arXiv:2304.07661v1 [stat.ME] 16 Apr 2023

分数布朗运动估计的最优采样

Xiang Cui 和 Alexandra Chronopoulou,
伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校。

摘要

本文聚焦于样本数受限情况下分数布朗运动估计的多重采样问题，并在非马尔可夫框架下扩展了现有文献中的研究成果。我们提出了两类采样方案：确定性方案和电平触发方案。对于确定性采样方案，采样时刻预先选定，且不依赖于过程轨迹。对于电平触发采样方案，采样时刻为过程越过预设阈值的时刻。这些采样时刻按时间顺序依次选定，并依赖于过程轨迹。对于每种方案，我们通过最小化累计平方误差失真，推导出最优采样时间。随后，我们证明，最优采样策略在很大程度上取决于过程的依赖结构。

关键词— 分数布朗运动；多重采样；随机优化。

Xiang Cui 是博士生（电子邮箱：xiangc5@illinois.edu），Alexandra Chronopoulou 是临床副教授（电子邮箱：achronop@illinois.edu），任职于伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校统计系，地址为香槟市，伊利诺伊州 61820。

1 引言

在信号处理中，主要目标是对物理事件的数据表征进行建模和分析。该领域的一个基本问题是，如何根据信号过去的行为对其进行估计和预测。从统计学的角度来看，这个问题意味着对感兴趣的过程进行采样（离线或实时），并应用统计技术来预测其未来值。然而，采样并非易事，而且在很大程度上取决于底层模型是连续还是离散、采样频率以及采样机制。此外，所有这些属性往往受到物理问题或实验设置所带来的限制，例如采样成本。

本文聚焦于这样一类问题：底层过程是连续的，并且我们能够获取的样本数受到限制。当然，这个问题并非全新。对于网络化控制系统（NCSs）（Murray 等，2003；Hespanha 等，2007），传感器被用于向监控器传输样本，而监控器可以提供决策与控制。网络化控制系统已广泛应用于移动传感器网络、制造系统和远程手术等各个领域。由于传感器只能传输有限数量的样本，采样时刻的设计会影响信号的估计质量。传统的采样时刻设计是在时间上对信号进行等间隔或周期性采样（˚Astr¨om 和 Wittenmark，2013），这通常被称为黎曼采样或确定性采样。Kushner（1964）在有限时域内，利用固定数量的确定性采样时刻处理了一个线性最优控制问题。Cambanis 和 Masry（1983）研究了在噪声中检测信号的最佳确定性和随机采样方法。然而，在他们的方法中，采样方法不依赖于传感器观测到的信号轨迹。除了确定性采样之外，还有几种替代方案，例如当系统发生特定幅度的变化时对系统进行采样。这类采样被称为勒贝格采样、事件触发采样或电平触发采样。Astrom 和 Bernhardsson（2002）使用简单系统比较了确定性采样和事件触发采样，结果表明事件触发采样具有更好的性能。Imer 和 Basar（2005）考虑了一个有限测量下的最优估计问题，其中随机过程是一个标量线性系统。他们表明，最优观测器策略的解取决于事件触发采样方案。Rabi 等（2006）为布朗运动开发了最优多重采样方案。事件触发方法还被用于触发从传感器向远程观测器的数据传输，以在传输频率受到约束的条件下，最小化观测器处的均方估计误差（Li 等，2010）。

本文旨在刻画估计分数过程，特别是分数布朗运动（fBm）时，不同抽样方法所带来的性能提升，并将 Rabi 等（2006）的结果拓展到非马尔可夫框架中。分数布朗运动是标准布朗运动的一种扩展，其意义在于它仍然是

一种高斯过程，但具有非常丰富的依赖结构，该结构由赫斯特参数 H 决定。关于该过程的数学定义，请读者参阅 Mandelbrot 和 Van Ness（1968年）。在相关文献中，分数布朗运动被用于对具有长程依赖现象进行建模；直观而言，这意味着最近一次观测与第一次观测之间存在很强的相关性。文献中，分数布朗运动被用于对经济学、交通网络和图像处理领域中具有这种长记忆行为的现象进行建模（Beran，1994年；Chronopoulou 和 Viens，2012年；Comte 和 Renault，1998年；Hurst，1951年）。

本文研究两种不同的采样机制——确定性采样和电平触发采样，用于在样本数受限的情况下，根据一系列离散样本估计分数布朗运动。我们通过有限时域内信号实时估计器的失真来评估估计器的性能。具体而言，我们分别针对确定性采样和电平触发采样，求解分数布朗运动估计的采样设计问题。在确定性采样中，采样时间序列预先选定，且与分数布朗运动轨迹无关。我们展示了该方法，并说明如何在单样本情形和多样本情形下求出最优采样时间序列。我们证明，最优采样时间序列取决于分数布朗运动的赫斯特参数。在电平触发采样中，采样时间序列按时间顺序逐步选定，并取决于分数布朗运动轨迹。实际采样时刻是分数布朗运动轨迹的变化越过预设阈值的时刻。我们展示了如何对此采样策略建模，并在单样本情形和多样本情形下通过数值方法求出最优阈值。根据我们的结果，最优阈值同样取决于分数布朗运动的赫斯特参数。

本文其余部分的组织结构如下。第 2 节给出问题表述及其数学背景。第 3 节展示单样本情形和多样本情形下所提出的确定性采样方法。第 4 节展示单样本情形和多样本情形下所提出的电平触发采样方法。第 5 节通过讨论对全文进行总结。

2 问题表述

考虑信号 x_t, $t \in [0,T]$，我们希望对其进行估计。传感器可以观测信号的状态，并在其选择的时刻向监控器传输观测结果。然而，它最多只能生成 N 个待传输的样本。采样时刻 $S = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N\}$ 是关于过程 x_t 的递增时刻序列，并且位于 $[0,T]$ 内。

给定传感器在采样时刻传输的样本，最小二乘估计

监控器处状态 $\hat{x}_t$ 的最小二乘估计为:

$$\hat{x}_t = \begin{cases} \mathbb{E}[x_t|\mathcal{F}_0] & \text{if } 0 \le t < \tau_1, \\ \mathbb{E}[x_t|\mathcal{F}_{\tau_i}] & \text{if } \tau_i \le t < \tau_{i+1}, \text{ for } i = 1, \ldots, N-1, \\ \mathbb{E}[x_t|\mathcal{F}_{\tau_N}] & \text{if } \tau_N \le t \le T, \end{cases}$$

其中， $\mathcal{F}_t$ 是由截至时间 t采样的值生成的滤过。估计质量通过如下定义的总平方误差失真来衡量:

$$J(S) = \mathbb{E}\left[\int_0^T (x_s - \hat{x}_s)^2 ds\right] \tag{1}$$

$$= \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_1} (x_s - \hat{x}_s)^2 ds + \sum_{i=2}^{N} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (x_s - \hat{x}_s)^2 ds + \int_{\tau_N}^{T} (x_s - \hat{x}_s)^2 ds\right]. \tag{2}$$

本文假设 $\{x_t = B_t^H; t \ge 0\}$ 是分数布朗运动，并考虑两种采样策略：(i) 确定性采样；(ii) 电平触发采样。确定性采样是指预先选定采样时间序列 S ，且该序列独立于过程轨迹。选择该序列是为了使方程 (2) 中的期望失真 J 最小。在这种情况下，监控器知道传感器将传输过程样本的时间点。对于电平触发采样，当过程 x_t 的变化越过预设阈值时，传感器便传输过程样本，这意味着采样时刻取决于实际的过程轨迹。

2.1 数学背景

如前所述，分数布朗运动已用于模拟具有长记忆特性的现象，最早由 Mandelbrot 和 Van Ness 于 1968年提出。具体而言，赫斯特参数为 $H \in$ 的分数布朗运动 $\{x_t = B_t^H; t \ge 0\}$ （0，1）是一个均值为零、连续的高斯过程，其协方差结构为:

$$\mathrm{Cov}(B_t^H, B_s^H) = \mathbb{E}(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}), \quad t, s \ge 0.$$

当 $H = \frac{1}{2}$ 时，该过程是标准布朗运动。然而，当 $H \ne \frac{1}{2}$ 时，分数布朗运动不是半鞅。具体而言，当 $H \ne \frac{1}{2}$ 时，分数布朗运动在互不相交区间 $\{B_n^H - B_{n-1}^H\}_{n=1,\ 2,\ 3\ldots\ldots}$上的增量彼此相关，其相关系数为

$$\rho_H(n) = \frac{1}{2}((n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - 2n^{2H}).$$

当 $H > \frac{1}{2}$ 时，不相交区间上的增量呈正相关，且该过程表现出长程依赖，即 $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_H(n) = \infty$。当 $H < \frac{1}{2}$ 时，不相交区间上的增量呈负相关，且该过程具有短记忆，即$\sum_{n=1}^{\infty} |\rho_H(n)| < \infty$，这种情况也称为粗糙行为。关于分数布朗运动的更多性质，请参阅 Mandelbrot 和 Van Ness（1968年）以及 Nualart（2006）。

3 确定性采样

3.1 单样本情形

在确定性框架中，采样序列预先选定，因此独立于 B_t^H 的轨迹。为了说明该方法，我们首先讨论单样本情形，此时我们只能在时间 $t=\tau_1$ 获得一次观测。

$t<\tau_1$ 的最小二乘估计为：

$$\hat{B}_t^H = \mathbb{E}[B_t^H|\mathcal{F}_0] = 0.$$

对于 $t \geq \tau_1$，最小二乘估计为：

$$\hat{B}_t^H = \mathbb{E}[B_t^H|\mathcal{F}_{\tau_1}] = \mathbb{E}[B_t^H|B_{\tau_1}^H].$$

要计算这个条件期望，只需回忆 $B_t^H \sim N(0, t^{2H})$的自相关函数为

$$\rho(B_t^H, B_{\tau_1}^H) = \frac{\mathrm{Cov}(B_t^H, B_{\tau_1}^H)}{\sqrt{t^{2H}}\sqrt{\tau_1^{2H}}}.$$

为简化记号，我们将用 ρ表示 $\rho(B_t^H, B_{\tau_1}^H)$。根据 ρ的表达式以及高斯过程的性质，我们可以计算给定时间 τ_1 的采样值时的预测值 B_t^H：

$$\hat{B}_t^H = \mathbb{E}[B_t^H|B_{\tau_1}^H] = B_{\tau_1}^H \cdot \rho \cdot \frac{\sqrt{t^{2H}}}{\sqrt{\tau_1^{2H}}} = \frac{B_{\tau_1}^H}{2\tau_1^{2H}}(t^{2H} + \tau_1^{2H} - |t-\tau_1|^{2H}).$$

因此，我们得到关于总平方误差失真的以下结果。

命题1。 当底层过程为赫斯特参数为$H \in (0,1)$的分数布朗运动时，在时间 $t=\tau_1$ 取得一个样本所对应的总平方误差失真为

$$J(\tau_1) = \frac{T^{2H+1}}{2H+1} - \frac{1}{4\tau_1^{2H}}\int_{\tau_1}^{T}(s^{2H} + \tau_1^{2H} - |s-\tau_1|^{2H})^2 ds. \tag{3}$$

证明。 利用分数布朗运动的性质进行直接计算，即可轻松得到失真的表达式：

$$\begin{aligned}
J(\tau_1) &= \mathbb{E}\int_0^T (B_s^H)^2 ds - 2\mathbb{E}\int_{\tau_1}^T (B_s^H)(\hat{B}_s^H) ds + \mathbb{E}\int_{\tau_1}^T (\hat{B}_s^H)^2 ds \\
&= \mathbb{E}\int_0^T (B_s^H)^2 ds - 2\mathbb{E}[\int_{\tau_1}^T \mathbb{E}[B_s^H \hat{B}_s^H|\mathcal{F}_{\tau_1}] ds] + \mathbb{E}\int_{\tau_1}^T (\hat{B}_s^H)^2 ds \\
&= \int_0^T \mathbb{E}(B_s^H)^2 ds - \int_{\tau_1}^T \mathbb{E}(\hat{B}_s^H)^2 ds \\
&= \frac{T^{2H+1}}{2H+1} - \frac{1}{4\tau_1^{2H}}\int_{\tau_1}^T (s^{2H} + \tau_1^{2H} - |s-\tau_1|^{2H})^2 ds.
\end{aligned}$$

□

在这一确定性情境下，最优采样时间定义为使公式 (3) 中的失真 $J(\tau_1)$ 最小的 $\hat{\tau}_1 \in [0, T]$。由于无法得到公式 (3) 中失真$J(\tau_1)$的闭式解，我们需要使用数值方法（例如 Brent (2013)）求出最优的 $\hat{\tau}_1$。表1列出了赫斯特参数为 $H = 0.1$，0。2，0。3，.....，0。9 时，单样本情形下的最优采样时间 $\hat{\tau}_1$，其中 $T = 20$。图1也展示了相同的结果。

赫斯特	$\hat{\tau}_1$	失真	赫斯特	$\hat{\tau}_1$	失真	赫斯特	$\hat{\tau}_1$	失真
0.1	5.658	23.433	0.2	8.417	33.685	0.3	9.469	48.327
0.4	9.889	69.544	0.5	10	100	0.6	9.903	142.530
0.7	9.606	198.413	0.8	9.028	260.998	0.9	7.854	290.634

表1：赫斯特参数为 $H = 0.1$，0。2，0。3，.....，0。9 且 $T = 20$ 时，单样本情形下的最优采样时间 $\hat{\tau}_1$'及其对应的最优失真。

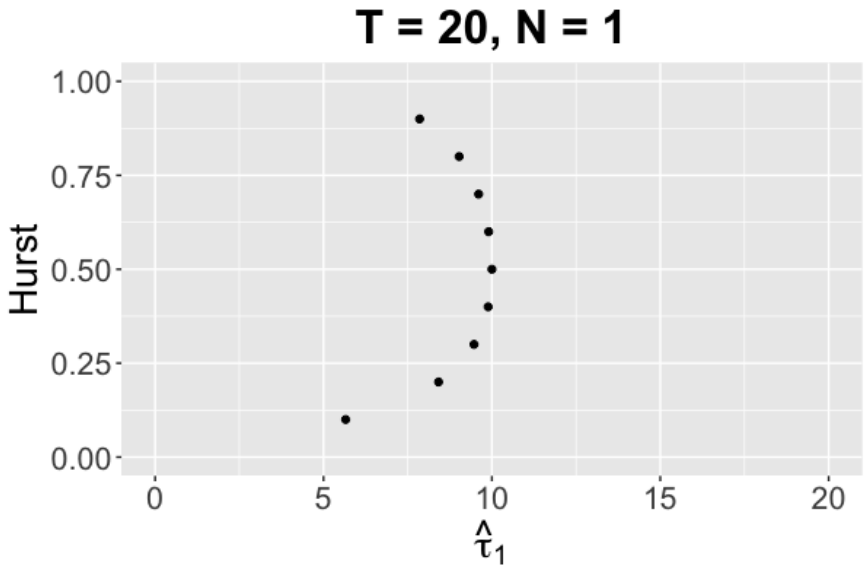

图1：赫斯特参数为 H =0。1，0。2，0。3，.....，0。9 且 $T = 20$ 时，单样本情形下的最优采样时间 $\hat{\tau}_1$'。

在图1中，y轴表示赫斯特参数，x轴表示对应赫斯特参数下单样本情形的最优采样时间。当 $H = \frac{1}{2}$ 时，最优采样时间 $\hat{\tau}_1$ 为 $\frac{T}{2}$。当 H 进一步远离 $H = \frac{1}{2}$ 时，最优 $\hat{\tau}_1$ 会变小。我们恢复了 Rabi 等（2006）关于布朗运动的结果，并将其推广到 $H \neq \frac{1}{2}$ 时的分数布朗运动。

3.2 多样本情形

在本节中，我们将单样本情形的结果推广到 N 个样本。我们计算 $[0,T]$ 中的最优确定性采样时刻 $0 \le \tau_1 \le \tau_2 \le \tau_3 \ldots \le \tau_N \le T$。对于 $\tau_i \le t < \tau_{i+1}$，$\hat{}B_t^H$ 的估计为

$$\hat{B}_t^H = \mathbb{E}(B_t^H|\mathcal{F}_{\tau_i}) = \mathbb{E}(B_t^H|B_{\tau_1}^H, B_{\tau_2}^H, \ldots, B_{\tau_i}^H), \tag{4}$$

wh其中 $\mathcal{F}_{\tau_i}$ 是由时间 $\tau_1, \ldots, \tau_i$ 的样本生成的滤过。回顾一下，

$$(B_t^H, B_{\tau_1}^H, B_{\tau_2}^H, \ldots, , B_{\tau_i}^H)^T \sim N(0, \Sigma),$$

其中

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(B_t^H) & \mathrm{Cov}(B_t^H, B_{\tau_1}^H) & \ldots & \mathrm{Cov}(B_t^H, B_{\tau_i}^H) \\ \mathrm{Cov}(B_{\tau_1}^H, B_t^H) & \mathrm{Var}(B_{\tau_1}^H) & \ldots & \mathrm{Cov}(B_{\tau_1}^H, B_{\tau_i}^H) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(B_{\tau_i}^H, B_t^H) & \mathrm{Cov}(B_{\tau_i}^H, B_{\tau_1}^H) & \ldots & \mathrm{Var}(B_{\tau_i}^H) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

且 $\Sigma_{11} = \mathrm{Var}(B_t^H)$。根据多元高斯分布的条件分布性质，我们得到

$$\hat{B}_t^H = \mathbb{E}B_t^H + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\left(\begin{pmatrix} B_{\tau_1}^H \\ B_{\tau_2}^H \\ \vdots \\ B_{\tau_i}^H \end{pmatrix} - \mathbb{E}\begin{pmatrix} B_{\tau_1}^H \\ B_{\tau_2}^H \\ \vdots \\ B_{\tau_i}^H \end{pmatrix}\right) = \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\begin{pmatrix} B_{\tau_1}^H \\ B_{\tau_2}^H \\ \vdots \\ B_{\tau_i}^H \end{pmatrix} \tag{5}$$

以及 t 以下关于总平方误差失真的命题如下 ws.

命题 2. 当底层过程为赫斯特参数为$H \in (0,1)$的分数布朗运动时，在时刻 τ_1、 τ_2、.....、 τ_N获得的 N 个样本对应的总平方误差失真为

$$J(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N) = \frac{T^{2H+1}}{2H+1} - \sum_{i=1}^{N}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \mathbb{E}(\hat{B}_t^H)^2 dt. \tag{6}$$

证明。

$$\begin{aligned} J(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N) &= \mathbb{E}[\sum_{i=0}^{N}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (B_t^H - \hat{B}_t^H)^2 dt] \\ &= \mathbb{E}\int_0^T (B_t^H)^2 dt + \mathbb{E}\sum_{i=1}^{N}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} [(\hat{B}_t^H)^2 - 2(B_t^H \hat{B}_t^H)]dt \\ &= \mathbb{E}\int_0^T (B_t^H)^2 dt + \sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} [(\hat{B}_t^H)^2 - 2(B_t^H \hat{B}_t^H)]dt \end{aligned}$$

$$= \mathbb{E}\int_0^T (B_t^H)^2 dt - \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (\hat{B}_t^H)^2 dt$$
$$= \frac{T^{2H+1}}{2H+1} - \sum_{i=1}^{N} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \mathbb{E}(\hat{B}_t^H)^2 dt,$$

其中 $\tau_0 = 0$ 和 $\tau_{N+1} = T$。 □

如公式（6）所示，总平方误差失真仍然不是显式公式，尚需进一步分析，才能得到最优采样时刻。

在计算最优采样时刻之前，我们还考察了该问题的截断版本。也就是说，与公式（4）中使用所有先前样本的信息不同，我们仅使用最后一个观测值来估计 B_t^H的值。

在这种情况下，针对 $\tau_i < t < \tau_{i+1}$ 的估计$\hat{}B_t^H$为

$$\hat{B}_t^H = \mathbb{E}(B_t^H | B_{\tau_i}^H) = \frac{B_{\tau_i}^H}{2\tau_i^{2H}}(t^{2H} + \tau_i^{2H} - |t - \tau_i|^{2H}).$$

换句话说，我们用 $B_{\tau_i}^H$替代了滤过 $\mathcal{F}_{\tau_i}$。我们将这种情形称为截断情形，并由此得到平方误差失真的截断公式。

命题3. 当底层过程为赫斯特参数$H \in (0,\ 1)$的分数布朗运动时，在时刻 τ_1、 τ_2、……、 τ_N获得 N 个样本并进行截断后，总平方误差失真为

$$J(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N) = \int_0^T \mathbb{E}(B_t^H)^2 dt - \sum_{i=1}^{N} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \mathbb{E}(\hat{B}_t^H)^2 dt \tag{7}$$
$$= \frac{T^{2H+1}}{2H+1} - \sum_{i=1}^{N} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \mathbb{E}(\frac{B_{\tau_i}^H}{2\tau_i^{2H}}(t^{2H} + \tau_i^{2H} - |\tau_i - t|^{2H}))^2 dt, \tag{8}$$

其中

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \mathbb{E}(\frac{B_{\tau_i}^H}{2\tau_i^{2H}}(t^{2H} + \tau_i^{2H} - |\tau_i - t|^{2H}))^2 dt = \frac{1}{4\tau_i^{2H}} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (s^{2H} + \tau_i^{2H} - |s - \tau_i|^{2H})^2 ds.$$

研究这一版本的问题并将我们的结果与非截断情形进行比较十分重要，因为这使我们能够探讨计算复杂度（保留信号的全部历史信息）与准确性（截断信号的历史信息）之间的权衡。

3.3 最优采样时刻的计算

本节以 $N = 2$ 和 $N = 3$ 为例，说明如何在截断抽样情形和非截断抽样情形下，为确定性采样找出 $[0, T]$ 中的最优采样时刻集合 τ_1，τ_2，……，τ_N。

3.3.1 双样本情形

对于 $\tau_2 \le t < T$，根据公式（5），估计量 $\hat{B}_t^H$为

$$\hat{B}_t^H = C(\tau_1, \tau_2, H)(A_1(\tau_1, \tau_2, t, H)B_{\tau_1}^H - A_2(\tau_1, \tau_2, t, H)B_{\tau_2}^H),$$

其中，$C(\tau_1, \tau_2, H)$、$A_1(\tau_1, \tau_2, t, H)$ 和 $A_2(\tau_1, \tau_2, t, H)$ 在第 6.1 节中给出。

推论 1. 当底层过程为赫斯特参数为$H \in (0, 1)$的分数布朗运动时，双样本情形的总平方误差失真为：

$$\begin{aligned} J(\tau_1, \tau_2) = &\frac{T^{2H+1}}{2H+1} - \frac{1}{4\tau_1^{2H}} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (s^{2H} + \tau_1^{2H} - |s - \tau_1|^{2H})^2 ds \\ &- C(\tau_1, \tau_2, H)^2 \int_{\tau_2}^{T} [A_1(\tau_1, \tau_2, t, H)^2 \tau_1^{2H} + A_2(\tau_1, \tau_2, t, H)^2 \tau_2^{2H} \\ &- A_1(\tau_1, \tau_2, t, H) A_2(\tau_1, \tau_2, t, H)(\tau_2^{2H} + \tau_1^{2H} - |\tau_2 - \tau_1|^{2H})] dt. \end{aligned}$$

推论1的证明见第 6.1 节。为了通过数值计算求出使推论 1 中的 $J(\tau_1, \tau_2)$ 最小的最优 $\hat{\tau}_1$ 和 $\hat{\tau}_2$，我们采用线性约束优化技术（?）。同理，我们也可以通过最小化 $N = 2$ 的公式 (8) 中的失真，求出截断情形下最优采样的最优 $\hat{\tau}_1$ 和 $\hat{\tau}_2$ 。表2和表3列出了在 $T = 20$ 时，赫斯特参数为 $H = 0.1$、0.2、0.3、.....、0.9 时，双样本非截断情形和截断情形下的最优采样时间 $(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2)$。当 $H = 0.5$ 时，双样本非截断情形与截断情形相同，因此表2中留空。图2也展示了相同的结果。

赫斯特	$(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2)$	失真	赫斯特	$(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2)$	失真
0.1	(3.197, 9.718)	20.514	0.2	(5.317, 12.190)	27.851
0.3	(6.203, 12.976)	37.408	0.4	(6.569, 13.264)	50.108
0.6	(6.582, 13.279)	87.251	0.7	(6.325, 13.122)	110.298
0.8	(5.839, 12.847)	129.302	0.9	(4.897, 12.334)	123.020

表2：当赫斯特参数为 $H = 0.1$，0.2，0.3，.....，0.9 且 $T = 20$ 时，两个样本非截断情形下的最优采样时间 $(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2)$ 及对应的最优失真。

从图2可以看出，当 $H = \frac{1}{2}$ 时，$[0, T]$ 中的最优采样时间序列为均匀采样。当 H 与 $H = \frac{1}{2}$ 的距离进一步增大时，最优采样时刻会变小。我们观察到，截断情形与非截断情形下的最优采样时刻几乎相同，只有当 H 接近 0.1 时例外。当 H 接近 0.1 时，非截断情形下的最优采样时间 $\hat{\tau}_2$ 小于截断情形下的最优采样时间。

赫斯特	($\hat{\tau}_1$, $\hat{\tau}_2$)	失真	赫斯特	($\hat{\tau}_1$, $\hat{\tau}_2$)	失真
0.1	(3.172, 11.214)	21.088	0.2	(5.302, 12.597)	28.211
0.3	(6.198, 13.092)	37.614	0.4	(6.568, 13.283)	50.176
0.5	(6.667, 13.333)	66.667	0.6	(6.581, 13.291)	87.368
0.7	(6.322, 13.161)	110.870	0.8	(5.828, 12.912)	130.694
0.9	(4.874, 12.410)	124.947			

表3：当 $T = 20$ 时，赫斯特参数为 $H = 0.1$、0.2、0.3、.....、0.9 的双样本截断情形下的最优采样时刻（$\hat{\tau}_1$，$\hat{\tau}_2$）及对应的最优失真。

我们还在图3中比较了不同赫斯特参数下的失真。对于相同的赫斯特参数，可以看到截断采样情形与非截断抽样情形的失真几乎相同，而非截断抽样情形的失真略小。

3.3.2 三样本情形

对于 $\tau_3 \le t < T$，根据公式（5），估计值 $\hat{B}_t^H$ 为

$$\begin{aligned}\hat{B}_t^H &= \mathbb{E}(B_t^H|\mathcal{F}_{\tau_3}) = \mathbb{E}(B_t^H|B_{\tau_1}^H, B_{\tau_2}^H, B_{\tau_3}^H)\\ &= C(\tau_1,\tau_2,\tau_3,H)(A_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)B_{\tau_1}^H + A_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)B_{\tau_2}^H + A_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)B_{\tau_3}^H).\end{aligned}$$

关于 $C(\tau_1, \tau_2, \tau_3, H)$、$A_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3, t, H)$、$A_2(\tau_1, \tau_2, \tau_3, t, H)$ 和 $A_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3, t, H)$ 的详细信息见第6.2节。

推论 2. 当底层过程是赫斯特参数为$H \in (0,1)$的分数布朗运动时，三个样本情形下的总平方误差失真为

$$\begin{aligned}J(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = &\frac{T^{2H+1}}{2H+1} - \frac{1}{4\tau_1^{2H}}\int_{\tau_1}^{\tau_2}(s^{2H}+\tau_1^{2H}-|s-\tau_1|^{2H})^2 ds\\ &- C(\tau_1,\tau_2,H)^2\int_{\tau_2}^{\tau_3}[A_1(\tau_1,\tau_2,t,H)^2\tau_1^{2H} + A_2(\tau_1,\tau_2,t,H)^2\tau_2^{2H}\\ &- A_1(\tau_1,\tau_2,t,H)A_2(\tau_1,\tau_2,t,H)(\tau_2^{2H}+\tau_1^{2H}-|\tau_2-\tau_1|^{2H})]dt\\ &- C(\tau_1,\tau_2,\tau_3,H)^2\int_{\tau_3}^{T}[A_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)^2\tau_1^{2H} + A_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)^2\tau_2^{2H}\\ &+ A_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)^2\tau_3^{2H}\\ &+ A_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)A_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)(\tau_1^{2H}+\tau_2^{2H}-(\tau_2-\tau_1)^{2H})\\ &+ A_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)A_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)(\tau_1^{2H}+\tau_3^{2H}-(\tau_3-\tau_1)^{2H})\\ &+ A_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)A_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)(\tau_2^{2H}+\tau_3^{2H}-(\tau_3-\tau_2)^{2H})]dt.\end{aligned}$$

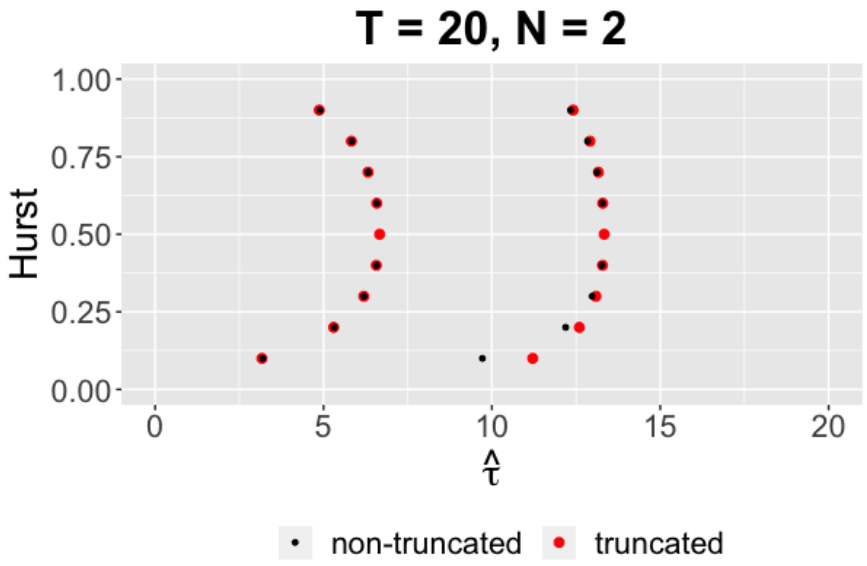

图2： $T = 20$ 在双样本情形下的最优采样时间。 y轴表示赫斯特参数， x轴表示相应赫斯特参数下双样本情形的最优采样时间。黑色点表示非截断情形，红色点表示截断情形。

推论 2 的证明见第6.2节。采用与双样本情形相同的技巧，我们得到截断情形和非截断情形下的最优采样时间 $\hat{\tau}_1$、$\hat{\tau}_2$ 和 $\hat{\tau}_3$ 。结果汇总于表 4、表 5 和图 4 中。

从图 4 中可以看出，当$H = \frac{1}{2}$时，$[0, T]$ 中的最优采样时间序列为均匀采样。当 H与 $H = \frac{1}{2}$相距越来越远时，最优采样时刻变得更小。我们观察到，除 H-约为 0.1 时外，截断采样方法和非截断采样的最优采样时刻几乎相同。当 H 约为 0.1 时，非截断抽样情形中的最优 $\hat{\tau}_2$ 和$\hat{\tau}_3$ 均小于截断抽样情形中的对应值。我们还在图 5 中比较了两种情形下的失真。可以看出，与截断采样相比，非截断采样的失真更小，尤其是当H 接近 1 或接近 0 时。但二者之间的失真差异相当小。

通过一次采样、两个样本和三样本情形的结果，我们可以看到，当赫斯特参数 H 远离 0.5 时，最优采样时间往往更短。对于相同的允许样本数，当样本数大于 1 时，失真随着 H 从 0.1 增加到 0.8 而呈单调递增趋势。但当 H 从 0.8 增加到 0.9 时，失真则会下降。对于非截断采样和截断采样情形，我们可以看到二者的最优采样时间和最优失真都相近。与截断采样相比，非截断采样的失真略低。因此，截断

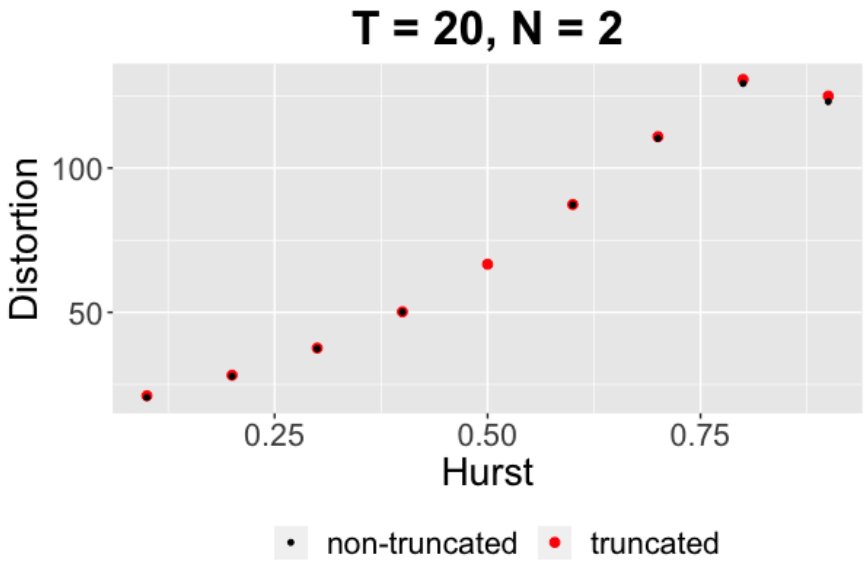

图3：当 $T = 20$ 时双样本情形下的最优失真。 y轴表示最优失真， x轴表示双样本情形下对应的赫斯特参数。黑点表示非截断情形，红点表示截断情形。

采样可以节省一些计算资源，并能达到与非截断采样相近的性能。

4 电平触发采样

4.1 单样本情形

在电平触发采样框架中，采样序列是依次选取的，因此取决于 B_t^H的轨迹。实际采样时刻是轨迹 B_t^H的变化越过预设阈值的时刻。为说明该方法，我们首先讨论单样本情形，此时只能在轨迹 B_t^H 越过预设阈值 η时获得一次观测。

对于给定的 $\eta \geq 0$，我们将获得一次采样所需的时间定义为：$\tau_\eta = \inf_{t\geq 0}\{t\colon |B_t^H| \geq \eta\}$。实际采样时刻为 $\tau_1 = \tau_\eta \wedge T$。因此，关于总平方误差失真，我们有如下结果。

命题4。 当底层过程是赫斯特参数为$H \in (0,1)$的分数布朗运动时，电平触发采样单样本情形下的总平方误差失真满足

赫斯特	$(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3)$	失真	赫斯特	$(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3)$	失真
0.1	(2.177, 6.559, 12.162)	18.802	0.2	(3.867, 8.849, 14.165)	24.429
0.3	(4.607, 9.634, 14.749)	31.249	0.4	(4.916, 9.927, 14.952)	39.730
0.6	(4.929, 9.943, 14.964)	61.637	0.7	(4.712, 9.775, 14.863)	72.954
0.8	(4.308, 9.479, 14.688)	79.296	0.9	(3.546, 8.938, 14.380)	68.520

表 4：赫斯特参数为 $H = 0.1$，0。2，0。3，.. . ，0。9 时，三个样本非截断情形下的最优采样时间 $(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3)$ 及相应的最优失真，其中$T = 20$。

赫斯特	$(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3)$	失真	赫斯特	$(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3)$	失真
0.1	(2.195, 7.760, 13.839)	19.751	0.2	(3.871, 9.199, 14.605)	25.021
0.3	(4.608, 9.735, 14.872)	31.577	0.4	(4.917, 9.945, 14.974)	39.835
0.5	(5.000, 10.000, 15.000)	50	0.6	(4.929, 9.954, 14.979)	61.803
0.7	(4.714, 9.814, 14.914)	73.743	0.8	(4.309, 9.547, 14.787)	81.192
0.9	(3.542, 9.019, 14.534)	71.245			

表 5：赫斯特参数为 $H = 0.1$、0。2、0。3、.....、0。9 时，三个样本截断情形下的最优采样时间（$\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3$）及相应的最优失真，其中 $T = 20$。

阈值 η 为

$$\begin{aligned} J(\eta) &= \frac{T^{2H+1}}{2H+1} - \mathbb{E}[\frac{1}{4}\eta^2((T-\tau_1) + \frac{T^{4H+1}/\tau_1^{4H} - \tau_1}{4H+1} + \frac{2(T^{2H+1} - \tau_1^{2H+1})/\tau_1^{2H}}{2H+1} \\ &\quad + \frac{(T-\tau_1)^{4H+1}/\tau_1^{4H}}{4H+1} - 2\frac{(T-\tau_1)^{2H+1}/\tau_1^{2H}}{2H+1} - 2\tau_1 \int_1^{\frac{T}{\tau_1}} \mu^{2H}(\mu-1)^{2H} d\mu)] \\ &= \frac{T^{2H+1}}{2H+1} - \mathbb{E}[h(\eta, B_t^H))] \end{aligned}$$

其中 $\tau_\eta =$ 下确界$_{t\geq 0}\{t: \ |B_t^H| \geq \eta\}$ 且 $\tau_1 = \tau_\eta \wedge T$。

证明。 利用分数布朗运动的性质直接计算，即可轻松得到失真的表达式：

$$\begin{aligned} J(\eta) &= \frac{T^{2H+1}}{2H+1} - \mathbb{E}\int_{\tau_1}^{T} (\hat{B}_s^H)^2 ds \\ &= \frac{T^{2H+1}}{2H+1} - \mathbb{E}\int_{\tau_1}^{T} (\frac{B_{\tau_1}^H}{2\tau_1^{2H}}(s^{2H} + \tau_1^{2H} - |s-\tau_1|^{2H}))^2 ds \\ &= \frac{T^{2H+1}}{2H+1} - \frac{1}{4}\mathbb{E}[(B_{\tau_1}^H)^2((T-\tau_1) + \frac{T^{4H+1}/\tau_1^{4H} - \tau_1}{4H+1} + \frac{2(T^{2H+1} - \tau_1^{2H+1})/\tau_1^{2H}}{2H+1} \end{aligned}$$

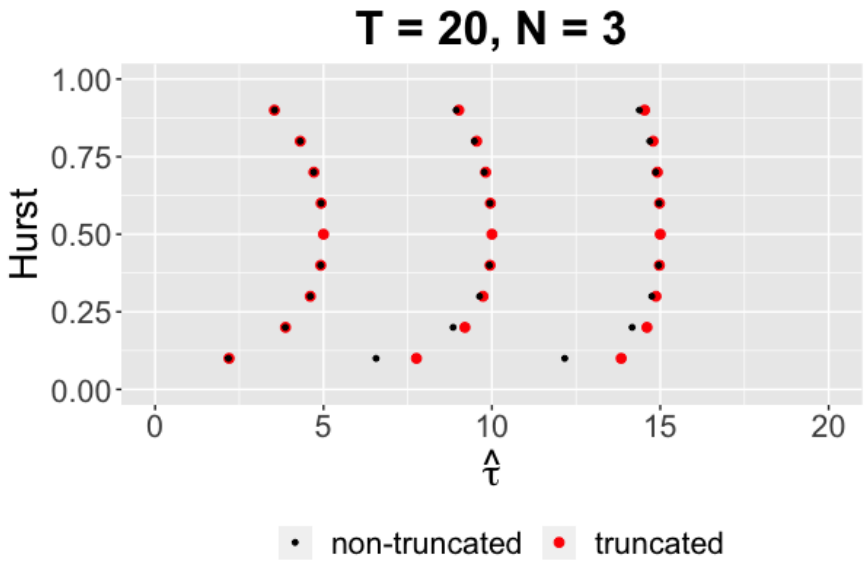

图 4: $T = 20$ 三个样本情形下的最优采样时间。 y 轴表示赫斯特参数， x 轴表示对应赫斯特参数下三个样本情形的最优采样时间。黑点表示非截断情形，红点表示截断情形。

$$
\begin{aligned}
&+\frac{(T-\tau_1)^{4H+1}/\tau_1^{4H}}{4H+1}-2\frac{(T-\tau_1)^{2H+1}/\tau_1^{2H}}{2H+1}-2\tau_1\int_1^{\frac{T}{\tau_1}}\mu^{2H}(\mu-1)^{2H}d\mu)]\\
&=\frac{T^{2H+1}}{2H+1}-\mathbb{E}[\frac{1}{4}\eta^2((T-\tau_1)+\frac{T^{4H+1}/\tau_1^{4H}-\tau_1}{4H+1}+\frac{2(T^{2H+1}-\tau_1^{2H+1})/\tau_1^{2H}}{2H+1}\\
&+\frac{(T-\tau_1)^{4H+1}/\tau_1^{4H}}{4H+1}-2\frac{(T-\tau_1)^{2H+1}/\tau_1^{2H}}{2H+1}-2\tau_1\int_1^{\frac{T}{\tau_1}}\mu^{2H}(\mu-1)^{2H}d\mu)]\\
&=\frac{T^{2H+1}}{2H+1}-\mathbb{E}[h(\eta,B_t^H)].
\end{aligned}
\tag{9}
$$

□

我们可以写作 $F(\eta) = \mathbb{E}[h(\eta, B_t^H)]$。为了找到能够使命题4中的 $J(\eta)$ 最小化的最优阈值 $\hat{}\eta$，我们需要找到使 $F(\eta)$ 最大化的 $\hat{}\eta$。但是，关于 η， $F(\eta)$ 的形式并不完全已知，只能利用分数布朗运动样本路径 B_t^H计算变化量为 $h(\eta, B_t^H)$ 的观测。为了找到 $J(\eta)$ 的最优点，我们需要使用随机逼近算法。

4.1.1 随机优化

Kiefer和Wolfowitz（1952）提出了一种随机逼近算法，用于寻找观测值带有变化（噪声）的函数的最大值点。使用Kiefer-Wolfowitz（KW）算法，

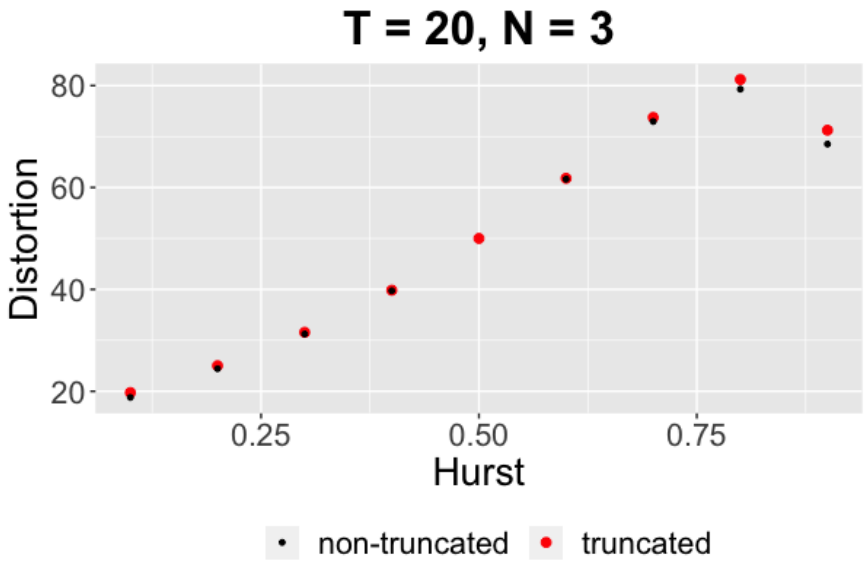

图 5：当 $T = 20$时三样本情形的最优失真。 y轴表示最优失真， x轴表示三样本情形下对应的赫斯特参数。黑点表示非截断情形，红点表示截断情形。

我们可以将参数 η 初始化为 η_0。每次迭代时，我们按如下方式更新参数:

$$\eta^{(n+1)} = \eta^{(n)} + a^{(n)} Y^{(n)}$$

with

$$Y^{(n)} = \frac{h(\eta^{(n)} + c^{(n)}, \delta_n^+) - h(\eta^{(n)} - c^{(n)}, \delta_n^-)}{2c^{(n)}},$$

其中， δ_n^+和 δ_n^-是两个相互独立的分数布朗运动样本路径， $h(\eta,\ \delta)$ 是使用分数布朗运动样本路径 δ 得到的受噪声污染的观测值，而 $\{a^{(n)}\}$ 和 $\{c^{(n)}\}$ 是两个实值确定性调节序列。由于每次迭代仅使用两个分数布朗运动样本路径来计算 $Y^{(n)}$ 会产生过多噪声，且有限时间性能不佳，因此我们在每次迭代中使用一组多个分数布朗运动样本路径，并对它们取平均来计算 $Y^{(n)}$。Robbins 和 Monro（1951年）也提出了这一做法。

文献中的若干论文（Dupa˘c，1957年；Fabian，1967年；Polyak 和 Tsybakov，1990年）着重于建立均方误差（MSE） $\mathbb{E}(\eta^{(n)} - \eta^*)^2$, 的界，其中 η^* 是 $F(\eta)$ 的最大点，并推导 MSE 收敛至零的最优速率。Broadie 等人（2011年）提出了 KW算法的自适应版本，可提升其有限时间性能。他们提出，调节序列的最优选择为 $a^{(n)} = \alpha/(n + \beta)$ 和 $c^{(n)} = \gamma/n^{1/4}$，其中某个 α, $\gamma \in \mathbb{R}_+$ 和 $\beta \in \mathbb{Z}_+$。他们的方法会动态缩放

并平移 $a^{(n)}$ 和 $c^{(n)}$ 序列，通过自适应调整 α、 β 和 γ，使其更好地匹配观测 $h(\eta,\ \delta)$ 的特征和噪声水平，从而提升有限时间性能。我们运行 Broadie 方法（Broadie 等人，2011年），直至序列 $\{\eta^{(n)}\}$ 收敛到最优值，由此得到使 $J(\eta)$ 最小化的最优阈值 $\hat{}\eta$ 。

表 6 展示了赫斯特参数为$H = 0.1$，0。2，.....，0。7 时单样本情形下的最优阈值 $\hat{}\eta$ $T = 20$。我们重新得到了 Rabi 等（2006）关于布朗运动的最优η结果，并将其推广到 $H \neq \frac{1}{2}$ 时的分数布朗运动。由表 6 可见，当 H 从 0.1 增至 0.7 时，最优阈值 $\hat{}\eta$ 持续增大。这表明，随着赫斯特参数 H 增大，最优阈值也会增大。随着 H 增大，分数布朗运动的波动减小，行为更加平滑，因此分数布朗运动会朝一个方向发展。因此，当 H 增大时，最优阈值 $\hat{}\eta$ 取较大的值是合理的。

赫斯特	$\hat{\eta}$	失真	赫斯特	$\hat{\eta}$	失真	赫斯特	$\hat{\eta}$	失真
0.1	2.364	2.395	0.2	2.666	9.404	0.3	3.024	22.116
0.4	3.500	43.521	0.5	4.176	78.963	0.6	4.850	134.631
0.7	5.741	216.328						

表 6：当赫斯特参数 $H = 0.1$，0。2，0。3，.....，0。7 满足 $T = 20$ 时，单样本情形下的最优阈值 $\hat{}\eta$ 及对应的最小化失真。

4.1.2 给定 H 时分数布朗运动的最优阈值

在此，我们考察给定赫斯特参数 H 时，最优阈值与时间范围 T 之间的关系。对于 $T = 20$，我们使用 Broadie 方法（Broadie 等人，2011年）估计单样本情形下的最优阈值 $\hat{}\eta$ ，其中赫斯特参数 H 的取值范围为 0.05 到 0.75，步长为 0.05。

我们在图 6 中绘制了不同赫斯特参数 H对应的最优阈值 $\hat{}\eta$ 。图 6 中的黑点表示相应赫斯特参数的最优阈值。红线表示我们观察到的最优阈值与时间范围之间的关系，该关系见公式（10）：

$$\hat{\eta} = C \cdot T^{\frac{1}{4}(2H+1)}, \tag{10}$$

其中，常数值 C 对于不同的赫斯特参数 H 都相同。公式（10）的动机来自 Rabi 等（2006）关于布朗运动的结果，其中 $H = \frac{1}{2}$ 。我们观察到，对于不同的赫斯特参数 H，最优阈值 $\hat{}\eta$ 与时间范围 T 之间存在某种关系。我们利用这一模式为多样本情形建立最优阈值模型。

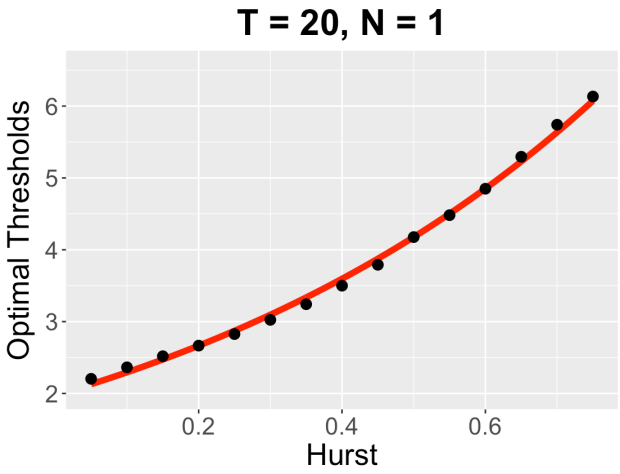

图 6：当 $T = 20$ 时， $H = 0.05$，0.1，0.15，.....，0.75 对应的最优阈值 $\hat{}\eta$。黑点表示给定赫斯特参数时的最优阈值。x 轴表示赫斯特参数， y 轴表示给定赫斯特参数时的最优阈值。红线表示不同赫斯特参数 H 对应的最优阈值与时间范围之间的关系。

4.2 多样本情形

与确定性采样类似，我们将上述讨论推广到多样本情形。因此，给定阈值 $\eta_1 \geq 0$、 $\eta_2 \geq 0$、.....、$\eta_N \geq 0$，我们定义采样时刻$\tau_{\eta_1} = \inf_{t\geq 0}\{t : \ |B_t^H| \geq \eta_1\}$ 以及 $\tau_{\eta_i} = \inf_{t\geq \tau_{i-1}}\{t : |B_t^H - B_{\tau_{i-1}}^H| \geq \eta_i\}$，其中 $2 \leq i \leq N$。对于 $1 \leq i \leq N$，实际采样时刻为 $\tau_i = \tau_{\eta_i} \wedge T$。估计性能仍使用平方误差失真来量化：

$$\begin{aligned} J(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N) &= \mathbb{E}[\sum_{i=0}^{N} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (B_t^H - \hat{B}_t^H)^2 dt] \\ &= \frac{T^{2H+1}}{2H+1} - 2\mathbb{E}\sum_{i=1}^{N} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} B_t^H \hat{B}_t^H dt + \mathbb{E}\sum_{i=1}^{N} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (\hat{B}_t^H)^2 dt \end{aligned}$$

其中，估计量 $\hat{}B_t^H$与公式（5）中的相同。鉴于使用模拟计算 $\mathbb{E}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} B_t^H \hat{}B_t^H dt$ 需要多个样本路径，并且考虑到在优化算法的每次迭代过程中都必须执行该计算，因此无法直接实时优化失真。因此，我们使用估计量 $\hat{}B_t^H$来表示 $\mathbb{E}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} B_t^H \hat{}B_t^H dt$ 中的真实 B_t^H，并据此提出一种计算上可行的修正失真函数，即

$$J^*(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N) = \frac{T^{2H+1}}{2H+1} - \mathbb{E}\sum_{i=1}^{N} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (\hat{B}_t^H)^2 dt = \frac{T^{2H+1}}{2H+1} - \mathbb{E}h^*((\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N), B_t^H), \quad (11)$$

其中， $h^*((\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_N)\ B_t^H)$ 是在值 $(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_N)$ 处发生变化的观测值，该观测值使用分数布朗运动样本路径 B_t^H 计算得到。我们可以看到，公式（11）中的修正失真仍不是显式形式，还需要进一步分析才能获得最优阈值。因此，我们仍然像确定性采样中那样研究该问题的截断版本。不同于公式（5）中使用所有先前的样本信息，我们仅使用最后一个观测值来估计 $\hat{}B_t^H$。因此，在时间 $\tau_i \le t < \tau_{i+1}$ 对 B_t 的估计变为：

$$\hat{B}_t^H = \mathbb{E}(B_t^H | B_{\tau_i}^H) = \frac{B_{\tau_i}^H}{2\tau_i^{2H}}(t^{2H} + \tau_i^{2H} - |t-\tau_i|^{2H}).$$

这是截断情形，我们由此得到修正失真的截断公式。

命题 5. 当底层过程为赫斯特参数为$H \in (0,1)$的分数布朗运动时，采用截断估计时， N 样本情形下阈值为$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N$的修正的聚合平方误差失真为

$$J^*(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_N) = \frac{T^{2H+1}}{2H+1} - \mathbb{E}h^*((\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_N), B_t^H) = \frac{T^{2H+1}}{2H+1} - \mathbb{E}\sum_{i=1}^{N}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (\hat{B}_t^H)^2 dt \quad (12)$$

$$= \frac{T^{2H+1}}{2H+1} - \mathbb{E}\sum_{i=1}^{N}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (\frac{B_{\tau_i}^H}{2\tau_i^{2H}}(t^{2H} + \tau_i^{2H} - |\tau_i - t|^{2H}))^2 dt. \quad (13)$$

我们仍将研究这一版本的问题，并将结果与非截断情形进行比较，因为计算复杂度与准确性之间存在权衡。

根据第4.1.2节和公式（10），可以看出，给定赫斯特参数后，最优阈值取决于时间范围 T。Rabi 等（2006）也针对布朗运动证明了这一点，其中$H = \frac{1}{2}$。因此，对于多样本情形，阈值 η_i（ $1 < i \le N$）取决于剩余时间范围 $T - \tau_{i-1}$。由于 τ_{i-1} 是随机的，且取决于实际的分数布朗运动轨迹，因此无法直接基于 η_i来优化失真。考虑到我们在公式（10）中观察到的最优阈值与时间范围之间的关系，我们提出为 $i = 1, 2, \ldots, N$寻找具有以下结构的最优阈值 η_i：

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= q_1 T^{\frac{1}{4}(2H+1)}, \\
\eta_2 &= q_2 (T-\tau_1)^{\frac{1}{4}(2H+1)}, \\
&\vdots \\
\eta_N &= q_N (T-\tau_{N-1})^{\frac{1}{4}(2H+1)}.
\end{aligned}$$

因此，为了在我们的框架下找到最优的 $\hat{}\eta_i$，我们需要找到最优的 $\hat{}q_i$，从而将修正失真 $J^*(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_N)$ 表示为 q_i 的函数，即 $J^*(q_1,q_2,\ldots,q_N)$。我们还将 $h^*((q_1,q_2,\ldots,q_N)\ B_t^H)$ 写成等价的 $h^*((\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_N)\ B_t^H)$。

为了优化 $J^*(q_1, q_2, \ldots, q_N)$，我们需要使用多维版本的随机逼近法。

4.2.1 多维随机优化

Blum（1954）提出了 KW算法的一个多维版本。多维 KW算法在每个方向上都使用梯度的单边有限差分近似，可描述如下:

$$q_k^{(n+1)} = q_k^{(n)} + a_k^{(n)} Y_k^{(n)}, \tag{14}$$

其中， k 表示（q_1、q_2、...、q_N）中的第 k个方向， n 表示迭代次数，且$Y_{(n)}{}_k = [h^*(q^{(n)}+c_k^{(n)}e_k, \delta_k^{(n)+}) - h^*(q^{(n)}, \delta_k^{(n)-})]/c_k^{(n)}$，其中 e_k 是 N维实数空间中沿第 k维的标准基。 $\delta_k^{(n)+}$ 和 $\delta_k^{(n)-}$ 均为相互独立的分数布朗运动样本路径。由于每次迭代的每个方向 k 仅使用两条相互独立的分数布朗运动样本路径会产生过多噪声，且有限时间收敛结果有限，因此我们使用多条相互独立的分数布朗运动样本路径，并在每次迭代时取其平均值。这可以带来良好的有限时间收敛结果。调节序列 $a_k^{(n)}$ 和 $c_k^{(n)}$ 均为确定性的。Broadie 等人（2014）提出了多维 KW算法的自适应版本，可改善有限时间性能。他们针对某些 α_k、 $\gamma_k \in \mathbb{R}_+$ 和 $\beta_k \in \mathbb{Z}_+$，提出了调节序列 $a_k^{(n)} = \alpha_k/(n+\beta_k)$ 和 $c_k^{(n)} = \gamma_k/n^{1/4}$的最优取值。他们提出的自适应版本会根据待优化函数的特性和噪声水平，自适应地调整 α_k、 β_k和 γ_k，从而动态缩放并平移调节序列 $a_k^{(n)}$ 和 $c_k^{(n)}$ 。这种改进能够带来更好的有限时间性能。详情请参阅 Broadie 等人（2014）。我们使用多维 KW算法的这一自适应版本，求出最优的 $\hat{}q_1$、$\hat{}q_2$、...、$\hat{}q_N$，并得到相应的最优 $\hat{}\eta_1$、$\hat{}\eta_2$、...、$\hat{}\eta_N$。在接下来的章节中，我们以$N = 2$ 和 $N = 3$ 为例，说明如何求出最优阈值集合。

4.3 最优阈值的计算

本节以 $N = 2$ 和 $N = 3$ 为例，说明如何在截断抽样情形和非截断抽样情形下，求得最优阈值集合 $\hat{}\eta_1$、$\hat{}\eta_2$、.....、$\hat{}\eta_N$。

4.3.1 双样本情形

对于 $\tau_2 \le t < T$，给定 $\tau_{\eta_1} = \inf_{t\ge 0}\{t: |B_t^H| \ge \eta_1\}$, $\tau_{\eta_2} = \inf_{t\ge\tau_1}\{t: |B_t^H - B_{\tau_1}^H| \ge \eta_2\}$，且$\tau_i = \tau_{\eta_i} \wedge T$对于 $i = 1, 2$，根据公式（5），估计量 $\hat{}B_t^H$为

$$\hat{B}_t^H = C(\tau_1, \tau_2, H)(A_1(\tau_1, \tau_2, t, H)B_{\tau_1}^H - A_2(\tau_1, \tau_2, t, H)B_{\tau_2}^H),$$

其中 $C(\tau_1, \tau_2, H)$、 $A_1(\tau_1, \tau_2, t, H)$ 和 $A_2(\tau_1, \tau_2, t, H)$ 在第 6 节中给出 .1.

推论 3. 当底层过程是赫斯特参数为$H \in (0,\ 1)$的分数布朗运动时，采用阈值为 η_1、η_2 的电平触发采样双样本情形下，修正的聚合平方误差失真为：

$$
\begin{aligned}
J^*(\eta_1,\eta_2) = & \frac{T^{2H+1}}{2H+1} \\
& - \mathbb{E}\Bigg[\frac{(B^H_{\tau_1})^2}{4}\big[(\tau_2-\tau_1) + \frac{\tau_2^{4H+1}/\tau_1^{4H} - \tau_1}{4H+1} + \frac{2(\tau_2^{2H+1}-\tau_1^{2H+1})/\tau_1^{2H}}{2H+1} \\
& + \frac{(\tau_2-\tau_1)^{4H+1}/\tau_1^{4H}}{4H+1} - 2\frac{(\tau_2-\tau_1)^{2H+1}/\tau_1^{2H}}{2H+1} - 2\tau_1\int_1^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \mu^{2H}(\mu-1)^{2H}d\mu\big] \\
& + C(\tau_1,\tau_2,H)^2\big[(B^H_{\tau_1})^2\int_{\tau_2}^{T} A_1^2(\tau_1,\tau_2,t,H)dt + (B^H_{\tau_2})^2\int_{\tau_2}^{T} A_2^2(\tau_1,\tau_2,t,H)dt \\
& - 2B^H_{\tau_1}B^H_{\tau_2}\int_{\tau_2}^{T} A_1(\tau_1,\tau_2,t,H)A_2(\tau_1,\tau_2,t,H)dt\big]\Bigg]
\end{aligned}
$$

其中 $\tau_{\eta_1} = \inf_{t\geq 0}\{t:\ |B^H_t| \geq \eta_1\}$, $\tau_{\eta_2} = \inf_{t\geq \tau_1}\{t: |B^H_t - B^H_{\tau_1}| \geq \eta_2\}$ 且 $\tau_i = \tau_{\eta_i} \wedge T$对于 $i = 1,\ 2$。

推论 3 的证明见第 6.3 节。使用 Broadie 方法（Broadie 等人，2014），我们得到使推论 3 中的 $J^*(\eta_1,\eta_2)$ 最小化的最优阈值 $\hat{}\eta_1$ 和 $\hat{}\eta_2$。对于$H = 0.4$,0.6 和 0.7，最优阈值 $(\hat{}\eta_1,\hat{}\eta_2)$ 及其对应的最小失真见表 7。使用相同的方法，我们还可以通过最小化命题 5 中满足 $N = 2$ 的失真，得到截断式电平触发采样的最优阈值 $\hat{}\eta_1$ 和 $\hat{}\eta_2$。相应的最优阈值 $(\hat{}\eta_1,\hat{}\eta_2)$ 和最小失真见表 8。我们还在图 7 中展示了截断和非截断双样本情形下的最小失真结果。对于 $H = 0.1$,0.2 和 0.3，我们发现，纳入第二个允许的样本并不能提高估计精度或降低失真。因此，我们不在此处列出相关结果。

赫斯特	$(\hat{}\eta_1,\ \hat{}\eta_2)$	失真
0.4	$(0.693T^{\frac{1}{4}(2H+1)}\ 0.991(T-\tau_1)^{\frac{1}{4}(2H+1)})$	35.093
0.6	$(0.658T^{\frac{1}{4}(2H+1)}\ 0.930(T-\tau_1)^{\frac{1}{4}(2H+1)})$	58.133
0.7	$(0.627T^{\frac{1}{4}(2H+1)}\ 1.023(T-\tau_1)^{\frac{1}{4}(2H+1)})$	69.997

表 7：赫斯特参数为 $H = 0.4$，0.6，0.7 且 $T = 20$ 时，两个样本非截断情形下的最优阈值 $(\hat{}\eta_1,\hat{}\eta_2)$ 及对应的最小化失真。

根据表 7 和表 8 的结果，我们可以看出，对于不同的 H，估计得到的最优 $\hat{}q_1$ 和 $\hat{}q_2$ 数值相近。考虑到 T 和 $(T-\tau_1)$ 通常都大于 1，这表明随着赫斯特参数 H 增大，最优阈值也会增大。这与单样本情形中呈现的趋势一致。此外，未截断和截断

赫斯特	$(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)$	失真
0.4	$(0.666T^{\frac{1}{4}(2H+1)}1.013(T-\tau_1)^{\frac{1}{4}(2H+1)})$	35.820
0.6	$(0.668T^{\frac{1}{4}(2H+1)}0.941(T-\tau_1)^{\frac{1}{4}(2H+1)})$	59.582
0.7	$(0.649T^{\frac{1}{4}(2H+1)}1.039(T-\tau_1)^{\frac{1}{4}(2H+1)})$	77.191

表 8：赫斯特参数为 $H = 0.4$、0.6、0.7 时，双截断样本情形下的最优阈值 $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)$ 及其对应的最小化失真，其中 $T = 20$。

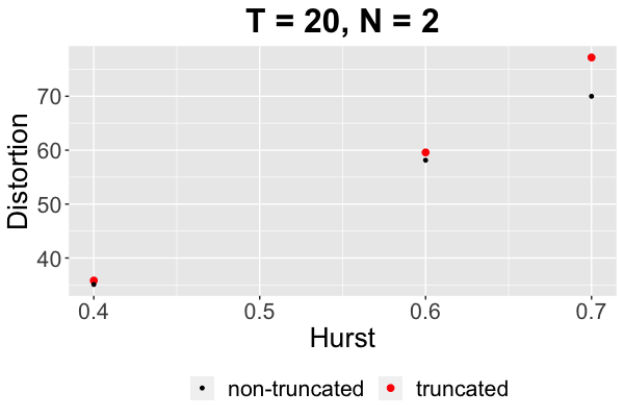

图 7：当 T =20 时，双样本情形下 $H = 0.4$，0。6，0。7 对应最优阈值下的最优失真。黑点表示相应赫斯特参数下非截断双样本情形的最优失真。红点表示相应赫斯特参数下截断双样本情形的最优失真。

双样本情形往往具有相似的最优阈值。非截断双样本情形的最优失真通常略小。

4.3.2 三样本情形

对于 $\tau_3 \le t < T$，给定 $\tau_{\eta_1} = \inf_{t\ge 0}\{t\colon |B_t^H| \ge \eta_1\}$, $\tau_{\eta_i} = \inf_{t\ge \tau_{i-1}}\{t\colon |B_t^H - B_{\tau_{i-1}}^H| \ge \eta_i\}$，当 $i = 2$，3 且 $\tau_i = \tau_{\eta_i} \wedge T$ 当 $i = 1$，2，3 时，估计为

$$\hat{B}_t^H = C(\tau_1, \tau_2, \tau_3, H)(A_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3, t, H)B_{\tau_1}^H + A_2(\tau_1, \tau_2, \tau_3, t, H)B_{\tau_2}^H + A_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3, t, H)B_{\tau_3}^H),$$

其中 $C(\tau_1, \tau_2, \tau_3, H)$、$A_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3, t, H)$、$A_2(\tau_1, \tau_2, \tau_3, t, H)$ 和 $A_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3, t, H)$ 在第 6.2 节中给出。

推论 4. 当底层过程为赫斯特参数为$H \in (0,1)$的分数布朗运动时，电平触发采样三个样本的修正的聚合平方误差失真

阈值为 η_1, η_2, η_3 的情形为:

$$
\begin{aligned}
&J^*(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\frac{T^{2H+1}}{2H+1}\\
&-\mathbb{E}\Bigg[\frac{(B^H_{\tau_1})^2}{4}\big((\tau_2-\tau_1)+\frac{\tau_2^{4H+1}/\tau_1^{4H}-\tau_1}{4H+1}+\frac{2(\tau_2^{2H+1}-\tau_1^{2H+1})/\tau_1^{2H}}{2H+1}\\
&+\frac{(\tau_2-\tau_1)^{4H+1}/\tau_1^{4H}}{4H+1}-2\frac{(\tau_2-\tau_1)^{2H+1}/\tau_1^{2H}}{2H+1}-2\tau_1\int_1^{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\mu^{2H}(\mu-1)^{2H}d\mu\big)\\
&+C(\tau_1,\tau_2,H)^2\big[(B^H_{\tau_1})^2\int_{\tau_2}^{\tau_3}A_1^2(\tau_1,\tau_2,t,H)dt+(B^H_{\tau_2})^2\int_{\tau_2}^{\tau_3}A_2^2(\tau_1,\tau_2,t,H)dt\\
&-2B^H_{\tau_1}B^H_{\tau_2}\int_{\tau_2}^{\tau_3}A_1(\tau_1,\tau_2,t,H)A_2(\tau_1,\tau_2,t,H)dt\big]\\
&+C(\tau_1,\tau_2,\tau_3,H)^2\big[(B^H_{\tau_1})^2\int_{\tau_3}^{T}A_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)^2dt+(B^H_{\tau_2})^2\int_{\tau_3}^{T}A_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)^2dt\\
&+(B^H_{\tau_3})^2\int_{\tau_3}^{T}A_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)^2dt+2B^H_{\tau_1}B^H_{\tau_2}\int_{\tau_3}^{T}A_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)A_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)dt\\
&+2B^H_{\tau_1}B^H_{\tau_3}\int_{\tau_3}^{T}A_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)A_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)dt\\
&+2B^H_{\tau_2}B^H_{\tau_3}\int_{\tau_3}^{T}A_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)A_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)dt\big]\Bigg],
\end{aligned}
$$

其中 $\tau_{\eta_1}=$下确界$_{t\geq 0}\{t\colon |B_t^H|\geq\eta_1\}$, $\tau_{\eta_i}=$下确界$_{t\geq\tau_{i-1}}\{t\colon |B_t^H-B^H_{\tau_{i-1}}|\geq\eta_i\}$对于 $i=2$、3以及 $\tau_i=\tau_{\eta_i}\wedge T$对于 $i=1$、2、3。

推论 4 的证明见第 6.4 节。使用 Broadie 方法（Broadie 等人，2014），我们求得了使推论 4 中的 $J^*(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)$ 最小化的最优阈值。对于 $H=0.1$，0。2，.....，0。7，相应的最优阈值 $(\hat{}\eta_1,\ \hat{}\eta_2,\ \hat{}\eta_3)$ 及最小失真见表 9。采用相同的方法，我们还通过最小化命题 5 中具有 $N=3$ 的失真，求得了截断式电平触发采样的最优阈值。相应的最优阈值 $(\hat{}\eta_1,\ \hat{}\eta_2,\ \hat{}\eta_3)$ 及最小失真见表 10。图 8 展示了截断和非截断三样本情形下的最小失真结果。

从表 9 和表 10 可以看出，对于不同的 H，估计得到的最优值 $\hat{}q_i$ 确实有所不同。对于 $\hat{}\eta_2$和 $\hat{}\eta_3$，$T-\tau_2$和 $T-\tau_3$的值都大于 1；随着 H 增大，不同 H对应的 $\hat{}q_2$和 $\hat{}q_3$的值则相近。这表明，随着赫斯特参数 H 增大，最优阈值 $\hat{}\eta_2$ 和 $\hat{}\eta_3$ 也会增大。对于 $\hat{}\eta_1$，尽管 $\hat{}q_1$ 随着 H 增大而呈下降趋势，但 $\hat{}\eta_1$ 的主要部分是 $T^{\frac{1}{4}(2H+1)}$，其中包含了整个时间范围。这表明，随着赫斯特参数 H 增大，最优阈值 $\hat{}\eta_1$ 也会增大。这与一次采样和双样本情形中的趋势一致。此外，在非截断情形和截断情形中，最优阈值往往相近。就最小失真而言，大多数情况下非截断情形的失真较小。

赫斯特	$(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3)$	失真
0.1	$(0.775T^{\frac{1}{4}(2H+1)}0.617(T-\tau_1)^{\frac{1}{4}(2H+1)}1.051(T-\tau_2)^{\frac{1}{4}(2H+1)})$	2.259
0.2	$(0.737T^{\frac{1}{4}(2H+1)}0.534(T-\tau_1)^{\frac{1}{4}(2H+1)}0.982(T-\tau_2)^{\frac{1}{4}(2H+1)})$	8.049
0.3	$(0.719T^{\frac{1}{4}(2H+1)}0.492(T-\tau_1)^{\frac{1}{4}(2H+1)}0.936(T-\tau_2)^{\frac{1}{4}(2H+1)})$	18.388
0.4	$(0.646T^{\frac{1}{4}(2H+1)}0.655(T-\tau_1)^{\frac{1}{4}(2H+1)}0.939(T-\tau_2)^{\frac{1}{4}(2H+1)})$	28.713
0.6	$(0.542T^{\frac{1}{4}(2H+1)}0.733(T-\tau_1)^{\frac{1}{4}(2H+1)}0.935(T-\tau_2)^{\frac{1}{4}(2H+1)})$	22.766
0.7	$(0.485T^{\frac{1}{4}(2H+1)}0.760(T-\tau_1)^{\frac{1}{4}(2H+1)}1.012(T-\tau_2)^{\frac{1}{4}(2H+1)})$	1.661

表 9：赫斯特参数 $H = 0.1, 0.2, \ldots, 0.7$ 时， $T = 20$条件下三个样本非截断情形中的最优阈值 $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3)$ 及其对应的失真。

赫斯特	$(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3)$	失真
0.1	$(0.682T^{\frac{1}{4}(2H+1)}0.545(T-\tau_1)^{\frac{1}{4}(2H+1)}0.983(T-\tau_2)^{\frac{1}{4}(2H+1)})$	0.877
0.2	$(0.629T^{\frac{1}{4}(2H+1)}0.489(T-\tau_1)^{\frac{1}{4}(2H+1)}0.927(T-\tau_2)^{\frac{1}{4}(2H+1)})$	8.437
0.3	$(0.616T^{\frac{1}{4}(2H+1)}0.513(T-\tau_1)^{\frac{1}{4}(2H+1)}0.918(T-\tau_2)^{\frac{1}{4}(2H+1)})$	20.916
0.4	$(0.579T^{\frac{1}{4}(2H+1)}0.647(T-\tau_1)^{\frac{1}{4}(2H+1)}0.957(T-\tau_2)^{\frac{1}{4}(2H+1)})$	29.020
0.6	$(0.529T^{\frac{1}{4}(2H+1)}0.705(T-\tau_1)^{\frac{1}{4}(2H+1)}0.971(T-\tau_2)^{\frac{1}{4}(2H+1)})$	25.803
0.7	$(0.479T^{\frac{1}{4}(2H+1)}0.756(T-\tau_1)^{\frac{1}{4}(2H+1)}1.069(T-\tau_2)^{\frac{1}{4}(2H+1)})$	6.553

表 10：当 $T = 20$时，赫斯特参数为 $H = 0.1, 0.2, \ldots, 0.7$的三样本截断情形下的最优阈值 $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3)$及相应的失真。

5 讨论

本文提出了两类不同的采样方案，用于估计分数布朗运动。通过最小化总平方误差失真，我们针对每种采样方案，找到了在允许不同样本数时的最优采样策略。我们观察到，在给定允许样本数的情况下，最优采样策略与赫斯特参数之间存在某种关系。

对于确定性采样，采样时间序列是确定的，且独立于分数布朗运动过程的实际轨迹。我们可以直接优化失真，以求得最优采样时刻。根据我们的结果，当赫斯特参数离 $H = \frac{1}{2}$ 越远时，最优采样时刻往往越小。我们还研究了该问题的一个截断版本，即仅使用最后一个观测值进行估计。这个截断版本得到的最优采样时刻和最小化失真与原问题相近，表明其准确性较好

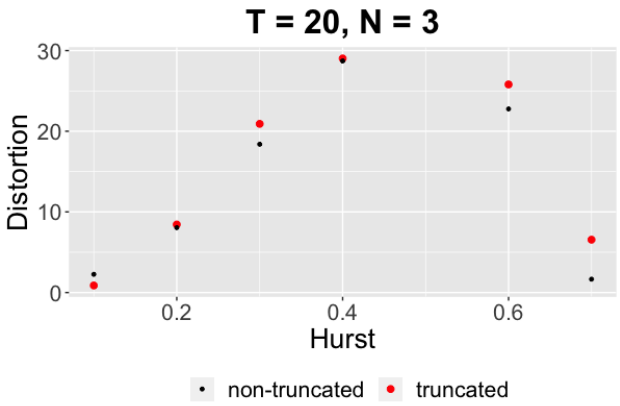

图 8：当 $H = 0.1$、0。2、.....、0。7 时，给定最优阈值所得的最优失真。黑点表示对应赫斯特参数下非截断三样本情形的最优失真。红点表示对应赫斯特参数下截断三样本情形的最优失真。

且计算复杂度更低。

对于电平触发采样，采样时间序列是随机的，并且取决于实际的分数布朗运动轨迹。我们使用随机逼近法来寻找使失真最小的最优阈值。对于多样本情形，直接寻找最优阈值并不可行。我们基于一种提出的结构来估计最优阈值。根据我们的结果，随着赫斯特参数不断增大，最优阈值呈上升趋势。我们还研究了该问题的一个截断版本，仅使用最后一个观测值进行估计。我们发现，与非截断版本相比，该截断版本仍能得到相似的最优阈值和失真。这表明，使用该截断版本进行电平触发采样估计，仍能以较低的计算复杂度取得良好性能。

本文聚焦于以分数布朗运动作为信号。未来的研究方向之一是探讨分数奥恩斯坦-乌伦贝克过程的多重采样问题。分数奥恩斯坦-乌伦贝克过程是奥恩斯坦-乌伦贝克过程的分数阶类比。现有的针对奥恩斯坦-乌伦贝克过程的多重采样框架（Rabi 等，2006）无法直接扩展到分数奥恩斯坦-乌伦贝克过程。拓展我们的研究，并探讨分数奥恩斯坦-乌伦贝克过程的多重采样方法，是一项值得研究的课题。

6 证明与推导

6.1 推论 1 的证明

证明。 对于 $\tau_1 \le t < \tau_2$，估计量 $\hat{}B_t^H$是

$$\hat{B}_t^H = \mathbb{E}(B_t^H|\mathcal{F}_{\tau_1}) = \mathbb{E}(B_t^H|B_{\tau_1}^H) = \frac{B_{\tau_1}^H}{2\tau_1^{2H}}(t^{2H} + \tau_1^{2H} - |t-\tau_1|^{2H}).$$

对于 $\tau_2 \le t < T$，已知

$$\begin{aligned}\Sigma &= \begin{pmatrix} t^{2H} & \frac{1}{2}(t^{2H}+\tau_1^{2H}-(t-\tau_1)^{2H}) & \frac{1}{2}(t^{2H}+\tau_2^{2H}-(t-\tau_2)^{2H}) \\ \frac{1}{2}(t^{2H}+\tau_1^{2H}-(t-\tau_1)^{2H}) & \tau_1^{2H} & \frac{1}{2}(\tau_1^{2H}+\tau_2^{2H}-(\tau_2-\tau_1)^{2H}) \\ \frac{1}{2}(t^{2H}+\tau_2^{2H}-(t-\tau_2)^{2H}) & \frac{1}{2}(\tau_1^{2H}+\tau_2^{2H}-(\tau_2-\tau_1)^{2H}) & \tau_2^{2H} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

以及公式（5），估计值 $\hat{}B_t^H$为:

$$\begin{aligned}\hat{B}_t^H &= \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\begin{pmatrix} B_{\tau_1}^H \\ B_{\tau_2}^H \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}(t^{2H}+\tau_1^{2H}-(t-\tau_1)^{2H}) \quad \frac{1}{2}(t^{2H}+\tau_2^{2H}-(t-\tau_2)^{2H})\right)\cdot \\ &\quad \begin{pmatrix} \tau_1^{2H} & \frac{1}{2}(\tau_1^{2H}+\tau_2^{2H}-(\tau_2-\tau_1)^{2H}) \\ \frac{1}{2}(\tau_1^{2H}+\tau_2^{2H}-(\tau_2-\tau_1)^{2H}) & \tau_2^{2H} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} B_{\tau_1}^H \\ B_{\tau_2}^H \end{pmatrix} \\ &= C(\tau_1,\tau_2,H)(A_1(\tau_1,\tau_2,t,H)B_{\tau_1}^H - A_2(\tau_1,\tau_2,t,H)B_{\tau_2}^H),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}C(\tau_1,\tau_2,H) &= \frac{1}{\tau_1^{4H} + (\tau_2^{2H} - (-\tau_1+\tau_2)^{2H})^2 - 2\tau_1^{2H}(\tau_2^{2H} + (-\tau_1+\tau_2)^{2H})}, \\ A_1(\tau_1,\tau_2,t,H) &= 2(t-\tau_1)^{2H}\tau_2^{2H} - (t-\tau_2)^{2H}\tau_2^{2H} + \tau_2^{4H} + (t-\tau_2)^{2H}(-\tau_1+\tau_2)^{2H} - \tau_2^{2H}(-\tau_1+\tau_2)^{2H} \\ &\quad - \tau_1^{2H}((t-\tau_2)^{2H} + \tau_2^{2H}) + t^{2H}(\tau_1^{2H} - \tau_2^{2H} - (-\tau_1+\tau_2)^{2H}),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}A_2(\tau_1,\tau_2,t,H) &= -\tau_1^{4H} + (t-\tau_1)^{2H}(\tau_2^{2H} - (-\tau_1+\tau_2)^{2H}) + t^{2H}(\tau_1^{2H} - \tau_2^{2H} + (-\tau_1+\tau_2)^{2H}) \\ &\quad + \tau_1^{2H}((t-\tau_1)^{2H} - 2(t-\tau_2)^{2H} + \tau_2^{2H} + (-\tau_1+\tau_2)^{2H}).\end{aligned}$$

根据公式（6），总平方误差失真为

$$\begin{aligned}J(\tau_1,\tau_2) &= \int_0^T \mathbb{E}(B_t^H)^2 dt - \sum_{i=1}^{2}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \mathbb{E}(\hat{B}_t^H)^2 dt \\ &= \frac{T^{2H+1}}{2H+1} - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathbb{E}\left(\frac{B_{\tau_1}^H}{2\tau_1^{2H}}(t^{2H}+\tau_1^{2H}-|\tau_1-t|^{2H})\right)^2 dt\end{aligned}$$

$$- \int_{\tau_2}^{T} \mathbb{E}\big[C(\tau_1,\tau_2,H)^2[A_1(\tau_1,\tau_2,t,H)B^H_{\tau_1} - A_2(\tau_1,\tau_2,t,H)B^H_{\tau_2}]^2\big]dt,$$

其中

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathbb{E}\bigg(\frac{B^H_{\tau_1}}{2\tau_1^{2H}}(t^{2H}+\tau_1^{2H}-|\tau_1-t|^{2H})\bigg)^2 dt = \frac{1}{4\tau_1^{2H}}\int_{\tau_1}^{\tau_2}(s^{2H}+\tau_1^{2H}-|s-\tau_1|^{2H})^2 ds$$

and

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau_2}^{T} \mathbb{E}\big[C(\tau_1,\tau_2,H)^2[A_1(\tau_1,\tau_2,t,H)B^H_{\tau_1} - A_2(\tau_1,\tau_2,t,H)B^H_{\tau_2}]^2\big]dt \\
&= C(\tau_1,\tau_2,H)^2\int_{\tau_2}^{T} \mathbb{E}[A_1(\tau_1,\tau_2,t,H)^2(B^H_{\tau_1})^2 + A_2(\tau_1,\tau_2,t,H)^2(B^H_{\tau_2})^2 \\
&- 2A_1(\tau_1,\tau_2,t,H)A_2(\tau_1,\tau_2,t,H)B^H_{\tau_1}B^H_{\tau_2}]dt \\
&= C(\tau_1,\tau_2,H)^2\int_{\tau_2}^{T} [A_1(\tau_1,\tau_2,t,H)^2\tau_1^{2H} + A_2(\tau_1,\tau_2,t,H)^2\tau_2^{2H} \\
&- A_1(\tau_1,\tau_2,t,H)A_2(\tau_1,\tau_2,t,H)(\tau_2^{2H}+\tau_1^{2H}-|\tau_2-\tau_1|^{2H})]dt.
\end{aligned}$$

□

6.2 推论 2 的证明

证明。对于 $0 \le t < \tau_1$ 和 $\tau_1 \le t < \tau_2$，估计量 $\hat{}B^H_t$已在第 6.1 节中给出。对于 $\tau_3 \le t < T$，估计量 $\hat{}B^H_t$为

$$\hat{B}^H_t = C(\tau_1,\tau_2,\tau_3,H)(A_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)B^H_{\tau_1} + A_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)B^H_{\tau_2} + A_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)B^H_{\tau_3}) \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned}
&C(\tau_1,\tau_2,\tau_3,H) = \\
&1/(2(\tau_2^{4H}(-\tau_1+\tau_3)^{2H} + (-\tau_1+\tau_2)^{2H}(\tau_3^{4H} + (-\tau_1+\tau_3)^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{2H} \\
&+ \tau_3^{2H}((-\tau_1+\tau_2)^{2H} - (-\tau_1+\tau_3)^{2H} - (-\tau_2+\tau_3)^{2H})) + \tau_1^{4H}(-\tau_2+\tau_3)^{2H} \\
&+ \tau_1^{2H}(\tau_2^{2H}((-\tau_1+\tau_2)^{2H} - (-\tau_1+\tau_3)^{2H} - (-\tau_2+\tau_3)^{2H}) \\
&- (-\tau_2+\tau_3)^{2H}((-\tau_1+\tau_2)^{2H} + (-\tau_1+\tau_3)^{2H} - (-\tau_2+\tau_3)^{2H}) \\
&- \tau_3^{2H}((-\tau_1+\tau_2)^{2H} - (-\tau_1+\tau_3)^{2H} + (-\tau_2+\tau_3)^{2H})) \\
&- \tau_2^{2H}(\tau_3^{2H}((-\tau_1+\tau_2)^{2H} + (-\tau_1+\tau_3)^{2H} - (-\tau_2+\tau_3)^{2H}) \\
&+ (-\tau_1+\tau_3)^{2H}((-\tau_1+\tau_2)^{2H} - (-\tau_1+\tau_3)^{2H} + (-\tau_2+\tau_3)^{2H})))),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&A_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H) = \\
&- t^{2H}(-\tau_1+\tau_2)^{2H}\tau_3^{2H} + 2(t-\tau_2)^{2H}(-\tau_1+\tau_2)^{2H}\tau_3^{2H}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- (-\tau_1+\tau_2)^{2H}(t-\tau_3)^{2H}\tau_3^{2H} - (t-\tau_1)^{2H}\tau_3^{4H} + (t-\tau_2)^{2H}\tau_3^{4H}\\
&+ (-\tau_1+\tau_2)^{2H}\tau_3^{4H} + t^{2H}\tau_3^{2H}(-\tau_1+\tau_3)^{2H} - (t-\tau_2)^{2H}\tau_3^{2H}(-\tau_1+\tau_3)^{2H}\\
&- t^{2H}(-\tau_1+\tau_2)^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{2H} + (-\tau_1+\tau_2)^{2H}(t-\tau_3)^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{2H}\\
&- t^{2H}\tau_3^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{2H} + 2(t-\tau_1)^{2H}\tau_3^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{2H} - (t-\tau_2)^{2H}\tau_3^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{2H}\\
&- (-\tau_1+\tau_2)^{2H}\tau_3^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{2H} - t^{2H}(-\tau_1+\tau_3)^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{2H}\\
&+ (t-\tau_2)^{2H}(-\tau_1+\tau_3)^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{2H} + t^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{4H}\\
&- (t-\tau_1)^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{4H} + \tau_2^{4H}(-(t-\tau_1)^{2H} + (t-\tau_3)^{2H} + (-\tau_1+\tau_3)^{2H})\\
&+ \tau_1^{2H}(\tau_2^{2H}((t-\tau_2)^{2H} - (t-\tau_3)^{2H} - (-\tau_2+\tau_3)^{2H}) + (-\tau_2+\tau_3)^{2H}(2t^{2H}\\
&- (t-\tau_2)^{2H} - (t-\tau_3)^{2H} + (-\tau_2+\tau_3)^{2H}) - \tau_3^{2H}((t-\tau_2)^{2H} - (t-\tau_3)^{2H}\\
&+ (-\tau_2+\tau_3)^{2H})) - \tau_2^{2H}((-\tau_1+\tau_2)^{2H}(t-\tau_3)^{2H} + (t-\tau_2)^{2H}(-\tau_1+\tau_3)^{2H}\\
&- 2(t-\tau_3)^{2H}(-\tau_1+\tau_3)^{2H} - 2(t-\tau_1)^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{2H} + (t-\tau_3)^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{2H}\\
&+ (-\tau_1+\tau_3)^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{2H} + \tau_3^{2H}(-2(t-\tau_1)^{2H} + (t-\tau_2)^{2H} + (-\tau_1+\tau_2)^{2H}\\
&+ (t-\tau_3)^{2H} + (-\tau_1+\tau_3)^{2H} - 2(-\tau_2+\tau_3)^{2H}) + t^{2H}(-(-\tau_1+\tau_2)^{2H} + (-\tau_1+\tau_3)^{2H} + (-\tau_2+\tau_3)^{2H})),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&A_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H) =\\
&- (t^{2H}(-\tau_1+\tau_2)^{2H}\tau_3^{2H} - 2(t-\tau_1)^{2H}(-\tau_1+\tau_2)^{2H}\tau_3^{2H} +\\
&(-\tau_1+\tau_2)^{2H}(t-\tau_3)^{2H}\tau_3^{2H} - (t-\tau_1)^{2H}\tau_3^{4H} + (t-\tau_2)^{2H}\tau_3^{4H} -\\
&(-\tau_1+\tau_2)^{2H}\tau_3^{4H} + t^{2H}(-\tau_1+\tau_2)^{2H}(-\tau_1+\tau_3)^{2H} - (-\tau_1+\tau_2)^{2H}(t-\tau_3)^{2H}(-\tau_1+\tau_3)^{2H} +\\
&t^{2H}\tau_3^{2H}(-\tau_1+\tau_3)^{2H} + (t-\tau_1)^{2H}\tau_3^{2H}(-\tau_1+\tau_3)^{2H} -\\
&2(t-\tau_2)^{2H}\tau_3^{2H}(-\tau_1+\tau_3)^{2H} + (-\tau_1+\tau_2)^{2H}\tau_3^{2H}(-\tau_1+\tau_3)^{2H} -\\
&t^{2H}(-\tau_1+\tau_3)^{4H} + (t-\tau_2)^{2H}(-\tau_1+\tau_3)^{4H} - t^{2H}\tau_3^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{2H} + (t-\tau_1)^{2H}\tau_3^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{2H} +\\
&t^{2H}(-\tau_1+\tau_3)^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{2H} - (t-\tau_1)^{2H}(-\tau_1+\tau_3)^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{2H} + \tau_1^{4H}((t-\tau_2)^{2H} -\\
&(t-\tau_3)^{2H} - (-\tau_2+\tau_3)^{2H}) + \tau_2^{2H}((-\tau_1+\tau_3)^{2H}(-2t^{2H} + (t-\tau_1)^{2H} + (t-\tau_3)^{2H} -\\
&(-\tau_1+\tau_3)^{2H}) + \tau_3^{2H}((t-\tau_1)^{2H} - (t-\tau_3)^{2H} + (-\tau_1+\tau_3)^{2H})) + \tau_1^{2H}((-\tau_1+\tau_2)^{2H}(t-\tau_3)^{2H} +\\
&(t-\tau_1)^{2H}\tau_3^{2H} - 2(t-\tau_2)^{2H}\tau_3^{2H} + (-\tau_1+\tau_2)^{2H}\tau_3^{2H} + (t-\tau_3)^{2H}\tau_3^{2H} -\\
&2(t-\tau_2)^{2H}(-\tau_1+\tau_3)^{2H} + (t-\tau_3)^{2H}(-\tau_1+\tau_3)^{2H} - 2\tau_3^{2H}(-\tau_1+\tau_3)^{2H} + (t-\tau_1)^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{2H} -\\
&2(t-\tau_3)^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{2H} + \tau_3^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{2H} + (-\tau_1+\tau_3)^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{2H} + \tau_2^{2H}(-(t-\tau_1)^{2H} +\\
&(t-\tau_3)^{2H} + (-\tau_1+\tau_3)^{2H}) + t^{2H}(-(-\tau_1+\tau_2)^{2H} + (-\tau_1+\tau_3)^{2H} + (-\tau_2+\tau_3)^{2H}))),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&A_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H) =\\
&\tau_2^{4H}((t-\tau_1)^{2H} - (t-\tau_3)^{2H} + (-\tau_1+\tau_3)^{2H}) +\\
&\tau_1^{4H}((t-\tau_2)^{2H} - (t-\tau_3)^{2H} + (-\tau_2+\tau_3)^{2H}) + ((-\tau_1+\tau_2)^{2H})(-(-\tau_1+\tau_2)^{2H}(t-\tau_3)^{2H} -
\end{aligned}
$$

$((t-\tau_1)^{2H}+(t-\tau_2)^{2H}-(-\tau_1+\tau_2)^{2H})\tau_3^{2H}+(t-\tau_2)^{2H}(-\tau_1+\tau_3)^{2H}+(t-\tau_1)^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{2H}+$
$t^{2H}((-\tau_1+\tau_2)^{2H}+2\tau_3^{2H}-(-\tau_1+\tau_3)^{2H}-(-\tau_2+\tau_3)^{2H}))-\tau_2^{2H}((t-\tau_1)^{2H}(-\tau_1+\tau_2)^{2H}-$
$2(-\tau_1+\tau_2)^{2H}(t-\tau_3)^{2H}+((t-\tau_1)^{2H}-(t-\tau_2)^{2H}+(-\tau_1+\tau_2)^{2H})\tau_3^{2H}-$
$2(t-\tau_1)^{2H}(-\tau_1+\tau_3)^{2H}+(t-\tau_2)^{2H}(-\tau_1+\tau_3)^{2H}+(-\tau_1+\tau_2)^{2H}(-\tau_1+\tau_3)^{2H}+$
$(t-\tau_1)^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{2H}+t^{2H}((-\tau_1+\tau_2)^{2H}+(-\tau_1+\tau_3)^{2H}-(-\tau_2+\tau_3)^{2H}))-$
$\tau_1^{2H}((t-\tau_2)^{2H}(-\tau_1+\tau_2)^{2H}-2(-\tau_1+\tau_2)^{2H}(t-\tau_3)^{2H}-(t-\tau_1)^{2H}\tau_3^{2H}+(t-\tau_2)^{2H}\tau_3^{2H}+$
$(-\tau_1+\tau_2)^{2H}\tau_3^{2H}+(t-\tau_2)^{2H}(-\tau_1+\tau_3)^{2H}+(t-\tau_1)^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{2H}-$
$2(t-\tau_2)^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{2H}+(-\tau_1+\tau_2)^{2H}(-\tau_2+\tau_3)^{2H}+t^{2H}((-\tau_1+\tau_2)^{2H}-(-\tau_1+\tau_3)^{2H}+$
$(-\tau_2+\tau_3)^{2H})+\tau_2^{2H}((t-\tau_1)^{2H}+(t-\tau_2)^{2H}-2(-\tau_1+\tau_2)^{2H}-2(t-\tau_3)^{2H}$
$+(-\tau_1+\tau_3)^{2H}+(-\tau_2+\tau_3)^{2H})).$

根据方程 6，三样本情形的总平方误差失真为

$$
\begin{aligned}
&J(\tau_1,\tau_2,\tau_3)=\int_0^T\mathbb{E}(B_t^H)^2dt-\sum_{i=1}^{3}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\mathbb{E}(\hat{B}_t^H)^2dt\\
&=\frac{T^{2H+1}}{2H+1}-\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mathbb{E}\bigg(\frac{B_{\tau_1}^H}{2\tau_1^{2H}}(t^{2H}+\tau_1^{2H}-|\tau_1-t|^{2H})\bigg)^2dt\\
&-\int_{\tau_2}^{\tau_3}\mathbb{E}[C(\tau_1,\tau_2,H)^2[A_1(\tau_1,\tau_2,t,H)B_{\tau_1}^H-A_2(\tau_1,\tau_2,t,H)B_{\tau_2}^H]^2]dt\\
&-\int_{\tau_3}^{T}\mathbb{E}[C(\tau_1,\tau_2,\tau_3,H)^2(A_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)B_{\tau_1}^H+A_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)B_{\tau_2}^H+A_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)B_{\tau_3}^H)^2]dt\\
&=\frac{T^{2H+1}}{2H+1}-\frac{1}{4\tau_1^{2H}}\int_{\tau_1}^{\tau_2}(s^{2H}+\tau_1^{2H}-|s-\tau_1|^{2H})^2ds\\
&-C(\tau_1,\tau_2,H)^2\int_{\tau_2}^{\tau_3}[A_1(\tau_1,\tau_2,t,H)^2\tau_1^{2H}+A_2(\tau_1,\tau_2,t,H)^2\tau_2^{2H}\\
&-A_1(\tau_1,\tau_2,t,H)A_2(\tau_1,\tau_2,t,H)(\tau_2^{2H}+\tau_1^{2H}-|\tau_2-\tau_1|^{2H})]dt\\
&-\int_{\tau_3}^{T}\mathbb{E}[C(\tau_1,\tau_2,\tau_3,H)^2(A_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)B_{\tau_1}^H+A_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)B_{\tau_2}^H+A_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)B_{\tau_3}^H)^2]dt,
\end{aligned}
$$

where

$$
\begin{aligned}
&\int_{\tau_3}^{T}\mathbb{E}[C(\tau_1,\tau_2,\tau_3,H)^2(A_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)B_{\tau_1}^H+A_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)B_{\tau_2}^H+A_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)B_{\tau_3}^H)^2]dt\\
=&C(\tau_1,\tau_2,\tau_3,H)^2\int_{\tau_3}^{T}[A_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)^2\tau_1^{2H}+A_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)^2\tau_2^{2H}+A_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)^2\tau_3^{2H}\\
&+A_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)A_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)(\tau_1^{2H}+\tau_2^{2H}-(\tau_2-\tau_1)^{2H})\\
&+A_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)A_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)(\tau_1^{2H}+\tau_3^{2H}-(\tau_3-\tau_1)^{2H})\\
&+A_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)A_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)(\tau_2^{2H}+\tau_3^{2H}-(\tau_3-\tau_2)^{2H})]dt.
\end{aligned}
$$

□

6.3 推论 3 的证明

证明。 对于双样本情形，根据公式（11），修正失真为

$$J^*(\eta_1,\eta_2)=\frac{T^{2H+1}}{2H+1}-\mathbb{E}\Big[\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\hat{B}_t^H)^2dt+\int_{\tau_2}^{T}(\hat{B}_t^H)^2dt\Big],$$

其中

$$\begin{aligned}\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\hat{B}_s^H)^2ds&=\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\frac{B_{\tau_1}^H}{2\tau_1^{2H}}(s^{2H}+\tau_1^{2H}-|s-\tau_1|^{2H}))^2ds\\&=\frac{(B_{\tau_1}^H)^2}{4}\big[(\tau_2-\tau_1)+\frac{\tau_2^{4H+1}/\tau_1^{4H}-\tau_1}{4H+1}+\frac{2(\tau_2^{2H+1}-\tau_1^{2H+1})/\tau_1^{2H}}{2H+1}\\&+\frac{(\tau_2-\tau_1)^{4H+1}/\tau_1^{4H}}{4H+1}-2\frac{(\tau_2-\tau_1)^{2H+1}/\tau_1^{2H}}{2H+1}-2\tau_1\int_1^{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\mu^{2H}(\mu-1)^{2H}d\mu\big],\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\int_{\tau_2}^{T}(\hat{B}_s^H)^2ds&=\int_{\tau_2}^{T}C(\tau_1,\tau_2,H)^2(A_1(\tau_1,\tau_2,t,H)B_{\tau_1}^H-A_2(\tau_1,\tau_2,t,H)B_{\tau_2}^H)^2ds\\&=C(\tau_1,\tau_2,H)^2\int_{\tau_2}^{T}[A_1^2(\tau_1,\tau_2,t,H)(B_{\tau_1}^H)^2+A_2^2(\tau_1,\tau_2,t,H)(B_{\tau_2}^H)^2\\&-2A_1(\tau_1,\tau_2,t,H)A_2(\tau_1,\tau_2,t,H)B_{\tau_1}^HB_{\tau_2}^H]dt\\&=C(\tau_1,\tau_2,H)^2\big[(B_{\tau_1}^H)^2\int_{\tau_2}^{T}A_1^2(\tau_1,\tau_2,t,H)dt+(B_{\tau_2}^H)^2\int_{\tau_2}^{T}A_2^2(\tau_1,\tau_2,t,H)dt\\&-2B_{\tau_1}^HB_{\tau_2}^H\int_{\tau_2}^{T}A_1(\tau_1,\tau_2,t,H)A_2(\tau_1,\tau_2,t,H)dt\big].\end{aligned}$$

由此即可完成证明。 □

6.4 推论 4 的证明

证明。 对于三个样本情形，根据公式（11），修正失真为

$$J^*(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\frac{T^{2H+1}}{2H+1}-\mathbb{E}\sum_{i=1}^{3}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(\hat{B}_t^H)^2dt,$$

其中 $\tau_4=T$。 $\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\hat{B}_t^H)^2dt+\int_{\tau_2}^{\tau_3}(\hat{B}_t^H)^2dt$ 的计算见第 6.3 节，其中我们在第 6.3 节中设定 $T=\tau_3$。

对于 $\tau_3\le t<T$，估计为

$$\hat{B}_t^H=C(\tau_1,\tau_2,\tau_3,H)(A_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)B_{\tau_1}^H+A_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)B_{\tau_2}^H+A_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)B_{\tau_3}^H),$$

其中计算已在第6.2节中完成。

然后我们可以得到:

$$\int_{\tau_3}^{T}(\hat{B}_t^H)^2dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\tau_3}^{T} [C(\tau_1,\tau_2,\tau_3,H)^2 (A_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)B^H_{\tau_1} + A_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)B^H_{\tau_2} + A_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)B^H_{\tau_3})^2] dt \\
&= C(\tau_1,\tau_2,\tau_3,H)^2 \big[(B^H_{\tau_1})^2 \int_{\tau_3}^{T} A_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)^2 dt + (B^H_{\tau_2})^2 \int_{\tau_3}^{T} A_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)^2 dt \\
&\quad + (B^H_{\tau_3})^2 \int_{\tau_3}^{T} A_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H)^2 dt + 2B^H_{\tau_1} B^H_{\tau_2} \int_{\tau_3}^{T} A_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H) A_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H) dt \\
&\quad + 2B^H_{\tau_1} B^H_{\tau_3} \int_{\tau_3}^{T} A_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H) A_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H) dt \\
&\quad + 2B^H_{\tau_2} B^H_{\tau_3} \int_{\tau_3}^{T} A_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H) A_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t,H) dt \big],
\end{aligned}
$$

由此即可完成证明。 □

参考文献

Astrom, K. J. 和 Bernhardsson, B. M.（2002），一阶随机系统的黎曼采样与勒贝格采样比较，载于第 *41* 届 *IEEE* 决策与控制会议论文集，*2002* 年。，第 2 卷，第 2011–2016 页，第 2 卷。

˚Astr¨om, K. J. 和 Wittenmark, B. (2013)，《计算机控制系统：理论与设计 Courier Corporation》。

Beran, J. (1994年),长记忆过程统计学, 第61卷，CRC出版社。

Blum, J. R. (1954)，“多维随机逼近方法”，《数学统计年刊》，25(4)，737–744。**网址：** *https://doi.org/10.1214/aoms/1177728659*

Brent, R. P.（2013），无导数最小化算法 CourierCorporation .

Broadie, M.、Cicek, D. 和 Zeevi, A.（2011），《Kiefer-Wolfowitz随机逼近算法的一般界与有限时间改进》，《运筹学》，59(5)，1211–1224。

Broadie, M.、Cicek, D. 和 Zeevi, A.（2014），《多维随机逼近：自适应算法与应用》，ACM建模与计算机仿真汇刊（TOMACS），24。

Cambanis, S. 和 Masry, E.（1983），《用于检测噪声中信号的采样设计》，IEEE信息论汇刊，29(1)，83–104。

Chronopoulou, A., and Viens, F. G. (2012), “长记忆随机波动率下的估计与定价,”《金融年刊》，8(2-3), 379–403.

Comte, F., and Renault, E. (1998), “连续时间随机波动率模型中的长记忆,”数理金融, 8(4), 291–323. Dupaˇc, V. (1957), “O Kiefer-Wolfowitzovˇe aproximaˇcnı́ methodˇe,” ˇ*Casopis pro pˇestovˊanˊı matem-atiky*, 082(1), 47–75.**网址：** *http://eudml.org/doc/20601*Fabian, V. (1967), “随机逼近极小值的渐近速度有所提升,” 《数学统计年刊》, pp. 191–200. Hespanha, J. P., Naghshtabrizi, P., and Xu, Y. (2007), “网络化控制系统近期成果综述,” *IEEE* 论文集, 95(1), 138–162. Hurst, H. E. (1951), “水库的长期储水能力,” *Trans. Amer. Soc. Civil Eng.*, 116, 770–799. Imer, O. C., and Basar, T. (2005), 有限测量下的最优估计,, 载于 *IEEE* 第*44*届决策与控制会议论文集, IEEE, pp. 1029–1034. Kiefer, J., and Wolfowitz, J. (1952), “回归函数最大值的随机估计,” 《数学统计年刊》, 23(3), 462–466.**网址：** *https://doi.org/10.1214/aoms/1177729392*Kushner, H. (1964), “未知初始状态下线性控制系统观测时机的最优化,”*IEEE* 自动控制汇刊, AC-9, 144 – 150. Li, L., Lemmon, M., and Wang, X. (2010), 向量线性过程中的事件触发状态估计,, 载于 *2010*年美国控制会议论文集, IEEE, pp. 2138–2143. Mandelbrot, B. B., and Van Ness, J. W. (1968), “分数布朗运动、分数噪声及其应用,” *SIAM* 评论, 10(4), 422–437. Murray, R. M., Astrom, K. J., Boyd, S.P., Brockett, R.W., andStein, G.(2003), “信息丰富的世界中控制领域的未来方向,” *IEEE* 控制系统杂志, 23(2), 20–33. Nualart, D. (2006), *Malliavin* 微积分及相关专题, Vol. 1995 Springer. Polyak, B. T., and Tsybakov, A. B. (1990), “随机优化中搜索算法的最优准确性阶,” *Problemy Peredachi Informatsii*, 26(2), 45–53. Rabi, M., Moustakides, G. V., and Baras, J. S. (2006), 有限时域上的估计多重采样,, 载于 *IEEE* 第*45*届决策与控制会议论文集, IEEE, pp. 1351–1357.

Robbins, H. 和 Monro, S.（1951年），《一种随机逼近法》，《数理统计年刊》，第 400–407 页。