arXiv:2304.07701v1 [math.CO] 16 Apr 2023

组合零点定理的格罗布纳基方法

Yang Xu[1] Haibin Kan[2] Guangyue Han[3]

2023年4月18日

摘要——本文利用 Alon 组合零点定理及其各种扩展和推广中自然出现的一些条件，刻画由首一多项式构成的 Gr¨obner 基，从 Gr¨obner 基的视角建立一个零点定理。作为这一一般零点定理的推论，我们建立了四个特殊零点定理，其中包括 K´os、R´onyai 和 M´esz´aros [23, 24]建立的多重集零点定理与 Ball 和 Serra [9], 建立的带重数的零点定理的一个共同推广，也包括一个穿孔零点定理，从而推广了文献中的若干已有结果。作为穿孔零点定理的应用，我们将 [9, 23, 24]中关于超平面覆盖的一些结果推广到更广泛的情形，并给出 Bishnoi、Clark、Potukuchi 和 Schmitt [12]建立的广义 Alon-F¨uredi 定理的另一种证明。除非另有说明，我们的所有结果均在任意交换环 R上建立。

[1]香港大学理学院数学系，香港，中国。电子邮箱：12110180008@fudan.edu.cn[2]复旦大学计算机科学学院上海市智能信息处理重点实验室，中国上海 200433。上海区块链工程技术研究中心，中国上海 200433。复旦大学义乌研究院，中国浙江义乌市 322000。电子邮箱：hbkan@fudan.edu.cn[3]香港大学理学院数学系，香港，中国。电子邮箱：ghan@hku.hk

1 引言

全文中，我们用 $\mathbb{Z}^+$ 表示所有正整数构成的集合，并令 $\mathbb{N}=\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$。

设 $\mathbb{F}$ 是一个域，$n\in\mathbb{Z}^+$、S_1、...、S_n 是 $\mathbb{F}$ 的非空有限子集，并令 $g_i=\prod_{u\in S_i}(x_i-u)\in\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]$，其中 $i=1$、...、n。以下两个著名定理被称为组合零点定理，已由 Alon 在 [3] 中证明。

定理 1.1。（*[3,* 定理 1.*1]*）设 $f\in\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]$，且对所有 $a\in\prod_{i=1}^n S_i$，$f(a_1,$ ..., $a_n)=0$。则存在 h_1、...、$h_n\in\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]$，使得$f=\sum_{i=1}^n h_i\cdot g_i$ 并且

$$\deg(h_i)+\deg(g_i)\leqslant\deg(f)\ \textit{for all}\ i=1,\ldots,n. \tag{1.1}$$

此外，若对于某个 $\mathbb{F}$ 的子环 R，有 f、g_1、...、$g_n\in R[x_1,\ldots,x_n]$，则上述 h_1、...、h_n 可以取自 $R[x_1,\ldots,x_n]$。

定理 1.2。（*[3,* 定理 1.*2]*）设 $f\in\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]$，且令（$t_1,\ldots,t_n$）$\in\mathbb{N}^n$，满足 $\deg(f)=\sum_{i=1}^n t_i$，并且 $\prod_{i=1}^n {x_i}^{t_i}$ 在 f 中的系数非零。假设对于所有 $i=1,\ldots,n$，都有 $t_i\leqslant|S_i|-1$。那么，存在$a\in\prod_{i=1}^n S_i$ 使得 f（$a_1,\ldots,a_n$）$\neq 0$。

组合零点定理是一种非常强大的代数工具，在组合学、图论、组合数论和编码理论中有大量应用；更多详情请参见论文[2, 3, 5, 30, 32, 35] 以及近期出版的著作 [36] 。

如下文所述，Alon 组合零点定理已在多个方向上得到推广和扩展。

Ball 和 Serra 在 [9] 证明了带重数的零点定理；当零点的重数设为 1 时，该定理便归结为 Alon 组合零点定理。他们还建立了穿孔零点定理，该定理用于重新证明 Alon-F¨uredi 关于多项式零点个数的定理（见 [4]），并推广了 Alon 和 F¨uredi [4]以及 Bruen [15]的许多结果。K´os 和 R´onyai 在 [24] 证明了一个适用于多重集的零点定理；当多重集被视为普通集合时，该定理便归结为 Alon 组合零点定理。与 [9], 中的做法相同，他们建立了一个穿孔零点定理，用于将 Alon 组合零点定理的许多应用推广到多重集，包括 Alon 和 F¨uredi 关于超平面覆盖的定理（见 [4]）、Cauchy-Davenport 定理、Sun 关于值集的定理（见 [35]）以及 Eliahou-Kervaire 定理（见 [20]）。

Mezei 在 [29] 证明了一个更一般的零点定理，其中包含上述两个零点定理作为特例。

Laso´n 在 [27] 中证明了定理 1.2 的一个推广：他将假设 deg(f) $= \sum_{i=1}^{n} t_i$ 放宽为 $(t_1, \ldots, t_n)$ 在所有满足 $\prod_{i=1}^{n} {x_i}^{c_i}$ 在 f 中的系数非零的 $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{N}^n$ 中取最大值。Batzaya 和 Bayarmagnai 进一步放宽了对 $(t_1, \ldots, t_n)$ 的假设，并在 [11] 中证明了 Laso´n 的结果与 [24, 定理 6] 的一个共同推广。

现在，假设用任意交换环 R替换 $\mathbb{F}$ 。Schauz 在 [34] 中证明，若对于任意 $i = 1, \ldots, n$， S_i 满足条件 (D)，即对于所有 $u \neq v \in S_i$， $v - u$ 不是 R 的零因子（更多细节见 [12, 17, 18, 34] 或定义 2.2），则定理 1.1 的结论仍然成立。Micha lek 在 [30] 中证明，若所有 S_i 都满足条件 (D)，则定理 1.2 的结论仍然成立。Clark 在 [17]中证明，条件 (D) 实际上是定理 1.1 成立的充要条件。Clark 在 [18] 中证明了 Ball 和 Serra [9] 的穿孔零点定理的一个变体，其假设是所有 S_i 都满足条件 (D)。另有研究指出，[9] 中的零点定理及其穿孔版本可以在条件 (D) 下推广。Kulosman 和 Wang 在 [25] 中证明了多重集零点定理，其假设是 R 是特征零整环。K´os、M´esz´aros 和 R´onyai 在[23] 中证明了条件 (D) 下的多重集零点定理，该定理推广了 Micha lek 在 [30] 中的结果以及 [24]中的多重集零点定理。

关于定理 1.1 和定理 1.2 的其他一些扩展和推广，请读者参阅 [17, 28, 31] 。

正如 [23, 24, 28, 29, 32], Gr¨obner 基（参见 [1, 16, 21]）自然地出现在 Alon 组合零点定理及其推广中一样，本文将从 Gr¨obner 基的视角重新审视 Alon 组合零点定理及其若干推广。我们的出发点是这样一个观察：定理 1.1、定理 1.2 以及 Laso´n 对定理 1.2 关于 $(t_1, \ldots, t_n)$ 极大性的推广，实际上都分别是 $(g_1, \ldots, g_n)$ 构成 Gr¨obner 基的充要条件；而且，这一事实还适用于更一般的情形，包括带重数的零点定理和多重集零点定理。

在第 2 节中，我们汇集了一些记号、定义和引理。在第 3 节中，我们给出由首一多项式组成的 Gr¨obner 基的几种等价刻画（定义 2.1、定理 3.1）。其中三种刻画已出现在 Alon 组合零点定理及其推广中，但还有一种刻画似乎是新的。

在第 4 节中，我们应用定理 3.1 推导出一个零点定理（定理 4.2），其中条件 (D) 起着关键作用（另见定理 4.1）。

定理 4.1 和定理 4.2 具有一般性，因为它们可用于推导更具体的零点定理，详情见第 5 节。

在第 5.1 节中，我们应用定理 4.1 和定理 4.2，建立 Mezei 零点定理 [29, 定理 6.12] 的推广（定理 5.1）。在第 5.2 节中，我们进一步应用定理 5.1，建立带重数的零点定理 [9] 与 [23, 24] 中的多重集零点定理的一个共同推广（定理 5.2）。在第 5.3 节中，借助定理 5.2，我们建立一个穿孔零点定理（定理 5.3），其中包括 [9, 24] 中的穿孔零点定理作为特例。在第 5.4 节中，我们应用定理 4.1 和定理 4.2，建立另一个零点定理（定理 5.4），并进一步用它推广 Sauermann和Wigderson[33] 中的一个结果（推论 5.2）。我们注意到，在定理 5.1、5.2 和 5.4 中，在一些温和的假设下，条件 (D) 都是一个充要条件。

在第6.1节中，我们将穿孔零点定理应用于超平面覆盖（定理 6.1、推论6.1和推论6.2），推广了 [9, 23, 24]中的一些相关结果。在第6.2节中，遵循 [9, 18], 的思路，我们运用穿孔零点定理，为Bishnoi、Clark、Potukuchi和Schmitt[12], 提出的广义Alon-F¨uredi定理给出另一种证明；该定理在组合学和编码理论中有许多应用（更多详情见 [12] ）。

2 预备知识

首先，我们介绍本文余下部分中将要用到的一些记号和术语。固定 $n \in \mathbb{Z}^+$，并令

$$[1,n] = \{1, \ldots, n\}. \tag{2.1}$$

令0表示 $\mathbb{N}^n$中的全零向量。对于任意 $\alpha \in \mathbb{N}^n$ 和 $i \in [1,n]$，我们用 α_i 表示 α的第 i个分量。对于 α、$\beta \in \mathbb{N}^n$，我们定义 $\alpha + \beta \in \mathbb{N}^n$ 和$\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$ 为

$$(\alpha+\beta)_i = \alpha_i + \beta_i \text{ for all } i \in [1,n], \tag{2.2}$$

$$(\alpha-\beta)_i = \alpha_i - \beta_i \text{ for all } i \in [1,n], \tag{2.3}$$

并记作 $\alpha \leqslant \beta$，若对于所有 $i \in [1,n]$，$\alpha_i \leqslant \beta_i$。对于任意 $A \subseteq \mathbb{N}^n$，我们定义

$$\Delta(A) = \{\beta \in \mathbb{N}^n \mid \exists\ \alpha \in A\ s.t.\ \beta \leqslant \alpha\}, \tag{2.4}$$

$$\nabla(A) = \{\beta \in \mathbb{N}^n \mid \exists\ \alpha \in A\ s.t.\ \alpha \leqslant \beta\}, \tag{2.5}$$

$$\max(A) = \{\beta \in A \mid \forall\ \alpha \in A : \beta \leqslant \alpha \Longrightarrow \beta = \alpha\}. \tag{2.6}$$

对于任意 $A \subseteq \mathbb{N}^n$ 和 $\theta \in A$，若对于所有 $\gamma \in A$，$\gamma \leqslant \theta$，则称 θ 为 A 的最大元。对于任意 A、$B \subseteq \mathbb{N}^n$，我们令

$$A + B = \{\alpha + \beta \mid \alpha \in A, \beta \in B\}. \tag{2.7}$$

设 R 是一个带有乘法单位元 1_R 的交换环，并令

$$\Omega \triangleq R[x_1, \ldots, x_n] \tag{2.8}$$

表示 R 上以变量 n、...、x_n 为元的多项式环。对于 $f \in \Omega$ 和$\alpha \in \mathbb{N}^n$，我们令 $f_{[\alpha]}$ 表示 $\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$ 在 f 中的系数。对于任意 $f \in \Omega$，我们令

$$\operatorname{supp}(f) = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid f_{[\alpha]} \neq 0\}. \tag{2.9}$$

对于任意 $A \subseteq \mathbb{N}^n$，令

$$\delta(A) = \{f \in \Omega \mid \operatorname{supp}(f) \subseteq A\}. \tag{2.10}$$

我们还将 $\Phi : (R^n \times \mathbb{N}^n) \times \mathbb{N}^n \longrightarrow R$ 定义为

$$\Phi((u, \alpha), \gamma) = \begin{cases} \left(\prod_{k=1}^{n} \binom{\gamma_k}{\alpha_k}\right) \left(\prod_{k=1}^{n} {u_k}^{\gamma_k - \alpha_k}\right), & \alpha \leqslant \gamma; \\ 0, & \alpha \nleqslant \gamma. \end{cases} \tag{2.11}$$

此外，对于任意 f、$g \in \Omega$，若存在 $h \in \Omega$ 使得 $f = h \cdot g$，我们记作 $g \mid f$；对于任意 $U \subseteq \Omega$，我们令 $\langle U \rangle$ 表示由 U 生成的 Ω 的理想；对于任意有限生成的 R-模 M，我们令秩 $_R(M)$ 表示 M 的最少生成元个数。

接下来，我们给出一些定义。首先介绍首一多项式。

定义 2.1. 对任意 $g \in \Omega$，若存在 $\theta \in \operatorname{supp}(g)$ 使得 $g_{[\theta]} = 1_R$，且对于所有 $\gamma \in \operatorname{supp}(g)$ 都有 $\gamma \leqslant \theta$，则称 g 为首一；也就是说，θ 是 $\operatorname{supp}(g)$ 的最大元，且 $g_{[\theta]} = 1_R$。

现在，依据 [17, 定义 1] 和 [34, 定义 2.8], ，我们陈述上述条件 (D)。

定义 2.2. 对任意 $u \in R$, u，若存在 $v \in R$ 使得 $uv = 1_R$，则称其为 R 的乘法单位；若存在 $w \in R$ 使得 $w \neq 0$ 且 $uw = 0$，则称 u 为 R 的零因子。对于 $X \subseteq R$，若对任意 $a, b \in X$，只要 $a \neq b$，$b - a$ 就是 R 的乘法单位，则称 X 在 R 中满足条件（F）；若对任意 $a, b \in X$，只要 $a \neq b$，$b - a$ 就不是 R 的零因子，则称 X 在 R 中满足条件 (D)。

现在我们给出 Gr¨obner 基的定义。本文只考虑由首一多项式构成的 Gr¨obner 基。关于 Gr¨obner 基的一般定义，请读者参见 [1, 定义 4.1.13] 。

定义 2.3. 设 Λ 是一个有限集，且 $(g(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda) \in \Omega^{\Lambda}$ 是一个首一多项式族。对于任意 $\lambda \in \Lambda$，令 $\theta(\lambda)$ 为 $\operatorname{supp}(g(\lambda))$ 的最大元。设 Q 是 Ω 的一个理想，且 $\{g(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq Q$。那么，我们称 $(g(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ 是 Q 的 Gr¨obner 基，如果对于任意 $\tau \in Q - \{0\}$，都存在 $\alpha \in \operatorname{supp}(\tau)$ 和 $r \in \Lambda$，使得 $\theta(r) \leqslant \alpha$。

下面我们对定义 2.3 作一些说明。

注 2.1. 首先，Gr¨obner 基通常定义为一个多项式集，而非元组。本文中，我们发现处理元组更为方便，因为我们并不假设对于所有 $\lambda \neq \mu \in \Lambda$，$g(\lambda) \neq g(\mu)$。

其次，一般而言，Gr¨obner 基是相对于 $\mathbb{N}^n$ 上固定的单项式序定义的，并且 $g(\lambda)$ 不必是首一的。根据*[21,* 第 21.2 节和第 21.*3],* 节，$\mathbb{N}^n$ 上的单项式序是 $\mathbb{N}^n$ 上满足以下两个条件的全序 4：(i) 对任意 α、β、$\gamma \in \mathbb{N}^n$，若 $\alpha \preccurlyeq \beta$，则有 $\alpha + \gamma \preccurlyeq \beta + \gamma$；($ii$) 对任意 α、$\beta \in \mathbb{N}^n$，若 $\alpha \leqslant \beta$，则有 $\alpha \preccurlyeq \beta$。
现在设 $g \in \Omega$ 是首一的，并设 θ 是 $\operatorname{supp}(g)$ 的最大元。那么，对于任意项序 4，由 (ii) 可知，对所有 $\alpha \in \operatorname{supp}(g)$，都有 $\alpha \preccurlyeq \theta$；也就是说，$\prod_{i=1}^{n} {x_i}^{\theta_i}$ 是 g 关于 4 的首项单项式；此外，g 关于 4 的首项系数等于 $g_{[\theta]} = 1_R$ （见 *[21,* 定义 21.*7]*）。基于这一观察，定义 2.3 确实是 Gr¨obner 基一般定义的一个特例。此外，如果 R 是一个域，那么定义 2.3 就成为 *[1,* 定义 1.6.*1], [16,* 第 2.*8]* 节和 *[21,* 定义 21.*25]* 的一个特例。

现在我们接着 [23, 24] 引入多重集的概念，该概念将在第5节和第6节中使用。

定义 2.4. 若 X 是一个集合，ψ是一个满足 $X \subseteq \operatorname{dom}(\psi)$ 的函数，且对所有 $u \in X$都有 $\psi(u) \in \mathbb{Z}^+$，则称有序对 (X, ψ) 为多重集。

下面给出的 r-超平面定义将在第6节中使用，它是对超平面定义的扩展。

定义 2.5. 对于任意 $H \subseteq R^n, r \in \mathbb{N}, H$，若存在 $h \in \Omega$，使得 $H = \{u \in R^n \mid h(u_1, \ldots, u_n) = 0\}$ 且次数 $(h) = r$，则称其为 R^n 的 r- 超平面。R^n 的 1- 超平面称为 R^n 的超平面。

现在，我们给出一些引理。以下引理汇总了首一多项式的一些基本性质，这些性质将在我们的讨论中频繁用到。为完整起见，证明见附录 A。

引理 2.1. 设 $g \in \Omega$ 是一个首一多项式，并设 θ 为 g 支撑中的最大元。此外，设 $f \in \Omega$。则有：
(1) 对任意 $\gamma \in \mathrm{supp}(f)$，有 $(f \cdot g)_{[\gamma+\theta]} = f_{[\gamma]}$；(2) $\max(\mathrm{supp}(f \cdot g)) = \max(\mathrm{supp}(f)) + \{\theta\}$；(3) $\Delta(\mathrm{supp}(f \cdot g)) = \Delta(\mathrm{supp}(f)) + \Delta(\mathrm{supp}(g))$；(4) $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$。特别地，$f \neq 0 \Longrightarrow f \cdot g \neq 0$；(5) 设 $A \subseteq \mathbb{N}^n$, $h \in \Omega$ 满足 $A + \mathrm{supp}(h) \subseteq \Delta(\mathrm{supp}(f))$。那么，有 $A + \mathrm{supp}(h \cdot g) \subseteq \Delta(\mathrm{supp}(f \cdot g))$。

下面这个将在第 4 节中使用的众所周知的引理，可以通过一些直接计算加以验证（例如参见 [11, 23, 24]）。

引理 2.2。设 $f \in \Omega$。则，对于任意 $(u, \alpha) \in R^n \times \mathbb{N}^n$，有

$$f(x_1 + u_1, \ldots, x_n + u_n)_{[\alpha]} = \sum_{\gamma \in \mathrm{supp}(f)} \Phi((u, \alpha), \gamma) \cdot f_{[\gamma]}.$$

下面这个将在第 4 节和第 5 节中使用的引理很容易验证。

引理 2.3。设 $C \subseteq \mathbb{N}^n$。则，当且仅当对于任意 $k \in [1, n]$，存在 $\beta \in C$ 使得 $(\forall\, l \in [1, n] - \{k\} : \beta_l = 0)$ 时，$\mathbb{N}^n - \nabla(C)$ 是有限的。

下面三个引理将在第 5 节中使用。为完整起见，其证明收录于附录 B 和 C 中。

引理 2.4。设 $(g_1, \ldots, g_n) \in \Omega^n$ 是一个首一多项式族，使得对于所有 $k \in [1, n]$ 都有 $g_k \in R[x_k]$。另取 $f \in \Omega$，使得对于所有 $k \in [1, n]$ 都有 $g_k \mid f$。则，有 $(\prod_{k=1}^{n} g_k) \mid f$。

引理 2.5. 设 $\alpha \in \mathbb{N}^n$、$t \in \mathbb{N}$，并设

$$B = \{(\alpha_1\theta_1, \ldots, \alpha_n\theta_n) \mid \theta \in \mathbb{N}^n, \textstyle\sum_{i=1}^{n} \theta_i = t\}.$$

那么，有

$$|\mathbb{N}^n - \nabla(B)| = (\textstyle\prod_{i=1}^{n} \alpha_i) \cdot \binom{n+t-1}{n}. \tag{2.12}$$

进一步假设 $\alpha \in (\mathbb{Z}^+)^n$。则有

$$\mathbb{N}^n - \nabla(B) = \{\beta \in \mathbb{N}^n \mid \textstyle\sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right\rfloor \leqslant t - 1\}. \tag{2.13}$$

引理 2.6. 设 $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\gamma \in \mathbb{N}^n$ 满足 $\gamma \leqslant \alpha$，并固定 $t \in \mathbb{Z}^+$。令

$$B = \{(\alpha_1\theta_1, \ldots, \alpha_n\theta_n) \mid \theta \in \mathbb{N}^n, \textstyle\sum_{i=1}^n \theta_i = t\},$$

$$C = \{(\alpha_1\theta_1, \ldots, \alpha_n\theta_n) + \alpha - \gamma \mid \theta \in \mathbb{N}^n, \textstyle\sum_{i=1}^n \theta_i = t-1\}.$$

那么，有

$$|\mathbb{N}^n - \nabla(B \cup C)| = (\textstyle\prod_{i=1}^n \alpha_i) \cdot \binom{n+t-1}{n} - (\prod_{i=1}^n \gamma_i) \cdot \binom{n+t-2}{n-1}.$$

我们以考察一类将在第 5 节中使用的 Gr¨obner 基作为本节的结尾。下面引理的第一部分很容易验证，第二部分将在附录 D 中证明。

引理 2.7. 设 $(g_1, \ldots, g_n) \in \Omega^n$ 是一个首一多项式族，满足 $g_k \in R[x_k]$ 对所有 $k \in [1, n]$均成立。那么，以下两个结论成立：(1) 对任意 $\alpha \in \mathbb{N}^n$，$\prod_{k=1}^n {g_k}^{\alpha_k}$ 是首一的，并且 $(\deg(g_1)\alpha_1, \cdots, \deg(g_n)\alpha_n)$ 是 $\operatorname{supp}(\prod_{k=1}^n {g_k}^{\alpha_k})$ 的最大元；

(2) 设 A 是 $\mathbb{N}^n$ 的一个有限子集。那么，$(\prod_{k=1}^n {g_k}^{\alpha_k} \mid \alpha \in A)$ 是 $\langle\{\prod_{k=1}^n {g_k}^{\alpha_k} \mid \alpha \in A\}\rangle$ 的 Gr ¨obner 基。

3 格罗布纳基的刻画

引理 3.1. 设 Λ 是一个有限集，且 $(g(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda) \in \Omega^\Lambda$ 是一个首一多项式族。对于任意 $\lambda \in \Lambda$，令 $\theta(\lambda)$ 为 $\operatorname{supp}(g(\lambda))$ 的最大元。那么，对于任意 $f \in \Omega$，存在 $(p(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda) \in \Omega^\Lambda$ 和 $\tau \in \Omega$，满足以下四个条件：

(1) $f = (\sum_{\lambda\in\Lambda} p(\lambda) \cdot g(\lambda)) + \tau$；(2) 对任意 $\lambda \in \Lambda$，有 $\operatorname{supp}(p(\lambda)) + \operatorname{supp}(g(\lambda)) \subseteq \Delta(\operatorname{supp}(f))$；(3) 对任意 $\lambda \in \Lambda$ 和 $\alpha \in \operatorname{supp}(\tau)$，有 $\theta(\lambda) \not\leqslant \alpha$；(4) $\operatorname{supp}(\tau) \subseteq \Delta(\operatorname{supp}(f))$。

证明。设 Γ , $\{A \subseteq \mathbb{N}^n \mid A$ 是有限的$\}$，并设 $\preccurlyeq$ 是定义在 Γ 上的一个序，定义如下：对于任意 $A, B \in \Gamma$, $A \preccurlyeq B$ ，当且仅当 $A = B$ ，或者存在 $\beta \in B - A$ ，使得对于所有 $\alpha \in A - B$，$\alpha \leqslant \beta$。可以验证，$(\Gamma, \preccurlyeq)$ 满足极小条件，即对于任意满足 $H \neq \emptyset$ 的 $H \subseteq \Gamma$ ，H 都含有一个关于 $\preccurlyeq$ 的极小元。

现在令 $f \in \Omega$。若对所有 $\lambda \in \Lambda$ 和 $\alpha \in \operatorname{supp}(f)$，都有 $\theta(\lambda) \not\leqslant \alpha$，则按如下方式定义的 $(p(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$：对所有 $\lambda \in \Lambda$ ，令 $p(\lambda) = 0$ ，并且满足条件 (1)–(4)。因此，以下我们假设存在 $t \in \Lambda, \gamma \in \operatorname{supp}(f)$，使得 $\theta(t) \leqslant \gamma$。现在令

$$h \triangleq f - f_{[\gamma]} \cdot \left(\textstyle\prod_{i=1}^n {x_i}^{\gamma_i - \theta(t)_i}\right) \cdot g(t). \tag{3.1}$$

根据 (3.1) 以及 $\theta(t)$ 是 supp $(g(t))$ 的最大元这一事实，我们有

$$\operatorname{supp}(h)-\operatorname{supp}(f)\subseteq\{\gamma-\theta(t)\}+\operatorname{supp}(g(t))\subseteq\Delta(\{\gamma\})\subseteq\Delta(\operatorname{supp}(f)).\quad(3.2)$$

由 $g(t)_{[\theta(t)]}=1_R$ 和 (3.1)，我们推得 $h_{[\gamma]}=f_{[\gamma]}-f_{[\gamma]}=0$，这意味着 $\gamma\in$ 支撑 (f) $-$ 支撑 (h)。结合 (3.2)，可得支撑 (h) 4 支撑 (f)，支撑 (h) $\neq$ 支撑 (f)，支撑 (h) $\subseteq$ Δ(支撑 (f))，进而推出 Δ(支撑 (h)) $\subseteq$ Δ(支撑 (f))。

由于 (Γ,4) 满足极小条件，对 h 应用归纳法，我们可以选取 $(q(\lambda)$ $\mid\lambda\in\Lambda)$ $\in\Omega^{\Lambda}$ 和 $\tau\in\Omega$，使其满足以下三个条件：

(i) $h=(\sum_{\lambda\in\Lambda}q(\lambda)\cdot g(\lambda))+\tau$；$(ii)$ 对任意 $\lambda\in\Lambda$，均有支撑 $(q(\lambda))$ + 支撑 $(g(\lambda))$ $\subseteq$ Δ(支撑 (h))；(iii) 对任意 $\lambda\in\Lambda$ 和 $\alpha\in$ 支撑 (τ)，均有 $\theta(\lambda)\not\leqslant\alpha$。现在，将 $(p(\lambda)\mid\lambda\in\Lambda)\in\Omega^{\Lambda}$ 定义为对所有 $\lambda\in\Lambda-\{t\}$，$p(\lambda)=q(\lambda)$，并

$$p(t)=q(t)+f_{[\gamma]}\cdot(\textstyle\prod_{i=1}^{n}x_i{}^{\gamma_i-\theta(t)_i}).$$

我们断言，对于 f、$(p(\lambda)\mid\lambda\in\Lambda)$ 和 τ，条件 (1)–(4) 均成立。事实上，经过一些直接验证可知，(1) 由 (i) 和 (3.1) 得出，(2) 由 (ii)、(3.2) 以及 Δ(supp (h)) $\subseteq\Delta$ (supp (f)) 这一事实得出，(3) 由 (iii) 得出，而 (4) 由 (1) 和 (2) 得出，证毕。

□

现在我们可以证明本节的主要结果了。

定理 3.1. 设 Λ 为一个有限集，且 $(g(\lambda)\mid\lambda\in\Lambda)$ $\in\Omega^{\Lambda}$ 为一个首一多项式族。对于任意 $\lambda\in\Lambda$，令 $\theta(\lambda)$ 为 supp $(g(\lambda))$ 的最大元。此外，设 Q 为 Ω 的一个理想，且 $\{g(\lambda)\mid\lambda\in\Lambda\}\subseteq Q$。那么，以下六个陈述彼此等价：

(1) $(g(\lambda)\mid\lambda\in\Lambda)$ 是 Q 的 Gr ¨obner 基；(2) $Q\cap\delta(\mathbb{N}^n-\nabla(\{\theta(\lambda)\mid\lambda\in\Lambda\}))$ $=\{0\}$；(3) 对于任意 $f\in Q$，存在 $(p(\lambda)\mid\lambda\in\Lambda)\in\Omega^{\Lambda}$，满足以下两个条件：

3.1) $f=\sum_{\lambda\in\Lambda}p(\lambda)\cdot g(\lambda)$；3.2) 对于任意 $\lambda\in\Lambda$，有 supp $(p(\lambda))$+ supp $(g(\lambda))$ $\subseteq$ Δ(supp (f))；

(4) 对任意 $f\in Q$ 和 $\beta\in$ max(supp (f))，存在 $\xi\in\Lambda$，使得 $\theta(\xi)\leqslant\beta$。换言之，对于任意 $h\in\Omega$，若存在 $\gamma\in$ max(supp (h))，使得 $(\forall\,\lambda\in\Lambda:\ \theta(\lambda)\not\leqslant\gamma)$，则有 $h\notin Q$；

(5) 对任意 $f\in Q$，存在 $(p(\lambda)\mid\lambda\in\Lambda)\in\Omega^{\Lambda}$，满足以下两个条件：

5.1) $f=\sum_{\lambda\in\Lambda}p(\lambda)\cdot g(\lambda)$;

5.2) 对任意 $\lambda \in \Lambda$，有 $\deg(p(\lambda)) + \deg(g(\lambda)) \geq \deg(f)$；(6) 对任意 $f \in Q - \{0\}$ 以及满足 $\deg(f) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$ 的 $\beta \in \mathrm{supp}(f)$，存在 $\xi \in \Lambda$，使得 $\theta(\xi) \leqslant \beta$。换言之，对于任意 $h \in \Omega - \{0\}$，若存在满足 $\deg(h) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i$ 的 $\gamma \in \mathrm{supp}(h)$，且 $(\forall\, \lambda \in \Lambda : \theta(\lambda) \nleqslant \gamma)$，则有 $h \notin Q$。

证明。首先注意到，(1) $\Longleftrightarrow$(2) 由定义 2.3、(2.5) 和 (2.10) 可立即推出。因此，接下来我们将证明 (1) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (1) 以及 (3) $\Longrightarrow$ (5) $\Longrightarrow$(6)。

(1) $\Longrightarrow$ (3) 令 $f \in Q$。根据引理 3.1，我们可以选取 $(p(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda) \in \Omega^{\Lambda}$以及满足以下三个条件的 $\tau \in \Omega$:
(i) $f = (\sum_{\lambda \in \Lambda} p(\lambda) \cdot g(\lambda)) + \tau$；$(ii)$ 对任意 $\lambda \in \Lambda$，均有 $\mathrm{supp}(p(\lambda)) + \mathrm{supp}(g(\lambda)) \subseteq \Delta(\mathrm{supp}(f))$；$(iii)$ 对任意 $\lambda \in \Lambda$ 和 $\alpha \in \mathrm{supp}(\tau)$，均有 $\theta(\lambda) \nleqslant \alpha$。
由 (i)，可得 $\tau \in Q$。结合 (iii) 和定义 2.3，进一步可推出 $\tau = 0$。现在，由 (i) 和 (ii) 立即得到 (3)。

(3) $\Longrightarrow$ (4) 令 $f \in Q$。由 (3)，可选取 $(p(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda) \in \Omega^{\Lambda}$，使其满足 3.1) 和 3.2)。任取 $\beta \in \max(\mathrm{supp}(f))$。由 3.1)，存在 $\xi \in \Lambda$ 使得 $\beta \in \mathrm{supp}(p(\xi) \cdot g(\xi))$。因此，可选取 $\alpha \in \mathrm{supp}(p(\xi))$、$\gamma \in \mathrm{supp}(g(\xi))$，使得 $\beta = \alpha + \gamma$。由于 $\theta(\xi)$ 是 $\mathrm{supp}(g(\xi))$ 的最大元，故有 $\gamma \leqslant \theta(\xi)$，进而得到 $\beta \leqslant \alpha + \theta(\xi)$。由 3.2)，可得 $\alpha + \theta(\xi) \in \Delta(\mathrm{supp}(f))$。因此，可选取 $\mu \in \mathrm{supp}(f)$，使得 $\alpha + \theta(\xi) \leqslant \mu$。结合 $\beta \leqslant \alpha + \theta(\xi)$，可推出 $\beta \leqslant \mu$。由 $\beta \in \max(\mathrm{supp}(f))$、$\mu \in \mathrm{supp}(f)$，可推得 $\beta = \mu$。于是得到 $\theta(\xi) \leqslant \alpha + \theta(\xi) = \beta$，得证。

(4) $\Longrightarrow$(6) 设 $f \in Q - \{0\}$ and $\beta \in$是 f的支撑，且 f的次数为 $= \sum_{i=1}^{n} \beta_i$。那么，我们有 $\beta \in \max(f$的支撑$)$，所需结论由 (4) 得出。
(6) $\Longrightarrow$ (1) 任取一个 $f \in Q - \{0\}$。由于 $f \neq 0$，我们可以选取 $\beta \in$属于 f的支撑，且 f的次数为$= \sum_{i=1}^{n} \beta_i$。由 (6)，我们还可以选取$\xi \in \Lambda$，使得 ξ的 θ为 $\leqslant \beta$。现在，(1) 由定义 2.3 立即得出。
(3) $\Longrightarrow$(5) 这是因为 3.2) 蕴含 5.2)。
(5) $\Longrightarrow$ (6) 设 $f \in Q - \{0\}$。由 (5)，我们可以选取 $(p(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda) \in \Omega^{\Lambda}$，使其满足 5.1) 和 5.2)。任取一个 $\beta \in$属于 f的支撑，且 f的次数为$= \sum_{i=1}^{n} \beta_i$。由 5.1)，存在 $\xi \in \Lambda$，使得 $p(\xi) \cdot g(\xi)$ 的支撑为 $\beta \in$。由 5.2)，我们有 $p(\xi) \cdot g(\xi)$ 的次数为 $\leqslant \sum_{i=1}^{n} \beta_i$。由此可得 $\beta \in \max(p(\xi) \cdot g(\xi)$ 的支撑$)$，再结合引理 2.1 的 (2)，可推出$\beta \in \max(p(\xi)$ 的支撑$) + \{\theta(\xi)\}$，因此所需结论为 $\theta(\xi) \leqslant \beta$。

□

备注 3.1。在组合零点定理的研究中，与定理 3.1 的 (5)、(6) 类似形式的结论已在各种情形下得到确立：例如，Alon 组合零点定理 1.1 和 1.2 中，

带重数的零点定理 *[9,* 定理 3.1、推论 3.*2],* ；多重集零点定理 *[24,* 定理 1 和 *6],* ；Mezei 的零点定理 *[29,* 定理 6.*12],* ；以及交换环上的零点定理中，包括 *[34,* 定理 7.*3], [30,* 定理 *1], [17,* 定理 3.8 和定理 3.*9], [25,* 定理 2.1 和 2.*2]* 以及 *[23,* 定理 3 和*4]*。此外，与定理 3.1 的 (4) 类似形式的结论已在 *[27,* 定理 *2],* 中得到确立，该定理是定理 1.2 的推广；也见于 *[11,* 推论 1.*6],* ，该推论研究了多重集零点定理。从这个意义上说，定理 3.1 从 Gröbner 基的角度揭示了 Alon 组合零点定理及其若干推广的本质。我们还指出，据我们所知，定理 3.1 的 (3) 似乎是一种新的刻画。

作为定理 3.1 的第一个应用，在下面的例子中，我们重新得到 Alon 组合零点定理（定理 1.1 和定理 1.2）以及 Laso´n 对定理1.2的推广（见 [27, 定理 2]），并推导出定理 1.1 的一个等价形式。

例 3.1. 假设 R 是一个整环。设 S_1、...、S_n 是 R 的非空有限子集，$g_i = \prod_{u\in S_i}(x_i - u)$ 对所有 $i \in [1, n]$均成立，并令

$$Q = \{f \in \Omega \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \ for\ all\ a \in \prod_{i=1}^{n} S_i\}.$$

显然，$(g_1,\ldots,g_n)$ 是首一多项式的一个元组；对于任意 $k \in [1, n]$，$\theta(k) \triangleq (\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{|S_k|}, \underbrace{0\ \ldots\ 0}_{n-k})$ 是 supp (g_k) 的最大元；并且

在.....上，Q 是 Ω 的一个理想，且 $\{g_1, \ldots, g_n\} \subseteq Q$。根据 *[3,* 引理 2.*1],* ，我们有

$$Q \cap \delta(\mathbb{N}^n - \nabla(\{\theta(1), \ldots, \theta(n)\})) = \{0\}.$$

由此可得，根据定理 3.1，$(g_1,\ldots,g_n)$ 是 Q 的 Gr¨obner 基，正如我们在 *[32,* 第 *6]* 节中所示。此外，定理 3.1 的 (5) 可归结为定理 1.1，定理 3.1 的 (6) 可归结为定理 1.2，定理 3.1 的 (4) 可归结为 Laso´n 的结果 *[27,* 定理 *2],* ，而定理 3.1 的 (3) 可归结为定理 1.1 的一个等价版本。

4 从定理 3.1 推导出的零点定理

在本节中，我们令 $S_1, \ldots, S_n$ 为 R 的有限子集，并令 $(B_a \mid a \in \prod_{i=1}^{n} S_i)$ 为 $\mathbb{N}^n$ 的子集元组，使得对于任意 $a \in \prod_{i=1}^{n} S_i$，$\mathbb{N}^n - \nabla(B_a)$ 都是有限集。此外，我们令

$$\zeta_1 \triangleq \sum_{a\in\prod_{i=1}^{n} S_i} |\mathbb{N}^n - \nabla(B_a)|, \tag{4.1}$$

Q, $\{f \in \Omega \mid \operatorname{supp}(f(x_1 + a_1, \ldots, x_n + a_n)) \subseteq \nabla(B_a)$ 对所有 $a \in \prod_{i=1}^{n} S_i\}$. (4.2)
都成立。容易验证，Q 是 Ω 的理想。

引理 4.1. 假设任意 $i \in [1, n]$, S_i 均满足 R 中的条件（F）。那么，Ω/Q 是秩为 $_R(\Omega/Q) = \zeta_1$ 的有限生成自由 R-模。

证明. 首先，考虑任意一个 $a \in \prod_{i=1}^{n} S_i$。令

$$J_a \triangleq \{f \in \Omega \mid \operatorname{supp}(f(x_1 + a_1, \ldots, x_n + a_n)) \subseteq \nabla(B_a)\}.$$

显然，J_a 是 Ω 的一个理想。此外，由于 $\mathbb{N}^n - \nabla(B_a)$ 是有限的，根据引理 2.3，对于任意 $m \in [1, n]$，存在 $p \in \mathbb{N}$，使得 $(x_m - a_m)^p \in J_a$。

接下来，取满足 $b \neq d$ 的 $b, d \in \prod_{i=1}^{n} S_i$。我们将证明

$$J_b + J_d = \Omega. \tag{4.3}$$

事实上，取满足 $b_m \neq d_m$ 的 $m \in [1, n]$。由于 S_m 满足 R 中的条件（F），根据定义 2.2，$d_m - b_m$ 是 R 的一个乘法单位。因此可得 $\langle\{x_m - b_m, x_m - d_m\}\rangle = \Omega$，这意味着对于所有 $p, q \in \mathbb{N}$，$\langle\{(x_m - b_m)^p, (x_m - d_m)^q\}\rangle = \Omega$。根据上一段，我们可以选取 $p, q \in \mathbb{N}$，使得 $(x_m - b_m)^p \in J_b$，$(x_m - d_m)^q \in J_d$，进而推出 (4.3)，证毕。

注意，如果 $\prod_{i=1}^{n} S_i = \emptyset$，则所需结果很容易验证。因此，在下文中，我们假设 $\prod_{i=1}^{n} S_i \neq \emptyset$。于是，我们有 $Q = \bigcap_{a \in \prod_{i=1}^{n} S_i} J_a$。对于任意 $a \in \prod_{i=1}^{n} S_i$，容易验证 Ω/J_a 是一个秩为 $_R(\Omega/J_a) = |\mathbb{N}^n - \nabla(B_a)|$ 的有限生成自由 R-模。结合 (4.3) 和中国剩余定理（见 [6, 命题 1.10]），可知 Ω/Q 是一个有限生成自由 R-模，其

$$\text{秩为 } = \sum_{a \in \prod_{i=1}^{n} S_i} \operatorname{rank}_R(\Omega/J_a) = \sum_{a \in \prod_{i=1}^{n} S_i} |\mathbb{N}^n - \nabla(B_a)| = \zeta_1,$$

正如所需。 □

从现在起，令 Λ 为一个有限集，并令 $(g(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda) \in Q^{\Lambda}$ 为一个首一多项式族。对于任意 $\lambda \in \Lambda$，令 $\theta(\lambda)$ 为 $\operatorname{supp}(g(\lambda))$ 的最大元。此外，令 $D = \{\theta(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$。在本节余下部分中，我们假设 $\mathbb{N}^n - \nabla(D)$ 是有限的，并令

$$\zeta_2 \triangleq |\mathbb{N}^n - \nabla(D)|. \tag{4.4}$$

引理 4.2. (1) 假设对于任意 $i \in [1,n]$, S_i 满足 R 中的条件（F）。那么，我们有 $\zeta_1 \leqslant \zeta_2$。此外，若 $\zeta_1 = \zeta_2$，则 $(g(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ 是 Q 的 Gr¨obner 基。

(2) 设 $G = \bigcup_{a \in \prod_{i=1}^{n} S_i} \{a\} \times (\mathbb{N}^n - \nabla(B_a))$，并假设 $(g(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ 是 Q 的 Gr¨obner 基。那么，我们有 $\zeta_2 \leqslant \zeta_1$。进一步假设 $\zeta_1 = \zeta_2$。那么，对于任意 $\sigma \in R^G$，都有

$$(\sum_{(v,\alpha)\in G} \sigma_{(v,\alpha)} \cdot \Phi((v,\alpha),\gamma) = 0 \ for\ all\ \gamma \in \mathbb{N}^n - \nabla(D)) \Longrightarrow \sigma = 0. \quad (4.5)$$

证明。(1) 注意到，$\delta(\mathbb{N}^n - \nabla(D))$ 是一个有限生成的自由 R-模，其秩为 ${}_R(\delta(\mathbb{N}^n - \nabla(D))) = \zeta_2$。定义 R-模同态 $\pi:\ \delta(\mathbb{N}^n - \nabla(D)) \longrightarrow \Omega/Q$ 为 $\pi(h) = h + Q$。由引理 3.1 可知，π 是满射的。结合引理 4.1，这意味着 $\zeta_1 =$ 的秩为 ${}_R(\Omega/Q) \leqslant \zeta_2$，如所要求。现在进一步假设 $\zeta_1 = \zeta_2$。那么，根据引理 4.1，Ω/Q 和 $\delta(\mathbb{N}^n - \nabla(D))$ 是秩相同的有限生成自由 R-模。结合 π 的满射性和 [14, 定理 5.36], , 可知 π 是单射的，从而 $Q \cap \delta(\mathbb{N}^n - \nabla(D)) = \{0\}$。现在应用定理 3.1 可得，$(g(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ 是 Q 的 Gr¨obner 基，如所要求。

(2) 根据定理 3.1，我们有 $Q \cap \delta(\mathbb{N}^n - \nabla(D)) = \{0\}$。令 $W, \Phi\mid_{G\times(\mathbb{N}^n - \nabla(D))}$。于是，$W$ 可以看作是一个定义在 R 上的矩阵，其行由 G 索引，列由 $\mathbb{N}^n - \nabla(D)$ 索引。考虑以下未知数为 $\rho \in R^{\mathbb{N}^n - \nabla_{(D)}}$ 的齐次线性方程组:

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{N}^n - \nabla(D)} W((v,\alpha),\gamma) \cdot \rho_\gamma = 0 \text{ for all } (v,\alpha) \in G. \quad (4.6)$$

设 $\rho \in R^{\mathbb{N}^n - \nabla_{(D)}}$ 是 (4.6) 的一个解，我们将证明 $\rho = 0$。事实上，令 $f = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^n - \nabla(D)} \rho_\gamma \cdot (\prod_{k=1}^{n} {x_k}^{\gamma_k})$。对于任意的 $(v,\alpha) \in G$，由引理 2.2 以及 $\text{supp}(f) \subseteq \mathbb{N}^n - \nabla(D)$，我们有

$$f(x_1 + v_1, \ldots, x_n + v_n)_{[\alpha]} = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^n - \nabla(D)} W((v,\alpha),\gamma) \cdot \rho_\gamma = 0.$$

由此可得 $f \in Q \cap \delta(\mathbb{N}^n - \nabla(D)) = \{0\}$，进而推出 $\rho = 0$，这正是所需。因此 (4.6) 只有平凡解。于是，应用 McCoy 定理 [14, 定理 5.3] 可得 $|\mathbb{N}^n - \nabla(D)| \leqslant |G|$，从而得到 $\zeta_2 \leqslant \zeta_1$，这正是所需。现在，进一步假设 $\zeta_1 = \zeta_2$。那么，我们有 $|G| = |\mathbb{N}^n - \nabla(D)|$，且 (4.6) 只有平凡解。由 [14, 定理 5.3] 再次可得 (4.5) 成立，这正是所需。 □

现在我们给出一些必要且充分的条件，以判断 $(g(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ 是否为 Q 的 Gr¨obner 基。

定理 4.1. (1) 假设对于任意 $i \in [1,n]$, S_i ，在 R 中满足条件 (D)。那么，$\zeta_1 \leqslant \zeta_2$ 成立。此外，$(g(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ 是 Q 的 Gr¨obner 基，当且仅当 $\zeta_1 = \zeta_2$。

(2) 假设 $\prod_{i=1}^{n} S_i \neq \emptyset$，对于所有 $a \in \prod$， $\mathbf{0} \notin B_a$ $\prod_{i=1}^{n} S_i$、$\zeta_1 \leqslant \zeta_2$，以及 $(g(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ 是 Q 的 Gr¨obner 基。 那么，有 $\zeta_1 = \zeta_2$，并且对于任意满足 R 中条件 (D) 的 $k \in [1,n]$， S_k。

证明。（1）设 $E = \{c \in R \mid c$ 不是 $R\}$的零因子，并令 T 表示相对于 E 的 R 的分式环（参见 [6, 第 3]章）。此外，令 Ω_1，$T[x_1, \ldots, x_n]$ 表示 T上以 n 个变量 $x_1, \ldots, x_n$为变量的多项式环。对于任意 $h \in \Omega_1$，，我们令 $\mathrm{supp}_1(h) = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid h_{[\alpha]} \neq 0\}$，其中对于任意 $\alpha \in \mathbb{N}^n$， $h_{[\alpha]}$ 表示 h中 $\prod_{i=1}^{n} {x_i}^{\alpha_i}$ 的系数。

以下两个事实很容易验证。

事实 1。 $\varphi : R \longrightarrow T$ 定义为 $\varphi(a) = a/1_R$ 是单射。

事实 2。设 $X \subseteq R$ 满足 X 在 R中满足条件 (D)，并令$Y = \{b/1_R \mid b \in X\}$。那么，对于任意 y_1，若 $y_2 \in Y$满足 $y_1 \neq y_2$，则 $y_2 - y_1$ 是 T的乘法单位，也就是说， Y 满足 T中的条件（F）。

根据事实 1，我们定义 $(P_1, \ldots, P_n)$、$(L_e \mid e \in \prod_{i=1}^{n} P_i)$ 和 Q_1 如下:

$$\begin{aligned} &\forall\, k \in [1,n] : P_k = \{u/1_R \mid u \in S_k\}, \\ &\forall\, a \in \textstyle\prod_{i=1}^{n} S_i : L_{(a_1/1_R, \ldots, a_n/1_R)} = B_a; \end{aligned} \tag{4.7}$$

Q_1, $\{\eta \in \Omega_1 \mid$ 支撑 $_1(\eta(x_1 + e_1, \ldots, x_n + e_n)) \subseteq \nabla(L_e)$ 对所有 $e \in \prod_{i=1}^{n} P_i\}$. 均成立。根据事实 2，对于任意 $k \in [1,n]$， P_k是 T的有限子集，并且 P_k 在 T中满足条件（F）。由 (4.7) 可知，对于任意 $e \in \prod_{i=1}^{n} P_i$，有 $L_e \subseteq \mathbb{N}^n$, $\mathbb{N}^n - \nabla(L_e)$ 是有限的。此外，还有

$$\textstyle\sum_{e \in \prod_{i=1}^{n} P_i} |\mathbb{N}^n - \nabla(L_e)| = \sum_{a \in \prod_{i=1}^{n} S_i} |\mathbb{N}^n - \nabla(B_a)| = \zeta_1. \tag{4.8}$$

我们还注意到， Q_1 是 Ω_1的一个理想。现在将 $(h(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda) \in {\Omega_1}^{\Lambda}$ 定义为

$$\forall\, \lambda \in \Lambda : h(\lambda)_{[\alpha]} = g(\lambda)_{[\alpha]}/1_R \text{ for all } \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

任取 $\mu \in \Lambda$。由事实 1 可推得，支撑 $_1(h(\mu))$ =支撑 $(g(\mu))$， $\theta(\mu)$ 是支撑 $_1(h(\mu))$, $h(\mu)_{[\theta(\mu)]} = 1_T$的最大元。此外， $g(\mu) \in Q$ 意味着 $h(\mu) \in Q_1$。现在结合 (4.8)，将引理 4.2 的 (1) 应用于 T 和 Ω_1 ，即可推出 $\zeta_1 \leqslant \zeta_2$，正如所需。

接下来，我们证明“此外”这一断言。注意，“仅当”部分由引理 4.2 的 (2) 以及已证明的事实 $\zeta_1 \leqslant \zeta_2$ 得出，因此只需证明“如果”部分。为此，假设 $\zeta_1 = \zeta_2$。于是，由 (4.8) 可得,

将引理 4.2 的 (1) 应用于 T 和 Ω_1，可知 Ω_1, $(h(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ 是 Q_1 的 Gr¨obner 基。现在考虑任意的 $\tau \in Q - \{0\}$。令 $\eta \in \Omega_1$ 定义为 $\eta_{[\alpha]} = \tau_{[\alpha]}/1_R$，对所有 $\alpha \in \mathbb{N}^n$ 均成立。由事实 1 可知，supp (τ) $=$supp 1(η)。特别地，$\eta \neq 0$。此外，$\tau \in Q$ 蕴含 $\eta \in Q_1$。由于 $(h(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ 是 Q_1 的 Gr¨obner 基，根据定义 2.3，我们可以选取 $\alpha \in$ supp $_1(\eta)$ 和 $r \in \Lambda$，使得 $\theta(r) \leqslant \alpha$。因此，我们有 $\alpha \in$supp (τ), $r \in \Lambda$, $\theta(r) \leqslant \alpha$。由此，根据定义 2.3，$(g(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ 是 Q 的 Gr¨obner 基，证毕。

(2) 令 $G = \bigcup_{a \in \prod_{i=1}^n S_i} \{a\} \times (\mathbb{N}^n - \nabla(B_a))$。首先，由引理 4.2 的 (2) 可得 $\zeta_1 = \zeta_2$，如所求。其次，对任意 $a \in \prod_{i=1}^n S_i$，由 $\mathbf{0} \notin B_a$，有 $(a, \mathbf{0}) \in G$。现在令 $k \in [1, n]$，并证明 S_k 满足 R 中的条件 (D)。事实上，令 $c, d \in S_k$ 满足 $c \neq d$。由于 $\prod_{i=1}^n S_i \neq \emptyset$，我们可以选取 $y, w \in \prod_{i=1}^n S_i$，使得 $y_k = c$, $w_k = d$，并且对所有 $j \in [1, n] - \{k\}$，都有 $y_j = w_j$。任取满足 $b \cdot (d - c) = 0$ 的 $b \in R$。于是，我们可以选取 $\sigma \in R^G$，使得 $\sigma_{(y,\mathbf{0})} = -b$, $\sigma_{(w,\mathbf{0})} = b$，并且对所有 $(a, \beta) \in G - \{(y, \mathbf{0}), (w, \mathbf{0})\}$，都有 $\sigma_{(a,\beta)} = 0$。令 $\gamma \in \mathbb{N}^n$ 为任意元素。由 $b \cdot (d - c) = 0$，可得 $b \cdot (d^{\gamma_k} - c^{\gamma_k}) = 0$；结合 (2.11) 以及 σ, y, w 的定义，进一步可得

$$\begin{aligned} \sum_{(v,\alpha) \in G} \sigma_{(v,\alpha)} \cdot \Phi((v, \alpha), \gamma) &= b \cdot (\Phi((w, \mathbf{0}), \gamma) - \Phi((y, \mathbf{0}), \gamma)) \\ &= b \cdot (d^{\gamma_k} - c^{\gamma_k}) \cdot (\prod_{i \in [1,n] - \{k\}} {w_i}^{\gamma_i}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

由引理 4.2 的 (2) 可得 $\sigma = 0$，进而推出 $b = \sigma_{(w,\mathbf{0})} = 0$。因此，$d - c$ 不是 R 的零因子。于是，根据定义 2.2，我们推知 S_k 满足 R中的条件 (D)，得证。 □

下面的零点定理可由定理 3.1 和 4.1 直接推出，是本文的主要结果之一。

定理 4.2. 假设 $\zeta_1 = \zeta_2$，且对任意 $i \in [1, n]$，S_i 满足 R中的条件 (D)。考虑任意一个 $f \in Q$。那么，存在 $(p(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda) \in \Omega^\Lambda$，使得 $f = \sum_{\lambda \in \Lambda} p(\lambda) \cdot g(\lambda)$，并且

$$\forall\ \lambda \in \Lambda : \operatorname{supp}(p(\lambda)) + \operatorname{supp}(g(\lambda)) \subseteq \Delta(\operatorname{supp}(f)).$$

此外，对任意 $\beta \in$max(supp (f))，都存在 $\lambda \in \Lambda$，使得 $\theta(\lambda) \leqslant \beta$。

注 4.1。定理 4.1 表明，在一些附加假设下，条件 (D) 是 $(g(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ 成为 Q 的 Gr ¨obner 基的充要条件。事实上，在定理 4.1 中，

所有 $g(\lambda)$ 都是首一的这一假设，可以弱化为：所有 $g(\lambda)$ 相对于某个固定的单项式序，其首项系数均为 1_R。因此，定理 4.1 在更一般的情形下仍然成立。相比之下，我们的零点定理 4.2 很大程度上依赖于所有 $g(\lambda)$ 都是首一的这一事实。

5 定理 4.1 和定理 4.2 的一些推论

本节中，我们将利用定理 4.1 和定理 4.2 推导出几个零点定理。

5.1 Mezei 零点定理的一个推广

在 [29, 定理 6 中，12], Mezei 建立了一个一般的零点定理，其中，多重集零点定理（ [24] ）和带重数的零点定理（ [9] ）都是它的特例。本小节中，我们进一步推广 Mezei 的结果。我们的推广将是定理 4.1 和定理 4.2 的直接推论。

设 S_1，...，S_n 是 R 的有限子集，Λ 是有限集，并设

$$(\varepsilon(i,u,\lambda) \mid i \in [1,n], u \in S_i, \lambda \in \Lambda)$$

为自然数元组。定义 $(g(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$、$(\theta(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$、$D$、$(B_a \mid a \in \prod_{i=1}^n S_i)$ 和 Q 如下：

$$\forall\, \lambda \in \Lambda : g(\lambda) = \prod_{i=1}^n \prod_{u \in S_i} (x_i - u)^{\varepsilon(i,u,\lambda)} \in \Omega, \tag{5.1}$$

$$\forall\, \lambda \in \Lambda : \theta(\lambda) = (\textstyle\sum_{u \in S_1} \varepsilon(1,u,\lambda), \ldots, \sum_{u \in S_n} \varepsilon(n,u,\lambda)) \in \mathbb{N}^n, \tag{5.2}$$

$$D \triangleq \{\theta(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathbb{N}^n, \tag{5.3}$$

$$\forall\, a \in \textstyle\prod_{i=1}^n S_i : B_a \triangleq \{(\varepsilon(1,a_1,\lambda), \ldots, \varepsilon(n,a_n,\lambda)) \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathbb{N}^n, \tag{5.4}$$

$$Q, \{f \in \Omega \mid \text{支撑 } (f(x_1+a_1, \ldots, x_n+a_n)) \subseteq \nabla(B_a) \text{ 对所有 } a \in \textstyle\prod_{i=1}^n S_i\}. \tag{5.5}$$

此外，我们假设 $\mathbb{N}^n - \nabla(D)$ 是有限的，并令

$$\zeta_2 \triangleq |\mathbb{N}^n - \nabla(D)|.$$

根据引理 2.3，可以验证对于任意 $a \in \prod_{i=1}^n S_i$，$\mathbb{N}^n - \nabla(B_a)$ 都是有限的。与第 4 节一样，我们令

$$\zeta_1 \triangleq \textstyle\sum_{a \in \prod_{i=1}^n S_i} |\mathbb{N}^n - \nabla(B_a)|.$$

经简单验证可得，Q 是 Ω 的理想，$(g(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ 是首一多项式族，且 $\{g(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq Q$；此外，对于任意 $\lambda \in \Lambda$，$\theta(\lambda)$ 都是 $\mathrm{supp}(g(\lambda))$ 的最大元。

引理 5.1. 有 $\zeta_1 \leqslant \zeta_2$。

证明。首先，对于所有 S_i 都满足 R 中条件（F）的特殊情况，所需结果可直接由引理 4.2 的 (1) 推出。

接下来，我们考虑一般情形。为此，设 $P_1, \ldots, P_n$ 是 $\mathbb{C}$ 的有限子集，并且对所有 $i \in [1,n]$，都有 $|P_i| = |S_i|$。对于任意 $i \in [1,n]$，固定一个双射 $\omega_i \colon P_i \longrightarrow S_i$。定义元组 $(\sigma(i,v,\lambda) \mid i \in [1,n], v \in P_i, \lambda \in \Lambda)$ 为 $\sigma(i,v,\lambda) = \varepsilon(i,\omega_i(v)\ \lambda)$。容易验证

$$\forall\ \lambda \in \Lambda : (\textstyle\sum_{v\in P_1} \sigma(1,v,\lambda), \ldots, \sum_{v\in P_n} \sigma(n,v,\lambda)) = \theta(\lambda),$$

$$\forall\ d \in \textstyle\prod_{i=1}^n P_i \colon\ \{\,(\sigma\ (1,\ d_1,\ \lambda)\ \ldots,\ \sigma\ (n,\ d_n,\ \lambda)\ ) \mid \lambda \in \Lambda\} = B_{(\omega_1\ (d_1)\ \ldots,\ \omega_n\ (d_n)\ )}.$$

由于 $\mathbb{C}$ 是一个域，对于任意 $i \in [1,n]$，P_i 满足 $\mathbb{C}$ 中的条件（F）。由上一段可知

$$\zeta_1 = \textstyle\sum_{d\in\prod_{i=1}^n P_i} |\mathbb{N}^n - \nabla(B_{(\omega_1(d_1),\ldots,\omega_n(d_n))})| \leqslant |\mathbb{N}^n - \nabla(D)| = \zeta_2,$$

正如所要求的。 □

现在我们可以证明本小节的主要结果了。

定理 5.1。（1）设 $\zeta_1 = \zeta_2$，且对于任意 $k \in [1,n]$，S_k 满足 R 中的条件 (D)。那么，$(g(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ 是 Q 的 Gröbner 基。进一步考虑任意的 $f \in Q$。则存在 $(p(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda) \in \Omega^{\Lambda}$，使得 $f = \sum_{\lambda\in\Lambda} p(\lambda) \cdot g(\lambda)$，并且

$$\forall\ \lambda \in \Lambda : \operatorname{supp}(p(\lambda)) + \operatorname{supp}(g(\lambda)) \subseteq \Delta(\operatorname{supp}(f)). \tag{5.6}$$

此外，对于任意 $\beta \in \max(\text{支撑 } f)$，存在 $\lambda \in \Lambda$ 使得 $\sum_{u\in S_k} \varepsilon(k,u,\lambda) \leqslant \beta_k$ 对所有 $k \in [1,n]$ 成立。

(2) 假设对于所有 $a \in \prod_{i=1}^n S_i$，$\prod_{i=1}^n S_i \neq \emptyset$，且 $\mathbf{0} \notin B_a$。那么，当且仅当 $\zeta_1 = \zeta_2$，并且对于任意 $k \in [1,n]$，S_k 满足 R 中的条件 (D) 时，$(g(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ 是 Q 的 Gröbner 基。

证明。注意到，(1) 由定理 4.1、定理 4.2 的 (1) 以及 (5.2) 得出，而 (2) 由引理 5.1 和定理 4.1 得出。 □

注 5.1。在 *[29,* 定理 6.*12],* 中，Mezei 通过给出使 $\zeta_1 = \zeta_2$ 成立的充分条件，推导出了他的零点定理（见 *[26,* 引理 6.*11]*）。因此，定理 5.1 中的 (1) 将 Mezei 的结果从域上的多项式推广到了交换环上的多项式；并将类似于定理 3.1 中 (5) 的形式的结论推广到了类似于定理 3.1 中 (3)、(4) 的形式的结论；还推广到了更一般的 g（λ）。相比之下，我们没有给出使 $\zeta_1 = \zeta_2$ 成立的显式充分条件。

5.2 [23,24]和 [9]中的零点定理的一个常见推广

在本小节中，我们给出一个共同推广：一方面是 K´os、R´onyai 和 M´esz´aros [23, 24]建立的多重集零点定理，另一方面是 Ball 和 Serra [9]建立的带重数的零点定理。

记号 5.1. 设 $(g_1,\dots,g_n)\in\Omega^n$ 是一个首一多项式族，使得对所有 $k\in[1,n]$ 都有 $g_k\in R[x_k]$。那么，对任意 $t\in\mathbb{N}$，记

$$\mathcal{I}_t(g_1,\dots,g_n)=\langle\{\prod_{k=1}^n {g_k}^{\alpha_k}\mid\alpha\in\mathbb{N}^n,\sum_{i=1}^n\alpha_i=t\}\rangle. \tag{5.7}$$

我们在下面的命题中总结一些基本性质。

命题 5.1. 设 $(g_1,\dots,g_n)\in\Omega^n$ 是一个首一多项式族，使得对所有 $k\in[1,n]$ 都有 $g_k\in R[x_k]$。再固定 $t\in\mathbb{N}$。那么，以下两个陈述成立：

(1) $(\prod_{k=1}^n {g_k}^{\alpha_k}\mid\alpha\in\mathbb{N}^n,\sum_{i=1}^n\alpha_i=t)$ 是 $\mathcal{I}_t(g_1,\dots,g_n)$ 的 Gr¨obner 基；
(2) 设 $f\in\Omega$。那么，存在唯一的 $\psi\in\Omega$，使得 $f-\psi\in\mathcal{I}_t(g_1,\dots,g_n)$；并且对任意 $\beta\in\mathrm{supp}(\psi)$ 以及满足 $\sum_{i=1}^n\alpha_i=t$ 的 $\alpha\in\mathbb{N}^n$，存在 $s\in[1,n]$，使得 $\beta_s\leqslant\deg(g_s)\alpha_s-1$。此外，这样的 ψ 满足 $\mathrm{supp}(\psi)\subseteq\Delta(\mathrm{supp}(f))$。

证明。注意到 (1) 可由引理 2.7 的 (2) 推出，因此我们只证明 (2)。为此，设

$$D=\{(\deg(g_1)\alpha_1,\dots,\deg(g_n)\alpha_n)\mid\alpha\in\mathbb{N}^n,\textstyle\sum_{i=1}^n\alpha_i=t\}.$$

由引理 2.7 的 (1)、引理 3.1、(1) 以及定理 3.1，我们推得 Ω 是 $\mathcal{I}_t(g_1,\dots,g_n)$ 与 $\delta(\mathbb{N}^n-\nabla(D))$ 的直和，这进一步意味着 ψ 的存在性与唯一性。此外，由引理 3.1 可知 $\mathrm{supp}(\psi)\subseteq\Delta(\mathrm{supp}(f))$，如所要求。 □

现在我们陈述并证明本小节的主要结果。为此，对于任意 $k\in[1,n]$，令 S_k 为 R 的一个有限子集，并令 (S_k,ψ_k) 为一个多重集。将 $(g_1,\dots,g_n)$ 定义为

$$\forall\ k\in[1,n]:g_k=\textstyle\prod_{u\in S_k}(x_k-u)^{\psi_k(u)}. \tag{5.8}$$

定理 5.2. (1) 假设任意 $k\in[1,n]$，S_k 满足 R 中的条件 (D)。固定 $t\in\mathbb{N}$。考虑任意 $f\in\Omega$。那么，$f\in\mathcal{I}_t(g_1,\dots,g_n)$ 当且仅当对于任意 $a\in\prod_{i=1}^n S_i$ 和满足 $\sum_{i=1}^n\left\lfloor\frac{\beta_i}{\psi_i(a_i)}\right\rfloor\leqslant t-1$ 的 $\beta\in\mathbb{N}^n$，都有 $f(x_1+a_1,\dots,x_n+a_n)_{[\beta]}=0$。

(2) 假设任意 $k \in [1,n]$, S_k 满足 R 中的条件 (D)。固定$t \in \mathbb{N}$。设 $f \in \Omega$，使得对于任意 $a \in \prod_{i=1}^{n} S_i$ 和满足$\sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{\beta_i}{\psi_i(a_i)} \right\rfloor \leqslant t-1$ 的 $\beta \in \mathbb{N}^n$，都有 $f(x_1+a_1,\overline{\ldots,}x_n+a_n)_{[\beta]}=0$。那么，存在多项式 $(p(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{N}^n, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i = t)$，使得

$$f = \sum_{(\alpha \in \mathbb{N}^n, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i = t)} p(\alpha) \cdot (\prod_{k=1}^{n} {g_k}^{\alpha_k}),$$

并且对于任意 $\alpha \in \mathbb{N}^n$ with $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = t$，都有

$$\operatorname{supp}(p(\alpha)) + \operatorname{supp}(\prod_{k=1}^{n} {g_k}^{\alpha_k}) \subseteq \Delta(\operatorname{supp}(f)).$$

此外，对于任意 $\beta \in$ max(支撑 (f))，存在 $\gamma \in \mathbb{N}^n$, $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i = t$，使得 $(\sum_{u \in S_k} \psi_k(u)) \cdot \gamma_k \leqslant \beta_k$ 对所有 $k \in [1,n]$都成立。

(3) 假设 $\prod_{i=1}^{n} S_i \neq \emptyset$。令 $t \in \mathbb{Z}^+$。另外，假设对于任意满足以下条件的$f \in \Omega$

$$\forall\ a \in \prod_{i=1}^{n} S_i, \forall\ \beta \in \mathbb{N}^n\ s.t.\ \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{\beta_i}{\psi_i(a_i)} \right\rfloor \leqslant t-1 : f(x_1+a_1,\ldots,x_n+a_n)_{[\beta]} = 0,$$

都有 $f \in \mathcal{I}_t(g_1,\ldots,g_n)$。那么，对于任意 $k \in [1,n]$, S_k 满足 R中的条件 (D)。

证明。在整个证明过程中，我们固定 $t \in \mathbb{N}$，并令

$$\Lambda = \{\theta \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{i=1}^{n}\theta_i = t\}.$$

考虑元组 $(\psi_i(u)\theta_i \mid i \in [1,n], u \in S_i, \theta \in \Lambda)$。那么，我们有

$$\forall\ \theta \in \Lambda : \prod_{i=1}^{n}\prod_{u \in S_i}(x_i-u)^{\psi_i(u)\theta_i} = \prod_{k=1}^{n} {g_k}^{\theta_k}. \tag{5.9}$$

现在我们定义 D、$(B_a \mid a \in \prod_{i=1}^{n} S_i)$ 和 Q 如下:

$$D = \{((\sum_{u \in S_1}\psi_1(u))\theta_1, \ldots, (\sum_{u \in S_n}\psi_n(u))\theta_n) \mid \theta \in \Lambda\},$$

$$\forall\ a \in \prod_{i=1}^{n} S_i : B_a = \{(\psi_1(a_1)\theta_1, \ldots, \psi_n(a_n)\theta_n) \mid \theta \in \Lambda\},$$

$Q = \{f \in \Omega \mid$ 支撑 $(f(x_1+a_1,\ldots,x_n+a_n)) \subseteq \nabla(B_a)$ 对所有 $a \in \prod_{i=1}^{n} S_i\}$.

由引理 2.5, $\mathbb{N}^n - \nabla(D)$ 是有限的。根据第 5.1 节和 (5.9)，我们可推出 Q 是 Ω 的一个理想，且 $\mathcal{I}_t(g_1,\ldots,g_n) \subseteq Q$。此外，对于任意的 $f \in \Omega$，根据引理 2.5，可以验证 $f \in Q$ 当且仅当对于任意$a \in \prod_{i=1}^{n} S_i$ 和满足 $\sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{\beta_i}{\psi_i(a_i)} \right\rfloor \leqslant t-1$ 的 $\beta \in \mathbb{N}^n$，都有

$$f(x_1+a_1,\ldots,x_n+a_n)_{[\beta]} = 0.$$

(1) 和 (2) 由引理 2.5 可得

$$\begin{aligned}\sum_{a\in\prod_{i=1}^{n}S_i}|\mathbb{N}^n-\nabla(B_a)| &= \sum_{a\in\prod_{i=1}^{n}S_i}\left(\prod_{i=1}^{n}\psi_i(a_i)\right)\cdot\binom{n+t-1}{n}\\ &= \left(\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{u\in S_i}\psi_i(u)\right)\right)\cdot\binom{n+t-1}{n}\\ &= |\mathbb{N}^n-\nabla(D)|.\end{aligned}$$

因此，根据定理 5.1 的 (1) 和 (5.9)，$(\prod_{k=1}^{n}{g_k}^{\theta_k}\mid\theta\in\Lambda)$ 是 Q 的 Gr¨obner 基。由此，根据定理 3.1 可得 $Q=\mathcal{I}_t(g_1,\ldots,g_n)$，进而证明了 (1)。此外，(2) 也可由定理 5.1 的 (1) 推出。(3) 假设 $t\in\mathbb{Z}^+$ 和 $\prod_{i=1}^{n}S_i\neq\emptyset$。那么，可以验证对于所有 $a\in\prod_{i=1}^{n}S_i$，都有 $\mathbf{0}\notin B_a$。此外，我们注意到 $Q=\mathcal{I}_t(g_1,\ldots,g_n)$。由此，根据命题 5.1 的 (1)，$(\prod_{k=1}^{n}{g_k}^{\theta_k}\mid\theta\in\Lambda)$ 是 Q 的 Gr¨obner 基。因此，应用定理 5.1 的 (2) 即完成证明。

□

我们注意到，根据定理 5.2，在相对温和的假设 $t\geqslant 1$ 和 $\prod_{i=1}^{n}S_i\neq\emptyset$ 下，条件 (D) 是我们的零点定理成立的充要条件。在下面的注释中，我们将展示定理 5.2 如何恢复文献中的一些已知结果。

注 5.2. 首先，如果 R 是一个域，且对所有 $i\in[1,n]$ 和 $u\in S_i$，$\psi_i(u)=1$，那么定理 5.2 的 (2) 恢复了带重数的零点定理 *[9,*定理 3.*1],*，并推广了 *[9,* 推论 3.*2]*；如果 $t=1$，那么定理 5.2 的 (2) 推广了 *[23,* 定理 *4],*，后者在 R 是一个域时进一步恢复了 *[24,* 定理 *6]*；此外，如果 R 是一个域且 $t=1$，那么定理 5.2 的 (2) 与命题 5.1 的 (2) 一起，恢复了多重集零点定理 *[24,* 定理 *1]*。

其次，如果对所有 $i\in[1,n]$ 和 $u\in S_i$，$t=1$ 和 $\psi_i(u)=1$，那么定理 5.2 就得到了 Chevalley-Alon-Tarsi-Schauz 引理（参见，*[34,* 等价性和定义 2.*8], [12,* 定理 2.*5], [17,* 定理 3.*3], [18,* 定理 2.*3]*）以及 *[17,* 定理 3.*8]*。这两个结果都表明，Alon 的组合零点定理定理 1.1 在且仅在所有 S_i 都满足 R中的条件 (D) 时，将域$\mathbb{F}$ 替换为 R 仍然成立。

5.3 穿孔零点定理

在本小节中，我们给出 Ball 和 Serra [9], 以及 K´os、R´onyai 和 M´esz´aros [24]所建立的穿孔零点定理的一个共同推广。我们从以下命题开始，该命题的灵感来自 [9, 定理 4.1] 和 [24, 定理 7]。

命题 5.2. 设 $(g_1,\dots,g_n)\in\Omega^n$，$(h_1,\dots,h_n)\in\Omega^n$ 满足：g_k、$h_k\in R[x_k]$、g_k、h_k 均为首一，且对所有 $k\in[1,n]$，$h_k\mid g_k$ 成立。设 $t\in\mathbb{N}$，并固定 $f\in\bigcap_{m=1}^n\mathcal{I}_t(g_1,\dots,g_{m-1},g_m/h_m,g_{m+1},\dots,g_n)$。此外，设 $\psi\in\Omega$ 满足 $f-\psi\in\mathcal{I}_t(g_1,\dots,g_n)$，且对于任意 $\beta\in\mathrm{supp}(\psi)$ 以及满足 $\sum_{i=1}^n\alpha_i=t$ 的 $\alpha\in\mathbb{N}^n$，都存在 $s\in[1,n]$ 使得 $\beta_s\leqslant\deg(g_s)\alpha_s-1$。那么，以下三个陈述成立：

(1) $\psi\in\bigcap_{m=1}^n\mathcal{I}_t(g_1,\dots,g_{m-1},g_m/h_m,g_{m+1},\dots,g_n)$; (2) $(\prod_{k=1}^n\frac{g_k}{h_k})\mid\psi$; (3) 假设 $t\in\mathbb{Z}^+$。令 $\varphi\in\Omega$ 满足 $\psi=\varphi\cdot(\prod_{k=1}^n\frac{g_k}{h_k})$，并令 $(u_1,\dots,u_n)\in R^n$，使得对于所有 $k\in[1,n]$，$g_k(u_1,\dots,u_n)=0$。此外，固定 $m\in[1,n]$，并令 $a=\prod_{k\in[1,n]-\{m\}}(g_k/h_k)(u_1,\dots,u_n)$。于是，我们有

$$(g_m/h_m)^{t-1}\mid a\cdot\varphi(u_1,\dots,u_{m-1},x_m,u_{m+1},\dots,u_n). \tag{5.10}$$

进一步假设 $f(u_1,\dots,u_n)\neq0$，并且对于任意 $k\in[1,n]$，$(g_k/h_k)(u_1,\dots,u_n)$ 都不是 R 的零因子。则有

$$\deg(f)\geqslant\deg(\psi)\geqslant(t-1)\deg(g_m/h_m)+(\textstyle\sum_{k=1}^n\deg(g_k/h_k)). \tag{5.11}$$

证明。（1）所需结论由以下事实得出：$\mathcal{I}_t(g_1,\dots,g_n)\subsetneq\bigcap_{m=1}^n\mathcal{I}_t(g_1,\dots,g_{m-1},g_m/h_m,g_{m+1},\dots,g_n)$。

（2）设 $m\in[1,n]$，且 $(\zeta_1,\dots,\zeta_n)=(g_1,\dots,g_{m-1},g_m/h_m,g_{m+1},\dots,g_n)$。由（1）、命题 5.1 的（1）以及定理 3.1，可选取多项式 $(p(\alpha)\mid\alpha\in\mathbb{N}^n,\sum_{i=1}^n\alpha_i=t)$，满足以下两个条件：

$$\psi=\textstyle\sum_{(\alpha\in\mathbb{N}^n,\sum_{i=1}^n\alpha_i=t)}p(\alpha)\cdot(\prod_{k=1}^n{\zeta_k}^{\alpha_k}), \tag{5.12}$$

$$\forall\,\alpha\in\mathbb{N}^n\ s.t.\ \textstyle\sum_{i=1}^n\alpha_i=t\text{: 支撑 }(p(\alpha))+\text{支撑 }(\prod_{k=1}^n{\zeta_k}^{\alpha_k})\subseteq\Delta(\text{支撑 }(\psi))。 \tag{5.13}$$

考虑任意的 $\alpha\in\mathbb{N}^n$，使得 $\sum_{i=1}^n\alpha_i=t$, $p(\alpha)\neq0$。由 (5.13)，我们可以选取 $\beta\in\mathrm{supp}(\psi)$，使得 $(\deg(\zeta_1)\alpha_1,\dots,\deg(\zeta_n)\alpha_n)\leqslant\beta$。现在我们进一步选取 $s\in[1,n]$，使得 $\beta_s\leqslant\deg(g_s)\alpha_s-1$。于是可得$\zeta_s\neq g_s$，从而 $s=m$，这进一步意味着 $\alpha_m\geqslant1$。由此再根据 (5.12) 可得 $(g_m/h_m)\mid\psi$。现在，由 m 的任意性和引理 2.4，(2) 立即成立。

(3) 设 $(\zeta_1,\dots,\zeta_n)=(g_1,\dots,g_{m-1},g_m/h_m,g_{m+1},\dots,g_n)$。根据 (1)，我们可以选取满足 (5.12) 的多项式 $(p(\alpha)\mid\alpha\in\mathbb{N}^n,\sum_{i=1}^n\alpha_i=t)$。令 $\beta\in\mathbb{N}^n$，使得 $\beta_m=t$，且对所有 $i\in[1,n]-\{m\}$ 都有 $\beta_i=0$。考虑任意一个满足 $\sum_{i=1}^n\alpha_i=t$, $\alpha\neq\beta$ 的$\alpha\in\mathbb{N}^n$。那么，存在满足$\alpha_s\geqslant1$的 $s\in[1,n]-\{m\}$。由此可得 $g_s\mid(\prod_{k=1}^n{\zeta_k}^{\alpha_k})$。由于 $g_s\in R[x_s]$，$s\neq m$，我们有 $g_s(u_1,\dots,u_{m-1},x_m,u_{m+1},\dots,u_n)=g_s(u_1,\dots,u_n)=0$，进而

意味着 $(\prod_{k=1}^{n}\zeta_k{}^{\alpha_k})(u_1,\dots,u_{m-1},x_m,u_{m+1},\dots,u_n)=0$。根据上述讨论，我们推得

$$\psi(u_1,\dots,u_{m-1},x_m,u_{m+1},\dots,u_n)=(p(\beta))(u_1,\dots,u_{m-1},x_m,u_{m+1},\dots,u_n)\cdot(g_m/h_m)^t.$$

另一方面，由 $\psi=\varphi\cdot(\prod_{k=1}^{n}\frac{g_k}{h_k})$ 可得

$$\psi(u_1,\dots,u_{m-1},x_m,u_{m+1},\dots,u_n)=a\cdot\varphi(u_1,\dots,u_{m-1},x_m,u_{m+1},\dots,u_n)\cdot(g_m/h_m).$$

结合上述两个等式，根据引理 2.1 的 (4) 以及 g_m/h_m 是首一多项式这一事实，可立即得到 (5.10)。

现在证明 (5.11)。注意到 $(f-\psi)(u_1,\dots,u_n)=0$，我们有$\psi(u_1,\dots,u_n)=f(u_1,\dots,u_n)\neq 0$。由 $\varphi\mid\psi$，有 $\varphi(u_1,\dots,u_n)\neq 0$；结合 a 不是 R 的零因子这一事实，进一步可得 $a\cdot\varphi(u_1,\dots,u_{m-1},x_m,u_{m+1},\dots,u_n)\neq 0$。注意到 $(g_m/h_m)^{t-1}$ 是一个首一多项式，且 $\deg((g_m/h_m)^{t-1})=(t-1)\deg(g_m/h_m)$，由 (5.10) 和引理 2.1 的 (4)，可得

$$(t-1)\deg(g_m/h_m)\leqslant\deg(a\cdot\varphi(u_1,\dots,u_{m-1},x_m,u_{m+1},\dots,u_n))\leqslant\deg(\varphi).$$

由于对所有 $k\in[1,n]$，g_k/h_k 都是首一的，根据引理 2.1 的 (4)，我们有

$$\deg(\psi)=\deg(\varphi)+(\textstyle\sum_{k=1}^{n}\deg(g_k/h_k))\geqslant(t-1)\deg(g_m/h_m)+(\sum_{k=1}^{n}\deg(g_k/h_k)).$$

最后，根据命题 5.1 的 (2)，我们有 $\deg(\psi)\geqslant\deg(f)$，这进一步证明了 (5.11)，证毕。□

现在我们陈述并证明穿孔零点定理。在本小节余下部分，对任意 $k\in[1,n]$，我们令 S_k 为 R 的有限子集，(S_k,ψ_k) 为一个多重集，并固定 $E_k\subseteq S_k$。定义 $(g_1,\dots,g_n)$ 和 $(h_1,\dots,h_n)$ 如下：

$$\forall\ k\in[1,n]:g_k=\textstyle\prod_{u\in S_k}(x_k-u)^{\psi_k(u)},\ h_k=\prod_{u\in E_k}(x_k-u)^{\psi_k(u)}.\quad(5.14)$$

定理 5.3. 假设对任意 $k\in[1,n]$，S_k 都满足 R 中的条件。令 $t\in\mathbb{N}$, $f\in\Omega$。*(D)* 则有：

(1) $f\in\bigcap_{m=1}^{n}\mathcal{I}_t(g_1,\dots,g_{m-1},g_m/h_m,g_{m+1},\dots,g_n)$ 当且仅当对任意 $a\in(\prod_{i=1}^{n}S_i)-(\prod_{i=1}^{n}E_i)$ 和满足 $\sum_{i=1}^{n}\left\lfloor\frac{\beta_i}{\psi_i(a_i)}\right\rfloor\leqslant t-1$ 的 $\beta\in\mathbb{N}^n$，都有 $f(x_1+a_1,\dots,x_n+a_n)_{[\beta]}=0$；

(2) 假设对于任意 $a\in(\prod_{i=1}^{n}S_i)-(\prod_{i=1}^{n}E_i)$ 和 $\beta\in\mathbb{N}^n$，当$\sum_{i=1}^{n}\left\lfloor\frac{\beta_i}{\psi_i(a_i)}\right\rfloor\leqslant t-1$ 时，均有

$$f(x_1+a_1,\dots,x_n+a_n)_{[\beta]}=0.$$

那么，存在唯一的 $\eta \in \Omega$，使得 $f-\eta \in \mathcal{I}_t(g_1,\ldots,g_n)$；并且对于任意 $\beta \in$ 支撑 (η) 和满足 $\sum_{i=1}^n \alpha_i = t$ 的 $\alpha \in \mathbb{N}^n$，存在 $k \in [1,n]$，使得$\beta_k \leqslant (\sum_{u\in S_k} \psi_k(u))$ $\alpha_k - 1$。此外，我们有支撑 $(\eta) \subseteq \Delta($支撑 $(f))$，$(\prod_{k=1}^n \frac{g_k}{h_k}) \mid \eta$。进一步假设 $t \geqslant 1$ 且对于某个 $w \in \prod_{i=1}^n S_i$，有 $f(w_1,\ldots,w_n) \neq 0$。那么，对于任意 $m \in [1,n]$，均有

$$\deg(f) \geqslant \deg(\eta) \geqslant (t-1)(\textstyle\sum_{u\in S_m - E_m} \psi_m(u)) + (\sum_{k=1}^n \sum_{u\in S_k - E_k} \psi_k(u)).$$

证明。（1）首先，令 $m \in [1,n]$。定义 $(P_1,\ldots,P_n)$ 为 $P_m = S_m - E_m$，并令$P_k = S_k$对所有 $k \in [1,n]-\{m\}$成立。于是，对于任意 $k \in [1,n]$，P_k 满足 R 中的条件 (D)。将定理 5.2 的 (1) 应用于 $(P_1,\psi_1)\ldots,(P_n,\psi_n)$，可得以下事实：$f \in \mathcal{I}_t(g_1,\ldots,g_{m-1},g_m/h_m,g_{m+1},\ldots,g_n)$ 当且仅当对于任意满足 $\sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{\beta_i}{\psi_i(a_i)} \right\rfloor \leqslant t-1$ 的 $a \in \prod_{i=1}^n P_i$ 和 $\beta \in \overline{\mathbb{N}^n}$，都有 $f(x_1+a_1,\ldots,x_n+a_n)_{[\beta]} = 0$。现在，根据以上讨论，所需结果可由以下事实推出

$$(\textstyle\prod_{i=1}^n S_i) - (\prod_{i=1}^n E_i) = \bigcup_{m=1}^n S_1 \times \cdots \times S_{m-1} \times (S_m - E_m) \times S_{m+1} \times \cdots \times S_n.$$

(2) 由 (1)，$f \in \bigcap_{m=1}^n \mathcal{I}_t(g_1,\ldots,g_{m-1},g_m/h_m,g_{m+1},\ldots,g_n)$。因此，除了最后一个断言外，所有所需结论均由命题 5.1 和 5.2 得出。因此，以下假设 $t \geqslant 1$，并固定 $w \in \prod_{i=1}^n S_i$ with$f(w_1,\ldots,w_n) \neq 0$。注意到 $w \in \prod_{i=1}^n E_i$。事实上，若 $w \in (\prod_{i=1}^n S_i) - (\prod_{i=1}^n E_i)$，则由 $\sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{\mathbf{0}_i}{\psi_i(w_i)} \right\rfloor = 0 \leqslant t-1$，可得 $f(w_1,\ldots,w_n) = f(x_1+w_1,\ldots,\overline{x_n+w_n})_{[\mathbf{0}]} = 0$，这与假设矛盾。对于任意 $k \in [1,n]$，由 $w_k \in E_k$ 且 S_k 满足 R中的条件 (D)，可验证 $g_k(w_1,\ldots,w_n) = 0$，且 $(g_k/h_k)(w_1,\ldots,w_n)$ 不是 R 的零因子。根据这些事实，所需结论由命题 5.2 的 (3) 得出。 □

由定理 5.3 的 (1) 和定理 5.2 的 (1) 可立即得到以下推论。

推论 5.1. 假设任意 $k \in [1,n]$，S_k 都满足 R 中的条件 (D)。那么，对于任意 $t \in \mathbb{N}$，有

$$(\textstyle\bigcap_{m=1}^n \mathcal{I}_t(g_1,\ldots,g_{m-1},g_m/h_m,g_{m+1},\ldots,g_n)) \cap \mathcal{I}_t(h_1,\ldots,h_n) = \mathcal{I}_t(g_1,\ldots,g_n).$$

注 5.3. (1) 若 $\prod_{i=1}^n E_i = \emptyset$，则定理 5.3 的 (1) 可还原定理 5.2 的 (1)。

(2) 若 R 是一个域，且对所有 $i \in [1,n]$ 和 $u \in S_i$，$\psi_i(u) = 1$，则定理 5.3 的 (2) 可推出 *[9,* 定理 4.*1]*；若 R 是一个域且 $t = 1$，则定理 5.3 的 (2) 可推出 *[24,* 定理 *7]*；若 $t = 1$，且对所有 $i \in [1,n]$ 和 $u \in S_i$，$\psi_i(u) = 1$，则定理 5.3 的 (2) 可推出在 *[18,* 定理 2.*2]* 的证明中建立的穿孔零点定理。

5.4 [33, 定理 1.5] 的推广

在本小节中，我们利用定理 4.1 和定理 4.2 推导出另一个零点定理。我们的零点定理定理 5.4 受到 Sauermann 和 Wigderson [33]，的启发；作者研究了一个多项式在超立方体$\{0,1\}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ 的大部分点上以高阶消失时，其可能的最小次数（另见 Clifton 和 Huang [19]）。作为定理 5.4 的应用，我们将推导出 [33, 定理 1.5] 的一个推广。

对于任意 $k \in [1,n]$，设 S_k 为 R 的有限子集，(S_k, ψ_k) 为多重集，并固定 $E_k \subseteq S_k$。按如下方式定义 $(g_1, \ldots, g_n)$ 和 $(h_1, \ldots, h_n)$:

$$\forall\ k \in [1,n] : g_k = \prod_{u \in S_k} (x_k - u)^{\psi_k(u)},\ h_k = \prod_{u \in E_k} (x_k - u)^{\psi_k(u)}. \quad (5.15)$$

固定 $t \in \mathbb{Z}^+$，并令

$$\Lambda = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i \in \{t-1, t\}\}. \quad (5.16)$$

按如下方式定义 $(\varphi(\alpha) \mid \alpha \in \Lambda) \in \Omega^\Lambda$：

$$\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n\ s.t.\ \sum_{i=1}^n \alpha_i = t : \varphi(\alpha) = \prod_{i=1}^n {g_i}^{\alpha_i}, \quad (5.17)$$

$$\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n\ s.t.\ \sum_{i=1}^n \alpha_i = t-1 : \varphi(\alpha) = (\prod_{i=1}^n {g_i}^{\alpha_i}) \cdot (\prod_{i=1}^n \tfrac{g_i}{h_i}). \quad (5.18)$$

此外，设 $Q \subseteq \Omega$，使得对于任意 $f \in \Omega$，$f \in Q$ 当且仅当以下两个条件成立:

(i) 对于任意 $a \in (\prod_{i=1}^n S_i) - (\prod_{i=1}^n E_i)$ 和满足 $\sum_{i=1}^n \left\lfloor {\psi_i}^{\beta_i(a_i)} \right\rfloor \leqslant t-1$ 的 $\beta \in \mathbb{N}^n$，有 $f(x_1 + a_1, \ldots, x_n + a_n)_{[\beta]} = 0$;
(ii) 对于任意 $a \in \prod_{i=1}^n E_i$ 和 $\beta \in \mathbb{N}^n$，若满足 $\sum_{i=1}^n \left\lfloor {\psi_i}^{\beta_i(a_i)} \right\rfloor \leqslant t-2$，则有 $f(x_1 + a_1, \ldots, x_n + a_n)_{[\beta]} = 0$。

定理 5.4. (1) Q 是 Ω 的一个理想，并且 $(\varphi(\alpha) \mid \alpha \in \Lambda)$ 是一个首一多项式族，满足 $\{\varphi(\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\} \subseteq Q$。
(2) 假设对于任意 $k \in [1,n]$，S_k 都满足 R 中的条件 (D)。那么，$(\varphi(\alpha) \mid \alpha \in \Lambda)$ 是 Q 的一个 Gr¨obner 基。此外，对于任意 $f \in Q$，存在 $(p(\alpha) \mid \alpha \in \Lambda) \in \Omega^\Lambda$，使得 $f = \sum_{\alpha \in \Lambda} p(\alpha) \cdot \varphi(\alpha)$，并且

$$\forall\ \alpha \in \Lambda : \mathrm{supp}\,(p(\alpha)) + \mathrm{supp}\,(\varphi(\alpha)) \subseteq \Delta(\mathrm{supp}\,(f)).$$

(3) 假设 $\prod_{i=1}^n S_i \neq \emptyset$、$t \geqslant 2$、$(\varphi(\alpha) \mid \alpha \in \Lambda)$ 是 Q 的 Gr¨obner 基。那么，对于任意 $k \in [1,n]$，S_k 满足 R 中的条件 (D)。

证明。由于 (1) 可通过一些直接验证得到，下面我们仅证明 (2) 和 (3)。定义 $(B_a \mid a \in \prod_{i=1}^n S_i)$ 如下：

$$\forall\ a \in (\prod_{i=1}^n S_i)\ -(\prod_{i=1}^n E_i)\colon\quad B_a = \{(\psi_1(a_1)\alpha_1, \ldots, \psi_n(a_n)\alpha_n)\ \mid \alpha \in \mathbb{N}^n, \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i = t\},$$
$$\forall\ a \in \prod_{i=1}^n E_i\colon\quad B_a = \{(\psi_1(a_1)\alpha_1, \ldots, \psi_n(a_n)\alpha_n)\ \mid \alpha \in \mathbb{N}^n, \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i = t-1\}.$$

由引理 2.5 可知，对于任意 $a \in \prod_{i=1}^n S_i$，$\mathbb{N}^n - \nabla(B_a)$ 都是有限的。此外，引理 2.5 蕴含

$$Q = \{f \in \Omega \mid \operatorname{supp}(f(x_1 + a_1, \ldots, x_n + a_n)) \subseteq \nabla(B_a) \text{ for all } a \in \textstyle\prod_{i=1}^n S_i\}.$$

再次由引理 2.5 可得

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{a\in\prod_{i=1}^n S_i} |\mathbb{N}^n - \nabla(B_a)| \\
&= (\textstyle\sum_{a\in(\prod_{i=1}^n S_i)-(\prod_{i=1}^n E_i)} \prod_{i=1}^n \psi_i(a_i)) \cdot \binom{n+t-1}{n} + (\sum_{a\in\prod_{i=1}^n E_i} \prod_{i=1}^n \psi_i(a_i)) \cdot \binom{n+t-2}{n} \\
&= (\textstyle\sum_{a\in\prod_{i=1}^n S_i} \prod_{i=1}^n \psi_i(a_i))\binom{n+t-1}{n} - (\sum_{a\in\prod_{i=1}^n E_i} \prod_{i=1}^n \psi_i(a_i))(\binom{n+t-1}{n} - \binom{n+t-2}{n}) \\
&= (\textstyle\prod_{i=1}^n (\sum_{u\in S_i} \psi_i(u)))\binom{n+t-1}{n} - (\prod_{i=1}^n (\sum_{u\in E_i} \psi_i(u)))\binom{n+t-2}{n-1} \\
&= (\textstyle\prod_{i=1}^n \deg(g_i))\binom{n+t-1}{n} - (\prod_{i=1}^n \deg(h_i))\binom{n+t-2}{n-1}.
\end{aligned}$$

现在定义 $(\theta(\alpha)\ \mid \alpha \in \Lambda)$ 如下：

$$\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n\ s.t.\ \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i = t : \theta(\alpha) = (\deg(g_1)\alpha_1, \ldots, \deg(g_n)\alpha_n),$$

$\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n\ s.t.\ \sum_{i=1}^n \alpha_i = t-1$：$\theta(\alpha) = (\deg(g_i)\alpha_i + \deg(g_i) - \deg(h_i) \mid i \in [1,n])$，并令 $D = \{\theta(\alpha)\ \mid \alpha \in \Lambda\}$。那么可以验证，对于任意 $\alpha \in \Lambda$，$\theta(\alpha)$ 是 $\operatorname{supp}(\varphi(\alpha))$ 的最大元。此外，由引理 2.6 可得

$$|\mathbb{N}^n - \nabla(D)| = (\textstyle\prod_{i=1}^n \deg(g_i))\binom{n+t-1}{n} - (\prod_{i=1}^n \deg(h_i))\binom{n+t-2}{n-1} = \sum_{a\in\prod_{i=1}^n S_i} |\mathbb{N}^n - \nabla(B_a)|.$$

由上述讨论可立即得出 (2)。最后，注意到若 $t \geqslant 2$，则对所有 $a \in \prod_{i=1}^n S_i$，$\mathbf{0} \notin B_a$，由定理 4.1 可立即得出 (3)，证毕。 □

定理 5.4 与定理 5.2 和定理 5.3 一起推出以下推论。

推论 5.2. 假设对于任意 $k \in [1,n]$，S_k 在 R 中满足条件 (D)，并令 $e = \min\{\sum_{u\in S_k} \psi_k(u)\ \mid k \in [1,n]\}$。那么，以下四个陈述成立：

(1) $Q = (\bigcap_{m=1}^n \mathcal{I}_t(g_1, \ldots, g_{m-1}, g_m/h_m, g_{m+1}, \ldots, g_n)) \cap \mathcal{I}_{t-1}(h_1, \ldots, h_n)$;

(2) $Q = \mathcal{I}_t(g_1, \ldots, g_n) + \mathcal{I}_{t-1}(g_1, \ldots, g_n) \cdot (\prod_{i=1}^n \frac{g_i}{h_i})$; (3) 对任意 $f \in Q$, $f \notin \mathcal{I}_t(g_1, \ldots, g_n)$ 当且仅当存在 $v \in \prod_{i=1}^n E_i$ 和 $\gamma \in \mathbb{N}^n$, 使得 $\sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{\gamma_i(v_i)}{\psi_i} \right\rfloor = t-1$, $f(x_1 + v_1, \ldots, x_n + v_n)_{[\gamma]} \neq 0$; (4) ~~假设~~ $\prod_{i=1}^n E_i \neq \emptyset$。那么，对于任意满足 $\sum_{i=1}^n \gamma_i = t-1$ 的 $\gamma \in \mathbb{N}^n$, 我们有 $\varphi(\gamma) \in Q - \mathcal{I}_t(g_1, \ldots, g_n)$。此外，有

$$\min\{\deg(f) \mid f \in Q - \mathcal{I}_t(g_1, \ldots, g_n)\} = (t-1)e + (\sum_{i=1}^n \sum_{u \in S_i - E_i} \psi_i(u)).$$

证明。根据 Q 的定义，(1) 由定理 5.3 的 (1) 和定理 5.2 的 (1) 得出，(2) 由定理 5.4 的 (1)、(2) 得出，而 (3) 由定理 5.2 的 (1) 得出。因此，只需证明 (4)。为此，我们先固定满足 $\sum_{i=1}^n \gamma_i = t-1$ 的 $\gamma \in \mathbb{N}^n$。注意到 $\varphi(\gamma) \in Q$, 只需证明 $\varphi(\gamma) \notin \mathcal{I}_t(g_1, \ldots, g_n)$。反设 $\varphi(\gamma) \in \mathcal{I}_t(g_1, \ldots, g_n)$。由于 $\{\deg(g_i)\gamma_i + \deg(g_i) - \deg(h_i) \mid i \in [1, n]\}$ 是 $\mathrm{supp}(\varphi(\gamma))$ 的最大元，根据定理 5.2，存在 $\alpha \in \mathbb{N}^n$ 使得 $\sum_{i=1}^n \alpha_i = t$, 且对所有 $i \in [1, n]$, 都有 $\deg(g_i)\alpha_i \leqslant \deg(g_i)\gamma_i + \deg(g_i) - \deg(h_i)$。任取一个 $k \in [1, n]$。由于 $E_k \neq \emptyset$, 我们有 $\deg(g_k) \geqslant \deg(h_k) \geqslant 1$。结合 $\deg(g_k)\alpha_k \leqslant \deg(g_k)\gamma_k + \deg(g_k) - \deg(h_k)$, 可得 $\alpha_k \leqslant \gamma_k$。于是得到 $\alpha \leqslant \gamma$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = t$, $\sum_{i=1}^n \gamma_i = t-1$, 矛盾，证毕。

接下来，选取 $l \in [1, n]$, 使得 $\deg(g_l) = e$。根据上一段，我们有 $g_l{}^{t-1}(\prod_{i=1}^n g_i/h_i) \in Q - \mathcal{I}_t(g_1, \ldots, g_n)$。此外，可以验证

$$\deg(g_l{}^{t-1}(\prod_{i=1}^n g_i/h_i)) = (t-1)e + (\sum_{i=1}^n \sum_{u \in S_i - E_i} \psi_i(u)).$$

最后，考虑任意的 $f \in Q - \mathcal{I}_t(g_1, \ldots, g_n)$。根据定理 5.4，存在 $(p(\alpha) \mid \alpha \in \Lambda) \in \Omega^\Lambda$, 使得 $f = \sum_{\alpha \in \Lambda} p(\alpha) \cdot \varphi(\alpha)$, 且对所有 $\alpha \in \Lambda$, $\deg(p(\alpha)) + \deg(\varphi(\alpha)) \leqslant \deg(f)$。由于 $f \notin \mathcal{I}_t(g_1, \ldots, g_n)$, 我们可以选取 $\beta \in \mathbb{N}^n$, 使得 $\sum_{i=1}^n \beta_i = t-1$, $p(\beta) \neq 0$。于是可得

$$\begin{aligned}\deg(f) \geqslant \deg(\varphi(\beta)) &= (\sum_{i=1}^n \deg(g_i)\beta_i) + (\sum_{i=1}^n \sum_{u \in S_i - E_i} \psi_i(u)) \\ &\geqslant (t-1)e + (\sum_{i=1}^n \sum_{u \in S_i - E_i} \psi_i(u)),\end{aligned}$$

由此也完成了对 (4) 的证明。 □

注 5.4. (1) 若 $\prod_{i=1}^n E_i = \emptyset$, 则定理 5.4 的 (1)、(2) 恢复定理 5.2 的 (1)、(2)。(2) 若 R 是一个域, $S_i = \{0, 1_R\}$、$E_i = \{0\}$、$\psi_i(0) = \psi_i(1_R) = 1$ 对所有 $i \in [1, n]$ 都成立，则推论 5.2 的 (3)、(4) 恢复定理 1。5]。

6 穿孔零点定理的应用

6.1 超平面覆盖

在本小节中，对于任意 $k \in [1,n]$，我们令 S_k 为 R 的一个有限子集，(S_k, ψ_k) 为一个多重集，并固定 $E_k \subseteq S_k$。

粗略地说，给定一族 r-超平面（见定义 2.5），我们考虑这样的情形：$(\prod_{i=1}^n S_i) - (\prod_{i=1}^n E_i)$ 中的每个点都被许多 r-超平面覆盖，但 $\prod_{i=1}^n S_i$ 中至少有一个点不被任何 r-超平面覆盖。本节最一般的结果如下。

定理 6.1. 假设对于任意 $k \in [1,n]$，S_k 在 R 中满足条件 (D)。令 L 为一个有限集，$(e_\lambda \mid \lambda \in L) \in \mathbb{N}^L$，并固定 $(H_\lambda \mid \lambda \in L)$，使得对于任意 $\lambda \in L$，H_λ 是 R^n 的一个 e_λ- 超平面。此外，令 $(\rho_\lambda \mid \lambda \in L) \in \Omega^L$，使得对于任意 $\lambda \in L$，都有次数 $(\rho_\lambda) = e_\lambda$，且

$$H_\lambda = \{u \in R^n \mid \rho_\lambda(u_1, \ldots, u_n) = 0\}.$$

固定 $t \in \mathbb{Z}^+$。此外，假设以下两个条件成立：(i) 对任意 $a \in (\prod_{i=1}^n S_i) - (\prod_{i=1}^n E_i)$，都有

$$|\{\lambda \in L \mid a \in H_\lambda\}| \geqslant \max\{\textstyle\sum_{i=1}^n \beta_i \mid \beta \in \mathbb{N}^n, \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{\beta_i}{\psi_i(a_i)} \right\rfloor \leqslant t-1\} + 1;$$

(ii) 存在 $w \in \prod_{i=1}^n S_i$，使得 $\prod_{\lambda \in L} \rho_\lambda(w_1, \ldots, w_n) \neq 0$。

那么，对于任意 $m \in [1,n]$，都有

$$\textstyle\sum_{\lambda \in L} e_\lambda \geqslant \deg(\prod_{\lambda \in L} \rho_\lambda) \geqslant (t-1)(\sum_{u \in S_m - E_m} \psi_m(u)) + (\sum_{k=1}^n \sum_{u \in S_k - E_k} \psi_k(u)).$$

证明。考虑 $a \in (\prod_{i=1}^n S_i) - (\prod_{i=1}^n E_i)$ 和 $\gamma \in \mathbb{N}^n$，其中 $\sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{\gamma_i}{\psi_i(a_i)} \right\rfloor \leqslant t-1$。我们断言

$$(\textstyle\prod_{\lambda \in L} \rho_\lambda)(x_1 + a_1, \ldots, x_n + a_n)_{[\gamma]} = 0.$$

事实上，假设结论不成立。那么，我们可以选取 $(\theta(\lambda) \mid \lambda \in L)$，使得 $\gamma = \sum_{\lambda \in L} \theta(\lambda)$，其中对于所有 $\lambda \in L$，$\theta(\lambda) \in$ 的支撑为 $\rho_\lambda(x_1 + a_1, \ldots, x_n + a_n)$。对于任意满足 $\rho_\lambda(a_1, \ldots, a_n) = 0$ 的 $\lambda \in L$，注意到 $\rho_\lambda(x_1 + a_1, \ldots, x_n + a_n)_{[0]} = 0$，可得 $\theta(\lambda) \neq \mathbf{0}$。于是

$$\textstyle\sum_{i=1}^n \gamma_i \geqslant |\{\lambda \in L \mid \rho_\lambda(a_1, \ldots, a_n) = 0)\}| = |\{\lambda \in L \mid a \in H_\lambda\}|,$$

这与 (i) 矛盾，得证。现在应用定理 5.3 即完成证明。

□

现在我们考虑 R 为整环的特殊情形。

推论 6.1. 假设 R 是一个整环。设 L 为一个有限集，且 $(H_\lambda \mid \lambda \in L)$ 是 R^n 的子集组成的元组，其中 $\prod_{i=1}^n S_i \nsubseteq \bigcup_{\lambda\in L} H_\lambda$。固定 $t \in \mathbb{Z}^+$。此外，假设对于任意 $a \in (\prod_{i=1}^n S_i) - (\prod_{i=1}^n E_i)$,

$$|\{\lambda \in L \mid a \in H_\lambda\}| \geqslant \max\{\textstyle\sum_{i=1}^n \beta_i \mid \beta \in \mathbb{N}^n, \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{\beta_i}{\psi_i(a_i)} \right\rfloor \leqslant t-1\} + 1.$$

那么，以下两个结论成立：
(1) 设 $(e_\lambda \mid \lambda \in L) \in \mathbb{N}^L$，并假设对于任意 $\lambda \in L$，H_λ 是 R^n 的一个 e_λ-超平面。那么，对于任意 $m \in [1,n]$，有

$$\textstyle\sum_{\lambda\in L} e_\lambda \geqslant (t-1)(\sum_{u\in S_m - E_m} \psi_m(u)) + (\sum_{k=1}^n \sum_{u\in S_k - E_k} \psi_k(u));$$

(2) 假设对于任意 $\lambda \in L$，H_λ 是 R^n 的一个超平面。那么，对于任意 $m \in [1,n]$，有

$$|L| \geqslant (t-1)(\textstyle\sum_{u\in S_m - E_m} \psi_m(u)) + (\sum_{k=1}^n \sum_{u\in S_k - E_k} \psi_k(u)).$$

证明。(1) 根据定义 2.5，我们可以选取 $(\rho_\lambda \mid \lambda \in L) \in \Omega^L$，使得对于任意 $\lambda \in L$，有 $H_\lambda = \{u \in R^n \mid \rho_\lambda(u_1, \ldots, u_n) = 0\}$，且次数 $(\rho_\lambda) = e_\lambda$。现在选取满足 $w \notin \bigcup_{\lambda\in L} H_\lambda$ 的 $w \in \prod_{i=1}^n S_i$。对于任意 $\lambda \in L$，由 $w \notin H_\lambda$ 可得 $\rho_\lambda(w_1, \ldots, w_n) \neq 0$。注意到 R 是一个整环，我们进一步推出 $\prod_{\lambda\in L} \rho_\lambda(w_1, \ldots, w_n) \neq 0$。所需结论立即由定理 6.1 得出。
(2) 这立即由 (1) 得出。 □

若 R 是一个域，则有如下推论 6.1 的结果。

推论 6.2. 设 R 是一个域。令 $\langle\,,\,\rangle : R^n \times R^n \longrightarrow R$ 为一个非退化双线性映射。令 Y 为一个有限集，$(\eta_\lambda \mid \lambda \in Y) \in (R^n)^Y$，$(c_\lambda \mid \lambda \in Y) \in R^Y$。固定 $t \in \mathbb{Z}^+$。另外，假设以下两个条件成立：

(i) 对任意 $a \in (\prod_{i=1}^n S_i) - (\prod_{i=1}^n E_i)$，均有

$$|\{\lambda \in Y \mid \langle \eta_\lambda, a\rangle = c_\lambda\}| \geqslant \max\{\textstyle\sum_{i=1}^n \beta_i \mid \beta \in \mathbb{N}^n, \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{\beta_i}{\psi_i(a_i)} \right\rfloor \leqslant t-1\} + 1;$$

(ii) 存在 $w \in \prod_{i=1}^n S_i$，使得对于所有 $\lambda \in Y$，$\langle \eta_\lambda, w\rangle \neq c_\lambda$。那么，对于任意 $m \in [1,n]$，有

$$|\{\lambda \in Y \mid \eta_\lambda \neq 0\}| \geqslant (t-1)(\textstyle\sum_{u\in S_m - E_m} \psi_m(u)) + (\sum_{k=1}^n \sum_{u\in S_k - E_k} \psi_k(u)).$$

证明。令 $L = \{\lambda \in Y \mid \eta_\lambda \neq 0\}$。此外，对于任意 $\lambda \in L$，令 $H_\lambda = \{u \in R^n \mid \langle \eta_\lambda, u\rangle = c_\lambda\}$。那么，$(H_\lambda \mid \lambda \in L)$ 是 R^n 的一个超平面元组。由 (ii) 可知 $\prod_{i=1}^n S_i \nsubseteq \bigcup_{\lambda\in L} H_\lambda$；此外，对于任意 $a \in R^n$，有 $\{\lambda \in Y \mid \langle \eta_\lambda, a\rangle = c_\lambda\} = \{\lambda \in L \mid a \in H_\lambda\}$。因此，应用推论 6.1 的 (2) 即得所需结论。 □

注 6.1. (1) 在定理 6.1 中，我们采用了较弱的假设：所有 S_i 都满足条件 (D)，而不要求 R 是整环。这一做法受到定理 *10]* 的启发，该定理研究超平面对布尔立方体 $\{0, 1_R\}^n$ 的覆盖。我们注意到，定理 6.1 将 *[23,* 定理*10]* 包含为一个特例。

(2) 假设 R 是一个域。若对所有 $i \in [1, n]$ 和 $u \in S_i$，$\psi_i(u) = 1$，则推论 6.1 可还原出 *[9,* 定理 5.*3]*；若 $t = 1$ 且 $\prod_{i=1}^n E_i = \{0\}$，则推论 6.1 可还原出 *[23,* 定理 *9]* 和 *[24,* 定理 *12]*。

(3) 假设 R 是一个满足 $|R| = q$ 的有限域。固定 $t \in \mathbb{Z}^+$。设 Y 为一个有限集，并设 $(\eta_\lambda \mid \lambda \in Y) \in (R^n)^Y$，使得对于任意超平面 $H \subseteq R^n$，均有 $|\{\lambda \in Y \mid \eta_\lambda \in H\}| \geqslant t$。那么，推论 6.2 意味着

$$|Y| \geqslant (n + t - 1)(q - 1) + 1, \tag{6.1}$$

从而得到 Bruen 的结果 *[15,* 定理 2。*1]*（另见 *[9,* 定理 5。*2]*）。(6.1) 最初由 Jamison 针对 $t = 1$ 证明，随后 Brouwer 和 Schrijver 又分别用不同的方法独立证明了它（见 *[22, 13]*）。另请参阅 *[7, 8, 26]*，了解对 (6.1) 的改进及相关工作。

6.2 Alon-F¨uredi 广义定理

在 [4, 定理 5], 中，Alon 和 F¨uredi 给出了多项式 $f \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ 在 $\prod_{i=1}^n S_i$中的非零点个数的一般下界，其中 $\mathbb{F}$ 是一个域，S_i是 $\mathbb{F}$的有限子集。在 [9, 推论 4。3],中，Ball 和 Serra 使用他们的穿孔零点定理重新证明了 Alon-F¨uredi 定理。在 [18, 定理 2。2], 中，Clark 使用 Ball 和 Serra 的穿孔零点定理的一种变体，将 Alon-F¨uredi 定理推广到交换环上的多项式。[12, 定理 1。2], 中，Bishnoi、Clark、Potukuchi和Schmitt 进一步推广了 [18, 定理 2。2]。他们的结果被称为广义 Alon-F¨uredi 定理，并在组合学和编码理论中有许多应用（更多详情见 [12, 第 4 节至6] ）。

本节中，我们利用定理 5.2 和定理 5.3，给出广义 Alon-F¨uredi 定理的另一种证明。我们的证明与 [9, 推论 4.3] 和 [18, 定理 2.2] 的证明思路非常相似。

定理 6.2。（广义 Alon-F ¨uredi 定理， *[12,*定理 1.*2]*）设S_1，…， S_n 是 R 的非空有限子集，且对任意 $k \in [1,n]$， S_k 满足 R 中的条件 (D)。设 $\beta \in \mathbb{N}^n$ 满足 $\beta \leqslant (|S_1|-1, \ldots, |S_n|-1)$，并设 $f \in \Omega - \{0\}$，使得对所有 $\alpha \in \mathrm{supp}(f)$，都有 $\alpha \leqslant \beta$。那么，存在$\mu \in \mathbb{N}^n$ 满足以下三个条件：

(1)（$|S_1|-\beta_1$，…， $|S_n|-\beta_n$） $\leqslant \mu \leqslant$（$|S_1|$，…， $|S_n|$）；

（2） $\sum_{k=1}^n \mu_k =$（$\sum_{k=1}^n |S_k|$） $-$次数（f）；（3）

$|\{v \in \prod_{i=1}^n S_i \mid f$（$v_1$，…， v_n） $\neq 0\}| \geqslant \prod_{k=1}^n \mu_k$。

证明。令 $Q = \{v \in \prod_{i=1}^n S_i \mid f(v_1, \ldots, v_n) \neq 0\}$。此外，对于任意 $k \in [1,n]$，令 $E_k = \{v_k \mid v \in Q\}$，并令 ψ_k 表示定义在 S_k 上的常值 1 映射。于是，对于所有 $w \in (\prod_{i=1}^n S_i) - (\prod_{i=1}^n E_i)$，都有 $f(w_1, \ldots, w_n) = 0$。由于对于所有 $\alpha \in \mathrm{supp}(f)$， $f \neq 0$ 且 $\alpha \leqslant (|S_1|-1, \ldots, |S_n|-1)$，将定理 5.2 的 (2) 和定理 5.3 应用于 $(S_1, \psi_1) \ldots, (S_n, \psi_n)$ 及 $t = 1$，可得 $Q \neq \emptyset$，并且

$$\prod_{k=1}^n \prod_{u \in S_k - E_k} (x_k - u) \mid f. \tag{6.2}$$

若 $\beta = \mathbf{0}$，则 $(|S_1|, \ldots, |S_n|)$ 满足条件 (1)–(3)，如所需。因此，以下我们假设 $\beta \neq \mathbf{0}$。于是我们可以选取 $m \in [1,n]$，使得 $\beta_m \geqslant 1$。由于 $Q \neq \emptyset$，我们可以选取 $b \in E_m$，使得

$$|Q| \geqslant |E_m| \cdot |\{v \in Q \mid v_m = b\}|. \tag{6.3}$$

令 $g, f(x_1, \ldots, x_{m-1}, b, x_{m+1}, \ldots, x_n)$。不难验证

$$|\{v \in \prod_{i=1}^n S_i \mid g(v_1, \ldots, v_n) \neq 0\}| = |S_m| \cdot |\{v \in Q \mid v_m = b\}|. \tag{6.4}$$

由 $b \in E_m$ 和 (6.4)，我们得到 $g \neq 0$。此外，(6.3) 和 (6.4) 推出

$$|Q| \geqslant \tfrac{|E_m|}{|S_m|} \cdot |\{v \in \prod_{i=1}^n S_i \mid g(v_1, \ldots, v_n) \neq 0\}|. \tag{6.5}$$

令 $\theta = (\beta_1, \ldots, \beta_{m-1}, 0, \beta_{m+1}, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$。那么，不难验证对于所有 $\gamma \in \mathrm{supp}(g)$，都有 $\gamma \leqslant \theta$。由于 $\theta \leqslant \beta$, $\theta \neq \beta$，根据归纳法，我们可以选取满足以下三个条件的 $\varepsilon \in \mathbb{N}^n$：

（i） $(|S_1|-\theta_1, \ldots, |S_n|-\theta_n) \leqslant \varepsilon \leqslant$（$|S_1|, \ldots, |S_n|$）；

（ii） $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k =$（$\sum_{k=1}^n |S_k|$） $-$次数（g）；（iii）

$|\{v \in \prod_{i=1}^n S_i \mid g$（$v_1, \ldots, v_n$） $\neq 0\}| \geqslant \prod_{k=1}^n \varepsilon_k$。

注意，由 $\theta_m = 0$ 和（i），可得 $\varepsilon_m = |S_m|$。现在令

$$\lambda = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1}, |E_m|, \varepsilon_{m+1}, \ldots, \varepsilon_n) \in \mathbb{N}^n. \tag{6.6}$$

我们将证明 λ 满足以下三个条件：

(*iv*) $(|S_1|-\beta_1,\dots,|S_n|-\beta_n)\leqslant\lambda\leqslant(|S_1|,\dots,|S_n|)$; (*v*) $\sum_{k=1}^n\lambda_k\geqslant(\sum_{k=1}^n|S_k|)-$ 次数 (*f*); (*vi*) $|Q|\geqslant\prod_{k=1}^n\lambda_k$. 事实上，对于任意 $k\in[1,n]-\{m\}$，由 $\beta_k=\theta_k$、$\lambda_k=\varepsilon_k$ 和 (*i*)，可得$|S_k|-\beta_k\leqslant\lambda_k\leqslant|S_k|$。由 (6.2)、引理 2.1 的 (2)，我们可以选取$\alpha\in$支撑 (*f*)，使得 $|S_m|-|E_m|\leqslant\alpha_m$。由于 $\alpha\leqslant\beta$，我们有 $|S_m|-|E_m|\leqslant\beta_m$；结合 $\lambda_m=|E_m|$，可推出 $|S_m|-\beta_m\leqslant\lambda_m\leqslant|S_m|$，从而进一步证明了 (*iv*)。接下来，由 (6.2)，我们可以选取 $h\in\Omega$，使得$f=(\prod_{u\in S_m-E_m}(x_m-u))\cdot h$。于是可得

$$g=(\prod_{u\in S_m-E_m}(b-u))\cdot h(x_1,\dots,x_{m-1},b,x_{m+1},\dots,x_n),$$

结合引理 2.1 的 (4)，进一步可得

$$\deg(g)\leqslant\deg(h)=\deg(f)-|S_m|+|E_m|. \tag{6.7}$$

结合 (6.6)、$\varepsilon_m=|S_m|$ 以及一些直接计算，由 (*ii*) 和 (6.7) 可得 (*v*)，由 (*iii*) 和 (6.5) 可得 (*vi*)，正如所需。注意到对于所有 $\alpha\in$supp (*f*)，都有 $\alpha\leqslant\beta$，因此 deg(*f*) $\leqslant\sum_{k=1}^n\beta_k$；结合 (*v*)，可得

$$\textstyle\sum_{k=1}^n(|S_k|-\beta_k)\leqslant(\sum_{k=1}^n|S_k|)-\deg(f)\leqslant\sum_{k=1}^n\lambda_k.$$

由于 $(|S_1|-\beta_1,\dots,|S_n|-\beta_n)\leqslant\lambda$(见 (*iv*))，我们可以选取 $\mu\in\mathbb{N}^n$，使得 $(|S_1|-\beta_1,\dots,|S_n|-\beta_n)\leqslant\mu\leqslant\lambda$ 且 $\sum_{k=1}^n\mu_k=(\sum_{k=1}^n|S_k|)-\deg(f)$。由 (*iv*) 和 (*vi*)，可知 μ 满足条件 (1)–(3)，正如所需。 □

注 6.2. 已在 *[12,* 定理 1.*2]* 中证明，下界在所有情况下都是紧的。更多详情请参阅 *[12,* 第 3 节。*3]*

附录

引理 2.1 的证明

(1) 设 $\gamma\in$max(supp (*f*))。则有

$$(f\cdot g)_{[\gamma+\theta]}=\sum_{(\alpha\in\text{supp }(f),\beta\in\text{supp }(g),\alpha+\beta=\gamma+\theta)}f_{[\alpha]}g_{[\beta]}.$$

对于 $\alpha\in$supp (*f*)、$\beta\in$supp (*g*)，其中 $\alpha+\beta=\gamma+\theta$，由于 θ是 supp(*g*) 的最大元，我们有 $\beta\leqslant\theta$，因此 $\gamma\leqslant\alpha$；再结合

$\gamma \in \max(\mathrm{supp}\,(f))$、 $\alpha \in \mathrm{supp}\,(f)$，可推出 $\alpha = \gamma$，进而得到 $\beta = \theta$。因此我们有 $(f \cdot g)_{[\gamma+\theta]} = f_{[\gamma]} g_{[\theta]} = f_{[\gamma]}$，证毕。

(2) 和 (3) 首先注意，对于满足 $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}^n$ 且 B 为有限集并且 $\max(B) \subseteq A$ 的情形，有 $\max(A) = \max(B)$，$\Delta(A) = \Delta(B)$。此外，对于任意 $C, D \subseteq \mathbb{N}^n$，有 $\Delta(C+D) = \Delta(C)+\Delta(D)$。现在我们有 $\mathrm{supp}\,(f \cdot g) \subseteq \mathrm{supp}\,(f) + \mathrm{supp}\,(g) \subseteq \mathbb{N}^n$，且 $\mathrm{supp}\,(f) + \mathrm{supp}\,(g)$ 为有限集。由于 θ 是 $\mathrm{supp}\,(g)$ 的最大元，我们有

$$\max(\mathrm{supp}\,(f) + \mathrm{supp}\,(g)) = \max(\mathrm{supp}\,(f)) + \{\theta\}.$$

由 (1) 可得 $\max(\mathrm{supp}\,(f) + \mathrm{supp}\,(g)) \subseteq \mathrm{supp}\,(f \cdot g)$，从而进一步得到所需结果。

(4) 和 (5) 注意到，(4) 可由 (2) 及一些直接验证得出，因此我们只证明 (5)。由 (3) 可得

$$\begin{aligned} A + \mathrm{supp}\,(h \cdot g) &\subseteq A + \mathrm{supp}\,(h) + \mathrm{supp}\,(g) \subseteq \Delta(\mathrm{supp}\,(f)) + \mathrm{supp}\,(g) \\ &\subseteq \Delta(\mathrm{supp}\,(f)) + \Delta(\mathrm{supp}\,(g)) = \Delta(\mathrm{supp}\,(f \cdot g)), \end{aligned}$$

如所求。

B 引理 2.4 的证明

本节及附录 D 将使用以下记号。

记号 B.1. 对任意 α、$\beta \in \mathbb{N}^n$，令 $\alpha \wedge \beta \in \mathbb{N}^n$ 定义为 $(\alpha \wedge \beta)_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$，对所有 $i \in [1, n]$ 均成立。

引理 B.1. 设 g 是首一多项式，并令 θ 为 $\mathrm{supp}\,(g)$ 的最大元。另取 $\rho \in \Omega$，使得对 $\mathrm{supp}\,(\rho)$ 中所有 $\gamma \in$，均有 $\gamma \wedge \theta = \mathbf{0}$。再取 $\psi \in \Omega$，使得 $\rho \mid \psi$、$g \mid \psi$。则有 $(\rho \cdot g) \mid \psi$。

证明. 由于 $\rho \mid \psi$，我们可以选取 $f \in \Omega$，使得 $\psi = f \cdot \rho$。由引理 3.1，我们可以选取 $\tau \in \Omega$，使得 $g \mid (f - \tau)$，且对 $\mathrm{supp}\,(\tau)$ 中所有 $\alpha \in$，均有 $\theta \nleq \alpha$。由此可得 $(\rho \cdot g) \mid (\psi - \rho \cdot \tau)$。我们断言，对 $\mathrm{supp}\,(\rho \cdot \tau)$ 中所有 $\beta \in$，均有 $\theta \nleq \beta$。事实上，设 $\beta \in \mathrm{supp}\,(\rho \cdot \tau)$。于是，我们可以选取 $\alpha \in \mathrm{supp}\,(\tau)$、$\gamma \in \mathrm{supp}\,(\rho)$，使得 $\beta = \alpha + \gamma$。由 $\alpha \in \mathrm{supp}\,(\tau)$，可得 $\theta \nleq \alpha$；由 $\gamma \in \mathrm{supp}\,(\rho)$，可得 $\gamma \wedge \theta = \mathbf{0}$。由此可得 $\theta \nleq \alpha + \gamma = \beta$，如所求。现在，由 $g \mid \psi$、$g \mid (\psi - \rho \cdot \tau)$，可得 $g \mid (\rho \cdot \tau)$。由引理 2.1 的 (2) 可知，$\max(\mathrm{supp}\,(\rho \cdot \tau)) = \emptyset$，因此 $\rho \cdot \tau = 0$。所以，由 $(\rho \cdot g) \mid (\psi - \rho \cdot \tau)$，可推出 $(\rho \cdot g) \mid \psi$，如所求。 □

现在我们可以证明引理 2.4 了。

引理 2.4 的证明。由引理 B.1 和归纳法可立即得出。

□

C 引理 2.5 和引理 2.6 的证明

引理 2.5 的证明。若 $\alpha \notin (\mathbb{Z}^+)^n$，则可验证 $\mathbf{0} \in B$，从而 $|\mathbb{N}^n - \nabla(B)| = 0 = (\prod_{i=1}^n \alpha_i) \cdot \binom{n+t-1}{n}$，如所需。因此，以下假设 $\alpha \in (\mathbb{Z}^+)^n$。那么，对于任意的 $\beta \in \mathbb{N}^n$，我们有

$$\begin{aligned}\beta \in \mathbb{N}^n - \nabla(B) &\iff (\forall\ \theta \in \mathbb{N}^n\ s.t.\ \textstyle\sum_{i=1}^n \theta_i = t : (\alpha_1\theta_1, \ldots, \alpha_n\theta_n) \nleqslant \beta) \\ &\iff (\forall\ \theta \in \mathbb{N}^n\ s.t.\ \textstyle\sum_{i=1}^n \theta_i = t : \theta \nleqslant \left(\left\lfloor \frac{\beta_1}{\alpha_1} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{\beta_n}{\alpha_n} \right\rfloor\right)) \\ &\iff \textstyle\sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right\rfloor \leqslant t-1,\end{aligned}$$

由此得到 (2.13)。现在，利用以下两个等式：

$$|\{\gamma \in \mathbb{N}^n \mid \textstyle\sum_{i=1}^n \gamma_i \leqslant t-1\}| = \binom{n+t-1}{n},$$

$$\forall\ \gamma \in \mathbb{N}^n : |\{\beta \in \mathbb{N}^n \mid \left(\left\lfloor \frac{\beta_1}{\alpha_1} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{\beta_n}{\alpha_n} \right\rfloor\right) = \gamma\}| = \textstyle\prod_{i=1}^n \alpha_i,$$

由 (2.13) 可立即推出 (2.12)，证毕。 □

引理 2.6 的证明。令 $\mathbf{1} \in \mathbb{N}^n$ 表示全 1 向量。通过一些简单的验证，我们得到

$$\nabla(C) - \nabla(B) = \{(\alpha_1\theta_1, \ldots, \alpha_n\theta_n) + \tau \mid \theta \in \mathbb{N}^n, \textstyle\sum_{i=1}^n \theta_i = t-1, \tau \in \mathbb{N}^n, \alpha - \gamma \leqslant \tau \leqslant \alpha - \mathbf{1}\}.$$

此外，对于任意的 θ、τ、β、$\eta \in \mathbb{N}^n$，若满足 $\tau \leqslant \alpha - \mathbf{1}$、$\eta \leqslant \alpha - \mathbf{1}$，则有

$$(\alpha_1\theta_1, \ldots, \alpha_n\theta_n) + \tau = (\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n) + \eta \Longrightarrow \theta = \beta, \tau = \eta.$$

根据上述讨论，我们有

$$\begin{aligned}|\nabla(C) - \nabla(B)| &= |\{\tau \in \mathbb{N}^n \mid \alpha - \gamma \leqslant \tau \leqslant \alpha - \mathbf{1}\}| \cdot |\{\theta \in \mathbb{N}^n \mid \textstyle\sum_{i=1}^n \theta_i = t-1\}| \\ &= (\textstyle\prod_{i=1}^n \gamma_i) \cdot \binom{n+t-2}{n-1}.\end{aligned}$$

由引理 2.5 可知，

$$\begin{aligned}|\mathbb{N}^n - \nabla(B \cup C)| &= |\mathbb{N}^n - \nabla(B)| - |\nabla(C) - \nabla(B)| \\ &= (\textstyle\prod_{i=1}^n \alpha_i)\binom{n+t-1}{n} - (\prod_{i=1}^n \gamma_i)\binom{n+t-2}{n-1},\end{aligned}$$

正如所需。 □

D 证明引理 2.7 的 (2)

我们先对 S-多项式这一概念作一些说明（参见 [1,定义 1.7.1], [16, 第 2 节。9], [21, 定义 21。29]）。设 f、g是首一多项式，且 α、β分别是 supp（f）和 supp（g）的最大元。那么，(f,g) 的 S-多项式，记作 $\mathbf{S}(f,g)$，定义为

$$\mathbf{S}(f,g) \triangleq \left(\prod_{i=1}^{n} {x_i}^{\beta_i-(\alpha\wedge\beta)_i}\right)\cdot f - \left(\prod_{i=1}^{n} {x_i}^{\alpha_i-(\alpha\wedge\beta)_i}\right)\cdot g. \tag{D.1}$$

一般而言，S-多项式是相对于固定的单项式序，并针对任意多项式定义的。对于首一多项式，(D.1) 确实是 S-多项式一般定义的特例。

著名的 Buchberger 定理通过 S-多项式刻画 Gröbner 基（见 [1, 定理 1.7.4], [16, 第 2 节 .10], [21, 定理 21.31]）。Buchberger 定理是针对域上的多项式建立的。由于任何首一多项式的首项系数为 1_R（见注 2.1），可以验证，Buchberger 定理的证明在我们的情形下仍然成立，从而得到以下引理。

引理 D.1. 设 Λ 为一个有限集，且 $(g(\lambda) \mid \lambda\in\Lambda) \in \Omega^{\Lambda}$ 为一个首一多项式族。假设对于任意 $(\xi,\mu) \in \Lambda\times\Lambda$，存在 $(p(\lambda) \mid \lambda\in\Lambda) \in \Omega^{\Lambda}$，使得 $\mathbf{S}(g(\xi)\ g(\mu)) = \sum_{\lambda\in\Lambda} p(\lambda)\cdot g(\lambda)$，并且

$$\forall\ \lambda\in\Lambda : \operatorname{supp}(p(\lambda)) + \operatorname{supp}(g(\lambda)) \subseteq \Delta(\operatorname{supp}(\mathbf{S}(g(\xi), g(\mu)))).$$

那么，$(g(\lambda) \mid \lambda\in\Lambda)$ 是 $\langle\{g(\lambda) \mid \lambda\in\Lambda\}\rangle$ 的 Gr ¨obner 基。

引理 D.2. 设 $(g_1,\dots,g_n) \in \Omega^n$ 是一个首一多项式族，使得 $g_k \in R[x_k]$。固定 $\alpha\in\mathbb{N}^n$, $\beta\in\mathbb{N}^n$。设 $\varphi = \mathbf{S}(\prod_{k=1}^{n} {g_k}^{\alpha_k}, \prod_{k=1}^{n} {g_k}^{\beta_k})$，并设

$$h_1 = \left(\prod_{k=1}^{n} {x_k}^{c_k(\beta_k-(\alpha\wedge\beta)_k)}\right) - \left(\prod_{k=1}^{n} {g_k}^{\beta_k-(\alpha\wedge\beta)_k}\right), \tag{D.2}$$

$$h_2 = \left(\prod_{k=1}^{n} {g_k}^{\alpha_k-(\alpha\wedge\beta)_k}\right) - \left(\prod_{k=1}^{n} {x_k}^{c_k(\alpha_k-(\alpha\wedge\beta)_k)}\right), \tag{D.3}$$

其中 c_k，对于所有 $k\in[1,n]$，$\deg(g_k)$。于是，以下三个等式成立：

$$\varphi = h_1\cdot\left(\prod_{k=1}^{n} {g_k}^{\alpha_k}\right) + h_2\cdot\left(\prod_{k=1}^{n} {g_k}^{\beta_k}\right), \tag{D.4}$$

$$\operatorname{supp}(h_1) + \operatorname{supp}\left(\prod_{k=1}^{n} {g_k}^{\alpha_k}\right) \subseteq \Delta(\operatorname{supp}(\varphi)), \tag{D.5}$$

$$\operatorname{supp}(h_2) + \operatorname{supp}\left(\prod_{k=1}^{n} {g_k}^{\beta_k}\right) \subseteq \Delta(\operatorname{supp}(\varphi)). \tag{D.6}$$

证明。令 $\lambda = \beta - (\alpha \wedge \beta)$、 $\mu = \alpha - (\alpha \wedge \beta)$、 $\theta = (c_1\lambda_1, \ldots, c_n\lambda_n)$、 $\rho = (c_1\mu_1, \ldots, c_n\mu_n)$、 $f = \mathrm{S}(\prod_{k=1}^{n} {g_k}^{\mu_k}, \prod_{k=1}^{n} {g_k}^{\lambda_k})$。由于 $\lambda \wedge \mu = \mathbf{0}$，我们有 $\theta \wedge \rho = \mathbf{0}$。因此，由 (D.1) 可得

$$f = (\prod_{k=1}^{n} {x_k}^{\theta_k})(\prod_{k=1}^{n} {g_k}^{\mu_k}) - (\prod_{k=1}^{n} {x_k}^{\rho_k})(\prod_{k=1}^{n} {g_k}^{\lambda_k}). \tag{D.7}$$

现在我们证明以下三个等式成立：

$$\varphi = f \cdot (\prod_{k=1}^{n} {g_k}^{(\alpha\wedge\beta)_k}) = h_1 \cdot (\prod_{k=1}^{n} {g_k}^{\alpha_k}) + h_2 \cdot (\prod_{k=1}^{n} {g_k}^{\beta_k}), \tag{D.8}$$

$$\operatorname{supp}(h_1) + \operatorname{supp}(\prod_{k=1}^{n} {g_k}^{\mu_k}) \subseteq \Delta(\operatorname{supp}(f)), \tag{D.9}$$

$$\operatorname{supp}(h_2) + \operatorname{supp}(\prod_{k=1}^{n} {g_k}^{\lambda_k}) \subseteq \Delta(\operatorname{supp}(f)). \tag{D.10}$$

首先，通过一些直接计算即可得到 (D.8)。其次，我们证明 (D.9)。设 $\varepsilon \in$ 是h_1的支撑。由 (D.2) 可得 $\varepsilon \leqslant \theta$, $\varepsilon \neq \theta$；结合 $\theta \wedge \rho = \mathbf{0}$，可推出 $\theta \nleqslant \varepsilon + \rho$，因此 $\varepsilon + \rho \notin$是$((\prod_{k=1}^{n} {x_k}^{\theta_k})(\prod_{k=1}^{n} {g_k}^{\mu_k}))$的支撑。又注意到 $\varepsilon \in$是$\prod_{k=1}^{n} {g_k}^{\lambda_k}$的支撑，故 $\varepsilon + \rho \in$是$((\prod_{k=1}^{n} {x_k}^{\rho_k})(\prod_{k=1}^{n} {g_k}^{\lambda_k}))$的支撑。由 (D.7) 可得 $\varepsilon + \rho \in$是f的支撑。由于 ε 的任意性，我们有 h_1 的支撑 $+ \{\rho\} \subseteq$是f的支撑；再结合 ρ是$\prod_{k=1}^{n} {g_k}^{\mu_k}$的支撑中的最大元这一事实，即可进一步证明 (D.9)。第三，借助 (D.3) 和 (D.7)，可以用类似的方法证明 (D.10)。现在由 (D.8) 可得 (D.4)。此外，结合 (D.8) 和引理 2.1 的 (5)，分别由 (D.9) 和 (D.10) 可得 (D.5) 和 (D.6)。 □

最后，我们得出结论：引理 2.7 的 (2) 立即由引理 D.1 和 D.2 得出。

参考文献

[1] W. W. Adams, P. Loustaunau, 《Gr ¨obner 基导论》，数学研究生教材，第 3 卷（1994），美国数学学会。[2] G. N. Alfarano, M. Borello, A. Neri, A. Ravagnani, 《极小码的三种组合学视角》，SIAM 离散数学杂志，第 36 卷，第 1 期（2022年），461–489。[3] N, Alon, 《组合零点定理》，《组合学、概率与计算》，第 8 卷，第 1–2 期（1999），7–29。[4] N. Alon, Z. F ¨uredi, 《用仿射超平面覆盖立方体》，《欧洲组合学杂志》，第 14 卷，第 2 期（1993），79–83。

[5] N. Alon, M. Tarsi, 《图的着色与定向》, 《Combinatorica》, 第 12 卷, 第 2 期（1992）, 125–134。[6] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, 《交换代数导论》, Addison-Wesley, 1969。[7] S. Ball, 《Desargues 平面中的核与阻塞集》, 《组合理论杂志 A 辑》, 第 85 卷, 第 2 期（1999）, 232–236。[8] S. Ball, 《Desargues 仿射空间中的交集》, 《欧洲组合学杂志》, 第 21 卷, 第 4 期（2000）, 441–446。[9] S. Ball, O. Serra, 《带孔组合零点定理》, 《Combinatorica》, 第 29 卷, 第 5 期（2009）, 511–522。[10] S. Ball, O. Serra, 《带孔组合零点定理勘误》, 《Combinatorica》, 第 31 卷, 第 3 期（2011）, 377–378。[11] G. Batzaya, G. Bayarmagnai, 《多重集的广义组合零点定理》, 《欧洲组合学杂志》, 第 83 卷（2020）, 5 页。[12] A. Bishnoi, P. L. Clark, A. Potukuchi, J. R. Schmitt, 《有限网格上多项式的零点》, 《组合学、概率与计算》, 第 27 卷, 第 3 期（2018）, 310–333。[13] A. E. Brouwer, A. Schrijver, 《仿射空间的阻塞数》, 《组合理论杂志 A 辑》, 第 24 卷, 第 2 期（1978）, 251–253。[14] W. C. Brown, 《交换环上的矩阵》, Marcel Dekker, 纽约, 1992。[15] A. A. Bruen, 《有限域上的多项式重数与交集》, 《组合理论杂志 A 辑》, 第 60 卷, 第 1 期（1992）, 19–33。[16] B. Buchberger, 《Gr¨obner 基导论》, 《Gr ¨obner 基及其应用》, 剑桥大学出版社（1998）, 3–31。[17] P. L. Clark, 《重新审视组合零点定理》, 《Electronic Journal of Combinatorics》, 第 21 卷, 第 4 期（2014）, 17 页。[18] P. L. Clark, 《具有宽松输出的 Warning 第二定理》, 《代数组合学杂志》, 第 48 卷, 第 2 期（2018）, 325–349。

[19] A. Clifton, H. Huang, 《关于超立方体的几乎 k-覆盖》，Combinatorica，第40卷第4期（2020年），511-526页。[20] S. Eliahou, M. Kervaire, 《有限域上向量空间中的和集》，数论杂志，第71卷第1期（1998年），12-39页。[21] J. von zur Gathen, J. Gerhard, 《现代计算机代数》（第三版），剑桥大学出版社，纽约，2013年。[22] R. E. Jamison, 《用子空间的陪集覆盖有限域》，组合理论杂志 A 辑，第22卷第3期（1977年），253-266页。[23] G. K´os, T. M´esz´aros, L. R´onyai, 《Alon 零点定理的一些推广》，德布勒森数学出版物，第79卷第3-4期（2011年），507-519页。[24] G. K´os, L. R´onyai, 《多重集的 Alon 零点定理》，Combinatorica，第32卷第5期（2012年），589-605页。[25] H. Kulosman, Minghu Wang, 《Alon 组合零点定理的一种推广》，JP 代数、数论与应用杂志，第20卷第1期（2011年），61-75页。[26] I. Landjev, A. Rousseva, 《Desargues 仿射空间中交集集的 Bruen 界的紧性》，Design, Codes and Cryptography，第72卷第3期（2014年），551-558页。[27] M. Laso´n, 《组合零点定理的一种推广》，The Electronic Journal of Combinatorics，第17卷第1期（2010年），6页。[28]T. M´esz´aros, L. R´onyai, 《关于 Alon 组合零点定理的一则注记》，《罗兰大学科学学报：计算机科学辑》，第42卷（2014年），249-260页。[29] T. R. Mezei, 《组合零点定理》（匈牙利语），理学学士论文，罗兰大学，2011年。[30]M. Micha lek, 《组合零点定理的一个简短证明》，美国数学月刊，第117卷第9期（2010年），821-823页。[31] B. Nica, 《结构化网格上的多项式》，组合学、概率与计算，2022年10月4日，1-15页。

[32] L. R´onyai, T. M´esz´aros, 《Gr¨obner基的一些组合应用》，代数信息学第四届国际会议 CAI 2011，奥地利林茨，2011年6月21日至24日会议论文集，施普林格，65-83页。[33] L. Sauermann, Y. Wigderson, 《在超立方体的大部分点上以高阶消失的多项式》，arXiv: 2010.00077v2 [math.CO] 28 2022年3月。[34] U. Schauz, 《代数可解问题：描述多项式与显式解等价》，The Electronic Journal of Combinatorics，第15卷第1期（2008年），35页。[35] Z-W. Sun, 《域上多项式的值集》，《有限域及其应用》，第14卷第2期（2008年），470-481页。[36] Xuding Zhu, R. Balakrishnan, 《组合零点定理及其在图着色中的应用》，CRC出版社，博卡拉顿和牛津郡，2022年。