{g_i(c)} = \{l\} \times \{s \in S \mid s(1) = |(c(1))^-_l|\}$$

因此，$f^{-1}_{g_0\ (c)}[\{c(0)\}] \cap f^{-1}_{g_i\ c\ (\ )}[\{c(1)\}] \subseteq \{|(c(0))^-_l|,\ |(c(1))^-_l|\}$。此外，当且仅当 $s(c) = 1$ 时，这个交集非空。这意味着 g_0 和 g_i 在 $\mathcal{P}$ 中相容。因此，证明完成。□

6. Oscillation theory on construction schemes

在 [119], 中，第三作者提出了一种非常强大的“振荡理论”，并由此推导出一些非常有趣的定理。通常，振荡理论以无界函数族为基础（尽管也有其他变体，例如参见 [106]）。这里我们将基于一个由 2-捕获构造方案定义的有界函数族，发展一种振荡理论。

本节余下部分中，我们固定一个类型 $\{(m_k, n_{k+1}, r_{k+1})\}_{k\in\omega}$，以及一个具有该类型的 $\mathcal{F}$ 2-捕获构造方案。给定 $\alpha \in \omega_1$，我们定义 $f_\alpha : \omega \longrightarrow \omega$ 如下：

$$f_\alpha(l) = |(\alpha)_l|.$$

最后，我们将 $\mathcal{B}_\mathcal{F}$ 定义为 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1}$. 。下面的引理直接由 ρ 和 Δ的定义得出。

引理 14. 设 $\alpha < \beta \in \omega_1$。那么：

(1) $f_\alpha(i) = f_\beta(i)$，如果 $i < \Delta(\alpha, \beta)$；(2) $f_\alpha(j) < f_\beta(j)$，只要 $j \geq \rho(\alpha, \beta)$；(3) $f_\alpha < f_\beta$，条件是 $\Delta(\alpha, \beta) = \rho(\alpha, \beta)$；(4) 特别地，$f_\alpha <^* f_\beta$。

此外，$\mathcal{B}_\mathcal{F}$ 被函数 ω^ω 所支配，该函数将每个 i 映射到 m_i.

有趣的是，尽管 $\mathcal{B}_\mathcal{F}$ 有界，其振荡理论却与 [119] 在无界族情形下的振荡理论如出一辙。由于 $\mathcal{F}$ 是 2-捕获的，对于任意 $\mathcal{A} \in [\mathcal{B}_\mathcal{F}]^{<\omega}$，都存在 $\alpha < \beta \in \mathcal{A}$，使得 $\Delta(\alpha, \beta) = \rho(\alpha, \beta)$。因此，我们得到以下推论。

推论 6. $(\mathcal{B}_\mathcal{F}, \leq)$没有不可数个饼[9]。

定义35. 设 f、$g \in \omega^\omega$ 和 $k \in \omega$。我们定义以下对象：

$$\overline{osc}_k(f, g) = \{s \in \omega\backslash k \mid f(s) \leq g(s) \text{ and } f(s+1) > g(s+1)\},$$

$$osc_k(f, g) = |\overline{osc}_k(f, g)|.$$

给定 α、$\beta \in \omega_1$和 $k \in \omega$，我们将用 $osc_k(\alpha, \beta)$和$\overline{osc}_k(\alpha, \beta)$分别代替 $osc_k(f_\alpha, f_\beta)$和 $\overline{osc}_k(f_\alpha, f_\beta)$。当 $k = 0$.时，这两个对象记作 $osc(\alpha, \beta)$和 $\overline{osc}(\alpha, \beta)$

在下述定理中，令 $osc_k(a, b) = \{osc_k(\alpha, \beta) \mid \alpha \in a$ 且 $\beta \in b\}$，只要 $a, b \in [\omega_1]^{<\omega}$.

命题 10. 设 $n, k \in \omega$ 和 $\mathcal{A} \in [\omega_1]^n$ 是一个两两不交集的不可数族，且对每个 $a \in \mathcal{A}$都有 $\rho^a = k$。给定 $l \in \omega$，存在 $a < b \in \mathcal{A}$ 使得$osc_k(a, b) \subseteq [l, 2l]$.

证明。证明通过对 l.进行归纳法完成

（基步）若 $l = 0$，令 $a < b \in \mathcal{A}$ 和 $F \in \mathcal{F}$ 满足 F 捕获 $\{a, b\}$. 。注意到$\rho^F > k$。由于关于 F的捕获假设以及引理 14，以下性质对所有 $i, j < n$ 均成立：

(1) $f_{a(i)}|_{[k,\rho^F)} = f_{b(i)}|_{[k,\rho^F)}$,

[9]请记住，pie 指的是一组两两不可比元素

(2) $f_{a(i)}|_{\omega\setminus\rho^F} < f_{b(j)}|_{\omega\setminus\rho^F}$, (3) $f_{a(i)}|_{[k,\rho^F)}$ $< f_{a(j)}|_{[k,\rho^F)}$ 前提是 $i<j$。
由这些事实可得，对于所有 $i,j<n.$， $osc_k(a(i),b(j))=0$

（归纳步骤）假设我们已证明某个 $l\in\omega$ 的命题。利用归纳假设，我们可以递归地构造一个由两两不交集组成的不可数族 $\mathcal{C}\subseteq[\mathcal{A}]^2$，使得对于每个满足 $a<b$ 的 $\{a,b\}\in\mathcal{C}$，都有 $osc_k(a,b)\subseteq[l,2l]$。由于 $\mathcal{F}$ 是 2- 捕获的，我们可以找到一个不可数族 $\mathcal{D}\subseteq[\mathcal{C}]^2$ 和 $r\in\omega\setminus(k+1)$，使其具有以下性质：

- 每当 $\{\{a,b\},\{c,d\}\}\in\mathcal{D}$ 时，都存在一个能捕获 $\{a\cup b,c\cup d\}.$ 的 $F\in\mathcal{F}_r$。特别地，这意味着 $r>\rho^{a\cup b}$ 和 $a\cup b<c\cup d.$
- 对于每个 x、$y\in D$、$\bigcup x\cap\bigcup y=\emptyset.$

再次利用 $\mathcal{F}$ 是 2-捕获的这一点，我们可以得到 $F\in\mathcal{F}$，其中有 $\rho^F>r$，以及 $\mathcal{D}$ 中的两个元素，例如 $\{\{a_0,b_0\},\{c_0,d_0\}\}$、$\{\{a_1,b_1\},\{c_1,d_1\}\}$，使得 F 捕获

$$\{a_0\cup b_0\cup c_0\cup d_0,a_1\cup b_1\cup c_1\cup d_1\}.$$

我们断言 $osc(c_0,b_1)\subseteq[l+1,2(l+1)]$。为此，取 $i,j<n$。以下性质成立：

(1) $f_{b_1(j)}|_{[k,\rho^F)}=f_{b_0(j)}|_{[k,\rho^F)}$,
(2) $f_{c_0(i)}|_{[k,r)}=f_{a_0(i)}|_{[k,r)}$,
(3) $f_{b_1(j)}|_{\omega\setminus\rho^F}>f_{c_0(i)}|_{\omega\setminus\rho^F}$,
(4) $f_{b_0(j)}|_{[r,\rho^F)}<f_{c_0(i)}|_{[r,\rho^F)}$,

我们利用这些性质来计算振荡。首先注意，我们可以利用引理 14 的 (2) 部分得出 $\overline{osc}_k(a_0(i),b_0(j))\subseteq[k,\rho^{a_0\cup b_0})$ 和 $\overline{osc}_k(c_0(i),b_1(j))\subseteq[k,\rho^F)$。由上文所述的性质 (1) 和 (2)，并且由于 $r>\rho^{a_0\cup b_0}$,

$$\overline{osc}_k(c_0(i),b_1(j))\cap[k,r-1)=\overline{osc}_k(a_0(i),b_0(j)).$$

由性质 (1)、(3) 和 (4)，我们还可以得到 $\rho^F-1\in\overline{osc}_k(c_0(i),b_1(j))$。事实上，性质 (1) 和 (4) 还意味着，$\rho^F-1$ 是区间 $[r,\rho^F)$ 中唯一属于 $\overline{osc}_k(c_0(i),b_1(j))$ 的元素。综合以上观察，我们得到：

$$\overline{osc}_k(a_0(i),b_0(j))\cup\{\rho^F-1\}\subseteq\overline{osc}_k(c_0(i),b_1(j))\subseteq\overline{osc}_k(a_0(i),b_0(j))\cup\{\rho^F-1\}\cup\{r-1\}.$$

这意味着 $l+1\leq osc_k(c_0(i),b_1(j))\leq 2l+2$。证明至此完成。 □

仔细分析前一定理的论证可以证明，只要 $\mathcal{A}\in[\omega_1]^\omega$ 和 $l\in\omega$，就存在 $\alpha<\beta\in\mathcal{A}$，使得 $osc(\alpha,\beta)=l$。遗憾的是，这一性质并不适用于任意有限集的不可数族。不过，前面的结果足以重新定义一种“修正后的”振荡。

下面的引理很容易证明。

引理 15. 存在 $\{P_n\}_{n\in\omega}$ 对 ω 的一个划分，使得对每个 k，$n\in\omega$ 都存在 $l\in\omega$，使得 $[l,2l+k]\subseteq P_n$.

定理 14（CA_2）。存在一个着色 $o:[\omega_1]^2\longrightarrow\omega$，使得对于每个由两两不交集组成的不可数族 $\mathcal{A}\subseteq[\omega_1]^{<\omega}$ 以及每个 $n\in\omega$，都存在 $a<b\in\mathcal{A}$，使得$\{o(\alpha,\beta)\mid\alpha\in a$ 且 $\beta\in b\}=\{n\}$。

证明。设 $\{P_n\}_{n\in\omega}$ 是如引理 15 中所述对 ω 的一个划分。定义 $o:[\omega_1]^2 \longrightarrow \omega$ 如下:

$$o(\alpha,\beta)=n \text{ if and only if } osc(\alpha,\beta)\in P_n.$$

我们断言， o 满足该定理的结论。事实上，设 $\mathcal{A}$ 是 ω_1 和 $n\in\omega$ 的有限两两不交子集组成的一个不可数族。通过细化 $\mathcal{A}$ ，我们可以假设存在 $k\in\omega$，使得对每个 $a\in\mathcal{A}$ 都有 $\rho^a=k$。设 $l\in\omega$ 满足 $[l,2l+k]\subseteq P_n$。根据命题 10，存在 $a<b\in\mathcal{A}$，使得 osc_k（a,b）$\subseteq[l,2l].$。给定 $\alpha\in a$ 和 $\beta\in b$，不难看出，$\overline{osc}$（α,β）至多比 $\overline{osc}_k$（α,β）多 k 个元素。这样， osc（α,β）$\in[l,2l+k]\subseteq P_n$。换言之， o（α,β）$=n$。证明至此完成。□

具有上述性质的着色的存在，已经意味着一种强大得多的着色的存在。正如我们稍后将提到的，这种着色可用于构造具有重要性质的拓扑空间。

推论 7 (CA_2)。存在一种着色 $o^*:[\omega_1]^2\longrightarrow\omega$，使得对于所有 $n\in\omega, h:n\times n\longrightarrow\omega$ 以及任意不可数的两两不交集族 $\mathcal{A}\subseteq[\omega_1]^n$，都存在 $a<b\in\mathcal{A}$，使得

$$o^*(a(i),b(j))=h(i,j)$$

对于所有 $i,j<n.$

证明。令 $\{h_n\}_{n\in\omega}$ 为所有满足以下条件的 $h:X\longrightarrow\omega$ 的一个枚举： $X\subseteq\omega^{<\omega}$ 是有限的，且其元素两两不可比较。称 X_n 为 h_n 的定义域。注意，对于每个 $f\in\omega^\omega$ 和每个 $n\in\omega$，至多存在一个 $\sigma\in X_n$，使得 $f.$ 延伸它。取一个满足定理 14 结论的着色 o。我们定义 $o^*:[\omega_1]^2\longrightarrow\omega$ 如下：给定不同的 $\alpha,\beta\in\omega_1$，若存在 $\sigma_\alpha,\sigma_\beta\in X_{o(\alpha,\beta)}$ 使得 $\sigma_\alpha\subseteq f_\alpha$ 且 $\sigma_\beta\subseteq f_\beta$，则令

$$o^*(\alpha,\beta)=h_{o(\alpha,\beta)}(\sigma_\alpha,\sigma_\beta).$$

在其他任何情况下，令 $o^*(\alpha,\beta)=17$。为了证明 o^* 满足推论的结论，令 $n\in\omega, h:n\times n\longrightarrow\omega$，并令 $\mathcal{A}\subseteq[\omega_1]^n$ 为一个由两两不交集组成的不可数族。通过细化 $\mathcal{A}$，我们可以假设存在具有以下性质的 $k\in\omega$：

（1） $\forall a\in\mathcal{A}\forall i\neq j<n$（$f_{a(i)}|_k\neq f_{a(j)}|_k$），

（2） $\forall a,\ b\in\mathcal{A}\forall i<n$（$f_{a(i)}|_k=f_{b(i)}|_k$）。

固定 $a_0\in\mathcal{A}$。令 $X=\{f_{a_0(i)}|_k\mid i<n\}$，并定义 $h:X\times X\longrightarrow\omega$ 如下:

$$h(f_{a_0(i)}|_k,f_{a_0(j)}|_k)=h(i,j).$$

我们知道存在满足 $X=X_m$ 和 $h=h_m$ 的 $m\in\omega$。对于这样的 m，存在 $a<b\in\mathcal{A}$，使得对所有 $i,j<n$， $o(a(i)\ b(j))=m$。对于所有这样的 i 和 j，我们有 $f_{a_0(i)}|_k\subseteq f_{a(i)}$，且 $f_{a_0(j)}|_k\subseteq f_{a(j)}$。由此， $o^*(a(i)\ b(j))=h(f_{a_0(i)}|_k,f_{a_0(j)}|_k)=h(i,j)$。因此证明完毕。□

作为一个应用，我们得到以下结论:

推论 8（CA_2）。可数链条件不具有可乘性。

证明。设 o 是定理 14 的一个着色。对于每个 $n\in\omega$，令 $\mathbb{P}_n=\{p\in[\omega_1]^{<\omega_1}\mid\forall\alpha,\beta\in p$（若 $\alpha\neq\beta$，则 $o(\alpha,\beta)=n$）$\}$。特别地， $\mathbb{P}_0$ 和 $\mathbb{P}_1$ 是 ccc，但 $\mathbb{P}_0\times\mathbb{P}_1$ 不是。集合$\{(\alpha,\alpha)\mid\alpha\in\omega_1\}$ 证明了这一点。

□

6.1. 图基序。我们称偏序 $(D, \leq)$ 是（向上）有向的，如果对于任意x、 $y \in X$，都存在一个比 x 和 y 更大的 $z \in D$。

命题 11. $(\mathcal{B}_{\mathcal{F}}, \leq)$ 是有向的。

证明。设 $\alpha < \beta \in \omega_1$，并令 $F \in \mathcal{F}_{\rho(\alpha,\beta)}$ 满足 $\{\alpha, \beta\} \subseteq F$。最后，只需注意到，若 $\delta = \max F$ 且 $s \leq \rho(\alpha, \beta)$，则 $F = \bigcup\{G \in \mathcal{F}_s \mid G \subseteq F\}$，因此存在 $G \in \mathcal{F}_s$ 使得 $G \subseteq F$ 且 $\delta \in G$，并且必有 $\delta = \max G$。这意味着 $f_\delta(s) = |(\{\delta\})_s^-| = |(\delta + 1) \cap G| = m_s$. 因此， $f_\delta \geq f_\alpha$, f_β. □

回顾一下用于比较有向偏序的以下概念。

定义 36（[122]）。设 $(D, \leq_D)$ 和 $(E, \leq_E)$ 为有向偏序。我们称 E 图基低于 D，记作 $E \leq_T D$，若存在 $\phi : D \longrightarrow E$，使得对于每个共尾的 $X \subseteq D.$， $\phi[X]$ 在 E 中共尾。此外，我们称 E 与 D 图基等价，记作 $E \equiv_T D$，若 $E \leq_T D$ 且 $D \leq_T E$。

Tukey 序的研究由 J. Tukey 于 [122]开创。除此之外，他还证明，集合 1、 ω、 ω_1、 $\omega \times \omega_1$ 和 $[\omega_1]^{<\omega}$ 在赋予其自然序后，彼此并非图基等价。在 [41], , J. R. Isbell 表明，在 CH下，至少存在一个基数为 ω_1 的有向偏序，它与前面提到的任何一个都不图基等价。他后来在 [53]改进了这一结果。在 [119], ，第三作者证明，在 $\mathfrak{b} = \omega_1$下存在这样的有向偏序。在 [116], ，他证明，一致地，每个基数为 ω_1 的有向偏序都图基等价于我们提到的前五者之一。从现在起，我们将这样的序称为第六种 Tukey 类型。对于有兴趣进一步了解 Tukey 序及相关主题的读者，建议查阅 [28], [29], [44], [48], [71], [88], [84], [99] 和[100]。

Pr命题 12（[122]）。设（D， $\leq_D$）和（E， $\leq_E$）是有向偏序 .

- $E \leq_T D$ 当且仅当存在 ϕ: $E \longrightarrow D$，使得对于每个无界的 $X \subseteq E.$， $\phi[X]$ 在 D 中都是无界的
- $E \equiv_T D$ 当且仅当存在一个偏序集 C，使得 D 和 E 都可以嵌入为其共尾子集。

设（D， $\leq$）是一个有向偏序。我们称 $S \subseteq D$ 是 ω-有界的，如果 S 的每个可数子集在 D.中都有界

命题 13。 [116]设（D， $\leq$）是一个有向集，且 $|D| = \omega_1$. 则：

（1） $D \leq_T 1$ 当且仅当 D 有最大元。（2） $D \leq_T \omega$ 当且仅当 cof（D） $\leq \omega$.（3） $D \leq \omega_1$ 当且仅当 D 是 ω-有界的。（4） $D \leq_T \omega \times \omega_1$ 当且仅当 D 可以被可数个 ω-有界集覆盖。（5） $[\omega_1]^{<\omega} \leq_T D$ 当且仅当存在 $A \in [D]^{\omega_1}$，使得每个 $X \in [A]^{\omega}$ 在 D. 中都是无界的

由此可得：

推论 9. 设 $(D, \leq)$ 是一个有向集，满足 $|D| = \omega_1.$ 。那么，要么 $D \equiv_T 1$， $D \equiv_T \omega$, $D \equiv_T \omega_1$，要么 $\omega \times \omega_1 \leq_T D \leq_T [\omega_1]^{\omega}$。

继续之前，我们先回顾一些记号。

定义 37。 设 α、 β 和 γ 为序数。 $\gamma \to (\alpha, \beta)^2_2$ 表示以下命题 :

对于所有的 $c: [\gamma]^2 \longrightarrow 2$，存在 γ 的一个 0-单色子集，其序型为 α；或者存在 γ 的一个 1-单色子集，其序型为 β.
其否定写作 $\gamma \not\rightarrow (\alpha, \beta)^2_2$。

以下定理归功于 P. Erd¨os 和 R. Rado（见 [33]）。它是 B. Dushnik、E. Miller 和 P. Erd¨os 的一个著名定理的推广（见 [31]）。读者可在 [54] 和 [63] 中找到证明。

定理 15（[33]）。 $\omega_1 \rightarrow (\omega_1, \omega + 1)^2_2$。

在 [115], 中，第三作者证明了如下命题的一致性：对每个 $\alpha < \omega_1$， $\omega_1 \rightarrow(\omega_1, \alpha)^2_2$。另一方面，他在 [119] 中证明了， $\mathfrak{b} = \omega_1$ 蕴含 $\omega_1 \not\rightarrow (\omega_1, \omega + 2)^2_2$。在下面的定理中，我们将证明在 CA_2 下同样成立。尽管可以从我们其他的一些构造中提取出一个着色，以证明前述划分关系的否定，但我们决定给出一个直接证明，因为它更简洁。

定理16（CA_2）。 $\omega_1 \not\rightarrow (\omega_1, \omega + 2)^2_2$。
证明。设 $\mathcal{F}$ 是任意类型的一个 2-捕获构造方案。令 c：定义如下：

$$c(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1 & if\ \Delta(\alpha, \beta) = \rho(\alpha, \beta) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

由于 $\mathcal{F}$ 是 2-捕获的，很容易看出 ω_1 没有不可数的 0-单色子集。反设存在一个 1-单色集，例如 X，其序型为 $\omega+2$。令 β 和 γ 为 X 的最后两个元素，并考虑 $\alpha \in X\backslash(\gamma)$ $\rho(\beta,\gamma)$。由于 ρ 是序数度量， $\rho(\alpha, \beta) = \rho(\alpha, \gamma)$。由此， $\Delta(\beta, \delta) = \rho(\beta, \delta) < \rho(\alpha, \beta) = \Delta(\alpha, \beta)$。根据引理 7，我们得出 $\Delta(\alpha, \delta) = \Delta(\beta, \delta)$。这与 X 是 1-单色集相矛盾，因此证毕。
□

现在，我们证明第六种 Tukey 类型的存在。
定理17. $(\mathcal{B}_{\mathcal{F}}, \leq)$ 是第六种 Tukey 类型。
证明. 根据推论 9，只需证明 $\mathcal{B} \not\leq_T \omega \times \omega_1$ and $[\omega_1]^{<\omega} \not\leq_T \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$。首先，我们证明$\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ 不包含任何不可数的 ω-有界集。我们用矛盾法。假设存在 $A \in [\omega_1]^{\omega_1}$，使得 $\{f_\beta\}_{\beta\in A}$ 是 ω-有界的。递归地，我们构造 $\{(\alpha_\xi, \beta_\xi)\}_{\xi<\omega_1}$，满足：

(1) $\{\alpha_\xi\}_{\xi\in\omega_1}$ and $\{\beta_\xi\}_{\xi\in\omega_1}$ 递增，(2) $\forall\xi \in \omega_1\,(\beta_\xi < \alpha_\xi)$，(3) $\{\alpha_\xi\}_{\xi\in\omega_1} \subseteq A$,
(4) $\forall\xi \in \omega_1\,(f_{\beta_\xi}$界定 $\{f_{\alpha_\nu} \mid \nu < \xi\}\,)$。

由于 $\mathcal{F}$ 是 2-捕获的，我们可以找到 $l \in \omega$、 $F \in \mathcal{F}_{l+1}$ 和 $\delta < \gamma$，使得 F 捕获$\{\beta_\delta, \alpha_\delta\}$、$\{\beta_\gamma, \alpha_\gamma\}$。由此可得， $f_{\beta_\gamma}(l) = f_{\beta_\delta}(l) < f_{\alpha_\delta}(l)$。但这导致了矛盾，因为按设定$f_{\beta_\gamma}$ 应当支配f_{α_δ}。

为证明 $[\omega_1]^{<\omega} \not\leq_T \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$，令 $A \in [\omega_1]^{\omega_1}$。我们需要证明 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$包含一个可数有界集。定义 d：$[A]^2 \longrightarrow 2$ 如下：

$$d(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & if\ f_\alpha \not\leq f_\beta\ and\ f_\beta \not\leq f_\alpha \\ 1 & otherwise \end{cases}$$

根据定理 15，有两种可能：

(a) A包含一个 0-单色不可数集。(b) A 包含一个序型为 $\omega+1$. 的 1-单色集

$\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$中的每个 0-单色集都是反链，因此由推论 6 可知，不可能存在不可数的 0-单色集。因此，A存在一个序型为 $\omega+1$ 的 1-单色子集，记作 X。注意，f_β 界定了 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in X}$，其中 $\beta=\max X$. □

推论 10（CA_2）。存在第六种 Tukey 类型。

问题 18. 假设 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 是两个 2-捕获构造。关于 $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ 和 $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ 之间的图基关系，我们能说些什么？如果它们具有相同的类型呢?

问题 19. CA_2 是否蕴含存在 2^{ω_1} 个大小为 ω_1 的不等价 Tukey 类型?

根据关于 [88],的一个结果，我们可以通过以下推论改进 [69] 的一个定理。

推论 11. $PID+\min(\mathfrak{b},cof(\mathcal{F}_\sigma))>\omega_1$ 意味着不存在 2-捕获构造方案。

上文中，PID表示“P-理想二分律”，这是由第三作者提出的一个非常强的二分律。更多信息请参见 [4], [74], [88], [110] 和 [121]。

6.2. 苏斯林塔。设 $\mathcal{T}$是一个 κ-预塔。若对每个不可数$\mathcal{A}\subseteq\mathcal{T}$，都存在不同的 A、$B\in\mathcal{A}$ 满足 $A\subseteq B$，则称 $\mathcal{T}$为苏斯林。苏斯林塔在 [13]中得到研究。在那里，P. Borodulin-Nadzieja 和 D. Chodounsk´y 证明，特别是，在 $\mathfrak{b}=\omega_1$. 下存在苏斯林 ω_1-预塔。事实上，只要 $\mathcal{B}$ 是 ω^ω 中相对于$<^*$ 的一个序型为 ω_1的递增函数族，那么族 $\{T_f\}_{f\in\mathcal{B}}$，其中

$$T_f=\{(n,m)\,|\,m\le f(n)\}$$

是一个 ω_1-预塔。还要注意，如果 $f,g\in\mathcal{B}$ 满足 $f\le g$，那么 $T_f\subseteq T_g$。因此，如果 $(\mathcal{B},\le)$ 没有不可数个饼，那么 $\{T_f\}_{f\in\mathcal{B}}$ 是苏斯林的。由此得到以下推论。

推论 12（CA_2）。存在一个苏斯林 ω_1-预塔。

前述结论与开放图公理（OGA）相矛盾。与 PID 的情形一样，OGA（也称为 OCA、$OCA_{[T]}$ 或托多尔切维奇公理 TA）是第三作者于 [119] 年提出的一条公理。读者可查阅 [35], [66], [77], [82], [107], [109] 和 [112]，了解有关 OGA 的更多信息。

6.3. S-空间。本小节中的结果及其证明完全基于 [119]。因此，这里将省略大部分证明。

定义 38. 设 (X,τ) 是一个拓扑空间，$|X|=\omega_1$ 和 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1}$ 是 X. 的一个枚举。我们称：

- X 是左开（右分离）的，当且仅当对每个 $\alpha\in\omega_1$，$\{x_\xi\,|\,\xi\le\alpha\}$ 都是开集。
- X 是一个 S-空间，当且仅当它是 T_3、遗传可分且非 Lindel¨of。
- X 是一个强 S-空间，当且仅当它的所有有限次幂都是 S-空间。
- X 是右开（左分离）的，当且仅当对每个 $\alpha\in\omega_1$，$\{x_\xi\,|\,\xi\ge\alpha\}$ 都是开集。
- X 是一个 L-空间，当且仅当它是 T_3、遗传 Lindel¨of 且不可分。

若其所有有限次幂都是 L-空间，则• X 是一个强 L-空间。

S-空间的存在性曾是集合论拓扑中的主要未解问题之一。在多种公理（如 CH 以及某些 [83]的参数化菱形原理）下，这类空间都存在。第三作者证明适当迫使公理（PFA）蕴含不存在 S-空间，最终解决了这个问题。这里我们将使用2-捕获构造方案构造 S-空间。若想进一步了解 S-空间（以及 L-空间），读者可参阅 [1], [92], [91]和 [119]。以下结果已为人所知：

引理16。设 (X,τ) 是一个拓扑空间，$|X|=\omega_1$，并且 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1}$ 是 $X.$ 的一个枚举。若：

(a) X 是 T_3，(b) X 是左开的，(c) X 不具有不可数离散集。

那么 (X,τ) 是一个 S-空间。

设 o^* 是满足推论 7 结论的一个着色。对每个 $\alpha\in\omega_1$，定义 $x_\alpha:\omega_1\longrightarrow 2$ 如下：

$$x_\alpha(\beta)=\begin{cases}\min(o^*(\alpha,\beta),1) & if\ \alpha<\beta\\ 0 & if\ \alpha>\beta\\ 1 & if\ \alpha=\beta\end{cases}$$

考虑赋予从 2^{ω_1} 继承的积拓扑的 $X=\{x_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1}$。显然，$X$ 是 T_3。此外，对每个 $\alpha\in\omega_1$，集合 $\{x_\beta\,|\,\beta\in\omega_1$ 和 $x_\beta(\alpha)=1\}$ 是包含于 $\{x_\xi\,|\xi\leq\alpha\}$ 且以 α 为元素的开集。因此，X 也是左开的。利用引理16以及与 o^* 相关联的拉姆齐性质，很容易看出 X 是一个强 S-空间。更多细节请参阅 [119] 的第 2 章。

同样地，我们可以为每个 $\alpha\in\omega_1$, y_α 定义如下：

$$y_\alpha(\beta)=\begin{cases}\min(o^*(\alpha,\beta),1) & if\ \alpha>\beta\\ 0 & if\ \alpha<\beta\\ 1 & if\ \alpha=\beta\end{cases}$$

通过类似的论证，可以证明 $\{y_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1}$ 是一个强 L-空间。值得指出的是，与 S-空间的情形不同，L-空间存在于 ZFC 中（见 [79]）。

现在，我们将利用我们的族 $\mathcal{B}_\mathcal{F}$ 构造另一个 S-空间。对于每个 $\alpha\in\omega_1$，定义 $C(\alpha)=\{f_\xi\,|\,f_\xi\leq f_\alpha\}$。现在，令 τ 为 $\mathcal{B}_\mathcal{F}$ 上的拓扑，它是将 ω^ω 的典范贝尔拓扑限制在 $\mathcal{B}_\mathcal{F}$ 上后，通过声明集合 $C(\alpha)$ 为开集而得到的加细拓扑。显然，每个 $\alpha\in\omega_1$ 都有以下族作为局部基：

$$\{C(\alpha)\cap[s]\,|\,s\in\omega^{<\omega}\ and\ f_\alpha\in[s]\}.$$

这里，$[s]=\{f\in\omega^\omega\,|\,s\subseteq f\}$。

以下内容基于第三作者的证明：$\mathfrak{b}=\omega_1$ 蕴含存在一个 S-空间。

命题 14. $(\mathcal{B}_\mathcal{F},\tau)$ 是一个 S-空间。

证明. 对于每个 $\alpha \in \omega_1$，我们有 $C(\alpha)$ 在贝尔拓扑中是闭集，因此它在 τ. 中既开又闭。由此， $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ 是零维的，因此是正则的。此外，根据定义， $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ 是左开的。剩下唯一需要证明的是， $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ 不包含任何不可数离散集。

设 $S \in [\omega_1]^{\omega_1}$，并假设 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in S}$ 是离散的。对于每个 $\alpha \in S$，我们可以找到 $s_\alpha \in \omega^{<\omega}$，使得如果 $U_\alpha = C(\alpha) \cap [s_\alpha]$，那么对于每个 $\alpha \in \omega_1$. 都有 $U_\alpha \cap Y = \{\alpha\}$。设 $W \in [S]^{\omega_1}$ 和 $s \in \omega^{<\omega}$，使得对于所有 $\alpha \in W$. 都有 $s_\alpha = s$。根据定理 10，存在 $\alpha < \beta \in W$，使得$osc(\alpha, \beta) = 0$。由于 $\alpha < \beta$，这意味着 $f_\alpha < f_\beta$，因此 $f_\alpha \in C(\beta)$。于是 $f_\alpha \in U_\beta$，这就产生了矛盾。□

推论 13 (CA_2)。存在一个第一可数的 S-空间。

现在，我们给出一个不同的 S-空间的构造。对于此构造，我们改编了 [119] 第 2 章中的思路。

定义 39. 令 $l \in \omega\backslash\{0\}$，并定义 H_l： $\omega_1 \longrightarrow [\omega_1]^{<\omega}$：

$$H_l(\beta) = \{\alpha \in (\beta)^-_{l+1} \,|\, |(\alpha)_l| = |(\beta)_l|\}.$$

最后，令 $H(\beta) = \bigcup_{l\in\omega\backslash\{0\}} H_l(\beta)$。

以下引理是定义的直接推论。

引理 17. 令 $\beta \in \omega_1$ 和 $l \in \omega\backslash\{0\}$. 。则 $H(\beta) = \{\alpha \in (\beta)^-_{l+1} \,|\, \Delta(\alpha, \beta) = l + 1\}$

正如我们将看到的，这个函数与 [119] 第 2 章中的函数有一些相似之处（尽管我们的函数稍微简单一些）。由于 $\mathcal{F}$ 是 2-捕获的，我们还有以下结论。

引理 18. 设 $S \subseteq [\omega_1]^{<\omega}$ 是一个两两不交集的不可数族。则存在基数相同的 a、$b \in S$，使得 $a < b$，并且对于所有 $i < n$.， $a(i) \in H(b(i))$

定义 40. 对每个 $\beta \in \omega_1$，我们递归地定义 $C(\beta) \subseteq \beta + 1$。假设对每个 $\gamma < \beta$. C， $C(\gamma)$ 已定义；β 将是包含 β 以及所有满足存在 $\gamma \in H(\beta)$ 使得以下条件成立的 $\alpha < \beta$ 的集合：

(a) $\alpha \in C(\gamma)$，(b) 若 $\xi \in H(\beta) \cup \{\beta\}$ 且 $\xi \neq \gamma$，则 $\Delta(\alpha, \gamma) > \Delta(\alpha, \xi)$。最后，令 $C_k(\beta) = \{\alpha \in C(\beta) \,|\, \Delta(\alpha, \beta) \geq k\}$，对每个 $k \in \omega$. 均成立

注意，对所有 $k \in \omega$， $\beta \in C_k(\beta)$ 都成立；如果 $k < l$，那么 $C_l(\beta) \subseteq C_k(\beta)$。

引理 19. 设 α、$\beta \in \omega_1$ 和 $k \in \omega$. 。如果 $\alpha \in C_s(\beta)$，则存在 $l \in \omega$，使得 $C_s(\alpha) \subseteq C_k(\beta)$。

^ ^ 对每个 $\beta \in \omega_1$ 和 $k \in \omega$，令 $C_k(\beta) = \{f_\alpha \,|\, \alpha \in C_k(\beta)\}$，以及 $C(\beta) = \{f_\alpha \,|\, \alpha \in C(\beta)\}$. 。根据前一个引理，若 $f_\alpha \in C_{k_0}(\beta_0) \cap C_{k_1}(\beta_1)$，则存在 s_0、$s_1 \in \omega$，使得对每个 $i \in 2$， $C_{s_i}(\alpha) \subseteq C_{k_i}(\beta_i)$。注意，如果 $s > s_0$、s_1，那么 $C_s(\alpha) \subseteq C_{k_0}(\beta_0) \cap C_{k_1}(\beta_1)$。这意味着 ^{$C_k(\beta) \,|\, k \in \omega$，且 $\beta \in \omega_1$} 构成 $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$. 上的一个拓扑 τ_C

^ 以下引理直接由如下事实得出：对于每个 $\beta \in \omega_1$， $C_k(f_\beta) \subseteq [f_\beta|_k]$，且$k \in \omega$.

引理 20. 设 $s \in \omega^{<\omega}$。那么 $[s] \cap \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ 在 $(\mathcal{B}_{\mathcal{F}}, \tau_C)$ 中是开集。特别地，$(\mathcal{B}_{\mathcal{F}}, \tau_C)$ 是豪斯多夫的。

ˆ 引理 21. 令 $\beta \in \omega_1$。 $C(\beta)$ 是紧致的。

命题 15. $(\mathcal{B}_{\mathcal{F}}, \tau_C)$ 是局部紧致的强 S-空间。

证明. 根据前面的结果， $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ 是局部紧致的。特别地，它是正则的，而且显然是左开的。固定 $n \in \omega$。接下来要证明 $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}^{n+1}$ 没有不可数离散子空间。为此，取不可数的 $S \subseteq \omega_1^n$，并反设$\{(f_{x(0)}, \dots, f_{x(n)})\}_{x\in S}$是离散的。不失一般性，我们可以假设只要 $i < j \leq n$，就有 $x(i) < x(j)$，并且对所有满足 $x \neq y$ 的 $x, y \in S$， $\{x(i)\}_{i\leq n} \cap \{y(i)\}_{i\leq n} = \emptyset$。此外，借助细化论证，我们还可以假设存在 $k \in \omega$，使得对所有 $x, y \in S$，都有如下情形:

(1) $\big(\prod_{i\leq n} C_k(x(i))\big) \cap S = \{x\}$,
(2) $f_{x(i)}|_k = f_{y(i)}|_k$ for every $i \leq n$.

由引理 18 可知，存在互不相同的 $x, y \in S$，使得对于每个 $i \leq n$，都有 $x(i) \in H(y(i))$。对于任意这样的 i，我们知道 $\Delta(x(i)\ \xi) = \omega$ 当且仅当 $\xi = x(i)$。由于 $x(i)$ 显然属于 $C(x(i))$，根据定义可得 $x(i) \in C(y(i))$。但是 $f_{x(i)}|_k = f_y(i)|_k$，所以 $x(i)$ 实际上是 $C_k(x(i))$ 的一个元素。由此我们得出 $x \in \big(\prod C_k(y(i))\big) \cap S_{,i\leq n}$，这与矛盾相悖。

□

命题 16。 $(\mathcal{B}_{\mathcal{F}}, \tau_C)$ 的 Alexandroff 紧化是一个紧致的强 S-空间 .

推论 14（CA_2）。存在一个散布的紧致强 S-空间 K，其函数空间$C(K)$ 是遗传弱 Lindel¨of 的，而由所有概率测度构成的空间 $P(K)$ 也是一个强 S-空间。

6.4. 再看 Baumgartner 公理。正如我们在定理 10 中看到的，FCA 蕴含纠缠集的存在，这意味着 FCA 也蕴含 $BA(\omega_1)$ 不成立。虽然我们不知道 CA_2 是否蕴含纠缠集的存在，但我们将在本小节证明，它确实蕴含 $BA(\omega_1)$ 的否定。我们的证明基于第三作者关于 $\mathfrak{b} = \omega_1$ 蕴含 $BA(\omega)$ 不成立的证明（见 [103]）。请记得，在本节开头，我们固定了一个 2- 捕获构造方案，即 $\mathcal{F}$。

引理 22. 集合 $Z = \{\alpha \in \omega_1 \mid \forall^\infty k \in \omega\, \exists F \in \mathcal{F}_{k+1}\, (\alpha \in F_{n_{k+1}-1})\}$ 至多可数。

证明。反设 Z 不可数。对于每个 $\alpha \in Z$，取 $l_\alpha \in \omega$ 使得对于每个 $i > l_\alpha$ 和满足 $\alpha \in F$ 的 $F \in \mathcal{F}_{i+1}$，都有 $\alpha \in F_{n_{i+1}-1}$。我们可以找到 $W \in [Z]^{\omega_1}$ 和 $l \in \omega$，使得对于所有 $\alpha \in W$，都有 $l_\alpha = l$。

由于 $\mathcal{F}$是 2-捕获的，因此存在 α、$\beta \in W$、 $l < i \in \omega$和 $F \in \mathcal{F}_{i+1}$，使得 F捕获α、β.。特别地， $\alpha \in F_0 \backslash R(F)$，这就产生了矛盾。□

现在，令 M 为某个足够大的 $H(\theta)$的一个可数初等子模型，其中$\mathcal{F}$、$\mathcal{B}_{\mathcal{F}} \in M$.。定义 $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{\mathcal{F}} \backslash M$.。下述引理是初等性的直接推论。

引理 23. 令 $s \in \omega^{<\omega}$.。如果 $\mathcal{A} \cap [s] \neq \emptyset$，那么 $\mathcal{A} \cap [s]$ 是不可数的。

请记住，根据定义 30 和注 4，我们可以将$(\mathcal{A}$、$<_{lex})$视为$\mathbb{R}$.的一个子集

引理 24. $(\mathcal{A}, <_{lex})$ 是 ω_1-稠密的。

证明. 令 $f_\alpha, f_\beta \in \mathcal{A}$ 满足 $f_\alpha <_{lex} f_\beta$，并令 $l = \Delta(\alpha, \beta)$。由引理 22 可知，集合 $Z = \{\alpha \in \omega_1 \mid \forall^\infty k \in \omega\, \exists F \in \mathcal{F}_{k+1}(\alpha \in F_{n_{k+1}-1})\}$ 是可数的，且可由 $\mathcal{F}$定义，因此我们有 $Z \subseteq M$。于是，$\{f_\xi \mid \xi \in Z\}$与 $\mathcal{A}$不相交。这样，就有 $k > l$和 $F \in \mathcal{F}_{k+1}$ 使得 $\alpha \in F \backslash F_{n_{k+1}-1}$. 。令 $\gamma \in F_{n_{k+1}-1}$ 满足 $|(\{\gamma\})_k| = |(\{\alpha\})_k|$。由引理 23 可知，$S = \mathcal{A} \cap [f_\gamma|_{k+2}]$ 是不可数的。最后，我们将证明 S 包含在由 f_α 和 f_β所确定的开区间内。为此，令 $f_\xi \in S$。根据定义，$f_\xi|_{k+1} = f_\alpha|_{k+1}$，因此 $f_\xi <_{lex} f_\beta$。此外，$f_\alpha(k+1) < f_\gamma(k+1)$，这意味着 $f_\alpha <_{lex} f_\xi$。□

设 $\alpha \in \omega_1$. 。定义 h_α： $\omega \longrightarrow \omega$ 如下:

$$h_\alpha(i) = m_i - f_\alpha(i.)$$

另外，设 $-\mathcal{A} = \{h_\alpha(i) \mid \alpha \in \omega_1 \backslash M\}$。容易看出，$f_\alpha <_{lex} f_\beta$ 当且仅当 $h_\beta <_{lex} h_\alpha$.。因此，我们得到以下推论。

推论 15. $(-\mathcal{A}, <_{lex})$ 是 ω_1-稠密的。

命题 17. 不存在从 $\mathcal{A}$ 到 $-\mathcal{A}$. 的递增函数

证明。反设存在 Ψ ： $\mathcal{A} \longrightarrow -\mathcal{A}$ 递增。定义 ψ ： $\omega_1 \backslash M \longrightarrow \omega_1 \backslash M$，使得 $\Psi(f_\alpha) = h_{\psi(\alpha)}$。

我们声称，ψ 至多有一个不动点。假设并非如此，设 α、$\beta \in \omega_1$是 ψ 的不动点，且满足 $f_\alpha <_{lex} f_\beta$。由于 Ψ 是递增的，我们有

$$h_\alpha = h_{\psi(\alpha)} = \Psi(f_\alpha) <_{lex} \Psi(f_\beta) = h_{\psi(\beta)} = h_\beta.$$

但这与事实矛盾，因为实际上 $h_\beta <_{lex} h_\alpha$.

现在，设 $X = \{\alpha \in \omega_1 \mid \alpha < \psi(\alpha)\}$且 $Y = \{\alpha \in \omega_1 \mid \alpha > \psi(\alpha)\}$。根据前面的论断，这两个集合中至少有一个是不可数的。

假设 X 是不可数的。对每个 $\alpha \in X$，令 $b_\alpha = \{\alpha, \phi(\alpha)\}$。由于 $\mathcal{F}$ 是 2-捕获的，我们可以找到 α、$\beta \in X$和 $F \in \mathcal{F}$，使其捕获 $\{b_\alpha, b_\beta\}$. 。注意，$f_\alpha <_{lex} f_\beta$和$f_{\psi(\alpha)} <_{lex} f_{\psi(\beta)}$，或者等价地，$\Psi(f_\alpha) = h_{\psi(\alpha)} >_{lex} h_{\psi(\beta)} = \Psi(f_\beta)$。这就产生了矛盾，因此结论成立。□

推论 1　　6（CA_2）。存在两个非同构的 ω_1-稠密实数集。

7. Capturing schemes from ♢

在 [111] 中有一个证明，说明 ♢-原理蕴含 FCA。遗憾的是，其中给出的证明并不完整。所幸，该定理是正确的。我们将在本节给出一个正确的证明。和前几节一样，我们也固定一个类型 $\{(m_k, n_{k+1}, r_{k+1})\}_{k \in \omega}$。

我们先证明一些关于不同序数集上的构造方案之间相互作用的结果。

引理 25。设 X 是一个序数集，$\mathcal{F}$ 是 X 上的一个构造方案，且 $k < l \in \omega$。对于每个满足 $G \subseteq F$ 和 $\alpha \in G$ 的 $F \in \mathcal{F}_l$、$G \in \mathcal{F}_k$，都存在 $E \in \mathcal{F}_k$，使得:

- $E \subseteq F$,
- $E \cap (\alpha + 1) = G \cap (\alpha + 1)(in particular, \alpha \in E)$,
- $E \backslash \alpha$ 是 F.中的一个区间

证明。这个引理的证明是对 l. 进行归纳。

（基步）若 $l = k + 1$，令 $E = F_0$：当 $\alpha \in R(F)$ 时取此值，否则取 $E = G$。利用引理 2 的部分（b），我们知道存在 $i < n_l$，使得 $E = F_i$。显然，无论属于哪种情形，$E \subseteq F$ 且 $E \cap (\alpha + 1) = G \cap (\alpha + 1)$。若 $\alpha \in R(F)$，我们利用 F_0 是 F 中的一个区间这一点，得出 $E\backslash\alpha$ 也是如此。另一方面，若 $\alpha \notin R(F)$，我们利用 $F_i\backslash R(F)$ 是 F 中的一个区间这一点，完成此情形的证明。

（归纳步骤）假设我们已证明引理对 $k < j < l$ 成立。利用引理 2，我们得到 $j < n_l$，使得 $G \subseteq F_j$。由归纳假设，我们知道存在 $E' \in \mathcal{F}_k$，使得 $E' \subseteq F_j$，$E' \cap (\alpha + 1) = G' \cap (\alpha + 1)$，并且 $E'\backslash\alpha$ 是 F_j 中的一个区间。若 $\alpha \in F_j\backslash R(F)$，令 $E = E'$。由于 $F_j\backslash R(F)$ 是 F 中的一个区间，因此 $E\backslash\alpha$ 也是如此，故证毕。若 $\alpha \in R(F)$，令 $h : F_j \longrightarrow F_0$ 为唯一的递增双射。根据推论 2，$E = h[E'] \in \mathcal{F}$。由于 h 是递增的，且 $h|_R(F)$ 是恒等映射，$E \cap (\alpha + 1) = E' \cap (\alpha + 1)$，并且 $E\backslash\alpha$ 是 F_0 中的一个区间。由于 F_0 是 F 中的一个区间，故证毕。□

定义 41. 设 $\mathcal{F}$ 是定义在某个序数集 Y 上的构造方案，并设 $X \subseteq Y$。我们将 $\mathcal{F}|_X$ 定义为 $\{F \in \mathcal{F} \mid F \subseteq X\}$.

命题 18. 固定 $\mathcal{F}$，它是定义在某个极限序数 γ 上的构造方案。设 $G \in \mathcal{F}$ 且 $\alpha \in G$。那么 $\big(G \cap \alpha + 1\big) \cup \big(\ (\alpha + n)\ \backslash\alpha\big) \in \mathcal{F}$，其中 $n = |G\backslash\alpha|$。

证明. 设 $F \in \mathcal{F}$ 满足 $G \cup \big(\ (\alpha + n)\ \backslash\alpha\big) \subseteq F$。利用引理 25，我们可以得出存在 $E \in \mathcal{F}$ 满足以下性质：

（1） $\rho^E = \rho^G$，（2） $E \subseteq F$，
（3） $E \cap (\alpha + 1) = G \cap (\alpha + 1)$，
（4） $E\backslash\alpha$ 是 F 中的一个区间。

注意，$E\backslash\alpha$ 和$(\alpha + n)\backslash\alpha$ 都是 F中的两个基数为 n的区间。此外，α 是二者的首元素。因此，$E\backslash\alpha = (\alpha + n)\backslash\alpha$。由 (3) 可得，$E = \big(G \cap \alpha + 1\big) \cup \big((\alpha + n)\backslash\alpha\big)$
. □

定义42. 设 p 是一个非空有限序数集，δ 是一个极限序数。每当$p \cap \delta \neq \emptyset$时，我们将 $red_\delta(p)$定义为 $\big(p \cap \delta\big) \cup \big((\alpha + n)\backslash\alpha\big)$，其中 $\alpha = \max(p \cap \delta)$且 $n = |p\backslash\alpha|$。另一方面，若 $p \cap \delta = \emptyset$，则将 $red_\delta(p)$定义为 $|p|$.

推论17. 固定 $\mathcal{F}$ 为某个极限序数 γ上的一个构造方案。若 $\delta < \gamma$ 是一个极限序数，则 $\mathcal{F}|_\delta$ 是 δ 上的一个构造方案。

证明。显然，$\mathcal{F}|_\delta$ 满足定义 2 的条件 (2)、(3) 和 (4)。为证明条件 (1) 成立，任取一个 $A \in [\delta]^{<\omega}$。由于 $\mathcal{F}$ 是基于 γ的构造方案，因此存在一个包含 A的 $F \in \mathcal{F}$。由命题 2 可知 $red_\delta(F) \in \mathcal{F}|_\delta$。最后，只需注意到 $A \subseteq red_\delta(F)$。□

下面的结论很容易证明。

命题19。设 $\mathcal{A}$ 是一个由序数集合组成、按包含关系线性排序的集合族，并且对每个 $X \in \mathcal{A}$，$\mathcal{F}_X$ 都是基于 X 的构造方案，且满足：只要$X \subseteq Y$，就有 $\mathcal{F}_X \subseteq \mathcal{F}_Y$。则 $\mathcal{F} = \bigcup_{X \in \mathcal{A}} \mathcal{F}_X$ 是 $Z = \bigcup \mathcal{A}$上的构造方案。

推论18。存在唯一一个 ω上的构造方案。
证明。由命题19， $\mathcal{F}=\bigcup_{k\in\omega}\mathcal{F}(m_k)$ 是 ω 上的一个构造方案。为了证明其唯一性，取另一个 ω 上的构造方案，即 $\mathcal{G}$。设 $k\in\omega$ 和 $F\in\mathcal{G}_k$ 满足 $0\in F$。利用命题18可得 $m_k=F\cap 1\cup m_k\backslash 0\in\mathcal{G}$。这意味着 $\mathcal{F}(m_k)\subseteq\mathcal{G}$。因此， $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{G}$. 由引理3，结论得证。□

从现在起，我们将 $\mathcal{F}(\omega)$ 称为 ω. 上唯一的构造方案

定义43。设 $\mathcal{F}$ 是某个序数 γ 上的一个构造方案。我们将 $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ 定义为所有满足以下条件的 $p\in[\gamma+\omega]^{<\omega}$ 的集合：
(a) $\exists k\in\omega\,(|p|=m_k)$，$(b)$ $\exists F\in\mathcal{F}($ $|F|=|p|$ 和 $p\cap\gamma\sqsubseteq F)$，$(c)$ $p\backslash\gamma\sqsubseteq(\gamma+\omega)$ $\backslash\gamma$.

我们还定义 $p<q$当且仅当 $q\in\mathcal{F}(p)$。最后，对于每个 $k\in\omega$.，我们将 $\{p\in\mathbb{P}(\mathcal{F})\mid|p|=m_k\}$ 记作 $\mathbb{P}_k(\mathcal{F})$

备注5. 设 $p\in[\gamma+\omega]^{<\omega}$ 满足定义43中的条件（a）和（b）。那么，$p\in\mathbb{P}(\mathcal{F})$ 当且仅当 $red_\delta(p)\in\mathcal{F}$。

以下定义首次出现于 [111]。正如第三作者所证明的，这个假设足以用递归方式构造构造方案。

定义44（IH_1）。设 $\mathcal{F}$ 是某个序数集 X上的构造方案。我们称 $\mathcal{F}$ 满足 IH_1，如果对于每个 $A\in[X]^{<\omega}$ 和 $\alpha\in X$，存在 $F\in\mathcal{F}$ 使得：
（1） $A\subseteq F_0$，（2） $R(F)=F\cap\alpha$。

到目前为止，我们几乎还没有用到定义1中的条件（c）。下一个命题将说明它的用途。

命题20。 $\mathcal{F}(\omega)$ 满足 IH_1.

证明。令 $A\in[\omega]^{<\omega}$ 和 $\alpha\in\omega$. 。根据定义 1 的条件（c），存在无穷多个 $k\in\omega$ 使得 $r_k=\alpha$。固定一个具有如下性质的 k： $m_{k-1}>\max(A)$。于是$F=m_k\in\mathcal{F}(\omega)$， $A\subseteq m_{k-1}=F_0$且 $F\cap\alpha=r_k=R(F)$。因此，得证。□

命题 21。设 $\mathcal{A}$ 是一个由包含关系线性排序的序数集合族，并且对每个 $X\in\mathcal{A}$，令 $\mathcal{F}_X$ 为定义在 X 上的一个构造方案，使得当$X\subseteq Y$时， $\mathcal{F}_X\subseteq\mathcal{F}_Y$。那么，$\mathcal{F}=\bigcup\mathcal{F}_X$ 满足 IH_1 当且仅当对所有 $\mathcal{F}_X.X\in\mathcal{A}$，同样的结论成立。

以下定理最早在 [111] 中得到证明。

定义 45。设 $\mathcal{F}$ 是定义在某个极限序数 γ 上的构造方案，并设 $\mathcal{G}$ 是定义在 $\mathbb{P}(\mathcal{F})$上的滤子。我们将 $\mathcal{F}^{\mathcal{G}}$定义为$\bigcup_{p\in\mathcal{G}}\mathcal{F}(p)$。最后， $\mathcal{F}^{Gen}$表示 $\mathcal{F}^G$的名称，其中G 是一个泛滤子。

定理 20. 设 $\mathcal{F}$ 是某个满足IH_1的极限序数 γ 上的一个构造方案。那么，存在一个可数族 $\mathcal{D}$，其中的集合在 $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ 中稠密，使得只要 $\mathcal{G}$ 是一个与 $\mathcal{D}$ 的每个成员都相交的滤子，那么 $\mathcal{F}^{\mathcal{G}}$就是一个满足$IH_1$ 且包含 $\mathcal{F}$的、在 $\gamma+\omega$上的构造方案。

注意，定理1是推论18、命题20和命题 21的直接推论。此外，推论17和引理3告诉我们，每个在 ω_1 上的构造方案都完全由一个递增序列决定，该序列由定义在可数极限序数上的构造方案组成。

问题4. 是否存在一个定义在 ω_1 上但不满足 IH_1 的构造方案?

7.1. 性质 IH_2。换言之， $\mathcal{F}$ 表示定义在某个极限序数 γ 上且满足 IH_1. 的构造方案

定义46. 设 $k \in \omega$ 和 $\mathbb{I} = \{\mathbb{I}(i)\}_{i<j}$ 是由非空有限序数组成的序列。若 $\mathbb{I}$ 满足以下条件，则称其为块区间序列：

(a) $\mathbb{I}(j)$ 对每个 $i < j$ 都是一个区间；

(b) 对于每个 $j < j' < i.$， $\mathbb{I}(j) < \mathbb{I}(j')$

给定 $k \in \omega\backslash 2$ 和 $t < m_k$ ，令 $Bl(t, k)$ 为包含在 $\mathscr{P}([t, m_k)$ 中的所有块区间序列的集合。给定 $\beta \in \gamma$，我们稍微滥用一下记号，将 $Bl(|(\beta)^-_k|, k)$ 记为 $Bl(\beta, k)$。

注意，如果 $\mathbb{I} = \{\mathbb{I}(i)\}_{i<j}$ 是一个块区间序列，那么每个 $\mathbb{I}(i)$ 都非空（对于 $i < j$）。然而， $\mathbb{I}$ 本身可能为空。这并非什么奇怪的病态情形；这一点今后对我们会很重要。

定义47。设 $k \in \omega\backslash 2$，且 $t < m_k$。我们称 $(\mathbb{I}, z_\mathbb{I}) \in Bl(t, k) \times m_k$ 是 (t, k)-good，当且仅当：

- $z_\mathbb{I} \in [t, m_k)$,
- 要么 $\mathbb{I} = \emptyset$ ，要么 $\max(\bigcup \mathbb{I}) \leq z_\mathbb{I}$.

对于非空的 $S \subseteq BL(t, k)$，若序列 $T = \{(\mathbb{I}, z_\mathbb{I})\}_{\mathbb{I}\in S}$ 满足：对于每个 $\mathbb{I} \in S.$，$(\mathbb{I}, z_\mathbb{I})$ 都是 (t, k)-good，那么称该序列为 (t, k)-good。所有 (t, k)-good 序列的集合记作 $Good(t, k)$。给定 $\beta \in \gamma$，我们稍微滥用一下记号，将 $Good(|(\beta)^-_k|, k)$ 记作 $Good(\beta, k)$。

特别地，如果 $\mathbb{I} = \emptyset$ ，那么 $(\emptyset, z_\mathbb{I})$ 是 (t, k)-良好的，当且仅当 $t \leq z_\mathbb{I} < m_k$。

此时，回顾一些记号或许会有所帮助。若 a 是一个大小为 n 的序数集（或一般而言，一个线性序），我们约定将 $a(i)$ 记作按照递增序排列时 a 的第 i 个元素。沿用这一记号，对于每个 $S \subseteq n$， $a[S]$ 表示集合 $\{a(i) \mid i \in S\}$。本节余下部分将采用这一记号，特别是用于形如 $(\xi)_k$ 的集合以及构造方案中的元素。

定义 48. 设 $\xi \in \gamma$、 $k < l \in \omega\backslash 2$ 和 $(\mathbb{I}, z_\mathbb{I})$ 都是 $(0, k)$-良好的。每当 $z_\mathbb{I} \leq |(\xi)^-_k|$ 时，我们将 $\mathbb{I}$ 的 (ξ, l)-投影定义为 $\pi^{k,}{}_{\xi}{}^{l}(\mathbb{I}) = \{\pi^{k,l}_\xi(\mathbb{I})(j)\}_{j<|\mathbb{I}|}$ 其中

$$\pi^{k,l}_\xi(\mathbb{I})(j) = \{|(\alpha)^-_l| \mid \alpha \in (\xi)_k[\mathbb{I}(j)]\}.$$

一个关键事实是，一般而言，集合 $\pi^{k,}{}_{\xi}{}^{l}(\mathbb{I})(j)$ 只是一个有限集，而不是区间。要使 $\pi^{k,}{}_{\xi}{}^{l}(\mathbb{I})$ 成为 $Bl(0, l)$ 的元素，每个 ${}_{\pi}{}^{k,}{}_{\xi}{}^{l}(\mathbb{I})(j)$ 都是 m_l 中的一个区间，是必要且充分的条件。这等价于说，$(\xi)_k[\mathbb{I}(j)]$ 是 $(\xi)_l$. 中的一个区间

回忆一下， $\diamondsuit$-序列是由 ω_1 的可数子集组成的序列 $\{D_\alpha\}_{\alpha\in LIM}$ ，满足：

(1) $\forall\alpha \in LIM\,(D_\alpha \subseteq \alpha)$, (2) $\forall D \subseteq \omega_1($

$\{\alpha \in LIM \mid D \cap \alpha = D_\alpha\}$ 是平稳的)。

$\diamondsuit$原则（或简称为 $\diamondsuit$）是断言存在一个 $\diamondsuit$-序列的命题。在本节的其余部分，我们固定一个 $\diamondsuit$-序列 $\{D_\alpha\}_{\alpha\in LIM}$。

定义 49. 设 $\beta,\xi\in\gamma$, $k\leq l\in\omega\backslash 2$ 和 $T=\{(\mathbb{I},z_{\mathbb{I}})\}_{\mathbb{I}\in S}\in Good(\beta,k)$。我们称 (β,ξ,k,l) 批准 T （记作 $(\beta,\xi,k,l)\checkmark T$），若存在 $\mathbb{I}\in S$ 使得以下条件成立：

(0) $|(\beta)_l|\leq|(\xi)_l|$, (1) $z_{\mathbb{I}}=|(\xi)_k^-|$, (2) $\pi^{k,l}_{\xi}(\mathbb{I})\in Bl(0,l)$, (3) $(\xi)_l(|(\beta)_l^-|)\in(\xi)_k$.

我们经常会在 $\xi<\beta$. 的情况下应用前面的定义

备注6. 若 $(\beta,\xi,k,l)\checkmark T$ 且 $\beta',\xi'\in\gamma$ 满足 $|(\beta)_l|=|(\beta')_l|$ 和 $|(\xi)_l|=|(\xi')_l|$，则 $(\beta',\xi',k,l)\checkmark T$.

定义 50. 设 $\delta<\beta<\gamma$、$k<l\in\omega\backslash 2$ 和 $T\in Good$（β、k）。给定 $C\in[D_\delta]^{<\omega}\backslash\{\emptyset\}$ 和 $G\in\mathcal{F}_l$，若满足以下条件，则称 (C,G) 被 (k,l,β,δ,T) 接受：

- G捕获 C,
- $(\beta,C(0)\ k,l-1)\checkmark T$,
- $(\beta)_{l-1}\cap\delta=R(G)$。

最后，我们将 $j(k,l,\beta,\delta,T)$ 定义为

$$\max\{j\leq n_l\mid\exists C\in[D_\delta]^j\ \exists G\in(\mathcal{F}|_\delta)_l\ \big((C,G)\text{ 被 }(k,l,\beta,\delta,T)\big)\}\cup\{0\}\text{ 接受}$$

定义 51（IH_2）。我们称 $\mathcal{F}$ 满足 IH_2，如果对每个极限序数 $\delta<\gamma$，以下互斥条件之一成立：

(1) 存在无穷多个 $l\in\omega$，使得有 $C\in[D_\delta]^{<\omega}$，且它被 $\mathcal{F}_l$.中的某个元素完全捕获。

(2) 对每个 $\beta\in\gamma\backslash\delta$、$k\in\omega\backslash 2$ 和 $T\in Good$（β，k），都存在无穷多个 $l\in\omega\backslash k$，使得：（a）$|(\beta)_{l-1}\cap\delta|=r_l$，（$b$）不存在任何被任意 $F\in\mathcal{F}_l$.完全捕获的 $C\in[D_\delta]^{<\omega}$。此外，以下两种情况之一成立：$j(k,l,\beta,\delta,T)=0$，并且存在 $F\in\mathcal{F}_l$ 使得 $\beta\in F_0\backslash R(F)$；或者 $j(k,l,\beta,\delta,T)>0$，并且存在 $C\in[D_\delta]^{j(k,l\beta,\delta,T)}$ 和 $F\in\mathcal{F}_l$，使得（C，F）被（k，l，β，δ，T）接受，且 $\beta\in F_{j(k,l,\beta,\delta,T)}$。

命题 22。设 $\mathcal{A}$ 是一个可数序数集。对每个 $\gamma\in\mathcal{A}$，令 $\mathcal{F}_\gamma$ 为 γ 上的一个构造方案，并满足：只要 $\delta<\gamma$，就有 $\mathcal{F}_\delta\subseteq\mathcal{F}_\gamma$。那么 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}=\bigcup_{\gamma\in\mathcal{A}}\mathcal{F}_\gamma$ 满足IH_2 当且仅当对所有 $\mathcal{F}_\gamma$.，同样的结论都成立

由于 ω 是第一个极限序数，我们显然可以得出以下结论。

备注 7。 $\mathcal{F}(\omega)$ 满足 IH_2.

以下引理已见于 [69] 和 [111]。为方便读者，我们给出证明。

引理 26. 设 $\mathcal{F}$ 是 ω_1 上的一个构造方案，使得对于每个不可数的 $S\subseteq\omega_1$，都存在无穷多个 $l\in\omega$，使得其中存在一个被 $\mathcal{F}_l$ 的某个元素完全捕获的 $C\in[S]^{<\omega}$。那么 $\mathcal{F}$ 是完全捕获的。

证明。令 $S \subseteq [\omega_1]^{<\omega}$ 为不可数集。通过细化 S，不失一般性地假设存在 $k \in \omega$，使得：

- $\forall c \in S\,(\rho^c = k)$,
- $\forall c, c' \in S\,(\,|(c)_k| = |(c')_k|\,)$,
- $\forall c,\ c' \in S$（$\phi[c] = c'$，其中 ϕ 是从 $(c)_k$ 到 $(c')_k$ 的递增双射）。

集合 $S' = \{\max(c) \mid c \in S\}$ 是不可数的。因此，根据假设，我们得出存在无穷多个 $l \in \omega$，对于每一个这样的 $l \in \omega$，都存在 $C \in [S']^{<\omega}$，它被 $\mathcal{F}_l$ 的某个元素完全捕获。若这样的 l 大于 k，令 $c_i \in S$ 满足：对于每个 $i < n_l$，$\max(c_i) = C(i)$。现在，考虑 $\mathcal{C} = \{c_i\}_{i<n_l}$。我们声称 F 完全捕获 $\mathcal{C}.$。为此，首先注意，由于 $\rho^{c(i)} = k \leq l-1$，且对于每个 i，$C(i) = max(c_i) \in F_i \backslash R(F)$，因此 $c_i \subseteq F_i$ 且 $c_i \backslash R(F) \neq \emptyset$。现在，固定 $i < n_l$，并令 $\Psi:\ F_0 \longrightarrow F_i$ 为递增双射。由于 F 完全捕获 C，因此 $\Psi(C(0)) = C(i)$。这样，$\Psi|_{(C(0))_k}$ 就是从 $(C(0))_k$ 到 $((C(i))_k$ 的递增双射。最后，只需注意 $(C(0))_k = (c_0)_k$，且 $(C(i))_k = (c_i)_k.$。因此，根据我们的“细化”假设的第三点，结论成立。□

定理 21. 设 $\mathcal{F}$ 是定义在 ω_1 上且满足 IH_2 的构造方案。那么 $\mathcal{F}$ 是完全捕获的。

证明. 我们将使用引理 26。设 S 是 ω_1 的一个不可数子集。由于 $\{D_\delta\}_{\delta \in LIM}$ 是一个 $\diamondsuit$-序列，我们可以选取一个极限序数 δ，使得：

(1) δ 是 S 的一个极限点，(2) $D_\delta = S \cap \delta$，(3) $(\delta, <, D_\delta, \mathcal{F}|_\delta)$ 是 $(\omega_1, <, S, \mathcal{F})$ 的一个初等子模型。

只需证明，对每个 $k \in \omega$，都存在 $C \in [D_\delta]^{<\omega}$、$l > k$ 和 $F \in \mathcal{F}_l$，使其完全捕获 $C.$。反设此结论不成立，并取一个使给定断言为假的 $k \in \omega \backslash 2$。现在固定 $\beta \in S \backslash \delta$，并令 $T = \{(\emptyset, z_\emptyset)\}$，其中 $z_\emptyset = |(\beta)^-_k|$。我们知道 $\mathcal{F}$ 满足 IH_2，且定义 51 的条件 (1) 不成立。这样，我们可以取 $l \in \omega \backslash k$，它证明将定义 51 的条件 (2) 应用于 β、k 和 T 时成立。对于 $j = j(k, l, \beta, \delta, T)$，我们分两种情况讨论。若 $j = 0$，则存在一个 $F \in \mathcal{F}_l$，使得 $\beta \in F_0 \backslash R(F)$。由初等性可知，存在 $G \in (\mathcal{F}|_\delta)_l$ 和 $\xi_0 \in D_\delta$，使得以下情况成立：

- $\xi_0 \in G_0 \backslash R(G)$,
- $|(\xi_0)_{l-1}| = |(\beta)_{l-1}|$,
- $(\beta)_{l-1} \cap \delta = R(G)$。

第一个性质意味着 G 捕获了 $\{\xi_0\}$。第二个性质意味着 $|(\xi_0)^-_k| = |(\beta)^-_k| = z_\emptyset$ 且 $(\xi_0)_{l-1}\,(|(\beta)^-_{l-1}|) = \xi_0 \in (\xi_0)_k.$ 由于 $\pi^{k,\ l}_{\xi}(\emptyset) = \emptyset$，我们得出结论：（$(\{\xi_0\}, G)$ 被（k, l, β, δ, T）接受。因此，$j \geq 1$，这就产生了矛盾。

现在，我们处理 $j > 0$的情形。在这种情况下，存在 $C \in [D_\delta]^j$ 和 $F \in \mathcal{F}_l$，使得（C, F）被（k, l, β, δ, T）接受，并且 $\beta \in F_j$。根据初等性，存在 $G \in (\mathcal{F}|_\delta)_l$和 $\xi_j \in D_\delta$，它们满足以下性质：

- $\xi_j \in G_j$,
- $|(\xi_j)_{l-1}| = |(\beta)_{l-1}|$,
- G_j 捕获 C,
- $(\beta)_{l-1} \cap \delta = R(G)$,
- $C \subseteq \xi_j.$

由于 $(\beta, C(0)\ k, l-1)\checkmark T$，根据定义 49 的条件 (1)，我们知道 $|(C(0))_k^-| = z_\emptyset = |(\beta)_k^-|$。此外，若定义 α 为 $(C(0))_{l-1}(|(\beta)_{l-1}^-|)$，则定义 49 的条件 (3) 告诉我们 $\alpha \in (C(0))_k$。根据 α 的定义，$|(\alpha)_{l-1}| = |(\beta)_{l-1}|$也成立。特别地，$|(\alpha)_k| = |(\beta)_k|$。这样，

$$C(0) = (C(0))_k(|(C(0))_k^-|) = (C(0))_k(|(\alpha)_k^-|) = \alpha.$$

因此，$|(C(0))_{l-1}^-| = |(\beta)_{l-1}^-| = |(\xi_j)_{l-1}^-|$。由此，我们得出 G 捕获了 $C \cup \{\xi_j\}$，因此 $(C \cup \{\xi_j\}, G)$ 被 (k, l, β, δ, T) 接受。根据 $j(k, l, \beta, \delta, T)$ 的定义，我们有 $j(k, l, \beta, \delta, T) > j$，这与矛盾相悖。证明完毕。□

7.2. 力迫 IH_2。现在，我们有一条清晰的路径可循，以证明完全捕获构造方案的存在性。与上一小节一样，我们固定一个定义在某个极限序数 γ 上的构造方案 $\mathcal{F}$。这一次，我们假设 $\mathcal{F}$ 满足 IH_1 和 IH_2。

定义 52。设 $F \in \mathcal{F}$ 和 $\alpha \in F$。我们将 $Cut(F, \alpha)$ 定义为 $(F \cap \alpha) \cup [\gamma, \gamma + |F \backslash \alpha|)$。

注意到，根据 F，$Cut(F, \alpha)$ 始终是 $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ 中的一个条件。事实上，对于每个 $F \in \mathcal{F}$，每个 $p \in \mathbb{P}(\mathcal{F})$ 都可以写成 $Cut(F, \alpha)$，从而证明 p 是一个条件。下面的引理是我们在 $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ 中扩展条件的主要工具。

引理 27. 设 $k \in \omega, p \in \mathbb{P}_k(\mathcal{F})$ 和 $\alpha \in \gamma$ 满足 $(\alpha)_k^- = p \cap \gamma$。那么，对于每个满足 $\alpha \in F$ 和 $\rho^F \geq k.$ 的 $F \in \mathcal{F}$，都有 $Cut(F, \alpha) \leq p$

证明. 设 $F \in \mathcal{F}$ 如假设所述。考虑满足 $\alpha \in G$ 和 $G \subseteq F.$ 的 $G \in \mathcal{F}_k$。注意到 $G \cap \alpha = (\alpha)_k^- = p \cap \gamma.$。这意味着 $Cut(G, \alpha) = p$。由于 $Cut(G, \alpha) \in \mathcal{F}(Cut(F, \alpha))$，证毕。□

引理 28. 设 $p \in \mathbb{P}(\mathcal{F})$ 和 $\alpha \in \gamma$。则存在 $q \leq p$ 使得 $\alpha \in q$。

证明. 令 $\xi = \min(red_\gamma(p) \backslash p)$。由于 $\mathcal{F}$ 满足 IH_1，我们可以取 $F \in \mathcal{F}$ 使得 $\{\alpha\} \cup red_\gamma(p) \subseteq F_0$ 且 $\xi \cap F = R(F)$。令 $\xi' = \min(F_1 \backslash R(F))$，$q = Cut(F, \xi')$ 且 $l = \rho^F$。那么 $l > \rho^{red_\gamma(p)}$，因为 $red_\gamma(p) \subsetneq F$。此外，$(\xi)_{l-1}^- = R(F) = (\xi')_{l-1}^-$，这意味着 $(\xi')_k^- = (\xi)_k^- = p \cap \gamma$。这样，根据引理 27，$q \leq p$。最后，只需注意到$\alpha \in F_0 \subseteq q.$

□

引理 29. 设 $p \in \mathbb{P}(\mathcal{F})$、$\beta \in (\gamma + \omega) \backslash \gamma$ 和 $k \in \omega$。则存在 $k' \in \omega \backslash k$ 和$q \in \mathbb{P}_{k'}(\mathcal{F})$，使得：

- $q \leq p$,
- $\beta \in q$,
- $|q \cap \gamma| = r_{k'+1}$,

证明。设 $l \in \omega$ 使得 $p \in \mathbb{P}_l(\mathcal{F})$。此外，设 $s \in \omega$ 使得 $\beta = \gamma + s$，并令$\alpha = \min(red_\gamma(p) \backslash p)$。利用 $\mathcal{F}$ 满足 IH_1这一点，我们可以取一个 $F \in \mathcal{F}$，使得：

(1) $red_\gamma(p) \cup (\alpha + s + m_k + 1) \backslash \alpha \subseteq F_0$,

(2) $R(F) = F \cap \alpha.$

设 $q = Cut(F_0, \alpha)$ 且 $k' = \rho^{F_0}$。由于 $(\alpha + s + m_k + 1) \backslash \alpha \subseteq F_0$，因此 $k' \geq k$。此外，$k' \geq l$，因为$red_\gamma(p) \subseteq F_0$。由此，根据引理 27，我们得出 $q \leq p$。由于 $q \cap \gamma = F \cap \alpha = R(F)$，因此 $|q \cap \gamma| = r_{k'+1}$。最后，只需注意 $\beta = \gamma + s \in (\gamma + s + m_k + 1) \backslash \gamma \subseteq q$。□

定义 53。设 γ' 为一个极限序数，$\mathcal{F}'$ 为定义在 γ' 上的构造方案。令$k < k' \in \omega\backslash 2$, $\beta \in \gamma'$, $S \subseteq Bl(\beta, k)$ 且 $T = \{(\mathbb{I}, z_{\mathbb{I}})\}_{\mathbb{I}\in S} \in Good(\beta, k)$。给定 $\alpha \in (\beta)^-_{k'}$，我们将 $\mathcal{Q}$ 定义为所有满足以下条件的有序对 $(G, \mathbb{I}) \in \mathcal{F}_k(m_{k'}) \times S$ 的集合：

对每个 $i < |\mathbb{I}|$.，(a) $|(\beta)^-_{k'}| \in G$, (b) $G[\mathbb{I}(i)]$ 是 $m_{k'}$ 中的一个区间

此外，给定 $(G, \mathbb{I}) \in \mathcal{Q}$，我们定义以下对象：

- $\mathbb{J}_{(G,\mathbb{I})}$ *is the sequence defined as* $\mathbb{J}_{(G,\mathbb{I})}(0) = [\,|(\alpha)^-_{k'}|, |(\beta)^-_{k'}|\,]$ *and* $\mathbb{J}_{(G,\mathbb{I})}(i) = G[\mathbb{I}(i-1)]$ *for each* $i < |\mathbb{I}|$.
- $z_{\mathbb{J}_{(G,\mathbb{I})}} = G(z_{\mathbb{I}})$.

最后，令 $S' = \{\mathbb{J}_{(G,\mathbb{I})} \mid (G, \mathbb{I}) \in \mathcal{Q}\}$，以及 $Trans(k, k', \alpha, \beta, T) = \{(\mathbb{J}, z_{\mathbb{J}})\}_{\mathbb{J}\in S'}$。

给定 $(G, \mathbb{I}) \in \mathcal{Q}$，前一定义的性质 (b) 意味着，对每个 $i \leq \mathbb{I}$，$\mathbb{J}_{(G,\mathbb{I})}(i)$ 都是 $m_{k'}$ 中的一个区间。此外，由于 $|(\beta)^-_{k'}| \in G$，因此 $G(|(\beta)^-_k|) = |(\beta)^-_{k'}|$. 。令$i < \mathbb{I}$。由前述事实可直接推出，并利用 $\mathbb{I}(i+1) \subseteq [\,|(\beta)^-_k|, z_{\mathbb{I}}\,]$，我们得出

$$\{|(\alpha)^-_{k'}|\} < \mathbb{J}_{(G,\mathbb{I})}(0) < G(\mathbb{I}(i+1)) \leq \{G(z_{\mathbb{I}})\} = \{z_{\mathbb{J}_{(G,\mathbb{I})}}\}.$$

第二个不等式成立是因为 $\max(\mathbb{J}_{(G,\mathbb{I})}(0)) = G(|(\beta)^-_k|)$。由此显然可知，$Trans(k, k', \alpha, \beta, T)$ 属于 $Good(\alpha, k')$。

定理22。设 γ', $\mathcal{F}'$, k, k', α, β, $\mathcal{Q}$, S 和 T 如定义 53 所述。假设 $\xi \in \gamma'$ 和 $l \in \omega\backslash(k'+1)$ 满足 $|(\beta)_l| \leq |(\xi)_l|$，$(\xi)_l(|(\beta)^-_l|) \in (\xi)_{k'}$，且 $(\beta)_{k'}[\,(|(\alpha)^-_{k'}|, |(\beta)^-_{k'}|]\,]$ 是 $(\beta)_l$ 中的一个区间。那么以下陈述等价：

(a) $(\alpha, \xi, k', l) \checkmark Trans(k, k', \alpha, \beta, T)$, (b) $(\beta, \xi, k, l) \checkmark T$.

证明。设 $F \in \mathcal{F}'_{k'}$ 满足 $\xi \in F$，并令 $\phi : F \longrightarrow m_{k'}$ 为递增双射（由 $\phi(\alpha) = |(\alpha)^-_{k'}|$ 给出，且它是 $F(\,)$ 函数的逆函数）。 -

首先证明 (a) 蕴含 (b)。设 $(G, \mathbb{I}) \in \mathcal{Q}$，其中 $\mathbb{J}_{(G,\mathbb{I})}$ 满足定义 49 中条件 (0)、(1)、(2) 和 (3)（将其应用于 α、ξ、k'、l 以及 $Trans(k, k', \alpha, \beta, T)$）。也就是说，$|(\alpha)_l| \leq |(\xi)_l|$，并且：

(I) $|(\xi)^-_{k'}| = z_{\mathbb{J}_{(G,\mathbb{I})}} = G(z_{\mathbb{I}})$，(II) $\pi^{k'}{}_{,\,\xi}{}^{l}(\mathbb{J}_{(G,\mathbb{I})}) \in Bl(0, l)$。因此，特别地，$(\xi)_{k'}[\mathbb{J}_{(G,\mathbb{I})}(i+1)] = (\xi)_{k'}[G[\mathbb{I}(i)]]$ 对每个 $i < |\mathbb{I}|$ 都成立；(III) $(\xi)_l(|(\alpha)^-_l|) \in (\xi)_k$。

我们声称 $\mathbb{I}$ 见证了 $(\beta, \xi, k, l) \checkmark T$. 根据假设，定义 49 的条件 (0) 已满足，因此我们只需证明其余条件成立：

(1) 由 (I) 可知 $\phi(\xi) = G(z_{\mathbb{I}})$。因此，$\phi[(\xi)^-_k] = (G(z_{\mathbb{I}}))^-_k = G(z_{\mathbb{I}}) \cap G$。由于函数 ϕ 是单射，因此 $|(\xi)^-_k| = |G(z_{\mathbb{I}}) \cap G| = z_{\mathbb{I}}$.(2) 我们要证明 $\pi^k{}_{,\xi}{}^{l} \in Bl(0, l)$。正如我们在定义 48 之后提到的，只需证明对于每个 $i < \mathbb{I}$，$(\xi)_k[\mathbb{I}(i)]$ 是 $(\xi)_l$ 中的一个区间。注意，由于 $G(z_{\mathbb{I}}) = |(\xi)^-_{k'}|$，因此 $\xi \in F[G]$ 且 $(\xi)_k(j) = F[G](j) = F(G(j)) = (\xi)_{k'}(G(j))$

对于每个 $j < |(\xi)_k^-|$。因此

$$\begin{aligned}(\xi)_{k'}[G(z_{\mathbb{I}}) \cap G] &= (\xi)_{k'}[\{G(j) \mid j < z_{\mathbb{I}}\}] \\ &= \{(\xi)_{k'}(G(j)) \mid j < |(\xi)_k^-|\} \\ &= \{(\xi)_k(j) \mid j < |(\xi)_k^-|\} \\ &= (\xi)_k^-.\end{aligned}$$

由于 $G[\mathbb{I}(i)] \subseteq G \cap G(z_{\mathbb{I}})$，因此 $(\xi)_{k'}[G[\mathbb{I}(i)]] = (\xi)_k[\mathbb{I}(i)]$。这意味着这个最后的集合是 $(\xi)_l$ 中的一个区间。由于 i 是任意的，我们得出 $\pi^{k,\ \xi\ l}(\mathbb{I}) \in Bl(0,l)$。

(3) 最后，我们证明 $(\xi)_l(|(\beta)_l^-|) \in (\xi)_k$。请记住，根据假设，我们有 $(\xi)_l(|(\beta)_l^-|) \in (\xi)_{k'}$。由此，$(\xi)_l(|(\beta)_l^-|) = (\xi)_{k'}(|(\beta)_{k'}^-|)$。但是 $\phi(\beta) = |(\beta)_{k'}^-|$ 和 $\phi(\xi) = |(\xi)_{k'}^-|$ 都是 G 的成员。根据上文的 (I)，$\phi(\xi) \in G$；又由于 $(G,\mathbb{I}) \in \mathcal{Q}$，$\phi(\beta) \in G$。这意味着 $(\phi(\xi))_{k'}(|(\beta)_{k'}^-|) = |(\beta)_{k'}^-| \in G \cap (G(\phi(\xi)) + 1) = (\phi(\xi))_k^-$。因此，$(\xi)_{k'}(|(\beta)_{k'}^-|) \in (\xi)_k$。

现在证明 (b) 蕴含 (a)。为此，固定一个 $\mathbb{I} \in S$，使其满足将定义 49 应用于 β、ξ、k、l (2) 时的条件 (1) 和 (3)。也就是说：

(I) $|(\xi)_k^-| = z_{\mathbb{I}}$，(II) $\pi^{k,\ \xi\ l}(\mathbb{I}) \in Bl(0,l)$，(III) $(\xi)_l(|(\beta)_l^-|) \in (\xi)_k$。因此，特别有 $(\xi)_l(|(\beta)_l^-|) \in (\xi)_{k'}$.

由于 $\alpha \in (\beta)_{k'} \subseteq (\beta)_l$，因此 $|(\alpha)_l| \leq |(\beta)_l|$。但根据假设，我们有 $|(\beta)_l| \leq |(\xi)_l|$。这样，$|(\alpha)_l| \leq |(\xi)_l|$。因此，只需找到一个 $G \in \mathcal{F}_k(m_{k'})$，使得 $(G,\mathbb{I}) \in \mathcal{Q}$，且 $\mathbb{J}_{(G,\mathbb{I})}$ 满足将定义 49 应用于 α、ξ、k'和 l时的条件 (1)、(2) 和 (3)。为此，只需取一个固定的 $G \in \mathcal{F}_k(m_{k'})$，使得 $\phi(\xi) \in G$。我们断言这个 G可行。首先证明 $(G,\mathbb{I})$ 是 $\mathcal{Q}$的一个元素。注意，由于 $(\xi)_l(|(\beta)_l^-|) \in (\xi)_k$，因此 $(\xi)_l(|(\beta)_l^-|) = (\xi)_{k'}(|(\beta)_{k'}^-|)$，这意味着 $|(\beta)_{k'}^-| \in (|(\xi)_{k'}^-|)_k$。但 $|(\xi)_{k'}^-| = \phi(\xi) \in G$。这样，$(|(\xi)_{k'}^-|)_k = G \cap (\phi(\xi) + 1)$，因此 $|(\beta)_{k'}^-| \in G$。为证明对每个 $i < |\mathbb{I}|$，$G[\mathbb{I}(i)]$ 是 $m_{k'}$ 中的一个区间，我们使用 (II) 并进行类似分析。详情留待读者验证。现在，我们来说明其余要求也都满足：

(1) 注意，$z_{(G,\mathbb{I})} = G(z_{\mathbb{I}}) = G(|(\xi)_k^-|)$。由于 $\phi(\xi) \in G$，因此 $G \cap \phi(\xi) = (\phi(\xi))_k^-$。另一方面，$G \cap \phi(\xi) = (\phi(\xi))_k^-$，因为 $\phi(\xi) \in G$ 且 $G \in \mathcal{F}_k(m_{k'})$。这意味着 $|G \cap \phi(\xi)| = |(\phi(\xi))_k^-| = |(\xi)_k^-|$。也就是说，$G$ 中小于 $\phi(\xi)$ 的元素恰好有 $|(\xi)_k^-|$ 个。因此，$G(|(\xi)_k^-|) = \phi(\xi) = |(\xi)_{k'}^-|$。由此，$z_{(G,\mathbb{I})} = |(\xi)_{k'}^-|$.(2) 现在证明 $\pi^{k',\ \xi\ l}(\mathbb{J}_{(G,\mathbb{I})}) \in Bl(0,l)$。根据假设，$(\beta)_{k'}[(|(\alpha)_{k'}^-|, |(\beta)_{k'}^-|]]$ 是 $(\beta)_l$ 中的一个区间。由于 $(\xi)_l(|(\beta)_l^-|) \in (\xi)_{k'}$，因此 $(\xi)_{k'}[\mathbb{J}_{(G,\mathbb{I})}(0)] = (\xi)_{k'}[(|(\alpha)_{k'}^-|, |(\beta)_{k'}^-|]]$ 也是 $(\xi)_l$ 中的一个区间。此外，由条件 (II) 可知，对于每个 $i < |\mathbb{I}|$，$(\xi)_{k'}[\mathbb{J}_{(G,\mathbb{I})}(i+1)] = (\xi)_{k'}[G[\mathbb{I}(i)]] = (\xi)_k[\mathbb{I}(i)]$ 也是 $(\xi)_l$ 中的一个区间。因此，正如我们所希望的，$\pi^{k',\ \xi\ l}(\mathbb{J}_{(G,\mathbb{I})}) \in Bl(0,l)$。(3) 最后，我们证明定义 49 的最后一个条件。为此，只需注意，由于 $\alpha \in (\beta)_{k'}$，所以 $|(\alpha)_l^-| \in (|(\beta)_l^-|)_{k'}$.。此外，由于 $(\xi)_l(|(\beta)_l^-|) \in (\xi)_{k'}$，因此$|(\beta)_l^-| \in (|(\xi)_l^-|)_{k'}$。这意味着 $|(\alpha)_l^-| \in (|(\xi)_l^-|)_{k'}$，这等同于说 $(\xi)_l(|(\alpha)_l^-|) \in (\xi)_{k'}$。

□

推论19。设 γ' 为极限序数，且 $\mathcal{F}'$ 是定义在 γ' 上的构造方案。此外，设 $k < k' \in \omega\backslash 2$、 $\beta \in \gamma$、 $\subseteq Bl(\beta, k)$、 $T = \{(\mathbb{I}, z_{\mathbb{I}})\}_{\mathbb{I}\in S} \in Good(\beta, k)$ 以及 $\alpha \in (\beta)^{-}_{k'}$。假设 $l \in \omega\backslash(k'+1)$ 和 $\delta \leq \alpha$ 满足：

(1) δ 是极限序数，且 $|(\alpha)_{l-1} \cap \delta| = r_l$,

(2) $(\beta)_{k'}[(|(\alpha)^{-}_{k'}|, |(\beta)^{-}_{k'}|]]$ 是 $(\beta)_l$ 中的一个区间。

若 $C \in [D_\delta]^{<\omega}\backslash\{\emptyset\}$ 和 $G \in \mathcal{F}_l$ 满足条件，使得 (C, G) 被 (k, l, β, δ, T) 接受，则 (C, G) 也被 $(k', l, \beta, \delta, T')$ 接受，其中 $T' = Trans(k, k', \alpha, \beta, T)$。特别地，$j(k, l, \beta, \delta, T) \leq j(k', l, \alpha, \delta, T')$。

证明。由于 $l - 1 \geq k'$, $\alpha \in (\beta)_{k'}$ 和 $\delta \leq \alpha$，因此 $(\alpha)_{l-1} \cap \delta = (\beta)_{l-1} \cap \delta = R(G)$。根据假设，我们还有 G捕获了 C。因此，剩下唯一需要证明的是 $(\alpha, C(0)\ k, l-1)\checkmark T'$。为此，只需证明定理22的假设对 $\xi = C(0)$ 成立。事实上，根据这个推论的假设，$(\beta)_{k'}[(|(\alpha)^{-}_{k'}|, |(\beta)^{-}_{k'}|]]$ 是 $(\beta)_l$ 中的一个区间。此外，由于 $(\beta, C(0)\ k, l)\checkmark T$，因此 $|(\beta)_l| \leq |(C(0))_l|$，且 $(C(0))_l(|(\beta)^{-}_{l}|) \in (C(0))_k$。由于 $(C(0))_k \subseteq (C(0))_{k'}$，证明至此完成。

□

定理23。 $\mathbb{P}(\mathcal{F}) \Vdash$“ $\mathcal{F}^{Gen}$满足 IH_2”。

证明。设 $p \in \mathbb{P}(\mathcal{F})$，且 $\delta < \gamma + \omega$是一个极限序数。由于 $p \Vdash$“ $\mathcal{F}_\delta \subseteq (\mathcal{F}^{\mathcal{G}})_\delta$”，显然，$\mathcal{F}$ 满足定义 51 的条件 (1) 当且仅当 p 迫使 $\mathcal{F}^G$满足同一条件。因此，我们假设 $\mathcal{F}$ 满足 δ 的条件 (2)，并寻找一个 $q \leq p$，使其迫使 $\mathcal{F}^G$.满足同一条件

设 $\beta \in \gamma + \omega$和 $k \in \omega\backslash 2$。如果 $\beta < \gamma$，则无需进行任何操作，因为 $p \Vdash$“ $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^{\mathcal{G}}$”，并且$\mathcal{F}$ 已经满足条件 (2)。因此，我们可以假设 $\beta \geq \gamma.$。通过这样做，我们可以调用引理 29，得到一个条件 $p' \leq p$，使得 $\beta \in p'$、 $p' \in \mathbb{P}_{k'}$ 对于某个 $k' > k$ 和$p \cap \gamma = r_{k'+1}$成立。不失一般性， $p' = p$。这样， $p \Vdash$“ $(\beta)_{k'} = p \cap (\beta + 1)$ ”。特别地，这意味着 $(\beta)_k$，并且 $Good(\beta, k)$ 完全由 p确定。基于此，我们略微滥用记号，继续证明，并取任意的 $\emptyset \neq S \in Bl(\beta, k)$ 和 $T = \{(\mathbb{I}, z_{\mathbb{I}})\}_{\mathbb{I}\in S} \in Good(\beta, k)$。证明的其余部分分为两种情况。

若 $\delta = \gamma$，令 $l = k' + 1.$。计算 $j(k, l, \beta, \delta, T)$ 所需的信息包含在 $\mathcal{F}|_\delta$ 和 $(\beta)_{l-1}$ 中。由于 p 已经知道这两个集合，我们可以得出，存在 $j \in \omega$，使得 $p \Vdash$“ $j = j(k, l, \beta, \delta, T)$”。若 $j = 0$，则任取一个满足 $R(F) = p \cap \gamma.$ 的 $F \in \mathcal{F}_l$ 即可。这样的 F 存在，因为 $|p \cap \gamma| = r_l.$。现在，定义 α 为 $\min F_0\backslash R(F)$。于是 $(\alpha)^{-}_{l-1} = F_0 \cap \alpha = p \cap \gamma$。这样，引理 27 保证 $q = Cut(F, \alpha) \leq p.$。显然，$q \Vdash$“$\beta \in q_0\backslash R(q)$”。这仅仅是因为 $p = q_0$。现在我们处理 $j > 0$ 的情形。此时，取满足 $p \Vdash$“(C, F) 被 (k, l, β, δ, T) 接受 ” 的 $F \in \mathcal{F}_l$ 和 $C \in [D_\delta]^j$。根据定义 50 的第三点， $p \Vdash$“$(\beta)_{l-1} \cap \gamma = R(F)$。由于 p 也迫使 $(\beta)_{l-1} = (\beta + 1) \cap p$，因此 $p \cap \gamma = R(F)$。于是，若令 $\alpha =$ 为 $\min F_j\backslash R(F)$，则 $(\alpha)^{-}_{l-1} = p \cap \gamma.$。再次由引理 27 可得 $q = Cut(F, \alpha) \leq p.$。由此显然可知

$$q \Vdash \text{“}(C, q) \text{ is accepted by } (k, l, \beta, \delta, T) \text{ and } \beta \in q_j\backslash R(q)\text{”}.$$

现在我们考虑 $\delta < \gamma$ 的情形。应用引理 28，并再次使用引理 29，我们得到一个与 $\gamma\backslash\delta$ 的交集非空的条件。不失一般性，我们可以假设 $p \cap \gamma\backslash\delta \neq \emptyset.$。这样，令 $\alpha = \max p \cap \gamma$。最后，令 S'、 $\mathcal{Q}$ 和 $T' = Trans$（α、 β、 k、 k'、 T），如定义 53 中所述。

由于 $\mathcal{F}$ 满足 IH_2，我们取一个 $l \in \omega\backslash k'$，它证明定义 51 中条件 (2) 对 α、k' 和 T' 成立。即：

(a) $|(\alpha)_{l-1} \cap \delta| = r_l$，(b) 不存在任何 $C \in [D_\delta]^{<\omega}$ 能被任意 $F \in \mathcal{F}_l$. 完全捕获。此外，或者$j(k', l, \alpha, \delta, T') = 0$，且存在 $F \in \mathcal{F}_l$使得 $\alpha \in F_0\backslash R(F)$；或者 $j(k', l, \alpha, \delta, T') > 0$，并且存在 $C \in [D_\delta]^{j(k',l,\alpha,\delta,T')}$ 以及 $F \in \mathcal{F}_l$，使得 (C, F) 被 $(k', l, \alpha, \delta, T')$ 接受，且 $\alpha \in F_{j(k,l,\beta,\delta,T)}$。

设 $j = j(k', l, \alpha, \delta, T')$。与前一种情况一样，我们应考虑 $j = 0$或 $j > 0$. 的子情况

若 $j = 0$，令 $F \in \mathcal{F}_l$满足 $\alpha \in F_0\backslash R(F)$。注意 $F \cap \delta = R(F)$。现在，取满足$\alpha \in G \subseteq F$的 $G \in \mathcal{F}_{k'}$。由于 $|(\alpha)^-_{k'}| < |p| = m_{k'}$，因此 $G\backslash(\alpha+1) \neq \emptyset$.。这样，令 $\nu =$ 为 $G\backslash(\alpha+1)$ 的最小值。注意，$(\nu)^-_{k'} = (\alpha)_{k'} = p \cap \gamma$。于是，若令 $q = Cut(F, \nu)$，则 $q \leq p$。事实上，由引理 9 的 (c) 部分以及因为 $q \Vdash$“ $\alpha \in q_0\backslash R(q)$ ”，可得$q \Vdash$“ $\beta \in q_0\backslash R(q)$”。我们还有

$$q \Vdash \text{“}(\beta)_{l-1} \cap \delta = (\alpha)_{l-1} \cap \delta = R(q)\text{”}.$$

这样，考虑 l 作为候选者，以满足定义 51 中关于 β、k、l和 T的条件 (2)，便是有意义的。我们声称，这个 q能推出我们所需的结论。我们需要证明，$j(k, l, \beta, \delta, T)$必定为 0。我们将借助定理22来实现这一点。为此，注意$p \Vdash$“ $(\beta)_{k'}[(|(\alpha)^-_{k'}|, |(\beta)^-_{k'}|]] = \beta\backslash\gamma$”。由于 q 也能推出相同结论，且 $\beta\backslash\gamma$ 已经是 ω_1中的一个区间，因此

$$q \Vdash \text{“}(\beta)_{k'}[(|(\alpha)^-_{k'}|, |(\beta)^-_{k'}|]] \text{ is an interval in } (\beta)_l\text{”}.$$

这样，我们可以利用推论19得出 $q \Vdash$“ $j(k, l, \beta, \delta, T) = j = 0$”。由于$q \Vdash$“ $q \in \mathcal{F}_l^{Gen}$和 $\beta \in q_0\backslash R(F)$ ”，因此得证。

现在我们处理 $j > 0$ 的情形。这里，我们可以取 $C \in [D_\delta]^j$ 和 $F \in \mathcal{F}_l$，使得 (C, F) 被 $(k', l, \alpha, \delta, T')$ 接受，且 $\alpha \in F_j$.。令 $\eta \in F_j$ 满足 $|(\eta)_{l-1}| = |(C(0))_{l-1}|$。由于 $(\alpha, C(0)\ k', l-1)\checkmark T'$，由备注6可得 $(\alpha, \eta, k', l-1)\checkmark T'$。因此，存在 $(G, \mathbb{I}) \in \mathcal{Q}$，使得以下条件成立：

(0) $|(\alpha)_{l-1}| \leq |(\eta)_{l-1}|$, (1) $G(z_{\mathbb{I}}) = |$
$(\eta)^-_{k'}|$, (2) $\pi^{k',\ }_{\eta\ }{}^{l-1}(\mathbb{J}_{(G,\mathbb{I})}) \in Bl$
$(0, l-1)$, (3) $(\eta)_{l-1}(|(\alpha)^-_{l-1}|) \in (\eta)_{k'}$.

由于 α、$\eta \in F_j$ 和 $|(\alpha)_{l-1}| \leq |(\eta)_{l-1}|$，我们可以使用 (3) 得出 $\alpha = (\eta)_{k'}(|(\alpha)^-_{k'}|)$。令 $\nu = (\eta)_{k'}(|(\alpha)^-_{k'}| + 1)$。根据定义，$(\nu)^-_{k'} = (\alpha)_{k'} = p \cap \gamma$。因此，我们可以使用引理 27 得出 $q = Cut(F, \nu) \leq p$。与 $j = 0$ 的情况一样，我们声称这会 q 迫使结果符合我们的要求。

由上文所述的条件 (2)，我们得到 $(\eta)_{k'}[\mathbb{J}_{(G,\mathbb{I})}(0)] = (\eta)_{k'}[(|(\alpha)^-_{k'}|, |(\beta)^-_{k'}|]]$ 是 $(\eta)_{l-1}$ 中的一个区间。由于 $(\eta)_{k'}[(|(\alpha)^-_{k'}|, |(\beta)^-_{k'}|]] \subseteq \eta\backslash\nu \subseteq F_j\backslash R(F)$，我们得出结论：这个集合也是 F 中的一个区间，其首元素为 ν。根据 Cut函数 的定义，该区间被移至区间 $(\beta+1)\backslash\gamma$。由此，我们得出以下结论：

(a) $q \Vdash$ “$|(\beta)_l| = |((\eta)_{k'}(b))_l|$”,
(b) $q \Vdash$ “$(\beta)_l = (\nu)^-_l \cup (\beta+1\backslash\gamma)$”.

特别是，这意味着 $q \Vdash$ “$|(\beta)_{l-1} \cap \delta| = r_l$”。因此，将 l 视为满足定义 51 中条件 (2) 的候选者是合理的，其中涉及 β、k 和 T.
最后，只需注意到 q 迫使 k、k'、α、T 和 C(0) 满足定理22的假设。以下陈述是应用该定理和推论19的直接结果。

- $q \Vdash$ “ $j(k, l, \beta, \delta, T) = j$”,
- $q \Vdash$ “ (C, q) 被 (k, l, β, δ, T) 接受，且 $\beta \in q_j$”

至此，证明完毕。 □

不难看出，前一个定理所要求的性质可以由 $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ 的可数多个稠密子集编码。由此，我们得到以下推论。

定理24. 设 $\mathcal{F}$ 是定义在某个极限序数 γ 上的构造方案，且满足 IH_1 和 IH_2。那么在 $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ 中存在一个稠密集的可数族 $\mathcal{D}$，使得只要 $\mathcal{G}$ 是一个与 $\mathcal{D}$ 中每个成员都相交的滤子，那么 $\mathcal{F}^{\mathcal{G}}$ 就是定义在 $\gamma + \omega$ 上、满足 IH_1、IH_2 且包含 $\mathcal{F}$ 的构造方案。

结合命题21和22、定理21和24，以及 $\mathcal{F}(\omega)$ 同时满足 IH_1 和 IH_2 这一事实，我们便得到了所寻求的定理。

定理 25. $\diamondsuit$ 蕴含 FCA。

假设我们有一个划分 $\mathcal{P}$，它与 $\mathcal{F}$ 的类型相容。我们可以按以下方式修改 IH_1 和 IH_2 的定义。

定义54（$IH_1(\mathcal{P})$）。设 $\mathcal{F}$ 是定义在某个序数集 X 上的构造方案。若对每个 $P \in \mathcal{P}$、$A \in [X]^{<\omega}$ 和 $\alpha \in X$，都存在 $F \in \mathcal{F}$ 使得：我们称 $\mathcal{F}$ 满足 $IH_1(\mathcal{P})$。

(1) $A \subseteq F_0$, （2） R
（F） $= F \cap \alpha$,
（3） $\rho^F \in \mathcal{P}$.

定义55（$IH_2(\mathcal{P})$）。我们称 $\mathcal{F}$ 满足 $IH_2(\mathcal{P})$，如果对于每个极限序数 $\delta < \gamma$ 和 $P \in \mathcal{P}$，以下互斥条件之一成立：

(1) 存在无穷多个 $l \in P$，对于这些 $l \in P$，存在 $C \in [D_\delta]^{<\omega}$，而它被 $\mathcal{F}_l$. 中的某个元素完全捕获。（2）对于每个 $\beta \in \gamma \backslash \delta$、$k \in \omega \backslash 2$ 和 $T \in Good(\beta, k)$，都存在无穷多个 $l \in P \backslash k$，使得：(a) $|(\beta)_{l-1} \cap \delta| = r_l$，($b$) 不存在任何被 $F \in \mathcal{F}_l$. 中任一元素完全捕获的 $C \in [D_\delta]^{<\omega}$。此外，以下两者之一成立： $j(k, l, \beta, \delta, T) = 0$，且存在 $F \in \mathcal{F}_l$ 使得 $\beta \in F_0 \backslash R(F)$；或者 $j(k, l, \beta, \delta, T) > 0$，且存在 $C \in [D_\delta]^{j(k,l\beta,\delta,T)}$ 和 $F \in \mathcal{F}_l$，使得 (C, F) 被 (k, l, β, δ, T) 接受，并且 $\beta \in F_{j(k,l,\beta,\delta,T)}$。

本节中陈述的所有结果，在将 IH_1 替换为 IH_1（$\mathcal{P}$），并将 IH_2 替换为 IH_2（$\mathcal{P}$）时仍然成立。此外，证明过程完全类似。由此，我们得出以下结论。

定理 26. $\diamondsuit$ 推出 $FCA(part)$.

8. Final remarks and open problems

我们列出了许多作者不知道如何解决的问题 e.

我们不知道如何区分任何捕获公理及其划分对应版本。此外，定理 26 的证明与定理 25 的证明相同，仅有极少的修改。因此，我们提出：

问题 5. CA_n（分别地， FCA）是否蕴含 CA_n（$part$）（分别地， FCA（$Part$）），对于某个 $n \in \omega$?

从 2-捕获构造方案定义一个滤子有一种自然的方法。设 $\mathcal{F}$是一个 2-捕获构造方案。对每个 $S \in [\omega_1]^{\omega_1}$，令 A_S 为所有 $k \in \omega$ 构成的集合，其中存在 $F \in \mathcal{F}_k$ 和 $C \in [S]^2$ 使得 F 捕获 C。注意，由于 $\mathcal{F}$ 是 2-捕获的， A_S 总是无限的。

命题 23. 关于 $\subseteq^*$， $\{A_S \mid S \in \omega_1\}$ 是向下有向的。

证明。设 S_0 和 S_1 是 ω_1的不可数子集。递归地，我们构造两个递增序列 $\{\alpha_\xi\}_{\xi\in\omega_1} \subseteq S_0$ 和 $\{\beta_\xi\}_{\xi\in\omega_1} \subseteq S_1$，使得对每个 $\xi \in \omega_1$，都有 $\alpha_\xi < \beta_\xi < \alpha_{\xi+1}$。通过细化论证，我们可以假设存在 $k \in \omega$，使得对所有 $\xi \in \omega_1$，都有 $\rho(\alpha_\xi, \beta_\xi) = k$。此外，我们可以假设对每个 $\xi, \delta \in \omega_1$.，都有 $|(\alpha_\xi)_k| = |(\alpha_\delta)_k|$。令 $S = \{\beta_\xi\}_{\xi\in\omega_1}$。我们声称 $A_S \backslash (k+1) \subseteq A_{S_0} \cap A_{S_1}$。令 $l \in A_S \backslash (k+1)$, $\delta < \xi \in \omega_1$ 和 $F \in \mathcal{F}_l$，它捕获了$\{\beta_\delta, \beta_\xi\}$。显然， $l \in A_{S_0}$，因为 $S \subseteq S_1$。这样，只需证明 $\{\alpha_\delta, \alpha_\xi\}$ 被 F捕获。为此，取 $\phi : F_0 \longrightarrow F_1$ 这个递增双射。于是 $\phi(\beta_\delta) = \beta_\xi$。此外，由于 ρ 的正则性，我们有 $\phi[(\beta_\delta)_k] = (\beta_\xi)_k$。由于 $|(\alpha_\xi)_k| = |(\alpha_\delta)_k|$、 $\alpha_\delta \in (\beta_\delta)_k$ 且 $\alpha_x i \in (\beta_\xi)_k$，可得 $\phi(\alpha_\delta) = \alpha_\xi$.。证明完毕。□

令 $\mathcal{U}_\mathcal{F}$ 为由 $\{A_S \mid S \in [\omega_1]^{<\omega}\}$诱导的滤子。注意， $\mathcal{U}_\mathcal{F}$ 是超滤子，当且仅当不存在将 ω 划分为至少两个无限集的划分 $\mathcal{P}$，使得 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{P}$-2-捕获的。我们不知道这个滤子是否是极大的。

问题6. 是否存在一个2-捕获构造方案，比如说 $\mathcal{F}$，使得 $\mathcal{U}_\mathcal{F}$ 是超滤子?

如果上一个问题的答案是否定的，那么即使问题 5 的答案是否定的，由 CA_2($Part$)推出的所有已知结果也都可以由 CA_2 推出。另一方面，如果 $\mathcal{U}_\mathcal{F}$ 能成为超滤子，也会非常有趣。它将是定义在 ω 上的超滤子，由 ω_1上的一个结构定义。第三作者在 [114]中研究过类似的现象。

我们不知道在实数集论中研究过的大多数常见模型里是否存在构造方案（见 [7]）。特别地，我们提出：

问题7。在萨克斯模型中，是否存在某些 $n \in \omega\backslash 2$ 的 n-捕获构造方案? 完全捕获构造方案又如何?

读者可在 [9], [10], [46] 和 [20 中了解更多有关萨克斯模型的信息].

问题8。在随机模型中，是否存在某些$n \in \omega\backslash 2$ 的 n-捕获构造方案? 完全捕获构造方案又如何?

在 [58], D. Kalajdzievski 和 F. L´opez 证明，添加 ω_1 个科恩实数后， FCA($part$) 成立。不过，若只添加一个科恩实数，情况如何仍不得而知。

问题 9. 是否 添加一个科恩实数也会添加一个完全捕获构造方案?

我们也不知道连续统的基数不变量与捕获构造方案之间的关系（见 [12] 和 [131]）。我们提出：

问题 10. FCA 与连续统的基数不变量之间是否存在某种关系?

不难看出， σ-中心化力迫保留完全捕获构造方案。应用这一结果，我们可以推得 $\mathfrak{b} > \omega_1$ 与 FCA相容（$part$）。

在 [83], 中，M. Dˇzamonja、M. Hruˇs´ak 和 J. Moore 引入了参数化菱形原理，它是菱形原理的弱化形式，在连续统假设不成立的模型中也可能成立。捕获构造方案和参数化菱形原理都是构造大小为 ω_1的有趣对象的有用工具。我们提出：

问题 11. FCA （分别地， CA_n）与任何参数化的$\diamondsuit$ 原理之间是否存在某种关系?

若能了解 FCA 与$\diamondsuit$（non（$\mathcal{M}$））之间是否存在某种关系，将特别令人感兴趣。

类似地，我们提出：

问题 12. FCA（分别地， CA_n）与 $\clubsuit$之间是什么关系?

若想进一步了解 $\clubsuit$，读者可参阅 [14], [23], [37], [47], [75] 和 [97]。最近，A. Rinot 和 R. Shalev 引入了原理 $\clubsuit_{AD}$。该原理既可由 $\clubsuit$推出，也可由苏斯林树的存在推出。因此，它也可由 FCA推出。由此，我们可以提出：

问题 13. CA_n（$part$）是否蕴含 $\clubsuit_{AD}$，其中某个 $n \in \omega \backslash 2$?

在 [93], M. Rubin 构造了一个只有 ω_1 子代数的不可数布尔代数。我们想知道，能否通过构造方案实现同样的结果。

问题 14. FCA($part$) 是否蕴含存在一个只有 ω_1 子代数的不可数布尔代数?

在 [93]中构造的布尔代数 B 还满足更多性质。具体而言，每个不可数集 B都包含三个互不相同的元素 a、b、c，使得 $a \wedge b = c.$。我们指出，第三作者在 [111]中构造的空间的开闭集代数已经满足这一性质。

9. Acknowledgment

这项研究的部分工作是在作者参加 Fields 研究所的代数、动力学与几何中的集合论方法专题项目期间完成的。作者还要感谢 C´esar Corral Rojas、Michael Hruˇs´ak 和 Alejandro R´ıos Herrej´on 对本文提出的一些宝贵意见。

References

[1] U. Abraham 和 S. Todorˇcevi´c. 马丁公理与第一可数 S- 和 L-空间。载于《集合论拓扑手册》，第 327–346 页。North-Holland，阿姆斯特丹，1984年。[2] Uri Abraham、James Cummings 和 Clifford Smyth。多色 Ramsey 理论中的一些结果。《符号逻辑杂志》，72(3):865–896，2007年。[3] Uri Abraham 和 Saharon Shelah。实数的 Δ^2_2 良序与 $L(Q^{\mathrm{MM}})$ 的非紧致性。《纯粹与应用逻辑年刊》，59(1):1–32，1993年。[4] Uri Abraham 和 Stevo Todorˇcevi´c。与连续统假设相容的 ω_1 的分割性质。《数学基础》，152(2):165–181，1997年。[5] M. Arciga-Alejandre、M. Hruˇs´ak 和 C. Martinez-Ranero。几乎不交族的不变性。《符号逻辑杂志》，78(3):989–999，2013年。[6] Uri Avraham 和 Saharon Shelah。马丁公理并不蕴含任意两个由 $\aleph_1$ 稠密集构成的实数集同构。《以色列数学杂志》，38(1-2):161–176，1981年。[7] Tomek Bartoszy´nski 和 Haim Judah。《集合论》。A K Peters, Ltd.，韦尔斯利，马萨诸塞州，1995年。论实数直线的结构。[8] James E. Baumgartner。适当迫使公理的应用。载于《集合论拓扑手册》，第 913–959 页。North-Holland，阿姆斯特丹，1984年。[9] James E. Baumgartner。Sacks 迫使与马丁公理的彻底失效。《拓扑学及其应用》，19(3):211–225，1985年。[10] James E. Baumgartner 和 Richard Laver。迭代完美集迫使。《数学逻辑年刊》，17(3):271–288，1979年。[11] M. Bekkali。《集合论专题》，《数学讲义》第 1476 卷。施普林格出版社，柏林，1991年。勒贝格可测性、大基数、迫使公理、ρ 函数，Stevo Todorˇcevi´c 讲课笔记。[12] Andreas Blass。连续统的组合基数特征。载于《集合论手册》第 1、2、3 卷，第 395–489 页。施普林格，多德雷赫特，2010年。[13] Piotr Borodulin-Nadzieja 和 David Chodounsk´y。$\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 中的豪斯多夫间隙与塔。《数学基础》，229(3):197–229，2015年。[14] J¨org Brendle。连续统的基数不变量与不可数基数上的组合学。《纯粹与应用逻辑年刊》，144(1-3):43–72，2006年。[15]J¨org Brendle 和 Diego Alejandro Mej´ıa。碎片化理想中的 Rothberger 间隙。《数学基础》，227(1):35–68，2014年。[16]J¨org Brendle 和 Greg Piper。具有强组合性质的极大几乎不相交族。《数学基础》，193(1):7–21，2007年。[17] Ari Meir Brodsky 和 Assaf Rinot。Souslin 树构造的微观方法，第一部分。《纯粹与应用逻辑年刊》，168(11):1949–2007，2017年。[18] Ari Meir Brodsky 和 Assaf Rinot。Souslin 树构造的微观方法，第二部分。《纯粹与应用逻辑年刊》，172(5):论文编号 102904，共 65 页，2021年。[19] David Chodounsk´y 和 Jindˇrich Zapletal。为何 Y-可链条件？《纯粹与应用逻辑年刊》，166(11):1123–1149，2015年。[20] Krzysztof Ciesielski 和 Janusz Pawlikowski。《覆盖性质公理，CPA》，《剑桥数学丛书》第 164 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2004年。迭代完美集模型的组合核心。[21] C. Corral。疯狂与弱正规性。《匈牙利数学学报》，165(2):291–307，2021年。[22] C´esar Corral 和 Michael Hruˇs´ak。Fr´echet 型性质与几乎不交族。《拓扑学及其应用》，277:107216，共 11 页，2020年。[23] Mirna D amonja 和 Saharon Shelah。相似却不相同：$\clubsuit$ 的各种版本并不一致。《符号逻辑杂志》，64(1):180–198，1999年。[24] H. G. Dales 和 W. H. Woodin。《面向分析学家的独立性导论》，《伦敦数学会讲义丛书》第 115 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1987年。[25] Keith J. Devlin。《可构造性的若干方面》。《数学讲义》第 354 卷。施普林格出版社，柏林—纽约，1973年。[26] Keith J. Devlin。《可构造性》。《数学逻辑展望》。施普林格出版社，柏林，1984年。

[27] S. J. Dilworth、E. Odell 和 B. Sari。格结构与扩张模型。《以色列数学杂志》，161：387–411，2007年。[28] Natasha Dobrinen。超滤子的图基理论综述。《Zb. Rad. (Beogr.)》，17(25)（组合分析专题选编）：53–80，2015年。[29] Natasha Dobrinen 和 Stevo Todorcevic。超滤子的 Tukey 类型。《Illinois J. Math.》，55(3)：907–951（2013），2011年。[30] Alan Dow。一个不可分割的极大几乎不交族。第30卷，第181–186页。2006年。春季拓扑与动力系统会议。[31] Ben Dushnik 和 E. W. Miller。偏序集。《Amer. J. Math.》，63：600–610，1941年。[32] Mirna Dˇzamonja。科恩实数添加的一些巴拿赫空间。《拓扑学及其应用》，195：246–255，2015年。[33] P. Erd¨os 和 R. Rado。集合论中的分割演算。《Bull. Amer. Math. Soc.》，62：427–489，1956年。[34] Ilijas Farah。自然数集上的部分函数相干族。《美国数学会会刊》，124(9)：2845–2852，1996年。[35] Ilijas Farah。开放着色公理与塔在 $\mathscr{P}$(自然数集)/fin中的应用。《Comment. Math. Univ. Carolin.》，37(4)：861–866，1996年。[36] Ryszard Frankiewicz 和 Pawel Zbierski。豪斯多夫间隙与极限，载于《逻辑与数学基础研究》第132卷。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，1994年。[37] Saka´e Fuchino、Saharon Shelah 和 Lajos Soukup。棍与俱乐部。《纯粹与应用逻辑年刊》，90(1- 3)：57–77，1997年。[38]Gunter Fuchs 和 Joel David Hamkins。苏斯林树的刚性度。《符号逻辑杂志》，74(2)：423–454，2009年。[39] Fred Galvin 和 Petr Simon。ZFC 中的 Čech 函数。《数学基础》，193(2)：181–188，2007年。[40] Saeed Ghasemi 和 Piotr Koszmider。具有初等本质合成列的一个非稳定 C^*- 代数。《美国数学会会刊》，148(5)：2201–2215，2020年。[41] Seymour Ginsburg 和 J. R. Isbell。共尾类型范畴。I。《美国数学会汇刊》，116：386–393，1965年。[42] Osvaldo Guzm´an、Michael Hruˇs´ak 和 Piotr Koszmider。几乎不交族的 $\mathbb{R}$-嵌入性与 Akemann-Doner C*-代数。《数学基础》，254(1)：15–47，2021年。[43] Osvaldo Guzm´a n 和 Stevo Todorcevic。P 理想二分法、马丁公理与纠缠集。[44] Jialiang He、Michael Hruˇs´ak、Diego Rojas-Rebolledo 和 S l awomir Solecki。理想之间的图基序。《符号逻辑杂志》，86(2)：855–870，2021年。[45] F. Hern´andez-Hern´andez 和 M. Hruˇs´ak。Mr´owka-Isbell 空间的拓扑。载于《拟紧拓扑空间》，《Dev. Math.》第55卷，第253–289页。施普林格，沙姆，2018年。[46] Michal Hruˇs´ak。萨克斯模型中的生活。《查理大学数学与物理学报》，42(2)：43–58，2001年。第29届抽象分析冬季学校（Lhota nad Rohanovem/Zahr´adky u ˇCesk´e L´ıpy，2001年）。[47] Michael Hruˇs´ ak。另一个 $\diamondsuit$-型原理。《数学基础》，167(3)：277–289，2001年。[48] Michael Hruˇs´ak。滤子与理想的组合学。载于《集合论及其应用》，《当代数学》第533卷，第29–69页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2011年。[49] Michael Hruˇs´ak。几乎不交族与拓扑。载于《一般拓扑学的最新进展》III，第601–638页。亚特兰蒂斯出版社，巴黎，2014年。[50] Michael Hruˇs´ak 和 Carlos Mart´ınez Ranero。关于非特殊相干阿龙沙因树的一些评论。《查理大学数学与物理学报》，46(2)：33–40，2005年。[51] Michael Hruˇs´ak 和 Iv´an Mart´ınez-Ruiz。选择与弱可排序性。《数学基础》，203(1)：1–20，2009年。[52] William Russell Hudson。典范康特曼线。博士论文，Citeseer，2007年。[53] John R. Isbell。七种共尾类型。《伦敦数学会杂志》（第2辑），4：651–654，1972年。[54] Thomas Jech。《集合论》。《施普林格数学专著》。施普林格出版社，柏林，2003年。第三千年版，修订并扩充。[55] Tom´aˇs Jech。苏斯林假设不可证。《Comment. Math. Univ. Carolinae》，8：291–305，1967年。[56] F. B. Jones。关于正规空间与完全正规空间。《Bull. Amer. Math. Soc.》，43(10)：671–677，1937年。[57] Winfried Just 和 Martin Weese。《探索现代集合论》II，《数学研究生教材》第18卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997年。为每位数学家准备的集合论工具。

[58] D. Kalajdzievski 和 F. Lopez。力迫与构造方案。《匈牙利数学学报》，159(1)：27–41，2019年。[59] Piotr Kalemba 和 Szymon Plewik。由卢津间隙重构的豪斯多夫间隙。《查理大学数学与物理学报》，50(2)：33–38，2009年。[60] Akihiro Kanamori。组合集合论中的 morass。载于《集合论综述》，伦敦数学会讲义丛书第87卷，第167–196页。剑桥大学出版社，剑桥，1983年。[61] H. Jerome Keisler。带有“存在不可数多个”量词的逻辑。《数学逻辑年刊》，1：1–93，1970年。[62] Piotr Koszmider。关于 2-基数上的构造。《数学逻辑档案》，56(7-8)：849–876，2017年。[63] Kenneth Kunen。《集合论》，《逻辑研究》（伦敦）第34卷。College Publications，伦敦，2011年。[64] Hossein Lamei Ramandi 和 Justin Tatch Moore。可能不存在极小的非σ-散乱线性序。《数学研究快报》，25(6)：1957–1975，2018年。[65] Paul Larson。一个苏斯林树的 $\mathrm{S}_{\max}$ 变体。《符号逻辑杂志》，64(1)：81–98，1999年。[66] Paul Larson。在 $\mathbb{P}_{\max}$-型扩张中证明开放着色公理。《神户数学杂志》，18(2)：115–126，2001年。[67] Paul Larson 和 Stevo Todorcevic。Katětov 问题。《美国数学会汇刊》，354(5)：1783–1791，2002年。[68] Paul Larson 和 Stevo Todor˘cevi´c。极大模型中的链条件。《数学基础》，168(1)：77–104，2001年。[69]Fulgencio Lopez。构造方案及其应用。博士论文，多伦多大学（加拿大），2018年。[70] Fulgencio Lopez 和 Stevo Todorcevic。由构造方案得到的树与间隙。《美国数学会会刊》，145(2)：871–879，2017年。[71] Alain Louveau 和 Boban Velickovic。解析理想与共尾类型。《纯粹与应用逻辑年刊》，99(1- 3)：171–195，1999年。[72] N. N. Luzin。关于自然数列的子集。《苏联科学院通报：数学辑》，11：403–410，1947年。[73] Carlos Martinez-Ranero 和 Stevo Todorcevic。相干阿龙沙因树的间隙结构。《数学研究快报》，18(3)：565–578，2011年。[74] H. Mildenberger 和 L. Zdomskyy。 L-空间与 P-理想二分法。《匈牙利数学学报》，125(1- 2)：85–97，2009年。[75] Heike Mildenberger。通过博弈寻找泛滤子。《数学逻辑档案》，49(1)：91–118，2010年。[76] Tadatoshi Miyamoto 和 Teruyuki Yorioka。Asper´o-Mota 有限真强迫公理的一个片段与实数纠缠集。《数学基础》，251(1)：35–68，2020年。[77] Justin Tatch Moore。开着色、连续统与第二不可数基数。《美国数学会会刊》，130(9)：2753–2759，2002年。[78]Justin Tatch Moore。不可数线性序的五元素基。《数学年刊》（第2辑），163(2)：669–688，2006年。[79] Justin Tatch Moore。 L 空间问题的一个解。《美国数学会杂志》，19(3)：717–736，2006年。[80] Justin Tatch Moore。阿隆佐恩树的结构分析。载于《2005 年逻辑研讨会》，《逻辑讲义》第28卷，第85–106页。符号逻辑协会，厄巴纳，伊利诺伊州，2008年。[81] Justin Tatch Moore。泛阿隆佐恩线。《数学研究快报》，16(1)：121–131，2009年。[82] Justin Tatch Moore。适当迫使公理。载于《国际数学家大会论文集》第二卷，第3–29页。Hindustan Book Agency，新德里，2010年。[83] Justin Tatch Moore、Michael Hru˘s´ak 和 Mirna D amonja。参数化 $\diamondsuit$ 原理。《美国数学会汇刊》，356(6)：2281–2306，2004年。[84] Justin Tatch Moore 和 S l awomir Solecki。在图基序中严格高于无处稠密理想的紧集 G_δ 理想。《纯粹与应用逻辑年刊》，156(2-3)：270–273，2008年。[85] Charles Morgan。一个间隙上同调群。《数学逻辑季刊》，41(4)：564–570，1995年。[86] Yinhe Peng。并非 Countryman 的相干树。《数学逻辑档案》，56(3-4)：237–251，2017年。[87] Dilip Raghavan。存在一个 van Douwen 极大几乎不交族。《美国数学会汇刊》，362(11)：5879–5891，2010年。[88] Dilip Raghavan 和 Stevo Todorcevic。组合二分原理与基数不变量。《数学研究快报》，21(2)：379–401，2014年。

[89] Dilip Raghavan 和 Teruyuki Yorioka。苏斯林格。Order，31(1):55–79，2014年。[90] F. P. Ramsey。形式逻辑中的一个问题。《伦敦数学会会刊》(2)，30(4):264–286，1929年。[91] Judy Roitman。 S 和 L的重新表述。《美国数学会会刊》，69(2):344–348，1978年。[92] Judy Roitman。基本的 S 和 L。载于《集合论拓扑手册》，第295–326页。North-Holland，阿姆斯特丹，1984年。[93] Matatyahu Rubin。一个子代数较少的布尔代数、区间布尔代数与可回缩性。《美国数学会汇刊》，278(1):65–89，1983年。[94] Marion Scheepers。 ω^ω中的间隙。载于《实数集论》（拉马特甘，1991），《以色列数学会议论文集》第6卷，第439–561页。巴伊兰大学，拉马特甘，1993年。[95] S. Shelah 和 L. Stanley。 S-力迫。I. 关于摩拉斯的“黑箱”定理及其在超苏斯林树中的应用。《以色列数学杂志》，43(3):185–224，1982年。[96] Saharon Shelah。将不可数平方分解为可数多个链。《组合理论杂志》A辑，21(1):110–114，1976年。[97] Saharon Shelah。《适当与不适当迫选》。《数学逻辑展望》。施普林格出版社，柏林，第二版，1998年。[98] Saharon Shelah。MAD饱和族与SANE玩家。《加拿大数学杂志》，63(6):1416–1435，2011年。[99] Sławomir Solecki 和 Stevo Todorcevic。拓扑有向序的共尾类型。《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔），54(6):1877–1911（2005），2004年。[100] Sławomir Solecki 和 Stevo Todorcevic。回避族与无处稠密理想上的 Tukey函数。《Jussieu数学研究所杂志》，10(2):405–435，2011年。[101] R. M. Solovay 和 S. Tennenbaum。迭代Cohen扩张与Souslin问题。《数学年刊》(2)，94:201–245，1971年。[102] Lajos Soukup。宽散空间与摩拉斯。《拓扑学及其应用》，158(5):697–707，2011年。[103] J. Stepr¯ans 和 W. S. Watson。在大稠密集上具有指定行为的流形同胚。《伦敦数学会会报》，19(4):305–310，1987年。[104] Daniel E. Talayco。上同调在集合论中的应用。I. 豪斯多夫间隙。《纯粹与应用逻辑年刊》，71(1):69–106，1995年。[105] S. Tennenbaum。Souslin问题。《美国国家科学院院刊》，59:60–63，1968年。[106] Stevo Todorcevic。整数集的振荡。《应用数学进展》，20(2):220–252，1998年。[107] Stevo Todorcevic。Nogura猜想的证明。《美国数学会会刊》，131(12):3919–3923，2003年。[108] Stevo Todorcevic。序数上的游走及其特征，《数学进展》第263卷。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2007年。[109] Stevo Todorcevic。集合论中的组合二分原理。《符号逻辑通报》，17(1):1–72，2011年。[110] Stevo Todorcevic。迫使公理札记，《讲义系列》第26卷。新加坡国立大学数学科学研究所。World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.，哈肯萨克，新泽西州，2014年。由 Chitat Chong、Qi Feng、Yue Yang、Theodore A. Slaman 和 W. Hugh Woodin 编辑并撰写前言。[111] Stevo Todorcevic。不可分结构的构造方案。《数学进展》，313:564–589，2017年。[112] S. Todorchevich 和 I. Farah。力迫方法的一些应用。《叶尼塞纯粹与应用数学丛书》。叶尼塞出版社，莫斯科；Lyc´ee，特罗伊茨克，1995年。[113] S. Todorˇcevi´c。树与线性有序集。载于《集合论拓扑手册》，第235–293页。North-Holland，阿姆斯特丹，1984年。[114] S. Todorˇcevi´c。可数序数上的游走与选择超滤子。《数学与自然科学俱乐部通报》，(35):65–78，2010年。[115] Stevo Todorˇcevi´c。正分划关系的力迫证明。《美国数学会汇刊》，280(2):703–720，1983年。[116] Stevo Todorˇcevi´c。有向集与共尾类型。《美国数学会汇刊》，290(2):711–723，1985年。[117] Stevo Todorˇcevi´c。关于积的链条件的注记。《Compositio Mathematica》，55(3):295–302，1985年。[118] Stevo Todorˇcevi´c。可数序数对的划分。《数学学报》，159(3-4):261–294，1987年。[119] Stevo Todorˇcevi´c。拓扑学中的分划问题，《当代数学》第84卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1989年。[120] Stevo Todorˇcevi´c。解析间隙。《数学基础》，150(1):55–66，1996年。[121] Stevo Todorˇcevi´c。可数集的P-理想二分原理。《数学基础》，166(3):251–267，2000年。[122] John W. Tukey。《拓扑学中的收敛与一致性》。《数学年刊研究》第2号。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1940年。

[123] Eric K. van Douwen。整数与拓扑学。载于《集合论拓扑手册》，第111–167页。North-Holland，阿姆斯特丹，1984年。[124] Jan van Mill 和 Evert Wattel。选择与可序化性。《美国数学会会刊》，83(3):601–605，1981年。[125] Dan Velleman。简化摩拉斯。《符号逻辑杂志》，49(1):257–271，1984年。[126] Dan Velleman。由摩拉斯构造的苏斯林树。载于《公理化集合论》（科罗拉多州博尔德，1983），《当代数学》第31卷，第219–241页。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1984年。[127] Daniel J. Velleman。摩拉斯、菱形原理与力迫。《数学逻辑年刊》，23(2-3):199–281（1983），1982年。[128] Teruyuki Yorioka。关于 ω_1的组合原理、瘦理想的基数不变量与可破坏间隙。《日本数学会杂志》，57(4):1217–1228，2005年。[129] Teruyuki Yorioka。可破坏间隙的独立族。《筑波数学杂志》，31(1):129–141，2007年。[130] Yoshifumi Yuasa。添加一个科恩实数会添加一个纠缠线性序。《数学逻辑档案》，32(4):299–304，1993年。[131] Jindřich Zapletal。理想化力迫，《剑桥数学论丛》第174卷。剑桥大学出版社，剑桥，2008年。Jorge Antonio Cruz Chapital，墨西哥国立自治大学数学科学中心。chapi@matmor.unam.mx

Osvaldo Guzm´an 数学科学中心，
UNAM。oguzman@matmor.unam.mx

Stevo Todor˘cevi´c 多伦多大学数学系，加拿大
stevo@math.toronto.edu 朱西厄数学研究所，法国国家科学研究中心，巴黎，法国 stevo.todorcevic@imj-prg.fr 塞尔维亚科学与艺术学院数学研究所，贝尔格莱德，塞尔维亚
stevo.todorcevic@sanu.ac.rs