arXiv:2304.07752v1 [math.GR] 16 Apr 2023

关于线性伪有限群的西洛理论

˘PINAR UGURLU KOWALSKI

Abstract. 我们证明，在存在有限 Sylow p-子群的假设下，线性伪有限群的 Sylow p-子群共轭。我们还给出一个线性伪有限群的例子，其中 Sylow 2-子群彼此不共轭。

Introduction

由于伪有限群是一阶有限群理论的模型，因此尝试将有限群的一些相关结果推广到伪有限情形是很自然的。所有有限群共有的一个优良性质是 Sylow p-子群的共轭性。在这项工作中，我们通过给出一个线性伪有限群的例子，证明这一性质并非对伪有限群（甚至是线性伪有限群）都成立：其中 Sylow 2-子群彼此不共轭（见例 3.8）。然而，在附加假设下，可以得到一些共轭性结果。在 [4], 中，作者证明了伪有限 $\mathfrak{M}_c$-群（满足中心化子上的降链条件的群）的 Sylow 2-子群共轭，前提是存在有限 Sylow 2-子群。由于线性群是 $\mathfrak{M}_c$-群，因此只要存在有限 Sylow 2-子群，便可得到线性伪有限群中 Sylow 2-子群共轭这一所需结果。本文将这一有条件的共轭性结果推广到线性伪有限群的 Sylow p-子群（对任意素数 p）。

本文的主要结果陈述如下。

定理 3.2. 若线性伪有限群 G 有一个有限的 Sylow p-子群，则 G 的所有 Sylow p-子群都互为共轭，因此是有限的。

本文的结构安排如下。

在第一节中，我们回顾群论中的一些基本概念，简要介绍伪有限群，并统一术语和记号。

2020 年美国数学学会数学分类：03C20，20G99。关键词和短语：伪有限群、Sylow p-子群、线性群。1

在第二节中，我们总结一些特定群的 Sylow p 子群的已知（非）共轭结果。

在上一节中，我们陈述并证明了主定理（定理 3.2），并给出了一些例子，展示具有共轭和非共轭 Sylow 2-子群的线性伪有限群。我们还对 Wagner 在 [11] 中提出的一个问题作了评论。

1. Preliminaries

本节中，我们回顾群论中的一些基本概念的定义，并简要回顾伪有限群的概念，不作详细展开。这样做是为了统一术语和记号。请注意，我们假定读者熟悉模型论中的基本概念。有关超积构造（这是理解伪有限群的关键）的详细信息，请参阅 [1] 和 [2] ；有关伪有限群的更多信息，请参阅 [13] 和 [9] 。

线性群是指同构于 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的某个子群的群，其中 $\mathrm{GL}_n(F)$ 表示域 F 上的一般线性群。容易看出，有限群是线性的。若素数为 p，且群 G 的每个元素都是 p-元，即每个元素的阶均为某个自然数 n 的 p 次幂 p^n ，则称 G 为 p-群。更一般地，若 G 的每个元素都具有有限阶，则称 G 是周期的。一个无限 p-群的例子是普吕弗 p-群：

$$C_{p^\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{p^n},$$

其中， C_k 表示阶为 k 的循环群，其中 $k > 0$。群 G 的 Sylow p-子群是 G 的一个 p-子群，且在包含关系下极大。若群 G的每个有限生成子群 G 都是有限群，则称 G为局部有限群。请注意，局部有限群必然是周期的，但反过来一般并不成立。然而，对于线性群，这两个概念由以下结果可知是等价的：

事实 1.1（Schur [8]）。周期线性群是局部有限的。

伪有限群定义为有限群的共同理论的无限模型。可以证明，适当选择一个超滤子后，任意伪有限群都与某个有限群的非主超积初等等价（见 [13]）。超积构造的重要性体现在 Lo´s 定理 [5] 中，该定理指出，一阶公式在超积中成立，当且仅当它在

超滤子所包含的某个指标集对应的结构中成立。特别地，超积的一阶性质由超积中各结构的一阶性质以及超滤子的选择共同决定。本文中，若 G 是一个伪有限群，则记作 $G \equiv \prod_{i\in I} G_i/\mathcal{U}$，这表示 G 与有限群 G_i、$i \in I$关于指标集 I上的非主超滤子 $\mathcal{U}$所构成的超积初等等价。此外，若某个一阶性质在超滤子所包含的某个指标集对应的有限群中成立，则称该性质在超积中的几乎所有有限群中成立。

由于本文讨论的是线性伪有限群，值得一提的是，与有限群的情形不同，存在非线性伪有限群。例如，请读者参阅[4]。

2. On (non-)conjugacy results for Sylow p-subgroups

本节总结一些关于若干重要群类的西洛 p-子群（非）共轭性的已知结果。我们并不声称囊括了文献中的所有相关结果。更全面的综述请参阅 [14] 。

2.1. 共轭结果。首先，我们列出一些关于线性群中西洛 p-子群共轭性的事实。

事实 2.1。Sylow p-子群在以下情形中彼此共轭：

(a) 周期线性群（Platonov [7]），(b) 代数闭域上的线性代数群（Platonov[7]），(c) $\mathrm{GL}_n(K)$，但当 $p = 2$、$\mathrm{char}(K) \neq 2$ 且满足以下条件时除外（Vol'vachev [10]）：(V_1) -1 可写成 K 中两个平方数之和，(V_2) K 没有乘法阶为 4 的元素，(V_3) $K(i)$ 中的每个 2-元素 $a + bi$，其中 $i^2 = -1$，都满足 $(a + bi)(a - bi) = 1$。

Wagner 证明了适用于比线性群更广泛的群类（即亚稳定群）的共轭结果，但需要一些额外假设。其结果陈述如下，详情请参阅著作 [11]。

事实 2.2（定理 1.5.4，Wagner [11]）。设 G 是一个次稳定群。若满足以下任一条件，则 G 的所有 Sylow p-子群都共轭：

(a) $p = 2$ 和 G 是 ABD。(b) G 可解于有限群且是 ABD。(c) $p = 2$ 和 G 是周期的。(d) G 中的任意两个 p-元素都生成一个有限子群。

请注意，如果一个群 G 的每个相对可定义的阿贝尔截面都可分解为一个可除群与一个有界指数群之和，那么该群具有 ABD 性质（参见 [11]中的定义 1.5.1）。

对于有限 Morley 秩群，目前只知道以下共轭结果。

事实 2.3（Altınel、Borovik 和 Cherlin [6]）。有限 Morley 秩群的 Sylow 2-子群彼此共轭。

2.2. 非共轭结果。下面列出一些群族的例子，其中 Sylow p-子群彼此不共轭。

- 存在具有非共轭 Sylow p-子群的线性代数群。Platonov 在 [7]中给出的一个例子是 $SL_2(\mathbb{Q})$。请注意，作者在论文 [4] 中对这个例子进行了详细分析。
- 存在 Sylow p-子群彼此不共轭的局部有限群。Dixon 给出的一个例子是 Sym(3) 的直积（见 [3] 中的例 2.2.6）。该群是一个 Sylow 2-子群彼此不共轭的后元阿贝尔局部有限群。
- 存在 Sylow 2-子群彼此不共轭的线性伪有限群（见例 3.8）。

3. Some results and examples in the case of pseudofinitegroups

本节中，我们证明本文的主要结果，即，如果一个线性伪有限群有有限 Sylow p-子群，那么所有 Sylow p-子群都共轭。我们还将构造一些例子，展示 Sylow 2-子群共轭和不共轭的线性伪有限群。

3.1. 有限 Sylow p-子群的存在性。设 $(G_i)_{i\in I}$ 是有限群的一个族。Sylow p-子群的第一个朴素候选是$\prod_{i\in I} G_i/\mathcal{U}$ 有限群的 Sylow p-子群的超积G_i。然而，通常并非如此。这样的超积通常甚至不是周期的。例如，若取循环群 $(C_{p^i})_{i\in\mathbb{N}}$ 的一个非主超积，那么显然， p的 Sylow 子群的超积 C_{p^i}甚至不是一个 p-群；它含有

无限阶元素。实际上，不难看出，$\prod_{i\in\mathbb{N}} C_{p^i}/\mathcal{U}$ 的 Sylow p-子群同构于 Prüfer p-群 C_{p^∞}，因为显然 C_{p^∞} 嵌入超积中，而且对每个 i，超积中都有唯一的 p^i 阶元素。因此，一般而言，伪有限群中 Sylow p-子群的结构和行为可能相当复杂。然而，正如以下结果所示，有限 Sylow p-子群的存在保证了所有 Sylow p-子群共轭。

命题 3.1. 设 $(G_i)_{i\in I}$ 是一族有限群，且 $G \equiv \prod_{i\in I} G_i/\mathcal{U}$ 是一个伪有限群。若 G 有一个阶为 p^k 的西洛 p-子群，其中 p 是素数，k 是正整数，则以下结论成立。

(a) 对几乎所有 $i \in I$，G_i 的西洛 p-子群的阶为 p^k。(b) 对任意 $l > k$，G 都不存在阶为 p^l 的有限子群。(c) G 的所有有限西洛 p-子群的阶均为 p^k，且它们彼此共轭。

证明。(a) 很容易看出，以下陈述是一阶的：

“存在一个阶为 p^k 的子群，它不包含于任何阶为 p^{k+1}. 的子群中”

由于根据假设，这个一阶句子在 G 中成立，因此根据洛文海姆–斯科伦定理，几乎所有群 G_i 都有一个阶为 p^k 的子群，它不包含在任何阶为 p^{k+1} 的子群中。因此，根据西罗第一定理，几乎所有 G_i的西罗 p-子群的阶都是 p^k。

(b) 反设 G 有一个阶为 p^l 的子群，其中$l > k$是某个值。那么，再根据洛文海姆–斯科伦定理，超积中的几乎所有 G_i 都有阶为 p^l的子群。这不可能，因为根据 (a) 和 $p^l > p^k$，它们的西罗 p-子群的阶为 p^k。

(c) 设 P是 G的一个有限西罗 p-子群。显然，根据 (b)，$|P| \leqslant p^k$。若 $|P| = p^l < p^k$，则这意味着 P不包含在阶为 p^k 的子群中（因为它是极大的有限 p-群）；由此可知，超积中几乎所有 G_i 都有阶为 p^l 的子群，而这些子群不包含在阶为 p^k的群中。这与 G_i的西罗 p-子群的阶为 p^k这一事实矛盾。关于共轭，注意以下陈述也是一阶的：

“阶为 p^k 的任意两个子群都共轭。”

由于几乎所有 G_i 的 Sylow p-子群的阶都是 p^k，上述一阶语句在超积中成立，因此根据 Lo´s 定理，它在 G中也成立。□

定理 3.2。设 G 是一个线性伪有限群。若 G 有一个有限的 Sylow p-子群，则 G 的所有 Sylow p-子群都共轭。

证明。假设 G 有一个阶为 p^k的 Sylow p-子群。根据命题 3.1，只需证明 G 没有无限的 Sylow$p$-子群。反设 G 有一个无限的 Sylow$p$-子群，记作 P。取P中互不相同的元素 x_1、x_2、.....、x_{p^k}、x_{p^k+1}，并定义 $S := \langle x_1$、x_2、.....、x_{p^k}、$x_{p^k+1}\rangle$。由于 G是一个线性群，P 是局部有限的（见事实 1.1），因此 G中存在一个有限的 p-子群 S，其阶严格大于 p^k。这与命题 3.1(b)矛盾。因此，G 的所有 Sylow p-子群都是有限的，而由命题 3.1(c)可知，共轭性成立。□

注 3.3。根据命题 3.1 和定理 3.2 的证明，我们得到以下结果。

(a) 线性伪有限群中不可能同时存在有限的和无限的 Sylow p-子群。我们不知道这对于一般的伪有限群是否成立。(b) 设 $G \equiv \prod_{i\in I} G_i/\mathcal{U}$ 是一个线性伪有限群。当且仅当几乎所有 G_i 的 Sylow p-子群的阶存在有限的全局上界时，G 才有一个有限的 Sylow p-子群。

注 3.4。定理 3.2 中的线性假设可以弱化为 $p = 2$ 的 $\mathfrak{M}_c$-性质，因为已知 $\mathfrak{M}_c$-群的 Sylow 2-子群是局部有限的（见 [12] 中的推论 2.4）。因此，定理 3.2 为作者在 [4] 中的结果提供了另一种证明。

3.2 线性伪有限群中的（非）共轭示例。本节给出两个线性伪有限群的示例，即定义在不同伪有限域 F 上的 $\mathrm{GL}_2(F)$：第一个示例中，Sylow 2-子群彼此共轭；而第二个示例中，Sylow 2-子群不共轭。

例 3.5。设 $I = \{p \text{ prime } \mid p \equiv 3 \pmod 8\}$ and $F = \prod_{p\in I} \mathbb{F}_p/\mathcal{U}$，其中 $\mathcal{U}$ 是 I 上的非主超滤子。由于 I 中有无穷多个素数（根据狄利克雷等差数列定理），F 是特征零的伪有限域。考虑一般线性群 $\mathrm{GL}_2(F)$。于是有 $\mathrm{GL}_2(F) \equiv \prod_{p\in I} \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)/\mathcal{U}$，因此 $\mathrm{GL}_2(F)$ 是一个线性伪有限群。

不难看出，群 $\mathrm{GL}_2(F)$（其中 F 如上所述）具有有限的 Sylow 2-子群。为此，首先注意到 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ 的阶为 $(p^2-1)(p^2-p)$，因此，整除$p-1$ 和 $p+1$ 的 2 的幂决定了 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ 的 Sylow p-子群的阶。

由于 $p \equiv 3$ (模 8)，显然 $4 \nmid p-1$，而 $2 \mid p-1$。出于同样的原因，$8 \nmid p+1$，而 $4 \mid p+1$。因此，超积中的所有群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ 的 Sylow 2-子群的阶都是 16。由于这一有限性性质会传递到超积中（见注 3.3(b)），群 $\mathrm{GL}_2(F)$ 的 Sylow 2-子群是有限的且彼此共轭。

注 3.6. 参照 Volvachev 条件，我们也可以观察例 3.5 中伪有限群的西洛 2-子群的共轭性。注意，(V_1) 是有限域的一个众所周知的性质。由于它是一阶性质，任何伪有限域都满足 (V_1)。此外，根据构造和 Lo´s 定理，F 也满足 (V_2)。然而，$_3$ 不满足 (V F)。为此，考虑 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$，其中 $p \in I$。显然，我们有

$$|\mathbb{F}_p(i)^*| = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$$

其中 i 是一个乘法阶为 4 的元素。由于 $p \equiv 3$ (模 8)，正如上文所述，8 整除循环群$\mathbb{F}_p(i)^*$的阶。因此，存在 a、$b \in \mathbb{F}_p$，使得 $a+bi$ 的乘法阶为 8。现在来看看为什么应有 $(a+bi)(a-bi) = -1$。首先，$(a+bi)(a-bi) = \pm 1$，因为这个乘积是 $\mathbb{F}_p^*$ 中的一个 2-元素，而 $\mathbb{F}_p^*$ 没有 4 阶元素。现在考虑 $\mathbb{F}_p(i)$ 的以下两个自同构：

$$a+bi \mapsto a-bi, \qquad a+bi \mapsto (a+bi)^p.$$

显然，这两个自同构是伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_p(i)/\mathbb{F}_p)$ 的非平凡元素。由于这个伽罗瓦群的阶为 2，它只有一个非平凡元素，因此我们有 $a-bi = (a+bi)^p$，这就得出：

$$(a+bi)(a-bi) = (a+bi)(a+bi)^p = (a+bi)^{8k+4} = (a+bi)^4 = -1$$

因为 $p = 8k+3$，其中 k 是某个整数，且 $a+bi$ 的乘法阶为 8。因此，我们找到了 a、$b \in \mathbb{F}_p$，使得 $a+bi$ 的乘法阶为 8，且 $(a+bi)(a-bi) = -1$。由于这对超积中的任意域 $\mathbb{F}_p$ 都成立，根据洛斯定理，F 中也存在这样的元素。因此可以得出结论：我们这个例子中的群的 Sylow 2-子群彼此共轭。

注 3.7. 任何满足条件 (V_2) 的正特征域都不能满足条件 (V_3)（见 [10]）。特别是，没有有限域能同时满足 (V_2) 和 (V_3)。Volvachev 关于正特征域的论证也适用于特征零的伪有限域，前提是 $F(i)^*$ 中 2-元的阶有上界。例 3.5 中的伪有限域 F 就是这种情况。

在下一个例子中，我们将看到，有些线性伪有限群的 Sylow 2-子群并不共轭。当 $F(i)^*$ 中 2-元的阶没有上界时，就会出现这种情况（也就是说，当 C_{2^∞} 嵌入 $F(i)^*$ 时）。

例 3.8。我们将构造一个满足 Volvachev 条件 (V_2) 和 (V_3) 的伪有限域 F（注意，(V_1) 对伪有限域自动成立）。令

$$I = \{p \text{ prime} \mid p \equiv 3 \pmod 4\}.$$

对于每个正整数 N，根据狄利克雷算术级数定理，我们可以找到一个素数 $p \in I$，使得 2^N 整除 $p+1$（事实上，对每个 N，这样的素数都有无穷多个）。我们将这个 I 的无限子集记为 J，并定义 $F = \prod_{p\in J} \mathbb{F}_p/\mathcal{U}$，其中 $\mathcal{U}$ 是 J 上的非主超滤子。显然，F 满足 (V_2)，因为超积中的每个域都具有这一一阶性质。此外，根据我们的构造，对每个正整数 N，对于几乎所有 $p \in J$，2^N 都整除 $|\mathbb{F}_p(i)^*| = (p-1)(p+1)$。因此，$C_{2^\infty}$ 嵌入 $F(i)^*$。现在假设 (V_3) 不成立，即对于 $F(i)^*$ 中的某个 2 阶元素 $a+bi$，有 $(a+bi)(a-bi) = -1$。由于 C_{2^∞} 嵌入 $F(i)^*$，存在一个 2 阶元素 $c+di$，使得 $(c+di)^2 = a+bi$。但是，这样一来我们就有 $(c+di)^2(c-di)^2 = -1$，也就是说，$(c^2+d^2)^2 = -1$。然而，这与我们的假设矛盾，因为 F 没有 4 阶元素。因此，根据 Volvachev 定理，线性群 $\mathrm{GL}_2(F)$（其中 F 如上构造）这个伪有限线性群具有非共轭的 Sylow 2-子群。

注 3.9. 不难观察到，例 3.8 中构造的群 $\mathrm{GL}_2(F)$ 具有无限的 Sylow 2-子群。正如注 3.3(b) 中所提到的，只需观察超积中的群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ 的 Sylow 2- 子群的阶没有上界即可。这很容易得出，因为根据构造，$p+1$ 的 2-因子幂在超积中不断增长。

我们想以一条关于 Wagner 提出的公开问题的评论来结束本文（[11] 中的注 1.5.1）。

在 [11], Wagner 指出：“极大 p-子群的共轭性在初等等价下如何表现，这个问题仍然悬而未决。”我们的结果与这一问题的联系可以解释如下。为方便起见，令 $\mathfrak{S}$ 表示这样一类群：对于每个素数 p，其 Sylow p-子群彼此共轭。

(a) 我们的例 3.8 表明，类 $\mathfrak{S}$ 对超积并不封闭。(b) 众所周知，一个类是初等的（即：可以由一阶理论公理化）当且仅当它对

超积和初等等价封闭。因此，根据 (a)，类 $\mathfrak{S}$ 不是初等的。

(c) 上述 (a) 和 (b) 中提到的观察表明，Wagner 提出的问题的答案是否定的。然而，我们还没有找到一对初等等价的群，使得其中一个属于 $\mathfrak{S}$，而另一个不属于。

致谢。我谨向 Zo´e Chatzidakis 致谢，感谢她就例 3.8 提供的宝贵意见。这项工作是在我 2022–2023 学年休假期间完成的，我当时在弗罗茨瓦夫大学访学。

References

[1] J. L. Bell 和 A. B. Slomson。《模型与超积：导论》。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，1971年。[2] C. C. Chang 和 H. J. Keisler。《模型论》，《逻辑与数学基础研究》第73卷。北荷兰，荷兰，1990年。第3版。[3] M.R. Dixon。《局部有限群中的西洛理论、形成类与菲廷类》。《科学与文化：数学》。世界科学出版社，1994年。[4] P. U˘gurlu Kowalski。《线性伪有限群中有限西洛子群的共轭问题札记》。《土耳其数学杂志》，41卷：1458–1466，2017年。[5] J. Lo´s。《关于可定义代数类的一些备注、定理与问题》。载于《形式系统的数学解释》，《逻辑与数学基础研究》第16卷，第98–113页。北荷兰，阿姆斯特丹，1955年。[6] T. Altınel、A. V. Borovik 和 G. Cherlin。《有限 Morley 秩单群》，《数学调查与专著》第145卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008年。[7] V. P. Platonov。《代数线性群与周期群理论》。载于《代数论文七篇》，《美国数学学会译丛》第2辑第69卷，第61–110页。美国数学学会，1968年。[8] I. Schur。《关于周期线性代换群》。柏林普鲁士皇家科学院会议录。1911年。[9] P. U˘gurlu。《伪有限群作为有限 Morley 秩单群中的不动点》。《纯粹与应用代数杂志》，217卷：892–900，2013年。[10] R. T. Vol'vachev。《一般线性群的西洛 p 子群》。载于《逻辑与群论论文九篇》，《美国数学学会译丛》第2辑第64卷，第216–243页。美国数学学会，1967年。[11] F. O. Wagner。《稳定群》。《伦敦数学学会讲义系列》。剑桥大学出版社，1997年。[12] F. O. Wagner。《满足中心化子极小条件的群的幂零性》。《代数杂志》，217卷：448–460，1999年。[13] J. S. Wilson。《一阶群论》。载于《无限群 1994》，第301–314页。Walter de Gruyter 出版社，柏林，1996年。

[14] A. E. Zalesskij。《线性群》，《数学科学百科全书》第37卷。施普林格·柏林海德堡，1993年。

Istanbul Bilgi University, Yahya Köprüsü Sok. No: 1 Dolapdere, 34440, Istanbul, Turkey电子邮箱：pinar.ugurlu@bilgi.edu.tr