arXiv:2304.07753v1 [math.GR] 16 Apr 2023

关于无限线性群有限西洛子群共轭问题的一则说明

Pınar UGURLUKOWALSKI *
比尔基大学数学系，土耳其伊斯坦布尔

摘要

我们证明，在至少存在一个有限 Sylow 2-子群的假设下，伪有限 $\mathfrak{M}_c$（特别是线性）群中的 Sylow 2-子群具有共轭性。我们通过分析 Platonov 构造的一个线性群例子，说明伪有限性假设的重要性；该例子中的有限 Sylow 2-子群彼此不共轭。

1 引言

Sylow 理论起源并发展于有限群的研究中。关于将其推广到无限群，也已有一些研究（全面综述见 [19]）。尽管在某些特定的无限群类中，Sylow 子群的共轭性结论成立，但即使在线性群中，也存在病态情形（Sylow p-子群彼此不共轭）。然而，在某些群类中，有限 Sylow p-子群的存在可以导出共轭性结论（例如有限 Morley 秩群，见 $p = 2$ [1, 引理 6.6]；以及局部有限群，见 [6, 命题 2.2.3]）。本文表明，对于伪有限 $\mathfrak{M}_c$-群，这一存在性假设可以保证 Sylow 2-子群具有所需的共轭性结论。我们还介绍了 Platonov 构造的一个有趣例子 [10, 例 4.11]，该例表明，在线性群中，存在有限 Sylow 2-子群并不能保证共轭性。

本文的主要结果陈述如下。

定理 3.3。若伪有限 $\mathfrak{M}_c$-群G 的某个西洛 2-子群是有限的，则 G 的所有 Sylow 2-子群都彼此共轭，因此都是有限的。

*通讯作者：pinar.ugurlu@bilgi.edu.tr 2010年数学主题分类：03C20、20G99。

本文的结构如下。
第二节中，我们回顾群论中的一些基本概念，并确定本文使用的术语和记号。

第三节中，我们着重介绍伪有限群的一些性质，并给出一些（非）例子。随后，我们陈述并证明主要结果（定理 3.3）。

最后一节中，我们详细分析 Platonov 构造的一个例子 [10,Example 4.11]。

2 预备知识

本节回顾群论中的一些基本概念的定义，并列出后文将用到的一些著名结果。

若群 G 中的每个元素都具有有限阶，则称该群为周期群；若对某个素数 p，其中每个元素 G 的阶都为某个自然数 n 的 p^n，则称其为 p- 群。一个无限 p-群的例子是 Pr¨ufer p-群，记作 C_{p^∞}。群 G的 Sylow p-子群是指 G 的极大p-子群。注意，Sylow p-子群的存在性由佐恩引理保证。

若群 G的任意真子群都真包含于其正规化子中，则称其满足正规化子条件。众所周知，有限幂零群满足正规化子条件。

令 $\mathcal{P}$ 表示一种群论性质，例如可解性、幂零性、交换性、有限性等。若群 G 的每个有限子集都生成一个具有性质 $\mathcal{P}$的子群，则称该群为局部 $\mathcal{P}$ 。若群 G 有一个具有性质 $\mathcal{P}$ 的正规子群 N，且商群 G/N 是有限群，则称群 G 为 $\mathcal{P}$-亚有限群。

线性群是某个域 F 上的一般线性群 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的子群 $G \leqslant \mathrm{GL}_n(F)$。如果群 G 中每条真中心化子链都在有限步后稳定，则称该群满足中心化子上的下降链条件（或中心化子上的极小条件），这类群称为 $\mathfrak{M}_c$-群。此外，如果这类链的长度存在一个全局有限上界，则称 G 具有有限中心化子维数。众所周知，任何线性群都具有有限中心化子维数（例如参见 [16] 中推论 2.10 后的注释），因此 $\mathfrak{M}_c$-群这一类包含线性群这一类。

下文将用到以下关于 $\mathfrak{M}_c$-群的结果，它们推广了线性群的相应经典结果。

事实 2.1（Wagner， [15]中的推论 2.4）。 $\mathfrak{M}_c$-群的 Sylow 2-子群是局部有限的。

事实 2.2（Bryant， [4]中的定理 A）。周期的、局部幂零的 $\mathfrak{M}_c$-群是幂零扩张有限群。

事实 2.3（Wagner， [15]中的事实 1.3）。幂零扩张有限且局部幂零的群具有非平凡中心，并满足正规化子条件。

备注 2.4。注意，根据事实 2.1， $\mathfrak{M}_c$-群的 Sylow 2-子群是局部有限的，因此也是局部幂零的，因为有限 2-群是幂零的。因此，根据事实 2.2，它们是幂零扩张有限群；根据事实 2.3，它们满足正规化子条件。

3 伪有限群的一个共轭性结果

本节将简要介绍伪有限群，不对相关概念（如超滤子、超积及其他基本模型论概念）作出精确定义，并着重介绍这些群的一些性质，这些性质将在本文主要结果的证明中用到。关于超积构造的详细信息，请参阅 [3] 和 [5] ；关于伪有限群的更全面介绍，请参阅 [13] ；关于这些群的更深入讨论，请参阅 [18] 。

伪有限群定义为有限群理论的无限模型。这些群是伪有限域在群论中的类比；伪有限域由 James Ax 引入、研究并从代数角度加以刻画（见 [2]）。遗憾的是，目前尚无针对伪有限群的此类代数刻画。

还可以将伪有限群描述为有限群的非主超积（在初等等价意义下；详见 [18] ）。这一描述与Lo´s 定理 [9]（该定理指出，一阶公式在超积中成立，当且仅当它在由属于超滤子的某个集合所索引的结构中成立）使我们能够从逻辑上将伪有限群刻画为满足以下一阶

性质的无限群：这些性质被几乎所有有限群（取决于超滤子的选择）所共有。

一个众所周知的伪有限群例子是有理数的加法群 $(\mathbb{Q}, +)$（例如参见 [13, 事实 2.2]）。然而，整数加法群 $(\mathbb{Z}, +)$ 并不是伪有限群，因为尽管所有有限群都满足以下一阶陈述

$$\text{the map } x \mapsto x + x \text{ is one-to-one if and only if it is onto,}$$

群 $(\mathbb{Z}, +)$ 不具有此性质。

在下面的注记中，我们提及有限群都具有的另一种一阶性质。这一性质将是我们证明中的一个重要组成部分。

注释 3.1. 在任意有限群 G 中，两个对合 g 和 h 要么共轭，要么存在一个与 g 和 h 都可交换的对合 y。下面的一阶语句表明，该命题可以用群的语言以一阶方式表达。

$$\forall g, h \quad \left[(g \neq 1 \neq h) \wedge (g^2 = 1 = h^2)\right] \longrightarrow$$
$$\left[\left(\exists x \ g^x = h\right) \vee \left(\exists y \ (y \neq 1) \wedge (y^2 = 1) \wedge (g^y = g) \wedge (h^y = h)\right)\right].$$

由于所有有限群都满足这一性质，伪有限群也满足这一性质。

尽管伪有限群在某种程度上与有限群相似，但它们之间也存在许多差异。例如，虽然所有有限群都同构于线性群，但伪有限群却并非如此。要说明这一点，只需构造一个中心化子维数不是有限的伪有限群，因为所有线性群的中心化子维数都是有限的。考虑交错群的一个非主超积 $G = \prod A_n/\mathcal{U}$，使得超积中的交错群的阶没有上界（若有上界，则该超积是有限的，也就是说，G不是伪有限群）。只需考察由互不相交的偶数个对换构成的元素的中心化子，就容易看出，随着秩的增加，交错群的中心化子维数也随之增加。由于具有有限中心化子维数是群的一阶性质（见 [7]），超积 $\prod A_n/\mathcal{U}$ 具有有限中心化子维数，当且仅当超积中的交错群的阶有上界。然而，根据我们的

假设，交错群的阶没有上界。这证明了 $\prod A_n/\mathcal{U}$ 的中心化子维数不是有限的，因此它不是线性群。

我们将需要以下关于伪有限群的结果。

事实 3.2（Houcine 和 Point，[8]中的引理 2.16）。设 G 是一个伪有限群。任何可定义子群，或任何以可定义正规子群为模的商群，都是（伪）有限的。

请注意，我们所说的“可定义”是指在群的语言中可定义，也可以带参数（详情例如参见该书[5]）。特别地，有限集都是可定义的。众所周知，若 X 是群 G 中的一个可定义集，则 X 在 G中的中心化子和正规化子都是可定义的。此外，若 G 是一个有限中心化子维数的群，则 G 中任意集合的中心化子都是可定义的。

在以下命题的证明中，我们将使用上述关于可定义性的众所周知的结果，以及一些来自有限莫雷秩群背景下类似结果证明的思路（见 [1]中的引理 6.6）。

定理 3.3. 如果伪有限 $\mathfrak{M}_c$-群G 的某个 Sylow 2-子群是有限的，那么 G 的所有 Sylow 2-子群都共轭，因而都是有限的。

证明. 设 P 是 G的一个有限 Sylow 2-子群。假设存在 G 的一个 Sylow 2-子群 Q，它与 P 不共轭，并令 $D = P \cap Q$。不失一般性，我们可以假设 Q 的选取满足：对于这个固定的有限 Sylow 2-子群 P，$|D|$ 是极大的。由于 D 是有限的，D 和 $N_G(D)$ 都是可定义的，因此根据事实 3.2，$N_G(D)/D$ 是一个（伪）有限群。此外，由于 P 和 Q 都是局部有限的（事实 2.1）、局部幂零且幂零扩张有限群，它们满足正规化子条件（见备注 2.4）。因此，我们有

$$N_G(D) \cap P = N_P(D) > D \quad \text{and} \quad N_G(D) \cap Q = N_Q(D) > D.$$

断言。存在非共轭的西洛 2-子群 P_1、Q_1，它们属于 G，满足 $|P_1 \cap Q_1| > |P \cap Q|$，且 P 与 P_1 共轭。

¯ ¯论断证明。取两个对合 $i = iD$、$j = jD$，它们分别来自 $N_G(D)/D$ 的非平凡 2-子群 $N_P(D)/D$ 和 $N_Q(D)/D$。我们知道，它们要么共轭，要么在 $N_G(D)/D$ 中与另一个对合交换，因为 $N_G(D)/D$ 是（伪）有限的（见注释 3.1）。

情形 1。假设 $\bar{i}$、$\bar{j}$ 在 $N_G(D)/D$ 中共轭。

在这种情况下，我们有 $\bar{i}^{\bar{x}} = \bar{j}$，其中某个 $\bar{x} \in N_G(D)/D$。这意味着$xix^{-1}D = jD$，也就是说，某个 $d \in D$ 满足 $j = xix^{-1}d$。由此得到 $j = xix^{-1}dxx^{-1} = xid_1x^{-1}$，其中某个 $d_1 \in D$。但是由于 $id_1 \in P$，我们得到 $j \in P^x \cap Q$。此外，由于 x 正规化了 D，我们得到 $D \leqslant P^x$，因此 $D \leqslant P^x \cap Q$。所以，我们有$D < \langle D, j\rangle \leqslant P^x \cap Q$。因此取 $P_1 = P^x$ 和 $Q_1 = Q$。

情形 2。假设存在一个对合 $k \in N_G(D)/D$，使得 i，并且 j 与 k可交换。

现在，考虑 2-群 $\langle D, i, k\rangle$ 和 $\langle D, j, k\rangle$，并令 R_i 和 R_j 分别表示包含它们的 G 的 Sylow 2-子群。显然，我们有以下包含关系：

$$D < \langle D, i\rangle \leqslant P \cap R_i, \quad D < \langle D, k\rangle \leqslant R_i \cap R_j, \quad D < \langle D, j\rangle \leqslant R_j \cap Q.$$

如果 P 与 R_i 不共轭，则取 $P_1 = P$ 和 $Q_1 = R_i$。如果 P 与 R_i 共轭，但与 R_j 不共轭，则取 $P_1 = R_i$ 和 $Q_1 = R_j$。如果 P 与 R_i 和 R_j 都共轭，则取 $P_1 = R_j$ 和 $Q_1 = Q$。

因此，结论成立。 □

设 P_1、Q_1 是 G 的两个不共轭 Sylow 2-子群，如结论中所述，且对某个 $g \in G$ 有 $P_1 = P^g$。现在，我们有

$$|D| = |P \cap Q| < |P_1 \cap Q_1| = |P^g \cap Q_1| = |(P^g \cap Q_1)^{g^{-1}}| = |P \cap Q_1^{g^{-1}}|.$$

显然，$Q_1^{g^{-1}}$ 是 G 的一个 Sylow 2-子群。由 $|D|$ 的极大性可知，P 与 $Q_1^{g^{-1}}$ 共轭，因此也与 Q_1 共轭。这与 $P_1 = P^g$ 和 Q_1 不共轭这一事实矛盾。 □

注 3.4. 即使在线性情形下，去掉（定理 3.3 中）关于有限 Sylow 2-子群存在性的假设后，情况也相当复杂（相关工作正在进行中）。

当我们将讨论范围限制在 $\mathrm{GL}_n(K)$ 时，Vol'vachev 给出了关于西洛 p-子群共轭性的一个判据（适用于任意域 K；见 [14]）。特别是，该判据表明，只有西洛 2-子群才可能不共轭，而且仅当域 K 的特征为零时才会出现这种情况。

4 Platonov 的例子

本节将详细分析 Platonov 构造的一个例子（ [10]中的例 4.11）。之所以在下文中作详细阐述，是因为 Platonov 原文 [10] 中省略了一些计算论证。

对于每个 $i \in \mathbb{N}$，考虑群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ 中的以下元素

$$g_i = \begin{pmatrix} 0 & -p_i \\ p_i^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是形如 $4k+3$, $k \in \mathbb{N}$ 的互不相同素数构成的序列 .

我们将看到，对于每个 i， $S_i := \langle g_i \rangle$ 都是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ 的一个 4 阶西洛 2-子群；然而，若 $i \neq j$，则 S_i 与 S_j 不共轭。

显然，对于每个 i ，都有 $|S_i| = 4$。

断言 1. 对于每个 i，群 S_i 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ 的一个西洛 2-子群。

由于未在 [10], 中给出该断言的证明，我们列出 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ 的一些性质（其中有些是众所周知的），这些性质可以导出断言 1 的证明。

(1) 如果 $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$具有有限阶，则 A 在 $\mathbb{C}$上可对角化。(2) 群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ 具有唯一的对合。(3) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ 中不存在 8 阶元素。(4) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ 中不存在 8 阶子群。(5) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ 的 Sylow 2-子群是有限的。

请注意，性质 (1) – (3) 可由线性代数中的基本结果推出。然而，由于 (4) 和 (5) 涉及更多内容，我们希望通过证明来支持它们。

证明（4）。假设 $H \leqslant \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$，使得 $|H| = 8$。我们知道，按同构分类，8 阶群只有五个： C_8、 $C_2 \times C_2 \times C_2$、$C_4 \times C_2$、 D_8（8 阶二面体群）、 Q_8（四元数）。由于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ 只有一个对合，因此 $H \cong Q_8$ 或 $H \cong C_8$。然而，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ 中没有 8 阶元素，所以后一种情况不可能，进而 $H \cong Q_8$。

现在我们将证明 Q_8 不能嵌入 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$（事实上，我们可以证明更强的结论：$Q_8$ 不能嵌入 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$）。根据 Q_8的结构，只需证明不存在 A、$B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 使得

$$A^2 = B^2 = -I_2 \quad \text{and} \quad AB = -BA. \tag{$*$}$$

我们将分两步考察 $(*)$。

步骤 1. 如果 $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 是一个 4 阶元素，那么存在 $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$，使得

$$A^g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

存在 $h \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$，使得 $A^h = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$，其中 $\lambda_1^4 = \lambda_2^4 = 1$。

不失一般性，我们可以假设 λ_1 是一个本原 4 次单位根，即 $\lambda_1 = \pm i$。

首先假设 $\lambda_1 = i$，并令 $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}i$ 为对应的特征向量（注意 $\vec{x}$、$\vec{y} \in \mathbb{R}^2$）。我们有

$$\begin{aligned} A\vec{z} &= i\vec{z} \\ A(\vec{x} + \vec{y}i) &= i(\vec{x} + \vec{y}i) \\ A\vec{x} + A\vec{y}i &= i\vec{x} - \vec{y}. \end{aligned}$$

因此，我们得到 $A\vec{x} = -\vec{y}$ 和 $A\vec{y} = \vec{x}$。注意，$\{\vec{x}, \vec{y}\}$ 构成 $\mathbb{R}^2$ 的一组基，因为它们在 $\mathbb{R}$ 上线性无关（若对某个 $\alpha \in \mathbb{R}$ 有 $\vec{y} = \alpha\vec{x}$，则可得 $A\vec{x} = -\alpha\vec{x}$ 和 $A\alpha\vec{x} = \vec{x}$，进而推出 $\alpha^2 = -1$；矛盾）。将 A 按这组基表示时，我们可以断定 A 与矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 共轭。类似地，若 $\lambda_1 = -i$，则 A 在 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 中与 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 共轭，而后者又与 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 共轭。

步骤 2. 不存在满足条件 $(*)$ 的 $A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$。

假设存在满足条件 $(*)$ 的 A、$B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$。利用步骤 1，不妨设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Let

$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$。由于 $AB = -BA$，我们得到 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$。但另一方面，由于 B 的阶为 4，其平方 $B^2 = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$是一个对合。

根据对合的唯一性，我们得到

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

这将导致矛盾，因为 a、$b \in \mathbb{R}$。 □

（5）的证明。假设 $SL_2(\mathbb{Q})$ 具有一个无限 Sylow 2-子群 P。由于周期线性群是局部有限的（见 [11]），P 是局部有限的。因此，P 具有一个有限子群，记为 X，其阶大于 8（只需考虑由 P 中 8 个不同元素生成的子群）。于是，根据西洛第一定理，X 具有一个阶为 8 的子群，而这显然是 $SL_2(\mathbb{Q})$ 的子群。这是不可能的，故（5）得证。 □

由性质（4）和（5），我们得出结论：上述定义的群 $S_i = \langle g_i \rangle$ 是 $SL_2(\mathbb{Q})$ 的 Sylow 2- 子群。

断言 2。对于 $i \neq j$，群 S_i、S_j 在 $SL_2(\mathbb{Q})$ 中不共轭。

假设对于某个 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in$，$S_i = S_j^g \in SL_2(\mathbb{Q})$。那么要么有 $gg_ig^{-1} = g_j$，要么有 $gg_ig^{-1} = g_j^3$。我们考虑第一种情形。

$$\begin{gathered} gg_ig^{-1} = g_j \\ gg_i = g_jg \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -p_i \\ p_i^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -p_j \\ p_j^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \end{gathered}$$

该方程给出以下等式：

$$bp_i^{-1} = -cp_j, \quad dp_i^{-1} = ap_j^{-1}, \quad -ap_i = -dp_j, \quad -cp_i = bp_j^{-1}.$$

将第一个和第三个方程两边分别乘以 $-cp_i$ 和 $-ap_j^{-1}$，得到

$$-bc = c^2p_jp_i, \quad ad = a^2p_ip_j^{-1}.$$

结合 $ad - bc = 1$这一事实，我们得到

$$a^2 p_i p_j^{-1} + c^2 p_j p_i = 1,$$

这进而给出

$$p_i(a^2 + c^2 p_j^2) = p_j. \qquad (\diamond)$$

由于[10]中省略了对不可能成立的 $(\diamond)$ 的论证，我们在此给出该论证。注意，方程 $(\diamond)$ 右边的 p_j-进赋值显然为 1。然而，根据以下广为人知的结论，左边的 p_j-进赋值为偶数。

事实 4.1. 设 p 是满足 $p \equiv 3$(模 4) 且 $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ 的素数。那么 $v_p(\alpha^2 + \beta^2)$ 为偶数，其中 v_p 表示 p-进赋值。

证明。首先，不失一般性，我们可以假设 α, β 是整数。为此，令 $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, $\beta = \frac{\beta_1}{\beta_2}$，其中 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}$。显然，我们有

$$v_p(\alpha^2 + \beta^2) = v_p\left(\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} + \frac{\beta_1^2}{\beta_2^2}\right) = v_p((\alpha_1\beta_2)^2 + (\beta_1\alpha_2)^2) - v_p((\alpha_2\beta_2)^2).$$

因此， $v_p(\alpha^2 + \beta^2)$ 为偶数，当且仅当 $v_p((\alpha_1\beta_2)^2 + (\beta_1\alpha_2)^2)$ 为偶数，因为平方的赋值总是偶数。

由于 $p \equiv 3$（模 4）， p 在高斯整数环 $\mathbb{Z}[i]$ 中不可约。（若 $p = (x + yi)(z + ti)$ 在 $\mathbb{Z}[i]$ 中成立，则将等式两边的范数平方可得 $p^2 = (x^2 + y^2)(z^2 + t^2)$。由于 p 不能表示为两个平方数之和（模 4 下只能是 0 或 1），因此 $x + yi$ 或 $z + ti$ 是单位元，也就是说， p 不可约。）此外，由于 $\mathbb{Z}[i]$ 是唯一分解整环， p 在 $\mathbb{Z}[i]$ 中是素数。现在，若 p 不整除 $\alpha^2 + \beta^2$，显然 p 进赋值为零。假设 p 整除 $\alpha^2 + \beta^2$ （在 $\mathbb{Z}$ 中）。那么 p 在 $\mathbb{Z}[i]$ 中整除 $(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i)$。于是，由于它在 $\mathbb{Z}[i]$ 中是素数， p 整除 $\alpha + \beta i$ 或 $\alpha - \beta i$。但这样一来， α 和 β 在 $\mathbb{Z}$ 中都被 p 整除，因此对于某些 k、 $l \in \mathbb{Z}$，有 $\alpha^2 = p^2k^2$ 和 $\beta^2 = p^2l^2$ 。所以现在， $\alpha^2 + \beta^2 = p^2(k^2 + l^2)$。归纳可得， $v_p(\alpha^2 + \beta^2)$ 是偶数。

□

第二种情况（当 $gg_ig^{-1} = g_j^3$ 时）的计算非常相似，因此我们得到

$$p_i(a^2 + c^2 p_j^2) = -p_j.$$

这显然不可能。由此我们得出， S_i 和 S_j 不共轭 e.

因此，我们观察到，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ 有无穷多个两两不共轭的 4 阶西洛 2-子群。

注释 4.2。注意，定理 3.3 与 Platonov 的例子表明，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ 不是伪有限群。我们也可以直接观察到这一点：首先将 $\mathbb{Q}^\times$（$\mathbb{Q}$ 的乘法群）定义为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ 中的一个中心化子，然后利用 $\mathbb{Q}^\times$ 不是伪有限群这一事实（注意，$\mathbb{Q}^\times$ 的可定义自同态将 x 映射到 x^3，它是一一映射但并非满射）。

更一般地，可以发现，对于任意无限域 K，群 $\mathrm{SL}_n(K)$ 是伪有限群，当且仅当 K 是伪有限域（对于 $n > 1$）。众所周知，若 K 是伪有限域，则 $\mathrm{SL}_n(K)$ 是伪有限群。为证明反向结论，我们考虑 Chevalley 群 $\mathrm{PSL}_n(K)$；它作为 $\mathrm{SL}_n(K)$ 的可定义商群，也同样是伪有限群。我们将参考 Wilson 的文章 [17]。在这篇文章中，Wilson 陈述了 S. Thomas 在其博士论文 [12] 中得到的以下结果：类 $\{X(K) \mid K \text{ 域}\}$ 是一个初等类，其中 X 表示一个非扭类型的 Chevalley 群；此外，每当 $X(K) \equiv X(F)$ 且 K 是伪有限的，就可推出 F 是伪有限的。将 Wilson 定理 [17,（第 471], 页上的定理）与 Thomas 的结果应用于 $\mathrm{PSL}_n(K)$，可得对于某个伪有限域 F，$\mathrm{PSL}_n(K) \cong PSL_n(F)$。参考 Thomas 结果中更进一步的部分，我们最终得出域 K 是伪有限的。

致谢。感谢 Alexandre Borovik 向我推荐这一课题，也感谢审稿人提出宝贵的意见和建议。

参考文献

[1] Altinel, T., Borovik, A. V., and Cherlin, G. 《有限 Morley 秩的单群》，《数学调查与专著》第145卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008年。[2] Ax, J. 有限域的初等理论。《数学年刊》88（1968年），239–271页。[3] Bell, J. L., and Slomson, A. B. 《模型与超积：导论》。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，1971年。

[4] Bryant, R. M. 中心化子满足极小条件的群。《代数学杂志》60（1979年），371–383页。[5] Chang, C. C., and Keisler, H. J. 《模型论》，《逻辑与数学基础研究》第73卷。North-Holland，荷兰，1990年。第3版。[6] Dixon, M. 局部有限群中的 Sylow 理论、formation 与 Fitting 类。《科学与文化：数学》。世界科学出版社，1994年。[7] Duncan, A. J., Kazachkov, I. V., and Remeslennikov, V. N.中心化子维数与群的全称类。西伯利亚电子数学报告 3（2006年），197–215页。[8] Houcine, A. O., and Point, F. 伪有限群的若干可能性。《群论杂志》16（2013年），461–495页。[9] Łoś, J. 关于可定义代数类的一些评论、定理与问题。载于《形式系统的数学解释》，《逻辑与数学基础研究》第16卷。North Holland，阿姆斯特丹，1955年，第98–113页。[10] Platonov, V. P. 代数线性群与周期群理论。载于《代数七篇论文》，《美国数学学会译丛》第2辑第69卷。美国数学学会，1968年，第61–110页。[11] Schur, I. 论周期线性变换群。柏林皇家普鲁士科学院会议录。1911年。[12] Thomas, S. R. 《单局部有限群的分类理论》。博士论文，伦敦大学，1983年。[13] Uğurlu, P. 伪有限群作为有限 Morley 秩单群中的不动点。《纯粹与应用代数杂志》217（2013年），892–900页。

[14] Vol'vachev, R. T. 一般线性群的 p-Sylow 子群。载于《逻辑与群论九篇论文》，美国数学学会译丛第 2 辑第 64 卷。美国数学学会，1967年，第 216–243 页。[15] Wagner, F. O. 具有中心化子上的极小条件的群的幂零性。《代数学杂志》217（1999年），448–460。
[16] Wehrfritz, B. A. F. 关于线性群的中心性与循环性的评述。《代数学杂志》18（1971年），229–236。[17] Wilson, J. S. 论单伪有限群。《伦敦数学会杂志》51（1993年），471–490。[18] Wilson, J. S. 一阶群论。载于《无限群 1994》。Walter de Gruyter 出版社，柏林，1996年，第 301–314 页。[19] Zalesskij, A. E. 线性群，《数学科学百科全书》第 37 卷。施普林格·柏林·海德堡，1993年。