arXiv:2304.07692v1 [math.RA] 16 Apr 2023

某些子模类的拓扑性质

A. GOSWAMI

摘要。我们研究一类真子模及其若干特殊子类的拓扑，并将它们称为结构空间。我们给出这些结构空间拟紧性的若干判据。我们研究 T_0 和 T_1分离性质，并刻画非空不可约闭子集均具有唯一泛点的结构空间。我们给出结构空间连通性的一个充分条件。我们证明真子模的结构空间是谱空间，并进一步刻画诺特模的谱结构空间。最后，我们讨论这些空间之间的连续函数。

1. 引言与预备知识

自[D78], 引入素子模以来，这一类子模便受到广泛关注（参见 [L12、L84、L95]）。鉴于环的理想存在各种不同的类别，引入类似的子模类别是很自然的，因此现在我们有了极大、素、半素、主、强不可约、循环和有限生成子模等概念。就拓扑研究而言，主要选择的类别是素子模或其子类——极小素子模。然而，人们很快就发现，与（交换）环的素理想不同，无法在模的素子模类上赋予扎里斯基拓扑。为了使闭集对有限并具有良好的性质，我们需要对模附加一个条件，因此所得对象称为拓扑模（参见[Z 06]）。关于子模素谱（或其极小素、余素、全素等变体）上的各种拓扑， [A11、A15、A10、AF14、AH12、AH19、AKF16、ZT00、AH11、AP17、BH08、L99、MMS97、MS06、HP19、T09、UTS15] 中有广泛的研究。

DG [中已尝试为研究（交换）环的各种理想类的拓扑性质建立一种统一方法，并在22] FGS [中进一步推进（另见23] G [），以从这些理想类构造谱空间。这些拓扑空间称为理想空间。本文的目标有两个。首先，我们希望更好地理解环的理想空间中哪些性质也适用于模；其次，我们希望在一种能够处理更广泛的子模类的框架下开展研究，这些子模不一定属于“素类型”。赋有拓扑的这些子模类称为结构空间。当我们考察拓扑模的素子模谱时，我们所用的拓扑与扎里斯基拓扑一致。尽管我们选取了若干特定类的子模（见定义1.1），但事实上，我们的理论适用于真子模类的任意子类。

本文中，模 M 始终指一个 R-模，其中 R 是含幺交换环。模 M 的非空子集 N 称为 M 的子模，如果 N 对加法和数乘封闭。真子模 N 是指满足 $N \neq M$。若 N 是模 M 的子模，则 M/N 在 R 中的湮灭理想定义为

$$(N : M) = \{r \in R \mid rM \subseteq N\}.$$

现在我们回顾模的真子模类中若干特殊子类的定义。

定义 1.1. 设 M 是一个模， N 是 M 的一个真子模。那么， N 称为

- 是极大的，如果不存在包含 N 的其他真子模；
- 素 [D78] 当 $rm \in N$ 与 $r \in R$ 且 $m \in M$ 意味着以下之一成立： $m \in N$ 或 $r \in (N : M)$；

2020年数学主题分类：54F65。关键词和短语：模、异常子模、谱空间、拟紧。

- 半素 [D78] 当 N 是 M的素子模的交;
- 超常 [MMS97] 若 L 且 K 是 M 的 $L \cap K \subseteq N$，则 $L \subseteq N$或 $K \subseteq N$;
- 主 [AM69] 若 $rm \in N$ 的 $r \in R$ 且 $m \in M$ 则有以下二者之一成立 $r^n \in (N : M)$ 对于某个 $n \in \mathbb{N}$，或者 $m \in N$;
- 根基若
$$N = \sqrt{N} = \bigcap_{N \subseteq P} \{P \mid P \text{ is a prime submodule of } M\};$$
- 强不可约 [KES06] 若 $L \cap K \subseteq N$则有以下二者之一成立 $L \subseteq N$或 $K \subseteq N$, 对于所有子模 L, $K \in M$;
- 不可约 [M86] 若 $N \neq N_1 \cap N_2$对于两个子模 N_1 且 N_2属于 M 满足 $N_i \neq N$;
- 完全不可约 [FHO06] 当且仅当 $N \neq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$ 对于子模 $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} N_1$ 属于 M 满足 $N_\lambda \neq N$ 对所有 $\lambda \in \Lambda$;
- 极小 [AP17] 当且仅当 $N \neq 0$ 且 N 不包含 的其他非零子模 M;
- 极小素 [MS93] 当且仅当 N 既是 的极小子模，也是素子模 M。
- 若 N 由 M中的单个元素生成，则称其为循环;
- 若 N 由 M的有限子集生成，则称其为有限生成。

在下一节讨论特定类子模上的拓扑之前，我们首先需要一些记号。用 $\mathcal{S}(M)$ 表示模 M的所有子模组成的集合。为了表示 M 的真子模类，或定义 1.1中列出的任一特定子类，我们将使用记号$\mathcal{D}(M)$。显然，对于所有这类子模类， $M \notin \mathcal{D}(M)$均成立。

2. 结构空间

我们的目标是在 M 上的特定子模类上引入一个闭包运算 C，使得闭包运算 C 在该子模类上诱导出一个拓扑。闭包 C 在一个 D(M) 上定义如下。

$$C(N) = \{L \in \mathcal{D}(M) \mid S \subseteq L\} \qquad (N \in \mathcal{S}(M)). \tag{2.1}$$

在下面的引理中，我们汇总了后文所需的 C 的一些基本性质。由于这些结果的证明很直接，我们略去证明。

引理 2.1. 设 M 是一个模。D(M) 上的闭包运算 C 具有以下性质。
(1) 对任意两个 N, $N' \in$D(M)，若 $N \subseteq N'$，则 C(N) $\supseteq$C(N'); (2) C(0) = D(M) 且 C(M) $= \emptyset$; (3) $\tilde{\text{N}}_{\lambda \in \Lambda}$ C(N_λ) = C $(\acute{\text{I}}_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda)$，对所有 $N_\lambda \in$ S(M) 以及所有 $\lambda \in \Lambda$均成立; (4) C(N) $\cup$C(N') $\subseteq$C$(N \cap N')$，对所有 N, $N' \in$ S(M) 均成立; (5) C(N) $\supseteq$ C$(\sqrt{N})$，对所有 $N \in$ S(M) 均成立。

一般而言，集合 $\{\text{C}(N)\}_{N \in \mathcal{S}(M)}$ 对有限并不封闭，因此引理 2.1(4) 中未必能取等号。然而，若对于任意两个 $N, N' \in$S(M)，都存在一个 $N'' \in$S(M)，使得 C(N) $\cup$C(N') =C(N''), 那么显然引理 2.1(4) 中就能取等号。具有这一性质的模称为拓扑模。（见 [MMS97, §2]）。因此，在拓扑模中，任意子模类 D (M) 的子集族 $\{$C$(N)\}_{N \in \mathcal{S}(M)}$ 在 D (M) 上诱导出扎里斯基拓扑。从上述讨论可以看出，除非 M 是拓扑模，否则即使对于素子模类，集合族 $\{\text{C}(N)\}_{N \in \mathcal{S}(M)}$ 也不会在其上诱导出扎里斯基拓扑。这正是赋予环的理想与赋予模的子模的拓扑在性质上的主要差异。

对于任意的模 M，利用一类特殊子模 $\mathcal{D}(M)$ 中的这些子集，我们希望在 $\mathcal{D}(M)$上构造一个拓扑。注意，根据引理 2.1(2)，可得

$$\bigcap_{N \in \mathcal{S}(M)} C(N) = \emptyset,$$

因此由 [C66、定理 15 A.13.，第 254], 页，集族 $\{C(N)\}_{N\in\mathcal{S}(M)}$ 作为闭子基，在 $D(M)$ 上生成唯一的拓扑。我们将此拓扑记为 $\tau_{\mathcal{D}(M)}$。对于拓扑空间 $(D(M),\tau_{\mathcal{D}(M)})$，我们记作 $D(M)$，并称这个拓扑空间为结构空间。

2.1. 紧致性。 接下来，我们关注结构空间的拟紧性，$\mathcal{D}(M)$。尽管根据引理 2.1(2)，我们有 $N = M$ 意味着 $C(N) = \emptyset$，但对于并非所有特定子模类，逆命题都成立；而我们希望利用这一逆命题性质来证明结构空间的拟紧性。然而，如果 M 是有限生成的，那么对于任意 $\mathcal{D}(M)$，逆命题都成立。由于我们的拓扑由子基闭集生成，在下面定理的证明中，我们将借助 Alexander 子基定理。请注意，我们的结果推广了 [ZT00] 中的定理 2.13。

定理 2.2. 如果 M 是有限生成模，那么每个结构空间都是拟紧的。

证明。要证明紧致性，根据 Alexander 子基定理，只需证明子基闭集具有有限交性质。设 $\tilde{N}_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda = \emptyset$ 是结构空间 $D(M)$ 的一族子基闭集 $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$。我们断言，对于 Λ 的某个有限子集 $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$，有 $\tilde{N}_{i=1}^{n} K_{\lambda_i} = \emptyset$。设 $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \in S(M)$，使得对所有 $\lambda\in\Lambda$，都有 $K_\lambda = C(N_\lambda)$。根据引理 2.1(3)，这意味着 $C(\acute{I}_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda) = \emptyset$。由于 M 是有限生成的，$\acute{I}_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda = M$，并且还存在 Λ 的一个有限子集使得这一等式成立。□

结构空间的拟紧性的另一个充分条件是 $\mathcal{D}(M)$ 包含 M 中的所有极大子模，且 $\mathcal{D}(M)$中也包含它们。然而，模可能没有任何极大子模；若考虑完美环上的模，则可以保证极大子模存在（参见 [B60]）。请注意，下述定理证明中的论证基本结构与定理 2.2的相似。

定理 2.3. 若 M 是完美环上的模，且若 M 的子模类 $D(M)$ 包含 M的所有极大子模，则结构空间 $D(M)$ 是拟紧的。
证明。设 $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $D(M)$ 的一族子基闭集，使得 $\tilde{N}_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda = \emptyset$。这意味着，对于某些 M的理想 N_λ，有 $K_\lambda = C(N_\lambda)$，并且

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} C(N_\lambda) = C\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda\right) = \emptyset.$$

若 $\acute{I}_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda \neq M$，则必存在 M 的极大理想 L，使得 $\acute{I}_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda \subseteq L$。此外，

$$N_\lambda \subseteq \sum_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda \subseteq L,$$

对所有 $\lambda\in\Lambda$。因此，对所有 $\lambda\in\Lambda$，都有 $L\in C(N_\lambda) = K_\lambda$，这与我们的假设矛盾。因此 $\acute{I}_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda = M$，且恒等式 $1\in\acute{I}_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$。这意味着存在 Λ 的一个有限子集 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$，使得 $1 = \acute{I}_{i=1}^{n} x_{\lambda_i}$（其中 $x_{\lambda_i}\in N_{\lambda_i}$），从而 $M = \acute{I}_{i=1}^{n} N_{\lambda_i}$，这证明了有限交性质。因此，根据亚历山大子基定理，$D(M)$ 是拟紧的。□

推论 2.4. 极大、素、半素、超常、强不可约、主、不可约、完全不可约以及根子模的结构空间是拟紧的。

请注意，在定理 2.3 中，所有极大子模都属于子模类 $\mathcal{D}(M)$ 是结构空间 $\mathcal{D}(M)$拟紧的充分条件。然而，例如对于一个模的有限生成子模类，这也是一个必要条件。

命题 2.5. 设 M 是完美环上的一个模。如果由有限生成（真）子模构成的结构空间 $D(M)$ 是拟紧的，那么 $D(M)$ 包含 M 的所有极大子模。

证明. 设 L 是模 M 的一个极大子模，且 L 不是有限生成的。考虑以下闭子空间的集合：

$$\mathcal{K} = \{C(\langle x\rangle) \cap \mathcal{D}(M) \mid x \in L\}.$$

我们断言 $\cap\mathrm{K} = \emptyset$。否则，设 $T \in \cap\mathrm{K}$。则 T 是有限生成的，且 $L \subseteq T$。由于 L 不是有限生成子模，我们必有 $T \supsetneq L$，这意味着 $T = M$，与 $\mathrm{D}(M)$ 由真子模构成这一事实矛盾。但显然，K 具有有限交性质，因此 $\mathrm{D}(M)$ 并非拟紧。□

一般而言，有限生成模的子模未必是有限生成的，因此下面的结果为结构空间的拟紧性提供了另一个充分条件，并且这是对 [FGS23] 中命题 3.5 的推广。

T定理 2.6. 若 M 是诺特模，则每个结构空间 $\mathrm{D}(M)$ 都是拟紧的 .

证明。考虑 $\mathrm{D}(M)$ 的一族子基闭集 $\{\mathrm{D}(M) \cap \mathrm{C}(N_\lambda)\}_{\lambda\in\Omega}$，它们具有有限交性质。根据假设，子模 $T = \acute{\mathrm{I}}_{\lambda\in\Omega} N_\lambda$ 是有限生成的，设为 $T = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$。对每个$1 \leqslant j \leqslant n$，存在 Ω 的有限子集 Λ_j，使得 $\alpha_j \in \acute{\mathrm{I}}_{\lambda\in\Lambda_j} N_\lambda$。因此，若 $\Lambda := \eth_{j=1}^{n} \Lambda_j$，则立即可得 $T = \acute{\mathrm{I}}_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$。于是我们有

$$\begin{aligned}\bigcap_{\lambda\in\Omega} (\mathcal{D}(M) \cap C(N_\lambda)) &= \mathcal{D}(M) \cap C(T)\\ &= \mathcal{D}(M) \cap C\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda\right)\\ &= \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (\mathcal{D}(M) \cap C(N_\lambda)) \neq \emptyset,\end{aligned}$$

由于 Λ 是有限的，且 $\{\mathrm{D}(M) \cap \mathrm{C}(N_\lambda)\}_{\lambda\in\Omega}$ 具有有限交性质。因此，由 Alexander 子基定理可得结论。□

推论 2.7. 如果 M 是诺特模，那么每个结构空间 $\mathrm{D}(M)$ 都是诺特的。

2.2. 分离性质。 现在我们关注结构空间的分离性质。由于对于特定子模类中的任意两个不同元素 L_1 和 L_2，有 $C(L_1) \neq C(L_2)$，我们立即得到以下分离性质，它推广了 [ZT00]中的命题 2.4。

命题 2.8. 每个结构空间都是一个 a T_0-空间。

在探讨结构空间泛点的存在性之前，我们先回顾两个需要用到的拓扑概念。空间 X 的闭子集 S 称为不可约的，如果 S 不能表示为两个严格更小的闭子集 X的并。若 $S = \{s\}$，则称 S 中的元素 s 为 S 的泛点，其中 $\{s\}$是 $\{s\}$的闭包。

若 M 是一个拓扑模，且 $\mathcal{D}(M)$ 是由 M 的素子模构成并赋予扎里斯基拓扑的类，则 [Y11，命题 3，推论 1] 表明，非空闭子集 X 属于 $\mathcal{D}(M)$ 不可约，当且仅当属于 X 的所有素子模的交本身是 M的素子模。对于任意结构空间 $\mathcal{D}(M)$，我们没有类似的刻画。不过，在下文的引理 2.9 中，我们将确定结构空间 $\mathcal{D}(M)$ 的一类不可约闭子集；事实上，这类子集足以在 ..... 中发挥重要作用

- 刻画 T_1 结构空间（定理 2.11），
- 证明真子模的结构空间是谱空间（定理 2.17），以及
- 研究结构空间的连通性（定理2.22）。

引理 2.9. 结构空间 $\mathrm{D}(M)$ 的子集 $\{\mathrm{C}(N) \mid N \in \mathrm{C}(N)\}$ 是不可约的。

证明。设 N 是模 M 的子模 N 的闭包。事实上，我们将证明更强的结论，即对于每个 $N \in \mathsf{C}(N)$，都有 $N = \mathsf{C}(N)$。显然，$N \subseteq \mathsf{C}(N)$。为了证明包含关系的另一半，我们先考虑平凡情形，也就是 $N = \mathsf{D}(M)$ 的情形。由于

$$\mathcal{D}(M) = \overline{N} \subseteq C(N) \subseteq \mathcal{D}(M),$$

我们得到等式。现在，假设 $N \neq \mathsf{D}(M)$。由于 N 是一个闭集，它有如下表示

$$\overline{N} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \left(\bigcup_{i=1}^{n_\lambda} C(N_{\lambda i}) \right),$$

对于某个指标集 Λ 以及 M的子模 $N_{\lambda 1}$、……、$N_{\lambda n_\lambda}$。根据假设，这意味着 $\text{Ð}_{i=1}^{n_\lambda} \mathsf{C}(N_{\lambda i}) \neq \emptyset$，因此对每个 λ，都有 $N \in \text{Ð}_{i=1}^{n_\lambda} \mathsf{C}(N_{\lambda i})$。由此我们得出，对每个 λ，

$$C(N) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\lambda} C(N_{\lambda i}),$$

因此，$\mathsf{C}(N) \subseteq N$，如所需。 □

推论 2.10. 真子模结构空间的每个非空子基闭子集都是不可约的。

引理 2.9 的一个直接应用是对 T_1-结构空间的如下刻画。众所周知（见 [Y11，定理 3]），在拓扑模中，赋予扎里斯基拓扑的素子模类是一个 T_1-空间，当且仅当每个素子模在素子模类中都是极大的。下面的定理推广了这一结果。

定理 2.11. 结构空间是一个 T_1-空间，当且仅当它包含在极大子模的结构空间类中。

证明. 若 $L \in \mathcal{D}(M)$，则由引理 2.9，$L = \overline{C}(L)$。设 N 是 M 的一个极大子模，且 $L \subseteq N$。令 $\mathcal{D}(M)$ 为一个 T_1-空间。则

$$N \in C(L) = \overline{L} = \{L\},$$

这意味着 $N = L$。反之，设 $\mathsf{D}(M)$ 是 M 的子模类，且包含于 M的极大子模类中。那么对于 M的每个极大子模 N，都有 $\mathsf{C}(N) = \{N\}$，这意味着 $N \in \mathsf{C}(N)$。因此，由引理 2.9，$N = \{N\}$。这证明了 M 的极大子模类的结构空间是一个 T_1-空间，因而 $\mathsf{D}(M)$ 也是如此。□

作为上述定理的推论，我们得到诺特模为阿廷模的一个必要条件。回顾一下，若一个模的每个子模升链最终都稳定，则称该模为诺特模；而满足其子模偏序集上的降链条件的模称为阿廷模。

推论 2.12. 若 $\mathsf{D}(M)$ 是诺特模 M 的离散结构空间，则 M 是阿廷的。

回顾一下，若一个拓扑空间是谱闭的，则其中每个非空不可约闭子集都有唯一的泛点。谱闭性是分离性质之一，也是谱空间定义的一个组成部分，我们稍后将对此进行讨论。在[AH11，定理 3。3], 中证明了，赋予扎里斯基拓扑的拓扑模的素子模类是谱闭的。我们将给出具有这一性质的结构空间的刻画，而这一刻画推广了 [Y11], 的推论 1、 [AH11], 的定理 3.3 以及 [ZT00]的定理 2.6(2)(3) 的结果。我们首先需要一个技术性的辅助引理，其证明很容易验证。

引理 2.13. 若 $N^\omega := \tilde{\mathrm{N}}\{L \mid L \in \mathsf{C}(N)\}$ 对于 $N \in \mathsf{S}(M)$ 成立，则 $N = N^\omega$，只要 $N \in \mathsf{D}(M)$。

定理 2.14. 结构空间 $\mathsf{D}(M)$ 中每个非空不可约子基闭集 $\mathsf{C}(N)$ 都有唯一的泛点，当且仅当 $\mathsf{C}(N)$ 包含 N^ω。

证明。设 C(N) 是结构空间 D(M) 的一个非空不可约子基闭子集，且 C(N) 有唯一的泛点 L。这意味着

$$C(N) = \overline{L} = C(L).$$

由引理2.13，这意味着 $L = N^{\omega} \in \mathcal{D}(M)$。逆命题的证明更有意思。设每个非空不可约子基闭集 $C(N)$ 都包含 N^{ω}，并设 E 是 $\mathcal{D}(M)$的一个不可约闭子集。那么

$$E = \bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{\alpha=1}^{n_i} C(N_{i\alpha})\right),$$

对于某个子模 模 N_{ij} 属于 M。由于 E 不可约，对于每个 $i \in I$，都存在一个 M 的子模 N_i，使得 at

$$E \subseteq C(N_i) \subseteq \bigcup_{\alpha=1}^{n_i} C(N_{i\alpha}),$$

因此

$$E = \bigcap_{i\in I} C(N_i) = C\left(\sum_{i\in I} N_i\right) = C\left(\sum_{i\in I} N_i\right)^{\omega}.$$

由于 $(\sum_{i\in I} N_i)^{\omega} \in \mathcal{D}(M)$，所以 $E = (\sum_{i\in I} N_i)^{\omega}$。该结论的唯一性部分由命题2.8得出，由此定理得证。□

推论 2.15. proper 素极小素子模的结构空间中的每个非空不可约闭子集都有唯一的泛点。

为了证明模的强不可约子模的结构空间 $\mathcal{D}(M)$ 的优性，我们借助乘法格进行论证。由于 $\mathcal{D}(M)$ 是一个以交为乘法的乘法格，每个强不可约子模都成为该格的素元，因此根据 [FFJ22，引理 2.6], , $\mathcal{D}(M)$ 中的每个非空不可约闭子集都有唯一的泛点；同样，泛点的唯一性由命题 2.8保证。半素子模和异常子模的结构空间也同样是谱闭的。下面的命题汇总了所有这些结论。

命题 2.16. 强不可约、半素和异常子模的结构空间中的每个非空不可约闭子集都有唯一的泛点。

我们的下一个目标是证明模的一类特定子模的结构空间具有谱性，这拓展了 [G23] 中的定理 2.9。

定理 2.17。模的真子模的结构空间是谱空间。

2.2.1. 谱空间。 回顾一下，若一个拓扑空间是谱的（见 [H69]），即它是拟紧的，具有一个由拟紧开子空间构成、且对有限交封闭的基，并且其中每个非空不可约闭子集都有唯一的泛点。定理2.17 的证明是自足的，也就是说，它不依赖于可构造拓扑。此外，我们采用了一种避免检查是否存在由拟紧开子空间构成且对有限交封闭的基的技巧；这一点可由以下关键引理推出。

引理 2.18。设 X 是一个谱空间，且 S 是 X 的一个子空间，具有以下性质：
(1) S 是拟紧的。(2) S 是 X的一个开子空间。(3) S 的每个非空不可约闭子集都有唯一的泛点。

那么， S 是一个谱空间。

证明。由于 S 是拟紧且谱闭的，我们只需证明， S 的拟紧开子集集合 B_S 构成一个在有限交下封闭的拓扑基。容易验证以下事实： S 的子集在 S 中是开集，当且仅当它在 X中是开集；因此， S 的子集属于 B_S ，当且仅当它属于 B_X。

设 O 是 S 的一个开子集。由于 O 在 X 中也是开集，因此对于某个 B_X 的子集 U，有 $O = \cup \mathrm{U}$，。但 U 中的每个元素都是 O 的子集，因而也是 S 的子集，且属于 B_S。因此， S 的每个开子集都可以表示为 S 的拟紧开子集之并。现在只需证明 B_S 对有限交封闭，而这直接由 B_X 对有限交封闭这一事实得出。□

定理的证明 2.17。为了将引理 2.18 应用于模 $\mathcal{D}(M)$ 的结构空间，我们需要实现以下目标：

（1）模 M 的所有子模的结构空间 $\mathrm{S}(M)$ 是谱空间。（2）$\mathrm{D}(M)$ 是拟紧的。
（3）$\mathrm{D}(M)$ 的每个非空不可约闭子集都有唯一的泛点。（4）$\mathrm{D}(M)$ 是结构空间 $\mathrm{S}(M)$ 的开子空间。

现在，(2) 和 (3) 分别由命题 2.2 和命题 2.14推出，而 (1) 则由应用 [P94] 在代数格 $\mathcal{S}(M)$ 上的定理 *4.2* 得出。因此，剩下要证明的是 (4)。由于 $M \in \mathcal{S}(M)$，根据引理 2.9，我们有 $M = C(M) = M$，因此，$\{M\}$ 是闭集。这意味着$\mathcal{D}(M)$ 是开集，证明至此完成。□

如果我们的模是诺特模，且某个结构空间是谱闭的，那么根据定理 2.6，我们还能得到谱空间的其他例子。

推论 2.19. 设 R 是一个诺特模，且 $\mathrm{D}(M)$ 是一个结构空间。那么，$\mathrm{D}(M)$ 是谱空间当且仅当它是谱闭的。

2.3. 连通性。现在我们转而关注结构空间的连通性。通常的连通性概念无法直接用子基闭集来表述。因此，我们引入一种不同的结构空间连通性（以子基闭集来表述），它与传统的连通性概念相关。我们称拓扑空间 X 的闭子基 S 强烈分离 X，如果存在 S 的两个非空子集 A 和 B，使得 $X = A \cup B$ 和 $A \cap B = \emptyset$。

根据上述定义，显然，如果某个闭子基强分离一个空间，那么该空间就是不连通的。此外，如果一个空间是不连通的，那么就存在某个闭子基强分离它。但这并不意味着每个闭子基都会强分离该空间。不过，我们有如下结果，它与 [DG22] 中的定理 3.21 和引理 3.22 类似。

引理 2.20. 如果一个拟紧空间是不连通的，那么任何对有限交封闭的闭基都会强分离该空间。此外，对于任意结构空间 $\mathrm{D}(M)$，其闭基对二元交封闭。

应用引理 2.20，我们立即得到以下结果。

定理 2.21. 假设 $\mathrm{D}(M)$ 是一个拟紧空间。那么，$\mathrm{D}(M)$ 不连通，当且仅当闭基强分离 $\mathrm{D}(M)$。

引理 2.9 的一个推论是，结构空间连通的以下充分条件。

定理 2.22. 若零子模属于 $\mathrm{D}(M)$，则结构空间 $\mathrm{D}(M)$ 是连通的。

证明。由引理 2.1(2)，可得 $\mathcal{D}(M) = C(0)$，且由于不可约性蕴含连通性，结论由引理 2.9 得证。□

Cor论题 2.23。真有限生成循环子模的结构空间是连通的 *d.*

2.4. 连续性。得到子模的结构空间后，自然要研究它们之间的连续函数。设 $\phi\colon M \to M'$ 是一个模同态。类似地，对于环的素谱（赋予扎里斯基拓扑），自然会期待存在一个连续函数 $\phi_!\colon \mathrm{D}(M') \to \mathrm{D}(M)$，连接“同类型”的子模空间。确实如此，我们将在下一个命题中讨论这一点。然而，对于环，在环同态下，素谱的原像仍是素谱；但对于环的极大理想，这一性质甚至都不成立。因此，研究模的各种子模类时，我们也会遇到同样的问题。所以，我们只需考虑那些满足这种保留性质的模同态。我们称之为模同态的收缩性质。

要证明一个函数连续，只需证明子基闭集的原像是子基闭集。由于我们的拓扑由子基闭集构成，因此我们将在证明中使用这一连续性判据。

命题 2.24. 设 $\mathrm{D}(M)$ 是一个结构空间，$\phi\colon M \to M'$ 是一个关于 $\mathrm{D}(M)$ 具有收缩性质的模同态。设 $N' \in \mathrm{D}(M')$. 定义函数 $\phi_!\colon \mathrm{D}(M') \to \mathrm{D}(M)$，使得 $\phi_!(N) = \phi^{-1}(N)$。那么

(1) 函数 $\phi_!$ 连续。(2) 若 ϕ 满射，则结构空间 $\mathrm{D}(M')$ 与结构空间 $\mathrm{D}(M)$ 的闭子空间 $\mathrm{C}(\ker\phi)$ 同胚。
(3) 当且仅当 $\phi_!(\mathrm{D}(M'))$ 在 $\mathrm{D}(M)$ 中稠密时

$$\ker\phi \subseteq \bigcap_{L\in\mathcal{D}(M)} L;$$

证明。（1）设 $\mathrm{C}(N)$ 是结构空间 $\mathrm{D}(M)$ 的子基闭集。由于

$$\phi_!^{-1}(C(N)) = \{N' \in \mathcal{D}(M') \mid \phi(N) \subseteq N'\} = C(\langle\phi(N)\rangle),$$

我们得到函数 $\phi_!$ 所需的连续性。

（2）我们注意到 $\phi_!(N') \in \mathrm{C}(\ker\phi)$，这意味着 $\operatorname{im}\phi_! = \mathrm{C}(\ker\phi)$。由于对所有 $N' \in \mathrm{D}(M')$，

$$\phi(\phi_!(N')) = N' \cap \operatorname{im}\phi = N',$$

函数 $\phi_!$ 是单射。为证明 $\phi_!$ 是闭映射，我们首先断言，在模同态下，子基闭集的原像是子基闭集。事实上，对于 $\mathrm{D}(M')$ 中任意一个子基闭集 $\mathrm{C}(N)$，我们有

$$\phi_!(C(N)) = \phi^{-1}\{L' \in \mathcal{D}(M') \mid N \subseteq L'\} = C(\phi^{-1}(N)).$$

若 K 是 $\mathrm{D}(M')$ 的闭子集，则存在一个指标集 Ω 和子模 $\{N_{i\alpha}\}_{1\leqslant i\leqslant n_\alpha,\ \alpha\in\Omega}$，它们属于 M'，使得

$$\mathcal{K} = \bigcap_{\alpha\in\Omega}\left(\bigcup_{i=1}^{n_\alpha} C(N_{i\alpha})\right).$$

然后，将 $\phi_!$ 应用于 K，我们得到

$$\phi_!(\mathcal{K}) = \phi^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in\Omega}\left(\bigcup_{i=1}^{n_\alpha} C(N_{i\alpha})\right)\right) = \bigcap_{\alpha\in\Omega}\bigcup_{i=1}^{n_\alpha} C(\phi^{-1}(N_{i\alpha})),$$

$\mathrm{D}(M)$ 的一个闭子集。由于 $\phi_!$ 根据 (1) 是连续的，证明至此完成。

(3) 我们断言，对所有 $N' \in \mathrm{S}(M')$，$\phi_!(\mathrm{C}(N')) = \mathrm{C}(\phi^{-1}(N'))$。为此，令 $L \in \phi_!(\mathrm{C}(N'))$。由此可得 $\phi(L) \in \mathrm{C}(N')$，或者等价地，$L \in \mathrm{C}(\phi^{-1}(N'))$。由 $\phi^{-1}(\mathrm{C}(N')) = \mathrm{C}(\phi^{-1}(N'))$ 这一事实，我们便可得到包含关系的另一半。由于

$$\overline{\phi_!(\mathcal{D}(M'))} = C(\phi^{-1}(0)) = C(\ker\phi),$$

闭子空间 $\mathrm{C}(\ker\phi)$ 等于 $\mathrm{D}(M)$，当且仅当 $\ker\phi \subseteq \cap_{L\in\mathcal{D}(M)} L$。 □

推论 2.25. 结构空间 $\mathrm{D}(M/N)$ 与 $\mathrm{D}(M)$ 的闭子空间 $\mathrm{C}(N)$ 同胚。

结论性评述 2.26. 最后，我们提出一些后续研究计划。

（A）本工作还可以进一步推广，以研究半模的各种子半模类的拓扑性质。只需对术语和假设进行一些常规调整，就可以将[HPH21] 中关于半模素谱的一些结果推广到特定的子半模类，类似于本文所研究的情形。表1列出了一些这类推广的例子。

[HPH21]	本文
引理3.1	引理 2.1
定理3.1	命题 2.8
定理3.2	定理 2.11
定理 3.3	引理 2.9
推论 3.1	定理 2.14
定理 3.5	定理 2.2

表 1：模与半模

（B）在定理 2.17 和推论 2.19中，我们已经见到了谱结构空间的例子。若对模附加一些假设，进一步获得谱结构空间的例子将很有价值。

（C）由于半环缺乏可减性，理想理论与环的理想理论有很大不同。为缩小这一差距，人们引入了k-理想（又称可减理想）的概念，见 [H58], ；随后，这一概念被推广到半模，称为可减子模（参见 [G99]）。据作者所知，尚无针对这一特殊类半子模的拓扑研究。

参考文献

[A11] J.Y. Abuhlail，《模的扎里斯基拓扑》，Commun. Algebra，39(11) (2011)，4163–4182。[A15] ———，《互素子模与第二子模的扎里斯基拓扑》，Algebra Colloq.，22(47) (2015)，47–72。[A10] R. Ameri，《乘法模的扎里斯基拓扑的一些性质》，Houst. J. Math.，36(2) (2010)，337–344。[AF14] H. Ansari-Toroghy 和 F. Farshadifar，《模的第二谱上的扎里斯基拓扑》，Algebra Colloq.，21(4) (2014)，671–688。[AH12] A. Abbasi 和 D. Hassanzadeh-Lelekaami，《模与谱空间》，Comm. Algebra，40(11) (2012)，4111–4129。[AH11] ———，《拓扑模的素谱》，Algebra Discrete Math.，11(1) (2011)，1–16。[AH19] J. Abuhlail 和 H. Hroub，《格上的类扎里斯基拓扑及其在结合环上模中的应用》，J. Alg. Appl.，18(7) (2019)，1950131，共34页。[AKF16] H. Ansari-Toroghy、S. Keyvani、F. Farshadifar，《模的第二谱上的扎里斯基拓扑（II）》，Bull. Malays. Math. Sci. Soc.，39(3) (2016)，1089–1103。[AM69] M. F. Atiyah 和 I. G. Macdonald，《交换代数导论》，Addison-Wesley，1969。[AP17] H. Ansari-Toroghy 和 S. S. Pourmortazavi，《模的极小子模》，Matematiche (Catania) 72(1) (2017)，185–200。[B60] H. Bass，《有限维数与半主环的同调推广》，Trans. Amer. Math. Soc.，95 (1960)，466–488。[BH08] M. Behboodi 和 M. R. Haddadi，《模的经典扎里斯基拓扑与谱空间 I》，Int. Electron. J. Algebra，4 (2008)，104–130。[C66] E. ˇCech，《拓扑空间》，Int. Publ. John Wiley & Sons.，1966。[D78] J. Dauns，《素模》，J. Reine Angew. Math.，298 (1978)，156–181。[DG22] T. Dube 和 A. Goswami，《理想空间：环的结构空间的推广》，J. Alg. Appl.，（在线发表）。[FFJ22] A. Facchini、C. A. Finocchiaro 和 G. Janelidze，《抽象构造的素谱》，Algebra Univers.，83(8) (2022)，1–38。[FGS23] C. A. Finocchiaro、A. Goswami 和 D. Spirito，《理想空间的特定类及其拓扑性质》，Comm. Alg.，51(4) (2023)，1752–1760。[FHO06] L. Fuchs、W. Heinzer 和 B. Olberding，《无有限性条件的交换理想理论：商域中的不可约性》。载于：阿贝尔群、环、模与同调代数，249 (2006)，121–145。[G99] J. S. Golan，《半环及其应用》，Springer，1999。[G23] A. Goswami，《正则空间是谱空间》，Appl. Gen. Topol.，24(1) (2023)，95–99。[H58] M. Henriksen，《交换加法半环中的理想》，Amer. Math. Soc. Notices，6(3) 31 (1958)，321。

[H69] M. Hochster, 《交换环中的素理想结构》, Trans. Am. Math. Soc., 142 (1969), 43–60。[HP19] S. C. Han 和 W. S. Pae, 《关于"乘法模的扎里斯基拓扑的一些性质"的注记：基本开集紧致性的证明》, Houst. J. Math., 45(4) (2019), 995–998。[HPH21] C-H Han、W-S Pae 和 J-N Ho, 《半模的素谱的拓扑性质》, J. Algebra, 566 (2021), 205–221。[KES06] A. Khaksari、M. Ershad 和 H. Sharif, 《模的强不可约子模》, Acta Mathematica Sinica, 22(4) (2006), 1189–1196。[L12] P. Lescot, 《绝对代数 III——饱和谱》, J. Pure Appl. Algebra, 216 (2012), 1004–1015。[L84] C. P. Lu, 《模的素子模》, Math. Univ. Sancti. Pauli., 33 (1984), 61–69。[L95] ———, 《模的谱》, Comm. Algebra, 23 (1995), 3741–3752。[L99] ———, 《模的素谱上的扎里斯基拓扑》, Houston J. Math., 25(3)(1999), 417–425。[M86] H. Matsumura, 《交换环理论》, 剑桥大学出版社, 1986。[MMS97] R. L. McCasland、M. E. Moore 和 P. F. Smith, 《交换环上模的谱》, Comm. Algebra, 25 (1997), 79–103。[MS06] R. L. McCasland 和 P. F. Smith, 《任意环上模的扎里斯基空间》, Comm. Algebra, 34(11) (2006), 3961–3973。[MS93] ———, 《诺特模的素子模》, Rocky Mountain J. Math., 23 (1993), 1041–1062。[P94] H. A. Priestley, 《内禀谱拓扑》, 《一般拓扑学与应用论文集》, （纽约州弗拉兴, 1992）, 78–95, Ann. New York Acad. Sci., 728, New York Acad. Sci., 纽约, 1994。[T09] U. Tekir, 《非交换环上模的素谱上的扎里斯基拓扑》, Algebra Colloq., 16(4) (2009), 691–698。[UTS15] G. Ulucak、U. Tekir 和 K. P. Shum, 《关于 $Spec(M)$以及 T_0 与 T_1之间的分离公理》, Southeast Asian Bull. Math., 39 (2015), 717–725。[Y11] G. Yesilot, 《非交换环上模的素谱》, Int. J. Algebra, 5(11) (2011), 523–528。[ZT00] G. Zhang 和 W. Tong, 《拓扑右 R-模的谱空间》, J. Nanjing Univ. Math. Biq., 17(1) (2000), 15–20。[Z06] G. Zhang, 《拓扑模的性质》, Int. J. Pure Appl. Math., 31(3) (2006), 297–306。

[1] 数学系与应用数学系应用数学, 约翰内斯堡大学, 邮政信箱 524, 奥克兰公园邮编2006, 南非洲。 [2] 国家理论与计算科学研究所（NITHECS）, 南非洲。电

*mail add*子邮箱：agoswami@uj.ac.za