arXiv:2304.07659v1 [math.GT] 16 Apr 2023

组合的与规范理论泡沫求值函子并不相同

DAVID BOOZER

Abstract. Kronheimer 和 Mrowka 运用规范理论定义了一个函子 $J^\sharp$，它从$\mathbb{R}^3$ 中的网的范畴映射到二元域上的有限维向量空间范畴。他们还提出了一种可能的组合替代方案 $J^\flat$，用于 $J^\sharp$；Khovanov 和 Robert 证明了该方案在平面网的一个子范畴上是良定义的。我们给出了一个反例，表明函子 $J^\sharp$ 在平面网子范畴上的限制与 $J^\flat$ 并不相同。

1. 引言 Introduction

Kronheimer 和 Mrowka 概述了一种新方法，它有望带来四色定理的首个非计算机辅助证明 [5]。他们的方法依赖于一个函子 $J^\sharp$，该函子由他们运用规范理论定义，从 $\mathbb{R}^3$ 中的网和 $\mathbb{R}^4$ 中的泡沫映射到二元域 $\mathbb{F}$上的有限维向量空间范畴。网是无向三价图，而泡沫是一种网之间的奇异协边，其具体形式见 [5]。

四色定理可以重新表述为关于网的命题。网的一条边 e 若移除 e 会增加网的连通分支数，则称其为桥。网的泰特着色 是对网的边进行三着色，且任一给定顶点上相邻的边颜色均不相同。给定一个网 K，其泰特数 Tait(K)是 K的泰特着色数。四色定理等价于如下命题：每个无桥平面网都至少存在一种泰特着色。

函子 $J^\sharp$ 将向量空间 $J^\sharp(K)$与网 K 关联起来，其中网属于 $\mathbb{R}^3$。若存在一个光滑嵌入于 $\mathbb{R}^3$ 的二维球面，它与 K 横截相交于一点，且该点位于 e上，则称网 K （属于 $\mathbb{R}^3$ ）的一条边 e 为嵌入桥 。Kronheimer 和 Mrowka 证明了以下非消失定理：

定理1.1。 *(Kronheimer–Mrowka* [5, 定理1。1]*)* 对于 $\mathbb{R}^3$中的网 K，向量空间 $J^\sharp(K)$ 为零，当且仅当 K 具有一个嵌入桥。

基于一些简单的例子以及 $J^\sharp$的一般性质，他们提出了以下猜想，而由定理1.1可知，该猜想蕴含四色定理：

猜想1.2。 *(Kronheimer–Mrowka* [5, 猜想1。2]*)* 对于位于平面 $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$中的网 K，有维数 $J^\sharp(K) = \mathrm{Tait}(K)$。

Kronheimer 和 Mrowka 还提出了一种可能的 $J^\flat$ 组合替代 $J^\sharp$，他们通过一组规则来定义它，并猜想这些规则会导出一个良定义的函子 [5, 第8节。3]。Khovanov 和 Robert 后来证明，对于 $\mathbb{R}^3$ 中的任意网以及 $\mathbb{R}^4$中的泡沫，$J^\flat$ 并非良定义；但若将范围限制在 $\mathbb{R}^2$ 中的网和 $\mathbb{R}^3$ [2]中的泡沫所构成的子范畴内，则它是良定义的。我们将这个子范畴称为平面网的范畴。值得注意的是，平面网恰好是猜想1.2所涉及的对象。根据 Khovanov 和 Robert [2], 以及 Kronheimer 和 Mrowka [4], 的结果，对于任意平面网 K，有

$$\dim J^\flat(K) \leq \mathrm{Tait}(K) \leq \dim J^\sharp(K), \tag{1}$$

而对于一类特殊的可约平面网（在 [5]中也称为简单网），这三个整数相等：

$$\dim J^\flat(K) = \mathrm{Tait}(K) = \dim J^\sharp(K).$$

因此，若能证明 $J^\sharp$ 在平面网子范畴上的限制确实与 $J^\flat$ 是同一个函子，就能证明猜想1.2，进而证明四色定理。

因此，理解函子 $J^\flat$ 与 $J^\sharp$之间的关系颇有意义。通过考察目标范畴不同的相关函子，可以对这些函子有所了解。在 [4], Kronheimer

Date: 2023年4月18日。

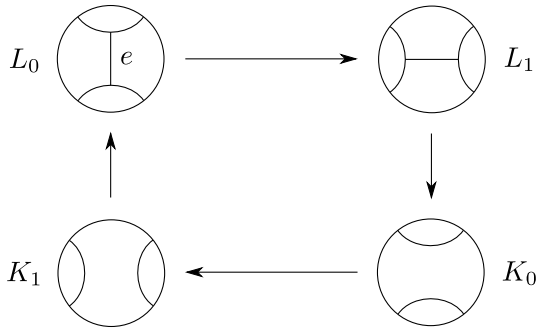

FIGURE 1. 给定一个平面网 L_0 和所选的边 e，我们可以构造一个平面网方形 L_0、L_1、K_0 和 K_1，它们由 $\mathbb{R}^3$ 中的标准泡沫协边关联。这些网在所示的 2-球之外完全相同。

和 Mrowka 通过引入一套局部系数，并定义一个从 $\mathbb{R}^3$ 中的网的范畴到环 $\mathbb{F}[T_1^{\pm 1}, T_2^{\pm 1}, T_3^{\pm 1}]$上的模的范畴的函子，证明了方程（1）中的第二个不等式。在 [2], Khovanov 和 Robert 将基域 $\mathbb{F}$ 扩展为分次环 $R = \mathbb{F}[E_1, E_2, E_3]$，其中

$$\deg(E_1) = 2, \qquad \deg(E_2) = 4, \qquad \deg(E_3) = 6,$$

并定义一个从平面网范畴到 R 上的模范畴的函子。通过沿环同态 $R \to S$ 基变换到环 S，可以得到其他函子。正如 [1] 推论 3.1 所指出的，考虑这类基变换，即可直接由 [2]命题 4.18 得出方程 (1) 中的第一个不等式。

我们在此考虑从 R 到分次环 $\mathbb{F}[E]$ 的基变换，其中 $\deg(E) = 6$，所用的环同态 $R \to \mathbb{F}[E]$ 定义为

$$E_1, E_2 \mapsto 0, \qquad E_3 \mapsto E.$$

由此，我们得到一个从平面网范畴到 $\mathbb{F}[E]$ 上的模范畴的函子。我们将此函子记为 $\langle - \rangle$。给定一个网 K，我们称相应的 $\mathbb{F}[E]$-模 $\langle K \rangle$ 为 K 的 状态空间。根据 [2] 命题 4.18，状态空间 $\langle K \rangle$ 是一个秩为 Tait(K) 的自由分次模。

如 [2] 第 4.3 节所述，给定一个平面网 L_0 和一条边 e，我们可以构造一个由平面网 L_0、L_1、K_0和 K_1 组成的方形，它们通过 $\mathbb{R}^3$ 中的标准泡沫协边相互关联（见图 1）。根据[2] 引理 4.11，该方形在函子 $\langle - \rangle$ 下的像是一个 4周期复形：

$$\begin{array}{ccc} \langle L_0 \rangle & \xrightarrow{1} & \langle L_1 \rangle \\ {\scriptstyle 1}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ \langle K_1 \rangle & \xleftarrow{2} & \langle K_0 \rangle. \end{array} \tag{2}$$

这些整数表示线性映射的次数。如果我们进一步通过环同态 $\mathbb{F}[E] \to \mathbb{F}$, $E \mapsto 0$ 将基变换到基域 $\mathbb{F}$，就得到组合函子 $J^\flat$ 的一个4周期复形：

$$\begin{array}{ccc} J^\flat(L_0) & \xrightarrow{1} & J^\flat(L_1) \\ {\scriptstyle 1}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ J^\flat(K_1) & \xleftarrow{2} & J^\flat(K_0). \end{array} \tag{3}$$

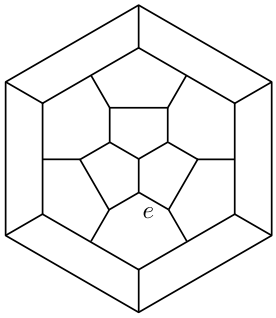

FIGURE 2. 不可约网 W_4。我们考虑与所示边 e 对应的 4周期复形。

在 [3] 引理10.2中，Kronheimer 和 Mrowka 描述了规范理论的函子 $J^\sharp$ 的一个类似的4周期复形：

$$\begin{array}{ccc} J^\sharp(L_0) & \longrightarrow & J^\sharp(L_1) \\ \uparrow & & \downarrow \\ J^\sharp(K_1) & \longleftarrow & J^\sharp(K_0). \end{array} \tag{4}$$

请注意， $J^\flat$ 的向量空间是分次的，而 $J^\sharp$ 的向量空间是非分次的。Kronheimer 和 Mrowka 证明了以下结果：

定理1.3。 *(Kronheimer–Mrowka* [3, 引理10。3]*)* 在 $J^\sharp$的 *4*周期复形 *(4)* 中，位于直径两端顶点的同调群相等。

定理1.3 的证明依赖于这样一个事实： $J^\sharp$ 的 4周期复形 (4) 可以扩展为一个八面体图，其中包含另外两个非平面网。由于非平面网上未定义 $J^\flat$ ，因此自然会问，定理1.3 的类似结论是否适用于 $J^\flat$。我们通过给出一个具体的反例，对此问题作出否定回答：

定理1.4. 对于图*2*中所示、并指定了边 e的（不可约）网 $L_0 = W_4$ ，当 $J^\flat$ 为 K_0 时，复形*(3)*的同调为零；而当 $J^\flat$ 为 L_0时，同调非零。

特别是，定理1.3和定理1.4表明，函子 $J^\sharp$ 在平面网子范畴上的限制不同于函子 $J^\flat$。我们强调，这一结果并未推翻猜想1.2，因此也不会使Kronheimer和Mrowka证明四色定理的策略失效。

2. THEORETICAL RESULTS

考虑这样的情形： L_0 是不可约的，而 L_1、 K_0和 K_1 均为可约的。给定复形(2)中 $\langle -\rangle$对应状态空间的基，我们可以将复形中的线性映射表示为相对于这些基的 $\mathbb{F}[E]$值矩阵。通过对这些矩阵进行Smith分解，可以将复形中的每个状态空间分解为一个核（以下标 k表示）和一个补空间（以下标 c表示）：

$$\begin{array}{ccc} \langle L_0\rangle_k \oplus \langle L_0\rangle_c & \xrightarrow{1} & \langle L_1\rangle_k \oplus \langle L_1\rangle_c \\ {\scriptstyle 1}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ \langle K_1\rangle_k \oplus \langle K_1\rangle_c & \xleftarrow{2} & \langle K_0\rangle_k \oplus \langle K_0\rangle_c. \end{array} \tag{5}$$

我们有：

定理 2.1。 在 *4*周期复形 *(2)* 中，同调群是 E*-*挠的。

证明。 这可直接由 [2] 命题 4.12 以及命题 4.17 陈述后的注释得出，它们表明，4周期复形 (2) 在对 $\mathbb{F}[E] \to \mathbb{F}[E, E^{-1}]$ 局部化后变为正合复形。□

根据定理 2.1，每个状态空间的补空间都映射到后续状态空间的核中的一个满秩子模。

如 [1], 所述，我们有一种算法，可以为可约网络的状态空间构造基，并且可以使用计算机来构造一个满秩的子模 M of $\langle L_0\rangle$。子模 M 与实际状态空间 $\langle L_0\rangle$ 之间唯一可能的差异是，M 的齐次生成元相对于$\langle L_0\rangle$中对应的齐次生成元，次数可能向上平移 $\deg(E) = 6$ 的整数倍。因此，我们得到一个类似于 (5) 的周期复形，但将 $\langle L_0\rangle$ 替换为 M:

$$\begin{array}{ccc} M_k \oplus M_c & \xrightarrow{1} & \langle L_1\rangle_k \oplus \langle L_1\rangle_c \\ {\scriptstyle 1}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ \langle K_1\rangle_k \oplus \langle K_1\rangle_c & \xleftarrow{2} & \langle K_0\rangle_k \oplus \langle K_0\rangle_c. \end{array} \tag{6}$$

原则上，$\langle K_1\rangle \to \langle L_0\rangle$ 的像不一定包含在 M中，但若不包含，我们只需将 M 替换为由 M 及其像张成的模。根据定理 2.1，复形 (6) 确定了复形 (5) 中各个模的秩。特别地，

$$\operatorname{rank}(\langle L_0\rangle_k) = \operatorname{rank}(M_k), \qquad \operatorname{rank}(\langle L_0\rangle_c) = \operatorname{rank}(M_c).$$

通过计算复形 (6) 中各模的量子秩，我们可以大幅限制 $\langle -\rangle$ 对应的复形 (5) 的可能形式，进而大幅限制 $J^\flat$ 对应的复形 (3) 的同调的可能形式。

函子 $\langle -\rangle$ 与 $J^\flat$ 之间的关系将在 [1, 第 3] 节中讨论。我们简要总结所需的结果。给定一个平面网 K，我们将从空网络到 K 的泡沫余边界 $\mathbb{R}^3$ 称为一个半泡沫 H，其边界为 K。边界为 K 的半泡沫 H 确定了元素 $\langle H\rangle \in \langle K\rangle$ 和 $J^\flat(H) \in J^\flat(K)$。如果 $\langle H\rangle$ 为零，那么 $J^\flat(H)$ 也必为零；但原则上，$J^\flat(H)$ 为零而 $\langle H\rangle$ 非零的情况是可能的，此时我们称 H 为消失的 半泡沫。状态空间$\langle K\rangle$ 由边界为 K 的 $\operatorname{Tait}(K)$ 半泡沫自由生成。由于某些生成半泡沫可能是消失的，因此我们有

$$\dim J^\flat(K) \le \operatorname{rank}(\langle K\rangle) = \operatorname{Tait}(K), \qquad \operatorname{qdim} J^\flat(K) \le \operatorname{qrank}(\langle K\rangle),$$

等号在不存在消失生成元的情况下成立。对于 K 可约的情形，$\langle K\rangle$不存在消失生成元。是否存在具有消失生成元的不可约网 K，仍是一个开放问题。对于每个次数为 d_1 的消失生成元 $\langle H_1\rangle$，必定存在相应的次数为 d_2 的消失生成元 $\langle H_2\rangle$，使得 $d_1 + d_2$ 是 $\deg(E) = 6$ 的正整数倍。如果 $\langle K\rangle$ 不存在消失生成元，那么对于 $\langle K\rangle$ 中每个次数为 d 的生成元，都有一个次数为 $-d$ 的对应生成元，因此 $\operatorname{qrank}(\langle K\rangle)$ 关于 $q \to q^{-1}$ 对称。

类似的考量也适用于与泡沫协边对应的线性映射。考虑平面网 K 与 L 之间的泡沫余边界，以及相应的线性映射 $\langle K\rangle \to \langle L\rangle$ 和 $J^\flat(K) \to J^\flat(L)$。设 H 是一个边界为 K 的半泡沫，且 $\langle H\rangle$ 在 $\langle K\rangle \to \langle L\rangle$ 下的像可表示为 Ex，其中 $x \in \langle L\rangle$。那么，$J^\flat(H)$ 在 $J^\flat(K) \to J^\flat(L)$ 下映射为零。

3. Computer results

我们取 L_0 为图2所示的（不可约）网 W_4，并采用图中标出的边 e的选取。由此得到的网 L_1、K_0和 K_1 均为可约网。我们使用 [1] 中介绍的计算机程序，计算复形（6）中各模的秩和量子秩，并将结果列于表1。括号中的表达式表示消失生成元的次数；从 $\mathbb{F}[E]$ 基变换到 $\mathbb{F}$ 并令 $E = 0$时，这些生成元映射为零。特别地，对于 M，有两个消失生成元，其次数分别为1和5。由于 $\operatorname{Tait}(L_0) = \operatorname{秩}(M) = 180$，两个消失生成元这一事实给出了 $\dim J^\flat(L_0)$ 至少为178的下界。状态空间 $\langle L_0\rangle$有以下三种可能情况：

(1) 没有缺失生成元。在这种情况下，$\langle L_0\rangle = M$且 $\dim J^\flat(L_0) = 178$。由于 $\dim J^\sharp(L_0) \ge \operatorname{Tait}(L_0) = 180$，我们已经知道这种情况与 $J^\flat = J^\sharp$ 不一致。(2) 缺少一个次数为 -1 的生成元。在这种情况下，M 是 $\langle L_0\rangle$ 的真子模，其中 M 中次数为 5 的消失生成元相对于 $\langle L_0\rangle$ 中缺失的次数为 -1 的生成元向上移位，并且 $\dim J^\flat(L_0) = 180$。

模的秩 量子秩

M	180	$q^{-6}+11q^{-4}+10q^{-3}+29q^{-2}+19q^{-1}+38+19q+29q^{2}+10q^{3}+11q^{4}+q^{6}+(q+q^{5})$
M_k	72	$2q^{-4}+q^{-3}+11q^{-2}+3q^{-1}+19+3q+18q^{2}+3q^{3}+9q^{4}+q^{6}+(q+q^{5})$
M_c	108	$q^{-6}+9q^{-4}+9q^{-3}+18q^{-2}+16q^{-1}+19+16q+11q^{2}+7q^{3}+2q^{4}$
$\langle L_1\rangle$	168	$2q^{-5}+8q^{-4}+12q^{-3}+24q^{-2}+22q^{-1}+32+22q+24q^{2}+12q^{3}+8q^{4}+2q^{5}$
$\langle L_1\rangle_k$	108	$q^{-5}+q^{-4}+9q^{-3}+9q^{-2}+18q^{-1}+16+19q+15q^{2}+11q^{3}+7q^{4}+2q^{5}$
$\langle L_1\rangle_c$	60	$q^{-5}+7q^{-4}+3q^{-3}+15q^{-2}+4q^{-1}+16+3q+9q^{2}+q^{3}+q^{4}$
$\langle K_0\rangle$	72	$q^{-5}+q^{-4}+10q^{-3}+3q^{-2}+19q^{-1}+4+19q+3q^{2}+10q^{3}+q^{4}+q^{5}$
$\langle K_0\rangle_k$	60	$q^{-4}+7q^{-3}+3q^{-2}+15q^{-1}+4+16q+3q^{2}+9q^{3}+q^{4}+q^{5}$
$\langle K_0\rangle_c$	12	$q^{-5}+3q^{-3}+4q^{-1}+3q+q^{3}$
$\langle K_1\rangle$	84	$2q^{-5}+q^{-4}+12q^{-3}+3q^{-2}+22q^{-1}+4+22q+3q^{2}+12q^{3}+q^{4}+2q^{5}$
$\langle K_1\rangle_k$	12	$q^{-3}+3q^{-1}+4q+3q^{3}+q^{5}$
$\langle K_1\rangle_c$	72	$2q^{-5}+q^{-4}+11q^{-3}+3q^{-2}+19q^{-1}+4+18q+3q^{2}+9q^{3}+q^{4}+q^{5}$

Table 1. 复形 (6) 中各模的秩和量子秩。括号中的表达式表示消失生成元的次数；从 $\mathbb{F}[E]$ 换基到 $\mathbb{F}$ 并令 $E=0$ 时，这些生成元映射为零。

(3) 缺少一个次数为 -5 的生成元。在这种情况下， M 是 $\langle L_0\rangle$ 的真子模，其中 M 中次数为 1 的消失生成元相对于 $\langle L_0\rangle$ 中次数为 -5 的缺失生成元向上平移，且 $\dim J^{\flat}(L_0) = 180$。

对于每种情况，我们证明复形 (3) 对于 $J^{\flat}$ 的同调在 K_0 处为零，但在 L_0 处非零，由此证明引言中的定理 1.4。

3.1. 情形1：没有生成元缺失。 由表1可知， L_0 的模的量子秩为

$$\begin{aligned}
&\operatorname{qrank}(\langle L_0\rangle) = q^{-6}+11q^{-4}+10q^{-3}+29q^{-2}+19q^{-1}+38+19q+29q^{2}+10q^{3}+11q^{4}+q^{6}+(q+q^{5}),\\
&\operatorname{qrank}(\langle L_0\rangle_k) = 2q^{-4}+q^{-3}+11q^{-2}+3q^{-1}+19+3q+18q^{2}+3q^{3}+9q^{4}+q^{6}+(q+q^{5}),\\
&\operatorname{qrank}(\langle L_0\rangle_c) = q^{-6}+9q^{-4}+9q^{-3}+18q^{-2}+16q^{-1}+19+16q+11q^{2}+7q^{3}+2q^{4}.
\end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned}
&\operatorname{qrank}(\langle L_0\rangle_k) - q\cdot\operatorname{qrank}(\langle K_1\rangle_c) = 0, && \operatorname{qrank}(\langle L_1\rangle_k) - q\cdot\operatorname{qrank}(\langle L_0\rangle_c) = q^{-4}-q^{2},\\
&\operatorname{qrank}(\langle K_1\rangle_k) - q^{2}\cdot\operatorname{qrank}(\langle K_0\rangle_c) = 0, && \operatorname{qrank}(\langle K_0\rangle_k) - q\cdot\operatorname{qrank}(\langle L_1\rangle_c) = 0.
\end{aligned}$$

因此，复形 (3) 的同调群在 $J^{\flat}$ 处的量子维数为

$$\begin{aligned}
&\operatorname{qdim}(H(L_0)) = q, && \operatorname{qdim}(H(L_1)) = q^{-4},\\
&\operatorname{qdim}(H(K_1)) = 1+q^{4}, && \operatorname{qdim}(H(K_0)) = 0,
\end{aligned}$$

因为在 $\langle K_1\rangle_c$ 中，我们有次数为 0 和 4 的生成元，它们映射到 $\langle L_0\rangle_k$ 的消失生成元；并且在 $\langle L_0\rangle_c$ 中，我们有一个次数为 1 的生成元，它映射到 $\langle L_1\rangle_k$ 中一个次数为 -4 的生成元的 E 倍。特别地，同调在 K_0 处为零，在 L_0处非零。

3.2. 情形2：缺少次数为 -1 的生成元。 由表1可知， L_0 的模的秩和量子秩为

$$\begin{aligned}
&\operatorname{qrank}(\langle L_0\rangle) = q^{-6}+11q^{-4}+10q^{-3}+29q^{-2}+20q^{-1}+38+20q+29q^{2}+10q^{3}+11q^{4}+q^{6},\\
&\operatorname{qrank}(\langle L_0\rangle_k) = 2q^{-4}+q^{-3}+11q^{-2}+4q^{-1}+19+4q+18q^{2}+3q^{3}+9q^{4}+q^{6},\\
&\operatorname{qrank}(\langle L_0\rangle_c) = q^{-6}+9q^{-4}+9q^{-3}+18q^{-2}+16q^{-1}+19+16q+11q^{2}+7q^{3}+2q^{4}.
\end{aligned}$$

Thus

$$\operatorname{qrank}(\langle L_0\rangle_k) - q\cdot\operatorname{qrank}(\langle K_1\rangle_c) = q^{-1}-q^5, \qquad \operatorname{qrank}(\langle L_1\rangle_k) - q\cdot\operatorname{qrank}(\langle L_0\rangle_c) = q^{-4}-q^2,$$
$$\operatorname{qrank}(\langle K_1\rangle_k) - q^2\cdot\operatorname{qrank}(\langle K_0\rangle_c) = 0, \qquad \operatorname{qrank}(\langle K_0\rangle_k) - q\cdot\operatorname{qrank}(\langle L_1\rangle_c) = 0.$$

由此可知，复形 (3) 对于 $J^\flat$ 的同调群的量子维数为

$$\operatorname{qdim}(H(L_0)) = q^{-1}+q, \qquad \operatorname{qdim}(H(L_1)) = q^{-4},$$
$$\operatorname{qdim}(H(K_1)) = q^4, \qquad \operatorname{qdim}(H(K_0)) = 0,$$

因为我们有一个次数为 4 的生成元，在 $\langle K_1\rangle_c$ 中映射到 E 倍的次数为 -1 的生成元，在 $\langle L_0\rangle_k$ 中；并且我们有一个次数为 1 的生成元，在 $\langle L_0\rangle_c$ 中映射到 E 倍的次数为 -4 的生成元，在 $\langle L_1\rangle_k$中。特别地，在 K_0 处同调为零，而在 L_0处非零。

3.3. 情形 3：缺少一个次数为 -5 的生成元。 由表1可知， L_0 的模的秩和量子秩为

$$\operatorname{qrank}(\langle L_0\rangle) = q^{-6}+q^{-5}+11q^{-4}+10q^{-3}+29q^{-2}+19q^{-1}+38+19q+29q^2+10q^3+11q^4+q^5+q^6,$$
$$\operatorname{qrank}(\langle L_0\rangle_k) = q^{-5}+2q^{-4}+q^{-3}+11q^{-2}+3q^{-1}+19+3q+18q^2+3q^3+9q^4+q^5+q^6,$$
$$\operatorname{qrank}(\langle L_0\rangle_c) = q^{-6}+9q^{-4}+9q^{-3}+18q^{-2}+16q^{-1}+19+16q+11q^2+7q^3+2q^4.$$

Thus

$$\operatorname{qrank}(\langle L_0\rangle_k) - q\cdot\operatorname{qrank}(\langle K_1\rangle_c) = q^{-5}-q, \qquad \operatorname{qrank}(\langle L_1\rangle_k) - q\cdot\operatorname{qrank}(\langle L_0\rangle_c) = q^{-4}-q^2,$$
$$\operatorname{qrank}(\langle K_1\rangle_k) - q^2\cdot\operatorname{qrank}(\langle K_0\rangle_c) = 0, \qquad \operatorname{qrank}(\langle K_0\rangle_k) - q\cdot\operatorname{qrank}(\langle L_1\rangle_c) = 0.$$

由此可 知， $J^\flat$ 的复形 (3) 的同调群的量子维数为 re

$$\operatorname{qdim}(H(L_0)) = q^{-5}+q, \qquad \operatorname{qdim}(H(L_1)) = q^{-4},$$
$$\operatorname{qdim}(H(K_1)) = 1, \qquad \operatorname{qdim}(H(K_0)) = 0,$$

因为我们在 $\langle K_1\rangle_c$ 中有一个次数为 0 的生成元，它映射到 E 乘以 $\langle L_0\rangle_k$ 中一个次数为 -5 的生成元；并且我们在 $\langle L_0\rangle_c$ 中有一个次数为 1 的生成元，它映射到 E 乘以 $\langle L_1\rangle_k$ 中一个次数为 -4 的生成元。特别地，同调在 K_0 处为零，而在 L_0 处非零。

Acknowledgments

作者谨此感谢 Mikhail Khovanov 阅读本手稿的早期版本，并提出有益的意见。

References

[1] D. Boozer。Kronheimer-Mrowka 泡沫求值的计算机界。*Exp. Math.*，2021。数字对象标识符：10.1080/10586458.2021.1982078。[2] M. Khovanov 和 L. H. Robert。泡沫求值与 Kronheimer–Mrowka 理论。 *Adv. Math.*，376:107433，2021。[3] P. Kronheimer 和 T. Mrowka。网的 $SO(3)$ 瞬子同调的正合三角。 *J. Topol.*，9(3):774–796，2016。[4] P. Kronheimer 和 T. Mrowka。网的瞬子同调的变形。 *Geom. Topol.*，23(3):1491–1547，2019。[5] P. Kronheimer 和 T. Mrowka。泰特着色，以及网与泡沫的瞬子同调。 *J. Eur. Math. Soc.*，21:55– –119，2019。