arXiv:2304.07641v1 [math.AC] 15 Apr 2023

关于具有某些滤过的模的（余）同调消失

OLGUR CELIKBAS 和 YONGWEI YAO

摘要。我们研究沿环同态、对于具有某些滤过的模而言（余）同调的消失，并推广 O. Celikbas-Takahashi 的一条定理。我们的工作得到了新的刚性模和检验模类，尤其是在素特征的局部环上。此外，我们还将其应用于模的张量积中的挠的研究，例如 Huneke-Wiegand猜想相关的问题。

1. 引言

本文中所有环均假定为交换环。局部环是指具有唯一极大理想的诺特环。本文的研究始于以下结果：

定理1.1（O. Celikbas-Takahashi [10]）。设 R 为局部环，M 为有限生成 R-模，且 $\operatorname{depth}_R(M) \geqslant 1$。若对于某个有限生成 R-模 N，有 $\operatorname{Tor}_n^R(\mathfrak{m}^t M, N) = 0$，其中 $t \geqslant 0$ 且 $n \geqslant 0$，则 $\operatorname{Tor}_n^R(M,N) = 0$。

本文的主要目的是通过考察定理 1.1 的结论在环同态下的情形，对其进行推广。我们的主要结果推广了定理 1.1，讨论的是具有某种滤过的模（不一定是有限生成的）的（余）同调消失。更确切地说，我们证明：

定理 1.2. 设 $f : R \to S$ 是一个环同态，且 $M \neq 0$ 是一个有限生成 S-模。假设满足以下条件：

(i) $(R, \mathfrak{m})$ 是局部的。(ii) S 是诺特环，且 $\mathfrak{m}S \subseteq \operatorname{Jac}(S)$。(iii) $\mathfrak{m}$ 中存在一个在 M 上是非零因子的元素。(iv) M 存在如下形式的滤过：$M_t \leqslant M_{t-1} \leqslant \cdots \leqslant M_1 \leqslant M_0 = M$，其中每个 M_i 都是一个 S- 模，并且对所有 $i = 1, \ldots, t$，都有 $\mathfrak{m}M_{i-1} \leqslant M_i \leqslant \operatorname{Jac}(S)M_{i-1}$。

若 $\operatorname{Tor}_n^R(M_i, N) = 0$，其中 N 是有限生成 R-模，$n \geqslant 0$，且 $1 \leqslant i \leqslant t$，则可得

$$\operatorname{Tor}_n^R(M_{i-1}, N) = \operatorname{Tor}_n^R(M_{i-2}, N) = \cdots = \operatorname{Tor}_n^R(M, N) = 0.$$

定理 1.2 是定理 2.3 的推论，后者在第2节中证明；定理 2.4 给出了该定理的 Ext 版本。这里需要指出，利用定理 1.2 重新证明定理1.1并不困难：若 $R = S$ 且 f 是恒等映射，那么我们关于 M 的滤过的假设迫使所有 $i \geqslant 0$ 都有 $M_i = \mathfrak{m}^i M$，因此定理1.1得证。

若 R 是一个素特征为 p 的环，M 是一个 R-模，且 F 是 Frobenius 映射，那么每次迭代 F^e 都会在 M 上定义一个新的 R-模结构，记作 ${}_eM$，其中对于 $r \in R$ 和 $x \in M$，有 $r \cdot x = r^{p^e}x$。

假设 $(R, \mathfrak{m})$ 是特征为素数 p 的局部环。那么定理 1.2 中的假设 (iv) 蕴含，对于所有 $i = 1, \ldots, t$，$\mathfrak{m}^{[p^e]}M_{i-1} \leqslant M_i \leqslant \mathfrak{m}M_{i-1}$。获得这种滤过的一种方法是，假设 R 有理想 $I1, \ldots, I_t$，使得对于所有 $j = 1, \ldots, t$，$\mathfrak{m}^{[p^e]} \subseteq I_j \subseteq \mathfrak{m}$，并令对于所有 $i = 1, \ldots, t$，$M_i = (I_1 \cdots I_i)M$，这将推出 $M_i = I_i M_{i-1}$。因此，我们可以将定理 1.2 应用于 $f = F^e$ 的特殊情形，并得出：

日期：2023年4月15日。2020年数学主题分类。主要分类：13D07；次要分类：13A35、13D05、13C12。关键词和短语。Ext 和 Tor、Frobenius 自同态、刚性模和检验模、模的张量积、挠。

推论 1.3. 设 (R m) 是特征为素数 p 的局部环，且 M 和 N 是非零有限生成 R-模，并满足 $\operatorname{depth}_R(M) \geqslant 1$。设 $I_1, \ldots, I_t$ 是 R 的理想，使得对于所有 $j = 1, \ldots, t$，$\mathfrak{m}^{[p^e]} \subseteq I_j \subseteq \mathfrak{m}$，其中 $e \geqslant 0$ 且 $t \geqslant 1$。

如果对于某个 $n \geqslant 1$ 以及某个 i（其中 $1 \leqslant i \leqslant t$），$\operatorname{Tor}_n(^e((I_1 \cdots I_i)M), N) = 0$，则可得：

$$\operatorname{Tor}_n^R(^eX_i, N) = \operatorname{Tor}_n^R(^e((I_1 \cdots I_{i-1})M), N) = \cdots = \operatorname{Tor}_n^R(^eM, N) = 0.$$

如果 M 通过 f 是有限生成 R-模，那么定理 1.2 中的每个滤过模 M_i（其中 $1 \leqslant i \leqslant t$）都是 R 上的检验模；参见定义 3.1 和推论 3.3。我们利用这一事实，得到了新的检验模类，例如在素特征 p 的环上。以下命题是其中一个结果，该命题在推论 3.12(ii) 中得到证明。

命题 1.4。设 (R m) 是一个具有正深度、素特征 p 的局部 F-有限完全交叉环，$e \geqslant 0$，且 $t \geqslant 1$。如果对于某个有限生成 R-模 N 和 $n \geqslant 1$，$\operatorname{Tor}_n^R(^e(\mathfrak{m}^t), N) = 0$ 或 $\operatorname{Tor}_n^R\left(e\left(\left(\mathfrak{m}^{[p^e]}\right)^t\right), N\right) = 0$，则 $\operatorname{pd}_R(N) < \infty$。

2. 定理 1.2 的证明

以下命题是证明定理 1.2 的关键。

命题 2.1. 设 $f : R \to S$ 是一个环同态，使得 (R m) 是局部环且 S 是诺特环。设 $M \neq 0$ 是有限生成 S-模，并假设满足以下条件：

(i) $\mathfrak{m}S \subseteq \operatorname{Jac}(S)$。(ii) M 有如下形式的一个滤过：$M_t \leqslant M_{t-1} \leqslant \cdots \leqslant M_1 \leqslant M_0 = M$，其中每个 M_i 都是一个 S-模，且对所有 $i = 1, \ldots, t$，$\mathfrak{m}M_{i-1} \leqslant M_i \leqslant \operatorname{Jac}(S)M_{i-1}$。

设 $F_\bullet$ 是有限生成自由 R-模构成的一个极小复形：

$$F_\bullet : \qquad \cdots \longrightarrow F_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} F_n \xrightarrow{f_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

(1) 假设对某个整数 n 以及某个满足 $1 \leqslant i \leqslant t$ 的 i，有 $H_n(M_i \otimes_R F_\bullet) = 0$。则 $1_{M_{i-1}} \otimes f_{n+1} = 0$。此外，若 $\operatorname{grade}_R(\mathfrak{m}, M) \geqslant 1$，则 $H_n(M_{i-1} \otimes_R F_\bullet) = 0$。(2) 若对某个整数 n，$H_n(M_i \otimes_R F_\bullet) = 0$，且对某个满足 $1 \leqslant i \leqslant t$ 的 i，M_{i-1} 作为 R-模是忠实的，则 f_{n+1} 是零映射。(3) 若对某些整数 n 和 i（其中 $1 \leqslant i \leqslant t$），$H_n(M_i \otimes_R F_\bullet) = H_{n+1}(M_i \otimes_R F_\bullet) = 0$，则 $F_{n+1} = 0$。

证明。只需证明 $i = 1$ 的情形（注意，如果 M 具有正级，则每个 M_i 也具有正级）。将 $F_\bullet$ 与 M 在 R 上取张量积，我们得到复形

$$M \otimes_R F_\bullet : \qquad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{g_{n+1}} C_n \xrightarrow{g_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

其中 $C_i = M \otimes_R F_i$ 且 $g_i = 1_M \otimes f_i$。类似地，将 $F_\bullet$ 与 M_1 在 R 上取张量积，我们得到复形

$$M_1 \otimes_R F_\bullet : \qquad \cdots \longrightarrow D_{n+1} \xrightarrow{h_{n+1}} D_n \xrightarrow{h_n} D_{n-1} \longrightarrow \cdots .$$

其中 $D_i = M_1 \otimes_R F_i$ 且 $h_i = 1_{M_1} \otimes f_i$。

由于 F_i 是 R-自由的，我们可以假设对所有 i 都有 $D_i \leqslant C_i$，且 $D_\bullet$ 是 $C_\bullet$ 的子复形。由于 $F_\bullet$ 在 (R m) 上是极小的，并且 $\mathfrak{m}M \leqslant M_1$，，我们看到 $\operatorname{im}(g_{n+1}) \leqslant \mathfrak{m}C_n \leqslant D_n$。

(1) 假设 $H_n(M_1 \otimes_R F_\bullet) = 0$，即 $\ker(h_n) = \operatorname{im}(h_{n+1})$。由此可得 $D_{n+1} \leqslant \operatorname{Jac}(S)C_{n+1}$，因为 $M_1 \leqslant \operatorname{Jac}(S)M$。因此 $\operatorname{im}(h_{n+1}) \leqslant \operatorname{Jac}(S) \operatorname{im}(g_{n+1})$。综合以上各点，我们得到

$$(*) \qquad \operatorname{im}(g_{n+1}) \leqslant \ker(g_n) \cap \mathfrak{m}C_n \leqslant \ker(g_n) \cap D_n = \ker(h_n) = \operatorname{im}(h_{n+1}) \leqslant \operatorname{Jac}(S) \operatorname{im}(g_{n+1}) \leqslant \operatorname{im}(g_{n+1}),$$

这表明 $\operatorname{Jac}(S) \operatorname{im}(g_{n+1}) = \operatorname{im}(g_{n+1})$。由于对每个 i，$C_i$ 都是有限生成 S-模，我们由中山引理得出 $\operatorname{im}(g_{n+1}) = 0$。这证明函数 $1_M \otimes f_{n+1}$ 为零。此外，由（$*$）可知 $\ker(g_n) \cap \mathfrak{m}C_n = 0$，这意味着 $\mathfrak{m}\ker(g_n) \leqslant \ker(g_n) \cap \mathfrak{m}C_n = 0$。若级$_R(\mathfrak{m}, M) \geqslant 1$（因此级$_R(\mathfrak{m}, C_n) \geqslant 1$），则必有 $\ker(g_n) = 0$，从而 $H_n(M \otimes_R F_\bullet) = \ker(g_n)/\operatorname{im}(g_{n+1}) = 0$。

（2）假设对某个整数 n，$H_n(M_i \otimes_R F_\bullet) = 0$，且 M 是忠实的 R-模。回顾 part (1) 中的 $1_M \otimes f_{n+1} = 0$。这意味着由表示 f_{n+1} 的矩阵各项生成的 R 的理想包含于 M 的湮灭子中。因此 f_{n+1} 是零映射。

(3) 假设对于某个整数 n，$H_n(M_1 \otimes_R F_\bullet) = H_{n+1}(M_1 \otimes_R F_\bullet) = 0$。那么由（1）可得

$$F_{n+1} \otimes_R M = \ker(1_M \otimes f_{n+1}) = \operatorname{im}(1_M \otimes f_{n+2}) = 0.$$

由于 $M \neq 0$，这意味着 $F_{n+1} = 0$。 □

注 2.2. 证明命题 2.1 前两部分所用的一般思路源自 Levin 和 Vascencelos 的 [18, 引理，第 316] 页（另见 [10, 定理 1.2 和 2.2] 的证明）。此外，命题第（3）部分证明中的论证基本上来自 [13, 2.5(1)] 的证明。

引言中提及的定理 1.2 是下一个结果的推论。

定理 2.3. 设 $f : R \to S$ 是一个环同态，且 $(R, \mathfrak{m})$ 是局部环，S 是诺特环。设 $M \neq 0$ 是一个有限生成 S-模，并假设下列条件成立：

(i) $\mathfrak{m}S \subseteq \operatorname{Jac}(S)$。(ii) M 有如下形式的一个滤过：$M_t \leqslant M_{t-1} \leqslant \cdots \leqslant M_1 \leqslant M_0 = M$，其中每个 M_i 都是 S-模，且对于所有 $i = 1, \ldots, t$，$\mathfrak{m}M_{i-1} \leqslant M_i \leqslant \operatorname{Jac}(S)M_{i-1}$。

于是，对于每个 $n \geqslant 0$、每个 $1 \leqslant i \leqslant t$，以及每个有限生成 R-模 N，我们有以下结论：
(a) 若 $\operatorname{grade}_R(\mathfrak{m}, M) \geqslant 1$ 且 $\operatorname{Tor}_n^R(M_i, N) = 0$，则 $\operatorname{Tor}_n^R(M_{i-1}, N) = 0$。(b) 若 $\operatorname{Tor}_n^R(M_i, N) = 0$ 且 M_{i-1} 是忠实 R-模，则 $\operatorname{pd}_R(N) \leqslant n$。(c) 假设 $\operatorname{Tor}_n^R(M_i, N) = \operatorname{Tor}_{n+1}^R(M_i, N) = 0$。则 $\operatorname{pd}_R(N) \leqslant n$。此外，若 $n = 0$，则 $N = 0$。

证明。结论　由命题 2.1 可得：令 $F_\bullet$ 为 N 在 R 上的极小自由分解　　. □

可以用 Ext 模来表述定理 2.3 的一个版本。

定理 2.4。假设与定理 2.3 中相同的设置。那么，对每个 $n \geqslant 0$、$1 \leqslant i \leqslant t$，以及每个有限生成 R-模 N，我们有如下结论：
(a) 若 $\operatorname{grade}_R(\mathfrak{m}, M) \geqslant 1$ 且 $\operatorname{Ext}_R^n(N, M_i) = 0$，则 $\operatorname{Ext}_R^n(N, M_{i-1}) = 0$。(b) 若 $\operatorname{Ext}_R^n(N, M_i) = 0$ 且 M_{i-1} 是忠实 R-模，则 $\operatorname{pd}_R(N) \leqslant n - 1$。(c) 若 $\operatorname{Ext}_R^n(N, M_i) = \operatorname{Ext}_R^{n+1}(N, M_i) = 0$，则 $\operatorname{pd}_R(N) \leqslant n - 1$。

证明。令 $G_\bullet$ 为 N 关于 R 的极小自由分解。则 $\operatorname{Hom}_R(G_\bullet, M) \cong \operatorname{Hom}_R(G_\bullet, R) \otimes_R M$ 作为复形同构。由于 $\operatorname{Ext}_R^n(N, M_i) = H_{-n}(\operatorname{Hom}_R(G_\bullet, R) \otimes_R M)$，我们可以对复形 $\operatorname{Hom}_R(G_\bullet, R)$ 应用命题 2.1，从而得到这些结论。□

在下一节中，我们将建立定理 2.3 的一些推论，并推广文献中关于刚性检验模的若干结果。

3. 关于刚性模和检验模

定义 3.1。设 R 为一个环，且 $M \neq 0$ 为一个有限生成 R-模。

(i) 如果满足以下条件，则称 M 为检验模（或 pd-测试模）：若 N 是一个有限生成 R-模，且对所有 $i \gg 0$均有 $\operatorname{Tor}_i^R(M, N) = 0$，则 $\operatorname{pd}_R(N) < \infty$；参见 [6, 1。1] (ii) 如果满足以下条件，则称 M 为 Tor-刚性：若 N 是一个有限生成 R-模，且 $\operatorname{Tor}_1^R(M,N) = 0$，则 $\operatorname{Tor}_2^R(M,N) = 0$；参见 [1]。 (iii) 如果 M 同时是检验模和 Tor-刚性模，则称 M 为刚性测试模 [19, 2。3] (iv) 如果满足以下条件，则称 M 为强刚性模：若 N 是一个有限生成 R-模，且对于某个 $n \geqslant 1$有 $\operatorname{Tor}_n^R(M,N) = 0$，则 $\operatorname{pd}_R(N) < \infty$；参见 [12, 2。1]

文献中存在各种检验模和刚性模。例如，在正则局部环上，有限生成模是 Tor-刚性的；而在超曲面环上，投射维数无限的有限生成模是检验模；详情参见 [16, 1.9] 请注意，根据定义，每个强刚性

模都是检验模。同样，每个刚性检验模都是强刚性的，但我们不知道反过来是否成立。更准确地说，一般而言，我们不知道每个强刚性模是否都是 Tor-刚性的。另一方面，由 Auslander-Buchsbaum公式可知，若 R 是深度至多为一的局部环，且 M 是有限生成 R-模，则 M 是强刚性模当且仅当 M 是刚性检验模。

我们的目标是利用定理 1.2，获得新的刚性模和检验模类，并推广这一方向上的一些已知结果。需要指出的是，定理 1.2 允许沿环同态推广许多结果（例如 [19] 中的结果）；在此我们仅获得其中少数结果，以展示定理 1.2 的一些有用应用。

我们首先关注 Levin 和 Vascencelos 的以下精彩结果 :

3.2（Levin-Vascencelos， [18, 1.1 和引理，第 316] 页）。设 (R m) 是一个局部环，且 M 和 N 是有限生成 R-模，满足 mM $\neq 0$。如果对于某个 n $\geqslant 0$，$\mathrm{Tor}_n^R(\mathrm{mM},\mathrm{N}) = \mathrm{Tor}_{n+1}^R(\mathrm{mM},\mathrm{N}) = 0$，则 $\mathrm{pd}_R(\mathrm{N}) \leqslant \mathrm{n}$。因此， m M $\neq 0$ 是一个检验模；另见 [8, 2.9]。

如引言中所述，在 R =S 且 f 为恒等映射这一特殊情形下，定理 1.2 中关于 M 的滤过的假设迫使每个 i $\geqslant 0$ 都有 $\mathrm{M}_i = \mathfrak{m}^i\mathrm{M}$。因此，下面的推论推广了 Levin 和 Vascencelos 在 3.2 中记载的结果。该推论还表明，关于局部环的某些以检验模为条件的刻画可以沿环同态推广：

推论 3.3. 设 f : R $\to$ S 是一个环同态，使得 (R m) 是局部环，S 是诺特环，并且mS $\subseteq$Jac(S)。设 M 是一个有限生成 S-模。假设 M 存在如下形式的滤过

$$M_t \leqslant M_{t-1} \leqslant \cdots \leqslant M_1 \leqslant M_0 = M,$$

其中每个 M_i都是非零 S-模，且对所有 i = 1,. .. ,t，均有 m$\mathrm{M}_{i-1} \leqslant \mathrm{M}_i \leqslant$Jac(S)$\mathrm{M}_{i-1}$。令 H =M$_j$，其中 j 满足 1 6 j 6 t。

(1) 以下陈述等价：

(i) R 正则。(ii) $\mathrm{pd}_R(\mathrm{H}) < \infty$。(iii) 对某个 n $\geqslant 0$ 以及某个 R 上的检验模 T，有 $\mathrm{Tor}_n^R(\mathrm{H},\mathrm{T}) = \mathrm{Tor}_{n+1}^R(\mathrm{H},\mathrm{T}) = 0$。(iv) $\mathrm{id}_R(\mathrm{H}) < \infty$。(v) 对某个 n $\geqslant 0$ 以及某个 R 上的检验模 T，有 $\mathrm{Ext}_R^n(\mathrm{T},\mathrm{H}) = \mathrm{Ext}_R^{n+1}(\mathrm{T},\mathrm{H}) = 0$。

(2) 若 H 是有限生成 R-模（例如，M 通过 f 是有限生成 R-模），则 H 是 R 上的检验模。

证明。(1) 显然，(i) 推出 (ii)，而 (ii) 推出 (iii)。若 (iii) 成立，则由定理 2.3(c) 可得 $\mathrm{pd}_R(\mathrm{T}) < \infty$，因此 R 是正则的，因为对所有 i $\gg 0$，$\mathrm{Tor}_i^R(\mathrm{T},\mathrm{R}/\mathfrak{m}) = 0$。这表明 (i)、(ii) 和 (iii) 等价。由于 (i) 推出 (iv)，且 (iv) 推出 (v)，只需证明 (v) 推出 (i)，这由定理 2.4(c) 得出。

(2) 这由定义 3.1(i) 和定理 2.3(c) 得出。 □

以下观察用于推论 3.5 和 3.7，以及引理 4.3。

3.4. 设 f : (R m) $\to$ (S n) 是局部环之间的局部环同态，设 M 是一个有限生成 S-模，并且经由 f 也是有限生成 R-模。假设 M 具有如下形式的滤过。

$$M_t \leqslant M_{t-1} \leqslant \cdots \leqslant M_1 \leqslant M_0 = M,$$

其中每个 M_i 都是非零 S-模，且对所有 i = 1，.....，t， m$\mathrm{M}_{i-1} \leqslant \mathrm{M}_i$。于是，对每个满足 1 6 i 6 t 的整数 i，$\mathrm{M}_{i-1}/\mathrm{M}_i$ 被 m 消灭，因此存在一个 R-模的短正合列

$$0 \to M_i \to M_{i-1} \to k^{\oplus r_i} \to 0 \tag{3.4.1}$$

对于某个整数 $\mathrm{r}_i \geqslant 0$。如果对于所有 i = 1，. .. ，t，$\mathrm{M}_i \leqslant \mathfrak{n}\mathrm{M}_{i-1}$，那么 $\mathrm{M}_{i-1}/\mathrm{M}_i \neq 0$，因此 $\mathrm{r}_i \geqslant 1$。

接下来我们推广 [10, 2.5] ，并指出：如果定理 1.2 中所考虑的模是有限生成的且具有正深度，那么滤过模还具有进一步的性质：

推论 3.5. 设 f : (R m) → (S n) 是局部环之间的局部环同态，且 M 是有限生成的 S-模。假设以下条件成立：

(i) 通过 f，M 是有限生成 R-模。(ii) $\operatorname{depth}_R(M) \geqslant 1$。(iii) M 有如下形式的一个滤过

$$M_t \leqslant M_{t-1} \leqslant \cdots \leqslant M_1 \leqslant M_0 = M,$$

其中每个 M_i 都是非零 S-模，且对所有 $i = 1, \ldots, t$，都有 $\mathfrak{m}M_{i-1} \leqslant M_i \leqslant \mathfrak{n}M_{i-1}$。

则有以下结论：

(a) 若对某个 i（其中 $1 \leqslant i \leqslant t$），$M_{i-1}$ 是 R 上的强刚性模，则 M_i 是 R 上的强刚性模。(b) 若对某个 i（其中 $1 \leqslant i \leqslant t$），$M_{i-1}$ 是 R 上的 Tor-刚性模，且对某个 $n \geqslant 0$ 以及某个有限生成 R-模 N，有 $\operatorname{Tor}_n^R(M_i, N) = 0$，则 $\operatorname{pd}_R(N) \leqslant n$，因此对所有 $j \geqslant n$，都有 $\operatorname{Tor}_j^R(M_i, N) = 0$。(c) 若对某个 i（其中 $1 \leqslant i \leqslant t$），$M_{i-1}$ 是 R 上的 Tor-刚性模，则 M_i 是强刚性模且为 Tor-刚性模。(d) 由此可得：

$$M \text{ is Tor-rigid over } R \Longrightarrow M_1 \text{ is rigid-test over } R \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow M_t \text{ is rigid-test over } R.$$

证明。(c) 是 (b) 的直接推论，而 (d) 是 (a) 和 (c) 的推论。因此，我们接下来证明 (a) 和 (b)。

假设对某个 $n \geqslant 0$ 以及某个有限生成 R-模 N，有 $\operatorname{Tor}_n^R(M_i, N) = 0$。那么，由于 M 具有正深度，定理 2.3(a) 推出 $\operatorname{Tor}_n^R(M_{i-1}, N) = 0$。

若 M_{i-1} 是强刚性的，则 $\operatorname{pd}_R(N) < \infty$，因为 $\operatorname{Tor}_n^R(M_{i-1}, N) = 0$，这就证明了 (a)。

接下来假设 M_{i-1} 是 Tor-刚性的。由于我们有 $\operatorname{Tor}_n^R(M_{i-1}, N) = 0$，因此对所有 $j \geqslant n$，都有 $\operatorname{Tor}_j^R(M_{i-1}, N) = 0$。于是 (3.4.1) 给出正合列

$$0 = \operatorname{Tor}_{n+1}^R(M_{i-1}, N) \to \operatorname{Tor}_{n+1}^R(k^{\oplus r_i}, N) \to \operatorname{Tor}_n^R(M_i, N) = 0$$

这意味着 $\operatorname{pd}_R(N) \leqslant n$，且对于所有 $j \geqslant n$，$\operatorname{Tor}_j^R(M_i, N)$ 均消失。这就证明了 (b) 部分。 □

注 3.6. 在推论 3.5 的设定下，若 M 是 Tor-刚性的，且对于某些 $i \geqslant 1$、$j \geqslant 1$ 和 $n \geqslant 1$，有 $\operatorname{Tor}_n^R(M_i, M_j) = 0$，那么 M_i 和 M_j 的投射维数有限，这迫使 R 为正则环。

推论 3.7. 设 f : (R m) → (S n) 是局部环之间的局部环同态，且 M 是有限生成 S-模。假设满足以下条件：

(i) 通过 f，M 是有限生成的 R-模。(ii) M 作为 R-模是 Tor-刚性的，且 $\operatorname{depth}_R(M) \geqslant 1$。(iii) M 存在如下形式的一个滤过：

$$M_t \leqslant M_{t-1} \leqslant \cdots \leqslant M_1 \leqslant M_0 = M,$$

其中每个 M_i 都是非零 S-模，并且对于所有 $i = 1, \ldots, t$，都有 $\mathfrak{m}M_{i-1} \leqslant M_i \leqslant \mathfrak{n}M_{i-1}$。

若对于某个有限生成 R-模 N、$i \geqslant 1$ 和 $n \geqslant 1$，有 $\operatorname{Ext}_R^n(N, M_i) = 0$ 或 $\operatorname{Tor}_n^R(N, M_i) = 0$，则 $\operatorname{pd}_R(N) \leqslant n - 1$。因此，若对于某个 $i \geqslant 1$、$j \geqslant 1$ 和 $n \geqslant 1$，有 $\operatorname{Ext}_R^n(M_i, M_j) = 0$ 或 $\operatorname{Tor}_n^R(M_i, M_j) = 0$，则 R 是正则的。

证明。首先注意到，对于所有 $i = 1, \ldots, t$，$\operatorname{depth}_R(M_i) = 1$；参见短正合列 (3.4.1)。由推论 3.5(d)，我们知道每个 M_i（其中 $i \geqslant 1$）都是 R 上的刚性检验模。若 $\operatorname{Ext}_R^n(N, M_i) = 0$，则由 [19, 6.1] 可得 $\operatorname{pd}_R(N) \leqslant n - 1$。此外，若 $\operatorname{Tor}_n^R(N, M_i) = 0$，则由推论 3.5(b) 可得 $\operatorname{pd}_R(N) \leqslant n$。关于 R 正则性的最后一个结论，参见推论 3.3(1)。□

推论 3.8. 设 f : (R m) → (S n) 是 Frobenius 映射 F^e，其中 R = S 的素特征为 p，且 R 是一个正深度的 F-有限局部完全交环。设 $e \geqslant 1$ 和 $v \geqslant 0$ 为整数。假设 $M = {}^vS$ 有如下形式的滤过

$$M_t \leqslant M_{t-1} \leqslant \cdots \leqslant M_1 \leqslant M_0 = M,$$

其中每个 M_i都是非零 S-模，且对所有 $i = 1, \dots, t$，$\mathfrak{m}M_{i-1} \leqslant M_i \leqslant \mathfrak{n}M_{i-1}$。[1]若对某个非零有限生成 S-模 N、$j \geqslant 1$和 $n \geqslant 1$，有 $\operatorname{Ext}^n_R(^eN, M_j) = 0$或 $\operatorname{Tor}^R_n(^eN, M_j) = 0$，则 R 是正则的。

证明。由推论 3.7 可知 $\operatorname{pd}_R(^eN) < \infty$。因此，由于 [3, 1.1]，R 是正则的。 □

在接下 文中，我们给出一些具体例子，说明哪些滤过模是检验模和强刚性模。

推论 3.9。设 $(R\ \mathfrak{m})$ 是特征为素数 p 的 Cohen-Macaulay 局部环，并设 $M \neq 0$ 和 $N \neq 0$是有限生成 R-模，满足深度$_R(M) \geqslant 1$。设 $e \geqslant 0$ 和 $t \geqslant 1$ 为整数。

(i) 若 $\operatorname{Tor}^R_n\left(^e(\mathfrak{m}^tM), N\right) = 0$，或 $\operatorname{Tor}^R_n\left(e\left(\left(\mathfrak{m}^{[p^e]}\right)^tM\right), N\right) = 0$对某个 $n \geqslant 1$成立，则 $\operatorname{Tor}^R_n(^e M, N) = 0$。(ii) 若 R 是 F-有限的，且 eM 是检验模（分别为强刚性模），则 $e(\mathfrak{m}^tM)$ 和$^e\left(\left(\mathfrak{m}^{[p^e]}\right)^t M\right)$ 是检验模（分别为强刚性模）。

证明。第 (i) 部分的结论直接由定理 2.3 得出，因为$_e(\mathfrak{m}^tM)$ 和$_e\left(\left(\mathfrak{m}^{[p^e]}\right)^tM\right)$ 是该定理中所考虑模的滤过模 M_i 的具体例子。根据定义 3.1，第 (ii) 部分由第 (i) 部分得出。□

注 3.10。设 R 是特征为素数 p 的 F-有限环，$M = T \oplus \Omega_R T$，其中 $T \neq 0$是某个有限生成 R-模，并设 $e \geqslant 1$。

存在一个 R-模的正合列 $0 \to {}_e(\Omega_R T) \to {}_eF \to {}_eT \to 0$，其中 F 是自由 R-模。因此，若 $\operatorname{Tor}^R_n(^eM, N) = 0$ 对某个 $n \geqslant 1$成立，则 $\operatorname{Tor}^R_n(^e(\Omega_R T), N) = \operatorname{Tor}^R_n(^eT, N) = 0$，从而 $\operatorname{Tor}^R_n(^eF, N) = 0$，这意味着 $\operatorname{Tor}^R_n(^eR, N) = 0$。

此外，后文还需要 Koh-Lee [17] 和 Avramov-Miller [4] 的以下结果：

3.11. 设 $(R\ \mathfrak{m})$ 是一个特征为素数的 F-有限 Cohen-Macaulay 局部环。(i) ([17, 2.6]) 若 $\dim(R) = 1$，则对每个 $e \gg 0$，eR 都是强刚性（因而是测试的）。(ii) ([4, 主定理]) 若 R 是完全交，则对每个 $e \geqslant 1$，eR 都是刚性检验模。

推论 3.12. 设 $(R\ \mathfrak{m})$ 是一个特征为素数 p 的 F-有限 Cohen-Macaulay 局部环，且 N 和 T 是有限生成 R-模，满足 $T \neq 0$且深度$_R(T) \geqslant 1$。令 $M = T \oplus \Omega_R T$，$e \geqslant 1$，且 $t \geqslant 1$。

（i）如果 R 是完全交，则 eM 是刚性检验模。（ii）假设 $\dim(R) = 1$，$e \gg 0$，且 X 是 eM、$e(\mathfrak{m}^tM)$ 或 $e\left(\left(\mathfrak{m}^{[p^e]}\right)^tM\right)$。如果对于某个 $n \geqslant 1$，$\operatorname{Tor}^R_n(X, N) = 0$，则 $\operatorname{pd}_R(N) \leqslant 1$。（iii）假设 R 是完全交，且 X 是 $e(\mathfrak{m}^tM)$ 或 $e\left(\left(\mathfrak{m}^{[p^e]}\right)^tM\right)$。如果对于某个 $n \geqslant 1$，$\operatorname{Tor}^R_n(X, N) = 0$，则 $\operatorname{pd}_R(N) \leqslant n$。

Pro。（i）e_eM 是刚性检验模这一结论由注 3.10 和 3.11(ii) 得出 .

（ii）由 3.11(i) 可知 $_eR$ 是强刚性的。因此，注 3.10 表明 $_eM$ 也是强刚性的。现在由推论 3.9(ii) 可知，$_e(\mathfrak{m}^tM)$ 和 $_e\left(\left(\mathfrak{m}^{[p^e]}\right)^tM\right)$ 都是强刚性的。因此，如果对于某个 $n \geqslant 1$，$\operatorname{Tor}^R_n(X, N) = 0$，则 $\operatorname{pd}_R(N) < \infty$，从而 $\operatorname{pd}_R(N) \leqslant 1$，因为 R 的深度 $\leqslant 1$。

(iii) 由 (i) 部分可知，$_eM$ 是刚性检验模。特别地，$_eM$ 是 Tor-刚性的。另请注意，$\operatorname{depth}_R(^eM) \geqslant 1$。因此，如果对于某个 $n \geqslant 1$，$\operatorname{Tor}^R_n(X, N) = 0$，那么由推论 3.5(b) 可知 $\operatorname{pd}_R(N) \leqslant n$。□

4. On torsion in tensor products of modules

本节我们讨论 Huneke–Wiegand 猜想：

猜想 4.1（[15, 第 473 页-474]）。设 R 是一维局部环，M 是具有秩的有限生成 R-模。若 $M \otimes_R M^*$ 非零且无挠，其中 $M^* = \operatorname{Hom}_R(M, R)$，则 M 是自由的。

[1] This implies that $^v\left(\mathfrak{m}^{[p^{e+v}]}\right) \leqslant M_1 \leqslant {}^v\left(\mathfrak{m}^{[p^v]}\right)$.

回顾一下，若存在一个非负整数 r，使得对于 R 的每个伴随素理想 $\mathfrak{p}$，都有 $M_{\mathfrak{p}} \cong R_{\mathfrak{p}}^{\oplus r}$，则称环 R 上的模 M 具有秩。例如，若 M 的投射维数有限，或者 R 是整环，则 M 具有秩。若所考虑的模不具有秩，或者相关环的维数至少为二，则猜想 4.1 不成立；例如参见 [11, 8.5 和第 447] 页。注意，在猜想 4.1 中，只需额外假设 M 是具有正的常秩的无挠模。

猜想 4.1 一般而言仍悬而未决。事实证明，在 Gorenstein 环上，该猜想是 Auslander–Reiten 关于上同调消失的著名猜想的一个特例；这一猜想源自有限维代数的表示论，也是研究猜想 4.1 的主要动机之一；另见 [11, 8.6]。

Huneke 和 Wiegand [15, 3.1]证明了猜想 4.1 在超曲面环上成立。此外，该猜想在其他若干情形下也成立，例如，当 R 是极小重数的 Cohen-Macaulay 局部环 [14, 3.6], ，或 M 是一个整闭的 $\mathfrak{m}$-primary 理想 [7, 2.17]时。注意，若所讨论的模 M 是强刚性的，则猜想 4.1 成立 [7, 2.15]。因此，推论 3.12 给出了新的一类模，可用于在素特征局部环上验证该猜想。

若 M 是局部环 $(R\ \mathfrak{m})$ 上的有限生成模，$(R\ \mathfrak{m})$ 是局部环，且 M 的秩为$0 \neq M \otimes_R M^*$ 无挠，那么 $\operatorname{Supp}_R(M) = R$ 的素谱；例如，参见 [9, 1.3]。因此，Dey 和 Kobayashi [13] 的以下结果对形如 $\mathfrak{m}N$ 的非零模证明了猜想 4.1。

定理 4.2 ([13, 1.5(1)])。设 $(R\ \mathfrak{m})$ 是深度为 1 的局部环，且对某个有限生成 R-模 N，有 $M = \mathfrak{m}N$。假设 $\operatorname{Supp}_R(M) = R$ 的素谱，并且对 R 的每个伴随素理想 $\mathfrak{p}$，$M_{\mathfrak{p}}$ 在 R 上自由$_{\mathfrak{p}}$。若 $M \otimes_R M^*$ 非零且无挠，则 M 自由，且 R 正则。

引理 4.3。设 $(R\ \mathfrak{m})$ 是正深度的局部环，M 是非零有限生成 R-模。假设 M 存在如下形式的一个滤过：

$$M_t \leqslant M_{t-1} \leqslant \cdots \leqslant M_1 \leqslant M_0 = M,$$

其中每个 M_i 都是非零 R-模，且对所有 $i = 1,\ldots,t$，$\mathfrak{m}M_{i-1} \leqslant M_i$。于是可得

$$M \text{ satisfies } (\mathscr{P}) \Longrightarrow M_1 \text{ satisfies } (\mathscr{P}) \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow M_t \text{ satisfies } (\mathscr{P}),$$

其中性质（$\mathscr{P}$）表示以下性质之一：(a) 非挠；(b) 忠实；(c) 在 R 的伴随素理想集上局部自由；或 (d) 秩为。

证明。假设 M 满足（$\mathscr{P}$）。注意，只需证明 M_1 满足（$\mathscr{P}$）。

对于 (a)，若 M_1 是挠的，则对某个非零因子 $x \in \mathfrak{m}$，有 $xM_1 = 0$。由于 $xM \subseteq \mathfrak{m}M \subseteq M_1$, ，我们看到 $x^2M = 0$，因此 M 是挠的。这说明 M_1 非挠。

对于 (b)，由于 $\mathfrak{m}M \subseteq M_1$, ，只需证明 $\mathfrak{m}M$ 忠实。设 $y \in \operatorname{Ann}_R(\mathfrak{m}M)$。则 $y\mathfrak{m}M = 0$，因此 $y\mathfrak{m} = 0$，因为 M 忠实。这意味着 $y = 0$，因为 $\mathfrak{m}$ 含有一个非零因子。

对于 (c) 和 (d)，由正合列 (3.4.1) 可知，对 R 的每个伴随素理想 $\mathfrak{p}$，$M_{\mathfrak{p}} \cong (M_1)_{\mathfrak{p}}$。由此得到所需结论。□

为证明定理 4.5，我们回顾以下基本事实；注意 $(-)^* = \operatorname{Hom}_R(-, R)$。

4.4. 设 R 为一个环，M 和 N 为有限生成 R-模。

(i) 令 $\top_R(M)$ 表示 M 的扭子模，并设 $\overline{M} = M/\top_R(M)$。假设 $0 \neq N$ 且 $M \otimes_R N$ 无挠。则 $M \otimes_R N \cong \overline{M} \otimes_R N$，并且 M 自由当且仅当 $\overline{M}$ 自由；参见 [15, 1.1]。(ii) 若 N 无挠，即自然映射 $N \to N^{**}$ 是单射，则 N 嵌入某个自由 R-模中，因此 N 无挠；例如参见 [5, 1.4.19]。此外，若 N 无挠且在 R 的每个伴随素理想处局部自由，则 $N \to N^{**}$ 的核在 R 的每个伴随素理想处局部化后均为零，因此该核是挠的，故必为零，且 N 无挠。

定理 4.5。设 $f : R \to S$ 是一个环同态，其中 $(R\ \mathfrak{m})$ 是一个正深度局部环，S 是诺特环，且 $\mathfrak{m}S \subseteq \operatorname{Jac}(S)$。设 M 是一个生成的 S-模。假设：

(i) M 存在如下形式的滤过

$$M_t \leqslant M_{t-1} \leqslant \cdots \leqslant M_1 \leqslant M_0 = M,$$

其中，每个 M_i都是非零 S-模，并且对于所有 $i = 1,\ldots,t$，$\mathfrak{m}M_{i-1} \leqslant M_i \leqslant \mathrm{Jac}(S)M_{i-1}$。(ii) 通过 f，M 作为 R- 模是有限生成的，且 $\mathrm{Supp}_R(M) = R$ 的素谱。(iii) 对于 R 的每个伴随素理想 $\mathfrak{p}$，$M_{\mathfrak{p}}$ 在 $R_{\mathfrak{p}}$ 上是自由的。

则有以下结论：

(a) 若 $0 \neq N$ 是有限生成无挠 R-模，且 $M_i \otimes_R N$ 是无挠 R-模，其中 $1 \leqslant i \leqslant t$，则 N 是自由的，且 M_i 无挠。(b) 若 $M_i \otimes_R M_j$ 是无挠 R-模，其中 $1 \leqslant i, j \leqslant t$，则 M_i 和 M_j 均为自由的，且 R 是正则的。(c) 假设 R 的深度 $= 1$。若 $0 \neq M_i \otimes_R M_i^*$ 是无挠 R- 模，其中 $1 \leqslant i \leqslant t$，则 M_i 是自由的，且 R 是正则的。

证明。(a) 存在一个有限生成 R-模的正合列 $0 \to N \to F \to C \to 0$，其中 F 是自由的；参见 4.4(ii)。将此正合列与 M_i 在 R 上作张量积，得到一个单射 $\mathrm{Tor}_1^R(M_i,C) \hookrightarrow M_i \otimes_R N$。由引理 4.3(c)，对 R 的每个伴随素理想 $\mathfrak{p}$，都有 $(M_i)_{\mathfrak{p}}$ 是 $R_{\mathfrak{p}}$ 上自由的，因此 $\mathrm{Tor}_1^R(M_i,C)_{\mathfrak{p}} = 0$。这说明 $\mathrm{Tor}_1^R(M_i,C)$ 是一个扭 R-模，因此它为零，因为 $M_i \otimes_R N$ 是 R-无挠的。此外，M 是忠实 R-模；例如参见 [13, 2.12]。因此，引理 4.3(b) 表明 M_{i-1} 是忠实的。由于 $\mathrm{Tor}_1^R(M_i,C) = 0$，定理 2.3(b) 推出 $\mathrm{pd}_R(C) \leqslant 1$。现在，正合列 $0 \to N \to F \to C \to 0$ 表明 N 是自由的。因此，M_i 是无挠的，因为 $0 \neq M_i \otimes_R N$ 是无挠的。

(b) 注意，对于 R 的每个伴随素理想 $\mathfrak{p}$，$(M_j)_{\mathfrak{p}} \cong (M_j)_{\mathfrak{p}}$。因此，由引理 4.3(c) 可知，对于 R 的每个伴随素理想 $\mathfrak{p}$，$(M_j)_{\mathfrak{p}}$ 在 $R_{\mathfrak{p}}$ 上是自由的。因此，M_j 是无挠 R-模；见 4.4(ii)。由此可得 $0 \neq M_i \otimes_R M_j \cong M_i \otimes_R M_j$；见 4.4(i)。于是 $M_j \neq 0$，因此由 (a) 部分可知 M_j 是自由的。由于 $M_i \neq 0$，由 4.4(i) 可得 M_j 是自由的。由推论 3.3(1)，R 因而是正则的。交换 M_i 和 M_j 的角色可知，M_i 也自由。

(c) 由于 $0 \neq M_i^*$ 是无挠 R-模，由 (a) 部分可知，M_i^* 在 R 上是自由的，而 M_i 在 R 上是无挠的。又因深度$(R) = 1$，所以 M_i 是自由的；见 [7, 2.13]。由推论 3.3(1)，R 因而是正则的。□

我们以定理 4.5 的以下推论结束本节，该推论为某些滤过模确立了猜想 4.1。

推论 4.6. 设 $f : (R\ \mathfrak{m}) \to (S\ \mathfrak{n})$ 是局部环之间的有限局部环同态，其中 R 是一维整环；设 $0 \neq M$ 是有限生成 S-模，且作为 R-模无挠。假设 M 存在如下形式的滤过

$$M_t \leqslant M_{t-1} \leqslant \cdots \leqslant M_1 \leqslant M_0 = M,$$

其中每个 M_i 都是 S-模，且对所有 $i = 1,\ldots,t$，$\mathfrak{m}M_{i-1} \leqslant M_i \leqslant \mathfrak{n}M_{i-1}$。若 $M_i \otimes_R M_i^*$ 是 R-无挠模，其中 $1 \leqslant i \leqslant t$，则 M_i 是自由的。

证明. 注意到 $\mathfrak{m}^i M \subseteq M_i$。因此 $M_i \neq 0$，因为 M 是 R-无挠的。于是 M_i 是 R-无挠的。接着 $M_i^* \neq 0$，否则 M_i 将是 R-挠的，这意味着 $M_i = 0$。因此 $M_i \otimes_R M_i^* \neq 0$。另一方面，由于 M 是 R-无挠模且 R 是整环，我们有 $\mathrm{Supp}_R(M) = R$ 的素谱。因此，由定理 4.5(c)可知 R 是正则的，且 M_i 是自由的（M 本身也同样是自由的）。□

参考文献

[1] **5** 1961 631 647 3 Maurice Auslander，《非分歧正则局部环上的模》，Illinois J. Math.（），–。Maurice Auslander 和 Idun Reiten，《中山猜想的一个推广版本》，Proc. Amer. Math. Soc. 52（1975），69–74。7[3] Luchezar L. Avramov、Melvin Hochster、Srikanth B. Iyengar 和 Yongwei Yao，《收缩自同态上的模的同调不变量》，Math. Ann. **353** 2012 2, 275 291 6（），第 – 期。Luchezar L. Avramov 和 Claudia Miller，《完全交的弗罗贝尼乌斯幂》，Math. Res. Lett. [4] **8** 2001 225 232 6（），–。Winfried Bruns 和 Jurgen Herzog，《科恩-麦考利环》，Cambridge Studies in Advanced Mathematics，第 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1993。7 [5] 39,

[6] Olgur Celikbas、Hailong Dao 和 Ryo Takahashi, 《检测有限同调维数的模》, Kyoto J. Math. 54（2014）, 第2期, 295–310。3[7] Olgur Celikbas、Shiro Goto、Ryo Takahashi 和 Naoki Taniguchi, 《Huneke–Wiegand 猜想的理想情形》, Proc. Edinb. Math. Soc.（2019）, 第3期, 847–859。7, 8[8] Olgur Celikbas、Kei-ichiro Iima、Arash Sadeghi 和 Ryo Takahashi, 《Auslander–Reiten 猜想的理想情形》, Bull. Sci. Math. 142（2018）, 94–107。4

[9] **276** 2014 1 2, 457 468 7 Olgur Celikbas

[10] **63** 和 Greg Piepmeyer, 《上同调与模的张量积》, Math. Z.（ ）, 第 - 期 – 。Olgur Celikbas 和 Ryo Takahashi, 《极大理想的幂与（余）同调的消失》, Glasg. Math. J.（2021）, 第1期, 1–5。1, 3, 4[11] Olgur Celikbas 和 Roger Wiegand, 《Tor 的消失及其重要性》, J. Pure Appl. Algebra 219 3, 429 2015 448 7（ ）, 第 – 期。[12] Hailong Dao、Jinjia Li 和 Claudia Miller, 《Gorenstein 环上的 Frobenius 自同态的（非）刚性》, Algebra & Number Theory **4** 2011 8, 1039 1053 3（ ）, 第 – 期。Souvik Dey 和 Toshinori Kobayashi, 《Burch 子模及

[13] 相关子模的（余）同调消失》, arXiv:2201.01023v3（ 2022 3, 7, 8）, 即将发表于 Illinois J. Math。Craig Huneke、Srikanth Iyengar 和 Roger Wiegand, 《一维 Gorenstein 环中的刚性理想》, Acta Math. Vietnamica **44** 2019 1, 31 49 7（ ）, 第 – 期。Craig Huneke 和 Roger Wiegand, 《模的张量积与 Tor 刚性》,

[14] Math. Ann. 299（1994）, 第3期, 449–476。6, 7

[15] [16] ———, **81** 1997 2, 161 183 3《模的张量积、刚性与局

[17] 部上同调》, Math. Scand.（ ）, 第 – 期。Jee H. Koh 和 Kisuk Lee, 《极小自由分解中的映射的一些限制》, J. Algebra（ ）, – **202** 1998 671 689 6。Gerson Levin 和

[18] Wolmer V. Vasconcelos, 《同调维数与 Macaulay 环》, Pacific J. Math.（ ）, 315–323。3, 4[19] Majid Rahro Zargar、Olgur Celikbas、Mohsen Gheibi 和 Arash Sadeghi, 《刚性模的同调维数》, Kyoto J. Math. 58（2018）, 第3期, 639–669。3, 4, 5 **25** 1968

OLGUR CELIKBAS，数学与数据科学学院，西弗吉尼亚大学，摩根敦，WV 26506-6310，美国。电子邮箱：olgur.celikbas@math.wvu.edu YONGWEI YAO，数学与统计系，佐治亚州立大学，亚特兰大，GA 30303，美国。电子邮箱：yyao@gsu.edu