arXiv:2304.07644v1 [math.RA] 15 Apr 2023

链引理、二次型与符号长度

亚当·查普曼和伊兰·莱文

摘要。我们旨在为 ${}_{2^{m-1}}\mathrm{Br}(F)$ 中的类的符号长度给出上界，这些类可表示为 5 个或 6 个次数为 2^m 的循环代数的张量积。主要工具包括二次型链引理、广义克利福德不变量的一种形式，以及 Pfister 和 Rost 对 I^3F 中 12 维和 14 维二次型的描述。

1. 引言

根据著名的 Merkurjev-Suslin 定理（[MS82]），在 F 的特征与 r 互素且 F 含有一个本原 r 次单位根 ρ 的假设下，${}_r\mathrm{Br}(F)$ 中的每个类都布劳尔等价于若干个次数为 r 的循环代数的张量积。这类循环代数具有如下形式

$$(\alpha,\beta)_{r,F} = F\langle i, j : i^r = \alpha, j^r = \beta, ji = \rho ij\rangle$$

其中 $\alpha,\beta \in F^\times$。

取 $r = 2^m$，符号 $(\alpha^2,\beta)_{2^m,\ F}$ 与 $(\alpha,\beta)_{2^{m-1},\ F}$布劳尔等价。因此，如果知道如何将 ${}_{2^{m-1}}\mathrm{Br}(F)$ 中的一个类 A 写成度为 2^{m-1} 的循环代数的张量积，就可以轻易地将这个布劳尔类表示为度为 2^m 的循环代数的张量积。不过，反向过程并不那么简单：

问题 1.1. 给定 ${}_{2^{m-1}}\mathrm{Br}(F)$ 中的一个类 A，它可以写成 q 个度为 2^m 的循环代数的张量积，那么需要多少个度为 2^{m-1} 的循环代数才能表示它？或者等价地，它在 ${}_{2^{m-1}}\mathrm{Br}(F)$ 中的符号长度是多少？

$q = 1$ 的情形已在 [Tig83], 中得到解决，文中证明，次数为 2^m 且指数整除 2^{m-1}的循环代数的 Brauer 类，可以写成至多两个次数为 2^{m-1}的循环代数的张量积。在 [CFM22], 中，研究了 $q = 2$ 的情形，并利用四元数代数的链引理证明，此时${}_{2^{m-1}}\mathrm{Br}(F)$中的符号长度至多为 6。随后在 [Cha22],中，这个数被降至 5

2020年数学主题分类。16K20（主要）；11E04、11E81、15A66（次要）。
关键词与短语。Brauer 群；符号长度；二次型；循环代数；四元数代数；链引理。

文中利用双四元数代数的 Sivatski 链引理（[Siv12]），分别证明 q = 3和 4 的情形下，上界为 15 和 46。本文旨在回答 q = 5 和 6 的情形。关键在于应用二次型链引理，并借助 Pfister 对 12 维型（[Pfi66]）的描述以及 Rost 对 I^3F 中 14 维型的描述，将其谨慎地转化回代数。

2. 二次型链引理

二次型链引理在文献中广为人知，例如 [EKM08 第 1 章第 3] 节，以及 [Lam05 第 1 章第 5] 节。不过，为了应用，我们需要明确计算连接不同表示所需的步数。设 F 是一个特征不为 2、 −1 含有平方根的域，n 为自然数。设 G = (V, E) 是由 $V = F^{\times n}$ 定义的标记图，其中 $(a_1, \ldots, a_n)$ 和 $(b_1, \ldots, b_n)$ 在满足某个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，且对所有 k , i 都有 $a_k = b_k$，并且 $b_i = c^2 a_i$ 时，由实边 $(a_1, \ldots, a_n) (b_1, \ldots, b_n)$ 相连；当某个 1 6 i < j 6 n 满足对所有 k , i, j 都有 $a_k = b_k$，且 $b_i = (1 + a_j a_i)a_i$，以及 $b_j = (1 + a_j a_i)a_j$ 时，由虚线边 $(a_1, \ldots, a_n) - - - (b_1, \ldots, b_n)$ 相连。对于任意 $(a_1, \ldots, a_n) \in V$, 一都有一个自然的“底层二次型” $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$。图论的语言为讨论链引理提供了坚实基础。

引理 2.1. 对 (a,b) 和 (b,a)，最多可用 5 步连接，其中最多三步为实线，另有两步为虚线。

证明。若对于某个 $x \in F^{\times}$，有 $a = x^2 b$，则 (a, b) ($\frac{1}{x^2}$a, b) ($\frac{1}{x^2}$a, x^2b) = (b, a) 。假设对于任意 $x \in F^{\times}$，都有 a , x^2b。这特别意味着二次型 $\langle a, b \rangle$ 是各向异性的，因为我们讨论的是一个包含 −1平方根的域。那么

$$
\begin{array}{ccc}
(a,b) & \text{- - - - - -} & (a(1+\frac{b}{a}), b(1+\frac{b}{a})) = (a+b, b+\frac{b^2}{a}) \\
 & & \Big| \\
 & & (a+b, \frac{a^2}{b^2}(b+\frac{b^2}{a})) = (a+b, \frac{a^2}{b}+a) \\
 & & \vdots \\
 & & (\frac{a^2}{b}+2a+b, \frac{a^2}{b}+a+\frac{(\frac{a^2}{b}+a)^2}{a+b}) = ((\frac{a+b}{b})^2 b, (\frac{a+b}{b})^2 a) \\
 & & \Big| \\
(b,a) & \text{————————} & ((\frac{a+b}{b})^2 b, a)
\end{array}
$$

□

推论 2.2. 对于任意置换 $\sigma \in S_n$，顶点 $(a_1, \ldots, a_n)$ 至多通过 $5(n-1)$ 步与 $(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})$ 相连，其中至多 $3(n-1)$ 步是实线，$2(n-1)$ 步是虚线。

证明。因为每个置换至多可由 $n-1$ 次交换实现，故结论成立。□

定理 2.3。任意两个底层二次型等距的顶点，都可以通过一条由至多 $\frac{(n+1)n}{2} + 3(n-1)$ 个实步和 $\frac{n(n-1)}{2} + 2(n-1)$ 个虚线步组成的链相连，总计至多 $n^2 + 5n - 5$ 步。

证明。设 $(a_1, \ldots, a_n)$ 和 $(b_1, \ldots, b_n)$ 是图中的两个顶点，满足 $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \simeq \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$。槽位 b_n 由 $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ 表示，这意味着存在 $x_1, \ldots, x_n \in F$，使得 $a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2 = b_n$。

设 $i_1, \ldots, i_\ell$ 是 $\{1, \ldots, n\}$ 中的指标，使得 $x_{i_1}, \ldots, x_{i_\ell}$ 非零，$b_n = \sum_{j=1}^{\ell} a_{i_j} x_{i_j}^2$，且该级数的部分和均不为零。这个子序列确实存在，并且可以通过以下过程显式地找到：首先，取和 $a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2$；然后，每当存在一个指标 k 使得 $x_k = 0$ 时，就删去加项 $a_k x_k^2$；接着，如果有一个部分和为零，就删去整个部分和。现在，

$$(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_\ell}) \longrightarrow (a_{i_1} x_{i_1}^2, a_{i_2}, \ldots, a_{i_\ell}) \longrightarrow (a_{i_1} x_{i_1}^2, a_{i_2} x_{i_2}^2, \ldots, a_{i_\ell}) \longrightarrow \cdots$$

$$(a_{i_1} x_{i_1}^2, a_{i_2} x_{i_2}^2, \ldots, a_{i_\ell} x_{i_\ell}^2)$$

这些总共是 l 个实步。于是

$$(a_{i_1} x_{i_1}^2, a_{i_2} x_{i_2}^2, \ldots, a_{i_\ell} x_{i_\ell}^2) - - - - - - (a_{i_1} x_{i_1}^2 + a_{i_2} x_{i_2}^2, *, \ldots, a_{i_\ell} x_{i_\ell}^2)$$

$$(a_{i_1} x_{i_1}^2 + a_{i_2} x_{i_2}^2 + \cdots + a_{i_\ell} x_{i_\ell}^2, *, \ldots, *) - - - - - - - - - - \cdots$$

另外还有 $l-1$ 个虚线步。这使第 i_1 个槽位等于 b_n，所需实步至多 n 步、虚线步至多 $n-1$ 步。类似地，使另一个槽位等于 b_{n-1}，至多需要 $n-1$ 个实步和 $n-2$ 个虚线步，依此类推。最终，对于某个 $\sigma \in S_n$，我们得到 $(b_{\sigma(1)}, \ldots, b_{\sigma(n)})$；它又可以通过至多 $3(n-1)$ 个实步和 $2(n-1)$ 个虚线步连接到 $(b_1, \ldots, b_n)$。总而言之，$(a_1, \ldots, a_n)$ 与 $(b_1, \ldots, b_n)$ 之间至多相隔 $\frac{(n+1)n}{2} + 3(n-1)$ 个实步，以及 $\frac{n(n-1)}{2} + 2(n-1)$ 个虚线步。也就是说，总计至多 $n^2 + 5(n-1)$ 步。□

按照与上述相同的证明方法，可以得到以下稍微更具技术性的表述：

定理 2.4. 若 $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \simeq \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$，则对于任意 $k \in \{1, \ldots, n-1\}$，存在 $c_{k+1}, \ldots, c_n \in F^\times$，使得 $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \simeq \langle b_1, \ldots, b_k, c_{k+1}, \ldots, c_n \rangle$，并且 $(a_1, \ldots, a_n)$ 可通过一条链连接到 $(b_1, \ldots, b_k, c_{k+1}, \ldots, c_n)$；该链由至多 $k(2n-k+1)/2 + 3k$ 个实步和至多 $k(2n-k-1)/2 + 2k$ 个虚线步组成。总共至多需要 $k(2n-k) + 5k = 2nk - k^2 + 5k$ 步。

证明。最多需要 $n + (n-1) + \cdots + (n-k+1) = k(2n-k+1)/2$ 个实步和 $(n-1) + (n-2) + \cdots + (n-k) = k(2n-k-1)/2$ 个虚线步，才能得到一个 n 元组，其中某处出现了 $b_1, \ldots, b_k$。然后最多需要 k 次交换，将这些槽位移至前 k 个位置。因此结论成立。□

3. 符号长度的应用

设 m 为自然数，F 为一个特征不等于 2 且包含本原 2^{m+1} 次单位根的域。按照 [Bae19], , 我们定义：

定义 3.1。对于给定的自然数 n，令

$$A = \{(a_1, \ldots, a_{2n}) : a_1, \ldots, a_{2n} \in F^\times\},$$

$$B = \{(b_1, \ldots, b_{2n+2}) : b_1, \ldots, b_{2n+2} \in F^\times \wedge \prod_{i=1}^{2n+2} b_i \in (F^\times)^2\},$$

$\phi : A \to B$，$\phi(a_1, \ldots, a_{2n}) = (b_1, \ldots, b_{2n+2})$，其中

$$b_1 = 1, b_{2n+2} = \prod_{j=1}^{2n} a_j,$$

并且对于所有 $i \in \{1, \ldots\ldots, n\}$，我们有

$$b_{2i} = a_{2i-1} \prod_{j=1}^{2i-1} b_j^{-1},$$

$$b_{2i+1} = a_{2i} \prod_{j=1}^{2i-1} b_j^{-1}.$$

并令 $\psi : B \to A$，$\psi(b_1, \ldots, b_{2n+2}) = (a_1, \ldots, a_{2n})$，其中对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 均有

$$a_{2i-1} = b_{2i} \prod_{j=1}^{2i-1} b_j,$$

$$a_{2i} = b_{2i+1} \prod_{j=1}^{2i-1} b_j.$$

注 3.2. 复合 $\psi \circ \phi$ 是 A 上的恒等映射 Id。

证明。取 $(a_1, \ldots, a_{2n}) \in A$。那么 $(b_1, \ldots, b_{2n+2}) = \phi(a_1, \ldots, a_{2n})$ 的定义如下:

$$b_1 = 1, b_{2n} = \prod_{j=1}^{2n} a_j,$$

且对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned} b_{2i} &= a_{2i-1} \prod_{j=1}^{2i-1} b_j^{-1}, \\ b_{2i+1} &= a_{2i} \prod_{j=1}^{2i-1} b_j^{-1}. \end{aligned}$$

分离出各个 a 项后，我们得到，对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$，有

$$\begin{aligned} a_{2i-1} &= b_{2i} \prod_{j=1}^{2i-1} b_j, \\ a_{2i} &= b_{2i+1} \prod_{j=1}^{2i-1} b_j. \end{aligned}$$

这意味着 $\psi(b_1, \ldots, b_{2n+2}) = (a_1, \ldots, a_{2n})$，因此复合映射 $\psi \circ \phi$ 是 A 上的恒等映射 Id。

□

定义 3.3。设 $a_1, \ldots, a_{2n} \in F^\times$。我们定义如下张量积

$$C_m(a_1, \ldots, a_{2n}) = (a_1, a_2)_{2^m,F} \otimes \cdots \otimes (a_{2n-1}, a_{2n})_{2^m,F}.$$

注 3.4. 由于对于 $\pi = \langle b_1, \ldots, b_{2n+2} \rangle \in I^2F$，克利福德代数 $Cl(\pi)$ 与 $(b_1b_2, b_1b_3)2,_F \otimes (b_1b_2b_3b_4, b_1b_2b_3b_5)2,_F \otimes \cdots \otimes (b_1 \ldots b_{2n-1}b_{2n}, b_1 \ldots b_{2n-1}b_{2n+1})2,_F$ 布劳尔等价，代数 $C_l(\psi(b_1, \ldots, b_{2n+2}))$ 实际上与 $\langle b_1, \ldots, b_{2n+2} \rangle$ 的克利福德代数布劳尔等价，对任意 $(b_1, \ldots, b_{2n+2}) \in B$ 均成立。后一条件保证了 $\langle b_1, \ldots, b_{2n+2} \rangle$ 属于 I^2F。还需注意，对于任意 $k < m$ 和 $w \in A$，$C_m(w)^{\otimes 2^k}$ 与 $C_{m-k}(w)$ 布劳尔等价。

For $\varphi = (b_1, \ldots, b_{2n+2}) \in B$, let $\langle\varphi\rangle$ denote the form $\langle b_1, \ldots, b_{2n+2}\rangle$.

引理 3.5. 若 B 中两个向量 v 和 w 由任一类型的边连接，则 $C_m(\psi(v)) \otimes C_m(\psi(w))^{op}$ 在 $_{2^{m-1}}Br(F)$ 中布劳尔等价于一个符号。

证明。写作 $v = (b_1, \dots, b_{2n+2})$。令 $(a_1, \dots, a_{2n}) = \psi(v)$，且 $(c_1, \dots, c_{2n}) = \psi(w)$。假设 w 与 v 相连。则 $w = (b_1, \dots, b_{k-1}, \alpha^2 b_k, b_{k+1}, \dots, b_{2n+2})$，其中某个 $k \in \{1, \dots, 2n+2\}$ 且 $\alpha \in F^\times$。若 $k = 1$，则对所有 i，$c_i = \alpha^2 a_i$，因此 $C_m(\psi(w)) = (c_1, c_2)_{2^m,F} \otimes \cdots \otimes (c_{2n-1}, c_{2n})_{2^m,F} = (\alpha^2 a_1, \alpha^2 a_2)_{2^m,F} \otimes \cdots \otimes (\alpha^2 a_{2n-1}, \alpha^2 a_{2n})_{2^m,F} = C_m(\psi(v)) \otimes (\alpha^2, a_2 a_3 \cdots a_{2n} a_{2n-1})_{2^m,F}$。因此，$C_m(\psi(v))^{op} \otimes C_m(\psi(w))$ 与 $(\alpha, a_2 a_3 \cdots a_{2n} a_{2n-1})_{2^m,F}$ 布劳尔等价。类似地，对于 $k \geqslant 2$ w，我们也有 $C_m(\psi(v))^{op} \otimes C_m(\psi(w)) \sim \mathrm{Br}(\alpha^2, *)_{2^m,F} \sim \mathrm{Br}(\alpha, *)_{2^{m-1},F}$，其中 $*$ 是 b 及其逆元的某个乘积。

现在假设 v 和 w 由一条虚线边连接。那么，对于某个 $1 \leqslant k < l \leqslant 2n+2$，$w = (b_1, \dots, b_{k-1}, b_k(1 + b_\ell b_k), b_{k+1}, \dots, b_{\ell-1}, b_\ell(1 + b_\ell b_k), b_{\ell+1}, \dots, b_n)$。这里有几种情况需要讨论，其中大多数彼此相似。我们将明确展示其中两种情况，以说明论证思路。

我们首先考虑 k 和 l 均为奇数，且 $3 \leqslant k < l \leqslant 2n+1$ 的情形。只要 $l \leqslant 2n+1$，k 或 l 为偶数，或 $k = 1$ 的情形也可用类似的论证（只需稍作调整）。在此情形下，当 $i \leqslant k-2$ 时，$c_i = a_i$；当 $k-1 \leqslant i \leqslant l-2$ 时，$c_i = (1 + b_\ell b_k) a_i$；当 $i \geqslant l-1$ 时，$c_i = (1 + b_\ell b_k)^2 a_i$。因此，$C_m(\psi(w)) = (a_1, a_2)_{2^m,F} \otimes \cdots \otimes (a_{k-2}, (1 + b_\ell b_k) a_{k-1})_{2^m,F} \otimes ((1 + b_\ell b_k) a_k, (1 + b_\ell b_k) a_{k+1})_{2^m,F} \otimes \cdots \otimes ((1 + b_\ell b_k) a_{\ell-2}, (1 + b_\ell b_k)^2 a_{\ell-1})_{2^m,F} \otimes \cdots \otimes ((1 + b_\ell b_k)^2 a_{2n-1}, (1 + b_\ell b_k)^2 a_{2n})_{2^m,F}$。这与 $C_m(\psi(v)) \otimes ((1 + b_\ell b_k), a^{-1} k_{-2} \cdot a_{k+1} a_k \cdot \ldots \cdot a_{\ell-3} a_{\ell-4} a_{\ell-1})_{2^m,F} \otimes ((1 + b_\ell b_k)^2, \beta)_{2^m,F}$ 布劳尔等价，其中某个 $\beta \in F^\times$。由于对某个 $\gamma \in F^\times$，$a^{-1} k_{-2} \cdot a_{k+1} a_k \cdot \ldots \cdot a_{\ell-3} a_{\ell-4} a_{\ell-1}$ 是 $\gamma^2 b_\ell b_k$，因此 $C_m(\psi(w))$ 与 $C_m(\psi(v)) \otimes (1 + b_\ell b_k, b_\ell b_k)_{2^m,F} \otimes (1 + b_\ell b_k, \beta\gamma)_{2^{m-1},F}$ 布劳尔等价。根据假设，F 包含一个本原 2^{m+1} 次单位根，因此 $(1 + b_\ell b_k, b_\ell b_k)_{2^m,F} = (1 + b_\ell b_k, -b_\ell b_k)_{2^m,F}$ 分裂，因此 $C_m(\psi(w)) \otimes C_m(\psi(v))^{op}$ 与 $(1 + b_\ell b_k, \beta\gamma)_{2^{m-1},F}$ 布劳尔等价。

现在考虑 $l = 2n+2$ 的情形，这种情形稍有特殊。为简单起见，假设 k 仍为奇数且 $k \geqslant 3$。于是，当 $i \leqslant k-2$ 时，$c_i = a_i$；当 $k-1 \leqslant i$ 时，$c_i = (1 + b_{2n+2} b_k) a_i$。因此，$C_m(\psi(w)) = (a_1, a_2)_{2^m,F} \otimes \cdots \otimes (a_{k-2}, (1 + b_{2n+2} b_k) a_{k-1})_{2^m,F} \otimes ((1 + b_{2n+2} b_k) a_k, (1 + b_{2n+2} b_k) a_{k+1})_{2^m,F} \otimes \cdots \otimes ((1 + b_{2n+2} b_k) a_{2n-1}, (1 + b_{2n+2} b_k) a_{2n})_{2^m,F}$。这与 $C_m(\psi(v)) \otimes (1 + b_{2n+2} b_k, a^{-1} k_{-2} a_{k+1} a_k \cdots a_{2n} a_{2n-1})_{2^m,F}$ 布劳尔等价。由于 b_{2n+2} is $\alpha^2 b_1 b_2 \dots b_{2n-1}$ 对某个 $\alpha \in F^\times$ 成立，因此对某个 $\beta \in F^\times$，有 $a^{-1} k_{-2} a_{k+1} a_k \cdots a_{2n} a_{2n-1} = \beta^2 b_{2n+2} b_k$，故 $C_m(\psi(w))$ 与 $C_m(\psi(v)) \otimes (1 + b_{2n+2} b_k, b_{2n+2} b_k)_{2^m,F} \otimes (1 + b_{2n+2} b_k, \beta^2)_{2^m,F}$ 布劳尔等价。同样，$(1 + b_{2n+2} b_k, b_{2n+2} b_k)_{2^m,F}$ 是分裂的，因此 $C_m(\psi(w)) \otimes C_m(\psi(v))^{op}$ 与 $(1 + b_{2n+2} b_k, \beta)_{2^{m-1},F}$ 布劳尔等价。□

我们的主定理由前述引理推出。

定理 3.6。设 $v = (a_1, \ldots, a_{2n}) \in F^{2n}$。假设 $\phi(v)$ 通过 r 步与 $w \in F^{2n+2}$ 相连，且 $C_m(\psi(w))$ 与 s 个次数为 2^{m-1} 的循环代数的张量积布劳尔等价。那么，${}_{2^{m-1}}\mathrm{Br}(F)$ 中 $C_m(v)$ 的符号长度至多为 $r + s$。

证明。设 $u_0 = \phi(v)$、$u_1, \ldots\ldots u_{r-1}$、$u_r = w$ 是连接 $\phi(v)$ 与 w 的步（完整或虚线）。$C_m(v) = C_m(\psi(u_0))$ 的布劳尔类可分解为以下各类的张量积:

$$\begin{array}{ccc} C_m(\psi(u_0)) & \otimes & C_m(\psi(u_1))^{op} \\ C_m(\psi(u_1)) & \otimes & C_m(\psi(u_2))^{op} \\ & \vdots & \\ C_m(\psi(u_{r-1})) & \otimes & C_m(\psi(u_r))^{op} \\ C_m(\psi(u_r)). & & \end{array}$$

最后一类布劳尔等价于 s 个次数为 2^{m-1} 的循环代数的张量积；根据引理 3.5，其余各类分别布劳尔等价于次数为 2^{m-1} 的循环代数。因此结论成立。□

引理 3.7。若 $\varphi = (ae, be, bf, abe, abf, ce, cf, de, df, cde, cdf, af)$，则代数 $C_m(\psi(\varphi))$ 布劳尔等价于 $(a^6b^8c^3d^2e^{10}f^5, fe)_{2^{m-1}}$。

证明。经过直接计算可得，$C_m(\psi(\varphi))$ 为

$$(abe^2, abef)_{2^m,F} \otimes (a^2b^3e^3f, a^2b^3e^2f^2)_{2^m,F} \otimes (a^3b^4ce^4f^2, a^3b^4ce^3f^3)_{2^m,F}$$
$$\otimes (a^3b^4c^2de^5f^3, a^3b^4c^2de^4f^4)_{2^m,F} \otimes (a^3b^4c^3d^3e^6f^4, a^3b^4c^3d^3e^5f^5)_{2^m,F}.$$

对上面的 5 项分别使用恒等式 $(a, b)_{2^m,\,F} = (a, a^{-1}b)_{2^m,\,F}$，然后将它们相乘（因为它们有相同的第二槽位，即 fe），可得它等价于 $(a^{12}b^{16}c^6d^4e^{20}f^{10}, \bar{f}e)_{2^m,\,F}$，而这实际上就是 $(a^6b^8c^3d^2e^{10}f^5, fe)_{2^{m-1},\,\bar{F}}$，符合要求。□

定理 3.8。如果 A 是 5 个次数为 2^m的循环代数的张量积，且 A 的指数整除 2^{m-1}，那么 A 布劳尔等价于至多 200 个次数为 2^{m-1}的循环代数的张量积。

证明。设 $A = (\alpha_1,\beta_1)_{2^m}, F \otimes \cdots \otimes (\alpha_5,\beta_5)_{2^m}, F$。令 $\pi = \phi(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_5, \beta_5)$。因此，$A = C_m(\psi(\pi))$。根据注 3.4，$A^{2^{m-1}} \sim_{Br} (\alpha_1,\beta_1)_{2,F} \otimes \cdots \otimes (\alpha_5,\beta_5)_{2,F}$。二次型 $\langle\pi\rangle$ 属于 I^2F，但由于其克利福德代数与 $(\alpha_1,\beta_1)_{2,F} \otimes \cdots \otimes (\alpha_5,\beta_5)_{2,F}$布劳尔等价，而后者与 $A^{2^{m-1}}$ 布劳尔等价，且 $A^{2^{m-1}}$是分裂的，因此 $\langle\pi\rangle$ 实际上属于 I^3F。由于它是 I^3F 中的一个 12 维二次型，根据菲斯特定理，([Pfi66])，它与下式等距

$$\langle a, b, ab, c, d, cd\rangle \otimes \langle e, f\rangle \simeq \langle ae, be, bf, abe, abf, ce, cf, de, df, cde, cdf, af\rangle$$

其中 a、b、c、d、e、f $\in F^\times$。因此，π 与下式相连

$$\varphi = (ae, be, bf, abe, abf, ce, cf, de, df, cde, cdf, af)$$

根据定理 2.3，可通过至多 $12^2 + 5\cdot(12-1) = 199$ 步组成的链。根据引理 3.7，$C_m(\psi(\varphi))$ 与一个次数为 2^{m-1} 的循环代数布劳尔等价；再根据定理 3.6，我们得出 $A = C_m(\psi(\pi))$ 与至多 200 个次数为 2^{m-1} 的循环代数的张量积布劳尔等价。

□

现在，我们用这一结果来求 ${}_{2^{m-1}}\mathrm{Br}(F)$ 中由次数为 2^m 的 6 个循环代数的张量积表示的类的符号长度上界。

根据 [Bae19，Page 8]，，$I^3(F)$ 中每个 14 维二次型 q 都等距于

$$\langle T(u), T(u)^{-1}N(u), T(v), T(v)^{-1}N(v), T(uv), T(uv)^{-1}N(uv)^{-1}, T(w), T(w)N(w),$$
$$T(uw), T(uw)N(uw), T(vw), T(vw)N(vw), T(uvw), T(uvw)N(uvw)\rangle,$$

其中，T 是迹型，N 是某个二次域扩张 $F[\sqrt{d}]/F$ 的范数型，且 u、v、$w \in F[\sqrt{d}]^\times$；或者等于 $\langle 1, \ 1\rangle \perp q'$，其中 q' 是一个 12 维二次型。注意，我们假设 $-1 \in (F^\times)^2$，，且初始 6 个槽位的乘积（第一种情形）为 1，而前两个槽位的乘积（第二种情形）为 1。

定理 3.9. 若 A 是 6 个次数为 2^m 的循环代数的张量积，且 A 的指数整除 2^{m-1}，则 A 布劳尔等价于至多 362 个次数为 2^{m-1} 的循环代数的张量积。

证明. 设 $A = (\alpha_1, \beta_1)_{2^m,F} \otimes \cdots \otimes (\alpha_6, \beta_6)_{2^m,F}$。令 $\pi = \phi(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_6, \beta_6)$。现在，$\langle\pi\rangle$ 是 F 上 I^3 中的一个 14 维形式。因此，根据定理 2.4，π 与以下对象之一相连：

$$\varphi = (T(u), T(u)^{-1}N(u), T(v), T(v)^{-1}N(v), T(uv), T(uv)^{-1}N(uv)^{-1}, c_7, \ldots, c_{14})$$

通过至多 $6(2\cdot 14-6)+5\cdot 6 = 162$ 步，其中 u、$v \in F[\sqrt{d}]^\times$，且 $c_7, \ldots, c_{14} \in F^\times$；或者通过至多 $2(2\cdot 14-2)+5\cdot 2 = 62$ 步与 $\varphi = (1, 1, c_3, \ldots, c_{14})$ 相连，其中 $c_3, \ldots, c_{14} \in F^\times$。两种情况下，$C_m(\psi(\varphi))$ 都是 5 个次数为 2^m 且指数整除 2^{m-1} 的循环代数的乘积：第一种情况下是因为

$$\psi(\varphi) = (N(u), T(u)T(v), N(u)N(v), N(u)T(v)T(uv), N(u)N(v)N(uv)^{-1}, \ldots)$$
$$= (N(u), T(u)T(v), N(u)N(v), N(u)T(v)T(uv), 1, \ldots),$$

这意味着 $C_m(\psi(\varphi)) = (N(u), T(u)T(v))_{2^m,F} \otimes (N(u)N(v), N(u)T(v)T(uv))_{2^m,F} \otimes (1, *)_{2^m,F} \otimes \ldots\ldots$，也就是说，$C_m(\psi(\varphi))$ 的分解中六个循环代数里有一个是分裂的；第二种情形的论证类似（而且更简单）。因此，$C_m(\psi(\varphi))$ 布劳尔等价于至多 200 个

个次数为 2^{m-1} 的循环代数的张量积。因此，A 布劳尔等价于至多 $200 + 162 = 362$ 个次数为 2^{m-1} 的循环代数的张量积。□

致谢

作者非常感谢审稿人认真审阅稿件，并提出许多有益的意见和建议。

参考文献

[Bae19] Sanghoon Baek. 四元数上和为零的链等价性。变换群，24(3):713–720，2019。[CFM22] Adam Chapman、Mathieu Florence 和 Kelly McKinnie。符号代数的公共分裂域。manuscripta math.，2022。在线优先发表。[Cha22] Adam Chapman。米尔诺 K 群中元素的符号长度。Algebra i Analiz，(4):214–221，2022。[EKM08] Richard Elman、Nikita Karpenko 和 Alexander Merkurjev。二次型的代数与几何理论，美国数学学会专题论文集第 56 卷。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2008。[Lam05] T. Y. Lam。域上的二次型导论，数学研究生教程第 67 卷。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2005。[MS82] A. S. Merkur′ev 和 A. A. Suslin。塞韦里-布劳尔簇的 K 上同调与范数剩余同态。Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.，46(5):1011–1046，1135–1136，1982。[Pfi 66] Albrecht Pfister。任意域上的二次型。Invent. Math.，1:116–132，1966。[Siv12] A. S. Sivatski。双四元数代数的链引理。J. Algebra，350(1):170–173，2012。[Tig83] J.-P. Tignol。小指数的循环代数。Proc. Amer. Math. Soc.，89(4):587–588，1983。

特拉维夫-雅法学术学院计算机科学学院，Rabenu Yeruham 街，邮政信箱 8401，雅法，6818211，以色列。电子邮箱：adam1chapman@yahoo.com

巴伊兰大学数学系，拉马特甘，55200。电子邮箱：ilan7362@gmail.com