迈向加权单调投票系统的开关代数理论：班扎夫投票指数的案例

[1]Ali Muhammad Rushdi 和 [2,3]Muhammad Ali Rushdi

[1]阿卜杜勒-阿齐兹国王大学工程学院电气与计算机工程系，邮政信箱 80200，吉达，21589，沙特阿拉伯王国{arushdi@kau.edu.sa; arushdi@ieee.org}

[2]工程学院生物医学与系统工程系，阿拉伯埃及共和国，12613，开罗大学，吉萨{[illegible].edu.eg}[illegible]，阿拉伯埃及共和国，12256，新吉萨大学[illegible].edu.eg}

摘要：本文认真尝试为加权单调投票系统构建开关代数理论，无论是标量加权还是向量加权。本文重点讨论一种重要投票权力指数——班扎夫投票指数的计算。该计算涉及两种不同的运算：（a）布尔差分（布尔微分）或布尔商构造（布尔限制）；以及（b）计算开关函数的权重（真向量或最小项的数量）。我们通过四种投票系统介绍了新的基于布尔代数的对称性感知技术，以计算班扎夫指数。第一个系统是一个规模较小的两院制议会，由向量加权投票系统建模。第二个系统将拥有否决权成员的联合国安全理事会建模为标量加权投票系统。第三个系统有两个版本（扩展版本和精简版本），是一个代表2007年苏格兰议会的标量加权投票系统。扩展版本的解是在精简版本的基础上逐步求得的。两个版本都表明，班扎夫指数可以根据系统的决策函数或其补函数计算。第四个系统是一个三院制议会，由维数为3的向量加权投票系统建模。该议会的每个议院都是一个特定的k取n系统。在这个议会的成员中，权力最大的是其k取n系统具有最窄有效冗余区域的那个议院的成员。最后，本文概述了建立完整的加权单调投票系统开关代数理论所需的后续步骤。全文保持教程式的风格，给出了多种一致结果的解法，并建立了博弈论投票理论、开关代数与系统可靠性分析之间的联系。

关键词：投票制度、班扎夫指数、标量加权投票、向量加权投票、联盟、布尔微分、布尔商、开关函数权重。

1. 引言

投票制度是一套规则，用于规定投票者如何在若干候选人或备选方案 [1-5]中作出选择。是非投票系统是指在两种

备选方案之间作出选择的投票制度。通常，需要针对是否采纳一项可能即将提出的备选方案（法案、决议或修正案），作出一个简单的决定，并将其与现状相对照；现状本身是一个已经存在的备选方案 [1-5]。在开关代数语境 [6-18], 中，投票制度作出的决策由一个开关（二值布尔）函数 $f(\boldsymbol{X})$ 表示：若决议获得通过，则 $f(\boldsymbol{X}) = 1$；若遭到否决，则 $f(\boldsymbol{X}) = 0$。这里，二进制向量$\boldsymbol{X} = [X_1\ X_2\ \dots\ X_n]^T$ 是一个由投票者投出的选票 $X_i\ [1 \le i \le n]$ 组成的 n 元组，其中，若投票者 i 投“赞成”或“反对”，则 X_i 分别为 1 或 0。下文中，我们使用“投票制度”一词时，默认指单调投票系统 [2], ，即其决策函数 $f(\boldsymbol{X})$ 是一个半相干开关函数 [10, 15-21]。这是一种单调不减（或简称单调递增函数） [22], ，满足对于 $\boldsymbol{X} \ge (\mathbf{Y})$，有 $f(\boldsymbol{X}) \ge f(\mathbf{Y})$。由于因果性这一性质（$\{f(\mathbf{0}) = 0\} \wedge \{f(\mathbf{1}) = 1\}$）蕴含于单调性（对于表示非虚构系统的非恒定函数），因此，半相干 $f(\mathbf{X})$（以及单调投票系统）也具有因果性。

联盟是任意一组赞成投票者 [2]。如果某项备受讨论的提案仅得到某个联盟的支持便获通过（即法案、决议或修正案获得通过），则该联盟被视为获胜联盟；否则，则被视为失败联盟。如果没有投票者属于某个联盟，该联盟就是空联盟；如果所有投票者都属于该联盟，它就是大联盟 [2, 17, 23, 24]。相比之下，原始联盟是对所有投票者状态的规定 [8, 10, 11, 16, 17]。它可以是原始获胜联盟（PWC），对应于 $f(\boldsymbol{X})$ 的真向量（最小项）；也可以是原始失败联盟（PLC），对应于 $f(\boldsymbol{X})$ 的假向量（最小项）。原始联盟的概念便于进行基于布尔代数的分析，但在投票理论中并不常见。它通常由赞成投票者和反对投票者混合构成（通常表示为未取反文字与取反文字的乘积项）。相比之下，联盟的概念在投票理论中十分常见，且只涉及赞成投票者。对于一个有 n 名投票者的投票制度，共有 2^n 个联盟（包括空联盟），也有 2^n 个原始联盟。如果将表示最小获胜联盟（MWC）中在场投票者的未取反文字进行与运算，便构成一个乘积项，它是 $f(\boldsymbol{X})$ 的一个质蕴含项；如果将表示最大失败联盟（MLC）中缺席投票者的取反文字进行与运算，便构成一个乘积项，它是其补函数 $f(\boldsymbol{X})$ 的一个质蕴含项。在单调投票系统中，空联盟是失败的（$f(\mathbf{0}) = 0$），而大联盟是获胜的（$f(\mathbf{1}) = 1$） [2, 17], ，因此，MWC 的基数至少为 1，而最大失败联盟的基数至多为（$n - 1$）。

根据定义，如果一个是非投票系统可以通过为每位投票者指定一个权重和一个配额来描述，且获胜联盟恰好是总权重达到或超过配额的联盟，那么该系统就是标量加权的（或简称加权的）。这种定义并未涵盖涉及否决权的情形。然而，如果通过赋予部分投票者否决权（即阻止动议通过的权力）来改变一个标量加权投票系统，那么所得的系统仍然是标量加权投票系统（尽管权重和阈值有所不同）。简单标量加权投票系统（即不含否决权的系统）的例子包括欧洲经济共同体、2004年东扩前的欧洲联盟、美国选举人团、国际货币基金组织理事会、公司股东选举，以及许多公司和银行的行政委员会

。非简单标量加权投票系统（即对计入否决权的系统进行建模的系统）的例子包括联合国安全理事会（UNSC）的投票制度，以及许多民主国家的立法程序。

标量加权投票制度有时被描述为这样一种方案：一名投票者拥有W_n张选票，而不是更基本的一人一票方案。它通常用数学形式表示为（T； W_1、W_2、……、W_n），其中T表示其阈值或配额，而W_1、W_2、……、W_n表示其组成投票者的权重。对于单调系统，配额T和权重W_j都严格为正。配额不能超过权重总和（否则任何动议／决议都无法通过）；审慎起见，配额应严格大于权重总和的一半（否则被否决的动议／决议会太少，更严重的是，两个互不相交的联盟可能同时获胜）。本文用开关（双值布尔）阈值函数f（$\boldsymbol{X}$）来描述标量加权系统：如果所考虑的决议获得通过，则f（$\boldsymbol{X}$）$= 1$；如果决议遭到否决，则f（$\boldsymbol{X}$）$= 0$。由n个变量构成的阈值开关函数f（$\mathbf{X}$）可用（$n + 1$）个系数来刻画（而非2^n个），即阈值T和权重$\boldsymbol{W} = [W_1, W_2, \ldots\ldots W_n]^{\mathrm{T}}$，使得[6-11、15-18、25-28]

$$f(\mathbf{X}) = 1 \ \text{ iff } \ F(\mathbf{X}) \equiv \sum_{i=1}^{n} W_i X_i \geq T. \qquad (1)$$

当不等式 (1) 的权重和阈值均严格为正时，它被称为背包覆盖约束；在这种情况下，$f(\mathbf{X})$称为半相干或单调阈值开关函数。由于将所有权重和阈值同时乘以同一个正常数不会改变函数，因此可以将此类函数描述为尺度不变的[29], 。此外，若函数$f(\mathbf{X})$对其每个n自变量都是真正的（非平凡的）（即每个自变量都与函数相关，而非虚设者），则称$f(\mathbf{X})$为（完全）相干函数。遗憾的是，文献中相干与半相干这两个术语之间的细微区别往往被混淆。相干阈值开关函数自然地描述了相干/半相干阈值可靠性系统 [6, 7, 15], 是否成功，或者等价地，描述了单调标量加权投票系统[8, 10,11, 16, 17]所作出的决策。

是非投票系统成为标量加权投票系统的一个必要（但不充分）条件是，该系统必须具有交换稳健性 [1, 2], ；也就是说，在两个获胜联盟之间交换两个不同投票者，或进行一对一交换后，形成的两个联盟中至少有一个仍然获胜。下文将介绍两个不具备交换稳健性的投票系统，因此它们不是标量加权投票系统。对于这些系统，我们可以将“阈值”和“权重”的概念从标量推广到向量，随后将这些系统（以及所有是非—投票系统）统称为“向量加权”。我们将使用“加权-投票制度”来指代标量加权和向量加权投票制度，因此将这一称谓用作所有是非投票系统的统称。Taylor 和 Pacelli [2] 提出了是非—投票系统维数的概念，即将给定系统表示为若干标量加权投票系统之交集所需的最少数量。然而，他们没有报告任何维数超过二的系统，并明确表示，他们不知道现实世界中存在维数为3（或更高）的投票系统。后来，Freixas [30] 声称欧洲联盟的投票制度

《尼斯条约》规定的扩大（在简单多数或特定三分之二多数这两种不同决策规则下）维数

[illegible] 32] 证明，欧盟理事会的里斯本投票制度（欧洲联盟（欧盟）[illegible]

[illegible]

机构的维数下[illegible]，并将确定上述维数 d 作为一项挑战。为回应这一挑战，Chen 等人 [33] 给出了欧盟投票系统维数的上界 d，证明其不超过25；而 Kober 和 Weltge [34] 则首次改进了该维数的下界，证明其至少为8。因此，目前已知的d的最强界为 $8 \leq d \leq 25$。下文将介绍一个维数为3的假设投票系统（可无限扩展），并探讨如何将其约化为维数为2的系统。

如今，人们使用着许多投票权力指数，其中有两个实际上已成为主流标准指数：Shapley–Shubik 权力指数 [2, 11, 35-37] 以及 Penrose–Banzhaf–Coleman 指数（本文简称班扎夫指数 [2, 10, 14, 16, 36-39]），该指数由 Banzhaf 提出 [38], ，Penrose 先行作出了贡献 [40], ，Coleman 随后也作出了贡献 [41]。这两个指数分别基于排列和联盟／组合方面的考量。Shapley–Shubik 指数出现较早，也受到了更广泛的关注。其他值得关注的投票权力指数包括 约翰斯顿指数 [2, 42, 43]，迪根–帕克尔指数 [2, 43, 44], 成员议价能力（MPP）度量 [45, 46], 以及 Holler 提出的公共物品指数（PGI） [47]，该指数由 Holler 和 Packel 公理化 [48]。公开文献中有大量关于各种投票权指数的有益比较 [36, 43, 49-51]。

本文主要关注如何通过开关代数计算投票制度中个体投票者 P 的班扎夫指数或班扎夫投票权力。通常将这种投票权力称为投票者 P [2] 的班扎夫总权力 TBP（P）。它表示投票者 P 能够起决定作用的次数，即该投票者属于决议（提案）支持者、且只要转而加入反对者一方，就会使系统状态由获胜变为失败的获胜状态或配置的数量。如前所述，n 人加权投票制度的每一种 2^n 状态或配置都称为原始联盟 [8,10, 11, 16, 17]。因此，班扎夫总权力 TBP（P）就是投票者 P 所属的原始获胜联盟（$PWCs$）的数量，其中投票者 P 的倒戈会导致状态转变或摆动，使联盟成为原始失败联盟（PLC）。班扎夫指数的定义隐含着这样一个假设：系统状态或配置（原始联盟）出现的可能性相同。这又意味着投票者彼此独立地投票。

本文其余部分的结构如下。第2节讨论班扎夫指数的开关代数计算。本节分为四个小节。第2.1小节介绍单调系统中班扎夫指数的若干开关代数定义，其中一些定义明确利用了正极性单调函数的性质。第2.2小节定义布尔差分（布尔

导数）。第2.3小节探讨开关函数的权的计算。第2.4小节介绍对称开关函数及其班扎夫指数。第3至第6节通过四个投票制度，说明用于计算班扎夫指数的新颖的基于布尔代数的对称性感知技术。第一个系统（第3节）是一个小型两院制议会群体，以维数为2的向量加权投票系统为模型。第二个系统（第4节）以标量加权投票系统为模型，表示拥有否决权成员的联合国安全理事会。第5节介绍代表2007年苏格兰议会的标量加权投票系统的两个版本（扩展版本和精简版本）。扩展版本的解可由精简版本的解逐步获得。两个版本都表明，班扎夫指数可以用函数$f(\boldsymbol{X})$表示，也可以用其补函数$f(\boldsymbol{X})$表示。第四个系统（第6节）是一个三院制议会，以维数为3的向量加权投票系统为模型。该议会的每个议院都是一个特定的k取n系统。在该议会成员中，权力最大的是属于其k取n系统拥有最窄有效冗余区域的议院的成员。第7节总结全文。为使本文内容完整，正文附有四个附录。附录A简要介绍单调开关函数；附录 B证明第2.1小节中班扎夫指数的两个特定定义是等价的。附录 C说明如何高效计算累积组合系数。最后，附录D说明，在构造布尔商时，乘积项在与或式中的不相交性得以保持，但在求得布尔偏导数时则不会保持。

2. 班扎夫指数的开关代数计算

2.1. 班扎夫指数的开关代数定义

投票者编号为 m [7, 10, 的班扎夫总权力定义为任意单调投票系统的

$$TBP(X_m) = wt\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial X_m}\right) = wt((f(\boldsymbol{X})/X_m) \oplus (f(\boldsymbol{X})/\overline{X}_m)), \quad (1 \le m \le n). \tag{2}$$

此处，符号 $\frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial X_m}$ 表示投票系统布尔函数 $f(\boldsymbol{X})$ 关于其自变量 X_m [53] 的偏导数（见第2.2小节）；而符号 $wt(\dots)$ 表示开关函数 [54-61] 的权重或真向量数量（见第2.3小节）。比值（$f(\boldsymbol{X})/X_m$）和（$f(\boldsymbol{X})/X_m$）分别表示 $f(\boldsymbol{X})$ 关于文字 X_m 和 X_m的布尔商 [62-67]，即

$$f(\boldsymbol{X})/X_m = f(\boldsymbol{X}|(X_m = 1). \tag{3}$$

$$f(\boldsymbol{X})/\overline{X}_m = f(\boldsymbol{X}|(X_m = 0). \tag{4}$$

对于单调系统，函数 $f(\boldsymbol{X})$ 是正极性单调函数（见附录A），因此也可以将 $TBP(X_m)$ 计算为：变量 X_m 以未取反文字形式（即仅为 X_m）出现的极小获胜联盟（$PWCs$）数量，减去它以取反文字形式（即为 X_m）出现的极小获胜联盟数量。这等同于：X_m 作为支持者出现的获胜联盟数量的两倍，减去获胜联盟总数（$PWCs$ [2]）。数学上，对于 $(1 \le m \le n)$，可将其表述为

$$TBP(X_m) = 2\,wt((f(\boldsymbol{X})/X_m)X_m) - wt\big(f(\boldsymbol{X})\big) = 2\,wt(f(\boldsymbol{X})/X_m)\,wt(X_m) - wt\big(f(\boldsymbol{X})\big)$$
$$= 2\,wt(f(\boldsymbol{X})/X_m) - wt\big(f(\boldsymbol{X})\big). \quad (5)$$

附录 B 证明，当 $f(\boldsymbol{X})$ 是正极性的单调函数时，表达式 (5) 等价于定义 (2)。在相同条件下，附录 B 还给出了 $(1 \le m \le n)$ 时 $TBP(X_m)$ 的另一种表达式

$$TBP(X_m) = wt\big(f(\boldsymbol{X})\big) - 2\,wt\big(\big(f(\boldsymbol{X})/\overline{X}_m\big)\overline{X}_m\big) = wt\big(f(\boldsymbol{X})\big) - 2\,wt(f(\boldsymbol{X})/\overline{X}_m). \quad (6)$$

将公式 (5) 加到公式 (6) 上，再除以 2，即可得到 $TBP(X_m)$ 的另一个公式，即

$$TBP(X_m) = wt((f(\boldsymbol{X})/X_m)X_m) - wt\big(\big(f(\boldsymbol{X})/\overline{X}_m\big)\overline{X}_m\big) = wt(f(\boldsymbol{X})/X_m) - wt(f(\boldsymbol{X})/\overline{X}_m). \quad (7)$$

函数 $f(\boldsymbol{X})$ 的权重 $wt(f(\boldsymbol{X}))$ 可由其布尔-香农展开表示为

$$wt\left(f(\boldsymbol{X})\right) = wt\left((f(\boldsymbol{X})/X_m)\,X_m \vee \left(f(\boldsymbol{X})/\,\overline{X}_m\right)\overline{X}_m\right) = wt(\,(f(\boldsymbol{X})/X_m)\,X_m \oplus (f(\boldsymbol{X})/\,\overline{X}_m)\,\overline{X}_m) = wt(f(\boldsymbol{X})/X_m)wt(\,X_m) + wt\big(f(\boldsymbol{X})/\,\overline{X}_m\big)wt(\,\overline{X}_m) = wt(f(\boldsymbol{X})/X_m) + wt\big(f(\boldsymbol{X})/\,\overline{X}_m\big) \quad (8)$$

值得注意的是，(2) 和 (8) 中的表达式并不相同，因为 (2) 中的布尔商 $f(\boldsymbol{X})/X_m$ 和 $f(\boldsymbol{X})/\overline{X}_m$ 并不互不相交，而 (8) 中的项 $(f(\boldsymbol{X})/X_m)\,X_m$ 和 $(f(\boldsymbol{X})/X_m)\,\overline{X}_m$ 则互不相交。

通常，原始总班茨哈夫权力各自除以 2^{n-1}（$\frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial X_m}$ 的最大可能权重），从而可以得到某种概率解释。另一种做法是，将每个原始值 $TBP(X_m)$ 除以这些值的总和，以此对这些原始权力进行归一化。这样得到的归一化指数便具有不同的（尽管受到批评的）概率解释，也便于与其他主要类型的指数进行比较，即夏普利-舒比克指数 [36]。因此，标准化班扎夫总权力为

$$NTBP(X_m) = TBP(X_m)/\textstyle\sum_{k=1}^{n} TBP(X_k), \qquad (1 \le m \le n). \quad (9)$$

我们目前的目标是从开关代数的角度，而非传统博弈论范式，探讨班茨哈夫权力指数的计算。本文提出的技术是一种开关代数方法，基本上属于枚举法。该技术力求充分利用开关理论的最新进展 [22, 53, 55, 64, 68- 70] 以及许多投票系统固有的对称性特征。

2.2. 布尔差分或导数

一个含 n 个变量的开关函数（二值布尔函数）是从 $B_2^n = \{0,1\}^n$ 到 $B_2 = \{0,1\}$ 的映射，记作 $f(\boldsymbol{X}) = f(X_1, X_2, \cdots, X_m, \ldots, X_{n-1}, X_n)$。$f(\boldsymbol{X})$ 关于 X_m $(1 \le m \le n)$ 的偏导数（或布尔差分）为 [7, 8, 10, 16, 17, 22, 26, 52, 53]

$$\frac{\partial f}{\partial X_m} = f\big(X_1, X_2, \cdots, \overline{X}_m, \ldots, X_{n-1}, X_n\big) \oplus f(X_1, X_2, \cdots, X_m, \ldots, X_{n-1}, X_n). \quad (10)$$

可以看出，这等价于 [53]

$$\frac{\partial f}{\partial X_m} = f(\boldsymbol{X}|X_m = 0) \oplus f(\boldsymbol{X}|X_m = 1). \tag{11}$$

其中

$$f(\boldsymbol{X}|X_m = 0) = f(X_1, X_2, \cdots, 0, \ldots, X_{n-1}, X_n) = f(\boldsymbol{X}) \,/\, \overline{X}_m, \tag{12a}$$

$$f(\boldsymbol{X}|X_m = 1) = f(X_1, X_2, \cdots, 1, \ldots, X_{n-1}, X_n) = f(\boldsymbol{X}) \,/\, X_m, \tag{12b}$$

称为 $f(\boldsymbol{X})$ 的子函数、限制或商函数（比值）。其卡诺图可通过将 $f(\boldsymbol{X})$ 的卡诺图分成两半得到，即分别对应于 $\overline{X}_m$ 和 X_m 为真时的区域。随后，将其中一半折叠到另一半上，并逐格执行异或运算 [53]，即可得到布尔差分。布尔差分的一些重要性质如下（当 A 和 B 独立于 X_m 时）[22, 53]

$$\{f(\boldsymbol{X}) = f_1(\boldsymbol{X}) \oplus f_2(\boldsymbol{X})\} \quad \longrightarrow \quad \{\frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial X_m} = \frac{\partial f_1(\boldsymbol{X})}{\partial X_m} \oplus \frac{\partial f_2(\boldsymbol{X})}{\partial X_m}\}, \tag{13}$$

$$\{f(\boldsymbol{X}) = f_1(\boldsymbol{X}) \vee f_2(\boldsymbol{X})\} \quad \longrightarrow \quad \{\frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial X_m} = \overline{f}_1(\boldsymbol{X}) \frac{\partial f_2(\boldsymbol{X})}{\partial X_m} \oplus \frac{\partial f_1(\boldsymbol{X})}{\partial m} \overline{f}_2(\boldsymbol{X}) \oplus \frac{\partial f_1(\boldsymbol{X})}{\partial X_m} \frac{\partial f_2(\boldsymbol{X})}{\partial X_m}\}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_m} = \frac{\partial f}{\partial \overline{X}_m} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial X_m} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{X}_m}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial (AX_m)}{\partial X_m} = \frac{\partial (AX_m)}{\partial \overline{X}_m} = A, \tag{16}$$

$$\frac{\partial (B)}{\partial X_m} = \frac{\partial (B)}{\partial \overline{X}_m} = 0. \tag{17}$$

方程 (13) 表明，偏微分算子（$\frac{\partial}{\partial X_i}$）与异或运算符可交换。相比之下，偏微分算子与或运算符不可交换，因此对或运算后的表达式求导需要使用相当复杂的公式 (14)。这就是我们倾向于先将积之和表达式转换为不相交形式进行预处理，以便能够合理地用异或运算符替换或运算符的原因。方程 (15) 表明，TBP（X_m）可计算为 $\frac{\partial \overline{f}}{\partial X_m}$（$\boldsymbol{x}$）或 $\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{X}_m}$（$\boldsymbol{x}$）的权重，但 f（$\boldsymbol{X}$）通常比 $f(\boldsymbol{X})$ 更复杂。通常，大型投票制度的最小获胜联盟（$MWCs$）远少于其最小失败联盟（$MLCs$）。

2.3. 计算开关函数的权

我们将开关函数 $f(\boldsymbol{X}) = f(X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}, X_n)$ 视为其真值表 f 的输出列，即一个长度为 2^n 的二进制向量，也就是

$$\boldsymbol{f} = [f(0,0,\ldots 0,0) \quad f(0,0,\ldots,0,1) \quad f(0,0,..,1,0) \ \ldots \ f(1,1,..,1,1)]^T. \tag{18}$$

开关函数 $f(\boldsymbol{X})$ 的权重是其真值表向量 $\boldsymbol{f}$ 中 1 的个数。记作 $\mathrm{wt}(f)$，其范围为 $0 \le wt(f) \le 2^n$ [54-61]。如果一个 n 变量函数 f 的真值表输出列中 0 和 1 的数量相等（$i.\ e.,\ wt(f) = 2^{n-1}$），则称其为平衡函数。显然，如果将开关函数 $f(\boldsymbol{X})$ 关于其 m 个自变量展开，

得到 2^m 个子函数，那么父函数 $f(\boldsymbol{X})$ 的权重就是这些子函数权重之和。

如果函数 $f(\boldsymbol{X})$ 可以用一般的乘积项之和形式表示，且这些乘积项不一定互不相交，

$$f(\boldsymbol{X}) = \bigvee_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n_p}} \mathrm{P_i}, \tag{19}$$

那么 $f(\boldsymbol{X})$ 的权重可通过适当形式的容斥原理 [67, 71-76] 求得，如下所示

$$wt(f) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n_p}} wt\{\mathrm{P_i}\} - \sum\sum_{1\le \mathrm{i}<j\le \mathrm{n_p}} wt\{\mathrm{P_i}\wedge \mathrm{P_j}\} + \sum\sum\sum_{1\le \mathrm{i}<j<k\le \mathrm{n_p}} wt\{\mathrm{P_i}\wedge \mathrm{P_j}\wedge \mathrm{P_k}\} - \ldots + (-1)^{\mathrm{n_p}-1}\ wt\Big\{\bigwedge_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n_p}} \mathrm{P_i}\Big\}. \tag{20}$$

其中，乘积项 P_k 的权重等于 $2^{(n-\ell(P_k))}$，即 2 的指数为变量总数减去该乘积项中不可约文字数。符号 $\mathrm{l}(P_k)$ 表示乘积项 P_k 中不可约文字的数量，例如 $\mathrm{l}(1)= 0$，$\mathrm{l}(X_i) = \mathrm{l}(X_i) = 1$，$\mathrm{l}(X_iX_j) = \mathrm{l}(X_iX_j) = 2$。乘积项 P_k 的权重 $wt(P_k)$ 不仅取决于其不可约文字数 $\mathrm{l}(P_k)$，也取决于所涉及的变量总数 n。事实上，权重 $wt(P_k)$ 等于 2 的指数为缺失变量总数的值（$n-\mathrm{l}(P_k)$）。逻辑值 0 不视为乘积项 D_k。不过，我们假设 $\mathrm{l}(0)$ 趋于无穷大（∞），因此若存在 $P_k = 0$，它对 $wt(f)$ 的贡献为零。此处假设所有乘积项 P_k 均不含冗余文字（若存在冗余文字，可利用与运算符的幂等性将其消去（$X_i \wedge X_i = X_i \ and\ \overline{X}_i \wedge \overline{X}_i = \overline{X}_i$））。

若开关函数 $f(\boldsymbol{X})$ [64, 67, ( ) 可表示为不交和-乘积项（s-o-p）形式 - 71, 74, 77 79]

$$f(\boldsymbol{X}) = \bigvee_{k=1}^{m} D_k, \tag{21}$$

其中

$$D_i \wedge D_j = 0, \qquad \forall\ \mathrm{i, j}, \tag{22}$$

$$D_k = \Big(\bigwedge_{i\in I_{k_1}} X_i\Big)\Big(\bigwedge_{i\in I_{k_2}} \overline{X}_i\Big), \qquad \forall\ \mathrm{k}, \tag{23}$$

这里，I_{k_1} 和 I_{k_2} 分别是乘积项 D_k 中未取反文字和取反文字的指标集，而 $\mathrm{l}(D_k)$ 是集合 I_{k_1} 和 I_{k_2} 的基数之和。于是，$f(\boldsymbol{X})$ 的权重为

$$wt(f) = \sum_{k=1}^{m} wt(D_k) = \sum_{k=1}^{m} 2^{\left(n-\ell(D_k)\right)}. \tag{24}$$

如果函数 $f(\boldsymbol{X})$ 是对称开关函数 $Sy(n;\boldsymbol{A};\boldsymbol{X})$，那么其权重可通过对所有属于特征集 $\boldsymbol{A}$ 的整数 a 对应的组合（二项式）系数 n choose a 求和得到，记作 $c(n,a)$，即：

$$wt(Sy(n;\boldsymbol{A};\boldsymbol{X})) = \sum_{a\in\boldsymbol{A}} c(n,a). \tag{25}$$

如果函数 $f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 是函数 $f_1(\boldsymbol{X})$ 和 $f_2(\boldsymbol{Y})$ 的合取，其中 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 是互不重叠的自变量集合，那么 $f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 的权重就是 $f_1(\boldsymbol{X})$ 和 $f_2(\boldsymbol{Y})$ 的权重乘积。

$$\{f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = f_1(\boldsymbol{X}) \wedge f_2(\boldsymbol{Y})\} \longrightarrow \{wt(f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})) = wt(f_1(\boldsymbol{X})) * wt(f_2(\boldsymbol{Y}))\}. \tag{26}$$

若函数 $f(\boldsymbol{X})$ 是两个不相交函数 $f_1(\boldsymbol{X})$ 和 $f_2(\boldsymbol{X})$ 的析取，则其权重等于这两个函数的权重之和

$$\{f(\boldsymbol{X}) = f_1(\boldsymbol{X}) \vee f_2(\boldsymbol{X}) = f_1(\boldsymbol{X}) \oplus f_2(\boldsymbol{X}), \quad f_1(\boldsymbol{X}) \wedge f_2(\boldsymbol{X}) = 0\} \longrightarrow$$
$$\{wt(f(\boldsymbol{X})) = wt(f_1(\boldsymbol{X})) + wt(f_2(\boldsymbol{X}))\}. \tag{27a}$$

若函数 $f_1(\boldsymbol{X})$ 和 $f_2(\boldsymbol{X})$ 不相交，则

$$wt(f_1(\boldsymbol{X}) \vee f_2(\boldsymbol{X})) = wt(f_1(\boldsymbol{X})) + wt(f_2(\boldsymbol{X})) - wt(f_1(\boldsymbol{X}) \wedge f_2(\boldsymbol{X})), \tag{27b}$$

$$wt(f_1(\boldsymbol{X}) \oplus f_2(\boldsymbol{X})) = wt(f_1(\boldsymbol{X})) + wt(f_2(\boldsymbol{X})) - 2\,wt(f_1(\boldsymbol{X}) \wedge f_2(\boldsymbol{X})). \tag{27c}$$

一个函数（有 n 个自变量）及其补函数的权重之和为 2^n

$$wt\left(\overline{f}(\boldsymbol{X})\right) = wt(1 \oplus f(\boldsymbol{X})) = 2^n - wt(f(\boldsymbol{X})). \tag{28}$$

2.4. 对称开关函数的班扎夫指数

对称开关函数（SSF）是一个二值布尔函数，定义为 [17, 18, 64, 66, 80, 81]

$$f(\boldsymbol{X}) = Sy(n;\boldsymbol{A};\boldsymbol{X}) = Sy(n;\{a_1, a_2, \dots, a_m\}; X_1, X_2, \dots, X_n), \tag{29}$$

并且是特 其特征由输入数量 n、输入 $\boldsymbol{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]^{\mathrm{T}}$ 以及其特征集 s 表示 et

$$\boldsymbol{A} = \{a_0, a_1, \dots, a_m\} \subseteq \boldsymbol{I}_{n+1} = \{0, 1, 2, \dots, n\}, \{m \leq n\}. \tag{30}$$

当且仅当算术和 属于特征集 $\boldsymbol{A}$时，此函数的值为 1；否则，值为 0。上述集合值函数的补函数 $\bar{f}$ 的特征集 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 定义为相对于 $\boldsymbol{I}_{n+1} = \{0, 1, 2, \dots, n\}$的补集，即集合差 $(\boldsymbol{I}_{n+1}/\boldsymbol{A})$，也记作 $(\boldsymbol{I}_{n+1} - \boldsymbol{A})$，或者

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \{0, 1, 2, \dots, n\} - \{a_0, a_1, \dots, a_m\} \tag{31}$$

因此，$\bar{f}$ 可以表示为

$$\bar{f} = Sy(n;\overline{\boldsymbol{A}};\boldsymbol{X}). \tag{32}$$

两个具有相同参数 $\boldsymbol{X}$、特征集分别为 $\boldsymbol{A_1}$ 和 $\boldsymbol{A_2}$ 的集合值函数，其与运算、或运算和异或运算分别是特征集等于 $\boldsymbol{A_1}$ 和 $\boldsymbol{A_2}$ 的交集、并集和对称差的集合值函数，即

$$Sy(n;\boldsymbol{A_1};\boldsymbol{X}) \wedge Sy(n;\boldsymbol{A_2};\boldsymbol{X}) = Sy(n;\boldsymbol{A_1} \cap \boldsymbol{A_2};\boldsymbol{X}), \tag{33a}$$

$$Sy(n;\boldsymbol{A_1};\boldsymbol{X}) \quad \vee \quad Sy(n;\boldsymbol{A_2};\boldsymbol{X}) \;=\; Sy(n;\boldsymbol{A_1} \cup \boldsymbol{A_2};\boldsymbol{X}), \tag{33b}$$

$$Sy(n;\boldsymbol{A_1};\boldsymbol{X}) \;\oplus\; Sy(n;\boldsymbol{A_2};\boldsymbol{X}) = \; Sy(n;\boldsymbol{A_1} \oplus \boldsymbol{A_2};\boldsymbol{X}). \tag{33c}$$

两个具有相同参数 $\boldsymbol{X}$ 且特征集互不相交的集合值函数，其与运算为 0，因此这两个函数互不相交。对于式 (29) 中的集合值函数 f，关于其任一变量 X_m （$1 \le m \le n$）的布尔-香农展开可表述如下 [64, 66, 67, 80, 81]

$$Sy(n;\boldsymbol{A};\boldsymbol{X}) = \bar{X}_m \; Sy(n-1;\boldsymbol{B};\boldsymbol{X}/X_m) \vee X_m \; Sy(n-1;\boldsymbol{C};\boldsymbol{X}/X_m), \; (1 \le m \le n), \tag{34}$$

其中，集合 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 都是集合 $\boldsymbol{I}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ 的子集，这一点可从它们的以下定义看出

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{I}_n, \tag{35}$$

$$\boldsymbol{D} = \{a_0 - 1, a_1 - 1, \dots, a_m - 1\}, \tag{36}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D} \cap \boldsymbol{I}_n. \tag{37}$$

这两个集合 $\boldsymbol{C}$和 $\boldsymbol{B}$的定义可以改写如下

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \qquad if\ a_m \ne n, \tag{38a}$$
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} - \{n\} \qquad if\ a_m = n, \tag{38b}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D} \qquad if\ a_0 \ne 0, \tag{39a}$$
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D} - \{-1\} \qquad if\ a_0 = 0. \tag{39b}$$

展开式 (34) 可以递归应用，直到达到以下某个边界条件

$$Sy(n;\boldsymbol{I}_{n+1};\boldsymbol{X}) = \; 1, \tag{40}$$

$$Sy(n;\; \boldsymbol{\phi}\;;\boldsymbol{X}) = \; 0, \tag{41}$$

其中，$\boldsymbol{I}_{n+1}$ 是 n 个变量的论域（全集），而 $\boldsymbol{\phi} = \{\}$ 是空集（空集或不含任何元素的集合）。

(34) 右端的两项互不相交，因为 $\bar{X}_m$ 出现在第一项中，而 X_m 出现在第二项中。因此，在 (34) 中用异或运算符 ($\oplus$) 替换或运算符 ($\vee$) 是合理的，即

$$Sy(n;\boldsymbol{A};\boldsymbol{X}) = \bar{X}_m \; Sy(n-1;\boldsymbol{B};\boldsymbol{X}/X_m) \oplus X_m \; Sy(n-1;\boldsymbol{C};\boldsymbol{X}/X_m), \; (1 \le m \le n), \tag{42}$$

因此，集合值函数 $Sy(n;\boldsymbol{A};\; \boldsymbol{X})$ 关于 X_m 的布尔导数，可直接写成另一个集合值函数：

$$\frac{\partial Sy(n;\boldsymbol{A};\boldsymbol{X})}{\partial X_m} = Sy(n-1;\boldsymbol{B};\boldsymbol{X}/X_m) \oplus Sy(n-1;\boldsymbol{C};\boldsymbol{X}/X_m), \quad (1 \le m \le n), \tag{43}$$

$$\frac{\partial Sy(n;\boldsymbol{A};\boldsymbol{X})}{\partial X_m} = = Sy(n-1;\boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{C};\boldsymbol{X}/X_m), \quad (1 \le m \le n). \tag{44}$$

根据式 (1)、(25) 和 (44)，班扎夫总权力为：

$$TBP(X_m) = wt\left(\frac{\partial Sy(n;\boldsymbol{A};\boldsymbol{X})}{\partial X_m}\right) = \sum_{a\in \boldsymbol{B}\oplus \boldsymbol{C}} \; c(n-1,a), \quad (1 \le m \; \le \; n), \tag{45}$$

其中，函数 $c(n,k)$ 表示二项式（组合）系数，记作 n choose k；也就是在不允许重复且不考虑顺序的情况下，从 n 个对象中选取 k 个的方式数。或者，我们也可以通过式（5）计算 $TBP(X_m)$，注意到对于单调不减函数 $\boldsymbol{B} \sqsubseteq \boldsymbol{C}$，因此得到

$$TBP(X_m) = 2\; wt\;(X_m\;(Sy(n;\boldsymbol{A};\boldsymbol{X})/X_m)) - wt\;(Sy(n;\boldsymbol{A};\boldsymbol{X})) = 2\; wt\;(Sy(n-1;\boldsymbol{C};\boldsymbol{X}/X_m)) - (wt(Sy(n-1;\boldsymbol{B};\boldsymbol{X}/X_m) \; + \; wt(Sy(n-1;\boldsymbol{C};\boldsymbol{X}/X_m))$$

$$= wt(Sy(n-1;\boldsymbol{C};\boldsymbol{X}/X_m) \; - \; wt(Sy(n-1;\boldsymbol{B};\boldsymbol{X}/X_m). \quad (1 \le m \; \le \; n). \tag{46}$$

特别要指出的是，我们将布尔商（$Sy(n;\; \boldsymbol{A};\boldsymbol{X})/\; X_m$）的权重表示为

$$wt((Sy(n;\boldsymbol{A};\boldsymbol{X})/X_m)) = wt(Sy(n-1;\boldsymbol{C};\boldsymbol{X}/X_m). \tag{47}$$

标准化班扎夫总权力为

$$NTBP(X_m) = \frac{1}{n}, \quad (1 \le m \; \le \; n), \tag{48}$$

正如预期的那样。回顾起来，我们发现，或许并不需要进行上述详细计算，因为我们本可以直接根据投票制度的对称性推知，投票者的权力将会相等。尽管本小节的计算本身并无特别用处，但对于处理某些在投票者之间具有显著部分对称性的投票制度，可能会带来重要帮助；接下来几节中的四种投票制度均属于这种情况。

我们注意到，在单调系统的假设下，函数 $Sy(n;\boldsymbol{A};\;\boldsymbol{X})$ 是单调不减的，因此它表示 k取n系统 [64, 80, 81] 的成功 $S(k,n,\boldsymbol{X}) = Sy(n;\; k..\; n;\; \boldsymbol{X})$。它是一个对称相干阈值函数，具有单位权重，且阈值等于 k，因为

$$\{S(k,n,\boldsymbol{X}) = 1\} \quad iff \quad \{\sum_{i=1}^{n} X_i \; \ge \; k\}. \tag{49}$$

著名的多数投票对应于 k 等于 $(n+1)/2$ 的上取整。自然不应允许 k 低于此值（实际上，这是因为要求 k 不得小于权重总和 n 的一半）。不过，我们可以探讨可靠性文献中研究的 k 两种极端情况，即

(a) 情形 $k = n$ 表示一个串联系统（没有冗余）。这种情形勉强可以接受，因为配额恰好等于权重总和。此时只有一个获胜联盟（大联盟），且每位投票者都拥有否决权。决策只有在全体一致时才能作出。尽管这听起来有些奇怪，阿拉伯国家联盟（LAS，通常称为阿拉伯联盟）在 1945 年成立时采用的正是串联投票制度。如今，阿拉伯联盟采用多数投票，但决议仅对接受决议的国家具有约束力；也就是说，阿拉伯联盟采用了一种特殊的多数规则，无法约束投票中落败的国家。这或许可以解释，为何迄今为止阿拉伯联盟一直显得缺乏影响力、效率低下，而且本质上过于弱小，无法实现其既定目标中的重要部分 [82-84]。一些

除阿拉伯联盟以外的其他国际组织，例如世界贸易组织和国际海底管理局理事会，在某些事项上也采用一致同意规则或共识 [85]。

(b) $k = 1$ 的情况，代表并联系统（完全冗余）。实际上，这种情况通常会被避免，因为配额不满足严格大于权重总和一半的要求。共有 $(2^n - 1)$ 个获胜联盟（包括除空联盟以外的所有联盟）。在投票者彼此独立的假设下，这种方案荒谬而随意，每位投票者都能随心所欲地通过任何决议草案，却可能立即被另一位投票者撤销。这意味着投票者可能瞬间从独裁者变成虚设者，反之亦然。支持一神论者通常以这种方案完全行不通这一事实，作为反对多神论的有力论据。

3. 小型向量加权系统

考虑一个改编自 Taylor 和 Pacelli [2] 的练习的投票制度，涉及一个由父母 P_1 和 P_2 以及三个孩子 X_1、X_2 和 X_3 组成的家庭。在决定是去年的同一个度假胜地度假，还是尝试其他地方等问题时，他们采用以下投票制度：任何决议都必须获得至少一位父母和两名孩子的支持才能通过。该投票制度由一个决策切换函数描述，其最小和或完全和为

$$f(\boldsymbol{P};\boldsymbol{X}) = f(P_1, P_2; X_1, X_2, X_3) = P_1X_1X_2 \vee P_1X_2X_3 \vee P_1X_1X_3 \vee P_2X_1X_2 \vee P_2X_2X_3 \vee P_2X_1X_3. \quad (50)$$

该函数有六个主蕴含项，分别对应六个最小获胜联盟，即 $P_1X_1X_2$、$P_1X_2X_3$、$P_1X_1X_3$、$P_2X_1X_2$、$P_2X_2X_3$ 和 $P_2X_1X_3$。我们注意到，所考虑的投票制度并非标量加权投票制度，而是向量加权投票制度，这意味着没有人曾经 能找到一组权重和一个配额来描述该制度。这一观察源于该制度不具备交换稳健性。为了说明原因，我们考察两个获胜联盟 $P_1X_1X_2$ 和 $P_2X_2X_3$，然后将第一个联盟中的投票者 P_1 与第二个联盟中的投票者 X_3 交换。由此得到的联盟为 $X_1X_2X_3$ 和 $P_1P_2X_2$，二者均为失败联盟。第一个联盟没有任何父联盟，尽管它有剩余子联盟；而第二个联盟的子联盟不足两个，尽管它有剩余父联盟。函数 $f(\boldsymbol{P};\boldsymbol{X})$ 的向量加权性质体现在：它等价的不是一个单独不等式的断言，而是两个独立不等式的合取断言，即

$$\{P_1 + P_2 \geq 1\} \wedge \{X_1 + X_2 + X_3 \geq 1\}. \quad (51)$$

上述分析表明，一般而言，两院制投票制度并非标量加权系统，而是向量加权系统。为便于进一步处理，我们将该投票制度的决策函数改写为因式分解形式，或改写为两个乘积之和的合取（这是该系统向量加权性质所允许的），然后将这两个乘积之和分别改写为不交和，最后在每个不交和中用异或运算符（$\oplus$）替换或运算符（$\vee$）。在数学上，我们得到

$$f(\boldsymbol{P};\boldsymbol{X}) = (P_1 \vee P_2)(X_1X_2 \vee X_2X_3 \vee X_1X_3)$$

$$= (P_1 \vee \overline{P}_1\, P_2\,)\ (X_1X_2 \vee \overline{X}_1X_2X_3 \vee X_1\overline{X}_2X_3)$$

$$= (P_1 \oplus \overline{P}_1\, P_2\,)\ (X_1X_2 \oplus \overline{X}_1X_2X_3 \oplus X_1\overline{X}_2X_3). \quad (52)$$

由于存在部分对称性，我们注意到 $TBP(P_1) = TBP(P_2)$，且 $TBP(X_1) = TBP(X_2) = TBP(X_3)$。因此，只需计算两个变量 P_1和 P_2 （例如 P_1）之一，以及三个变量 X_1、X_2 和 X_3 （例如 X_1）之一关于其的布尔导数。根据公式（2），我们得到

$$\frac{\partial f}{\partial P_1} = (1 \oplus\ P_2\,)\ (X_1X_2 \oplus \overline{X}_1X_2X_3 \oplus X_1\overline{X}_2X_3) = (\overline{P}_2\,)\ (X_1X_2 \oplus \overline{X}_1X_2X_3 \oplus X_1\overline{X}_2X_3). \quad (53)$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_1} = (P_1 \oplus \overline{P}_1\, P_2\,)\ (X_2 \oplus X_2X_3 \oplus \overline{X}_2X_3) = (P_1 \oplus \overline{P}_1\, P_2\,)\,(X_2\overline{X}_3 \oplus \overline{X}_2X_3). \quad (54)$$

它们对应于以下对象的班扎夫总权力

$$TBP(P_1) = wt\left(\frac{\partial f}{\partial P_1}\right) = (1)(2+1+1) = 4. \quad (55)$$

$$TBP(X_1) = wt\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right) = (2+1)(1+1) = 6. \quad (56)$$

或者，我们也可以根据公式（5）得到相同的结果，即

$$wt(f) = (2+1)(2+1+1) = 12. \quad (57)$$

$$wt((f/P_1)P_1) = wt((P_1)(X_1X_2 \oplus \overline{X}_1X_2X_3 \oplus X_1\overline{X}_2X_3)) = (2)(2+1+1) = 8. \quad (58)$$

$$wt((f/X_1)X_1) = wt((P_1 \oplus \overline{P}_1\, P_2\,)(X_2 \oplus \overline{X}_2X_3)\, X_1) = (2+1)(1+2)(1) = 9. \quad (59)$$

$$TBP(P_1) = (2)(8) - 12 = 4. \quad (60)$$

$$TBP(X_1) = (2)(9) - 12 = 6, \quad (61)$$

或者根据公式（6），即

$$wt(\left(f/\overline{P}_1\right)\overline{P}_1) = wt(\left(\overline{P}_1P_2\right)(X_1X_2 \oplus \overline{X}_1X_2X_3 \oplus X_1\overline{X}_2X_3)) = (1)(2+1+1) = 4. \quad (62)$$

$$wt(\left(f/\overline{X}_1\right)\overline{X}_1) = wt((P_1 \oplus \overline{P}_1\, P_2\,)(\overline{X}_1X_2\, X_3)) = (2+1)(1) = 3. \quad (63)$$

$$TBP(P_1) = 12 - (2)(4) = 4. \quad (64)$$

$$TBP(X_1) = 12 - (2)(3) = 6, \quad (65)$$

最后，班扎夫总权力向量和归一化总班扎夫权力向量为 e

$$\boldsymbol{TBP} = [\ 4 \quad 4 \quad 6 \quad 6 \quad 6]^T,\ \boldsymbol{NTBP} = \left[\frac{2}{13} \quad \frac{2}{13} \quad \frac{3}{13} \quad \frac{3}{13} \quad \frac{3}{13}\ \right]^T. \quad (66)$$

父母获得的投票权力少于子女，这或许看起来有些奇怪（体现了父母的仁慈与宽厚）。实际上，这个家庭“议会”

采用的是两院制，其中父母院更容易批准一项决议（只需半数成员同意）。相比之下，子女院则要求相对更难达到的三分之二多数才能批准。在第6节中，我们将把父母院视为一个二取一系统，把子女院视为一个三取二系统，并将看到，后者系统的成员权力更大，因为他们所属系统的有效冗余区域更紧密。

4. 联合国安全理事会投票制度

联合国安全理事会（UNSC）是联合国最具权力的机构。对于非程序事项，只有在获得九个成

，

对联合国安全理事会投票制度的最初描述确实涉及权重（十五个成员各有一个权重）和配额（九），同时还说明五个常任理事国中的每一个都拥有否决权。从数学上看，这相当于两个不平等的合取：

$$\{P_1\ P_2\ P_3\ P_4\ P_5 \geq 1\} \wedge \{\sum_{i=1}^{5} P_i\ +\ \sum_{j=1}^{10} N_j\ \geq\ 9\}. \tag{67a}$$

或者，等价地

$$\{P_1\ P_2\ P_3\ P_4\ P_5 = 1\} \wedge \{\sum_{j=1}^{10} N_j\ \geq\ 4\}. \tag{67b}$$

上述包含两个约束条件的表述表明，联合国安全理事会投票制度的维数至多为 2。该维数恰好为 1 可能出人意料，因为联合国安全理事会投票制度可以建模为一个简单的标量加权投票制度，完全无需提及否决权，只需采用不同的配额和权重，其中拥有否决权的成员所对应的权重甚至会大得不合理。联合国安全理事会投票制度的情形有力地说明：某些成员能够否决决议草案的投票制度，总是可以建模为标量加权投票系统 [2]。在没有成员缺席或弃权的情况下，联合国安全理事会投票制度等价于以下标量加权投票系统 [39：7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], 其受以下不平等约束

$$\sum_{i=1}^{5} 7P_i\ +\ \sum_{j=1}^{10} N_j\ \geq\ 39. \tag{68}$$

请注意，公式 (68) 与公式 (67) 完全等价，不过在公式 (68) 中，我们没有提及否决权，而是将每位常任理事国的权重提高了七倍，并相应地将配额增加了 $(5)(7-1)=30$，使其从 9 增至 39。联合国安全理事会中的获胜联盟必须包含全部五个常任理事国（总权重为 35），并至少包含四个非常任理事国（增加至少 4 的权重），从而达到至少 39 的配额。若联盟缺少一位常任理事国，却包含全部非常任理事国，其权重为 $(4)(7)+(10)(1)=38$，因此无法获胜。若联盟包含全部常任理事国和三位非常任理事国，其权重为 $(5)(7)+(3)(1)=38$，同样无法获胜。请注意，联合国安全理事会的实际配额并非公式 (67a) 中的 9（总权重为 15），而是公式 (68) 中的 39（总权重为 45），确实非常高 [85]。联合国安全理事会投票制度（没有成员缺席或弃权）的决策函数为

$$f(\boldsymbol{P};\boldsymbol{N}) = \; Sy(5;\{5\},\boldsymbol{P}) \;\; Sy(10;\{4..10\},\boldsymbol{N}) = \; P_1 \; P_2 \; P_3 \; P_4 \; P_5 \;\; Sy(10;\{4..10\},\boldsymbol{N})$$
$$= \; P_1 \; P_2 \; P_3 \; P_4 \; P_5 \;\; (\overline{N}_j \;\; Sy\big(9;\{4..9\},\boldsymbol{N}/\,N_j\big) \vee \; N_j \;\; Sy\big(9;\{3..9\},\boldsymbol{N}/\,N_j\big)) \; =$$
$$P_1 \; P_2 \; P_3 \; P_4 \; P_5 \;\; (\overline{N}_j \;\; Sy\big(9;\{4..9\},\boldsymbol{N}/\,N_j\big) \oplus \; N_j \;\; Sy\big(9;\{3..9\},\boldsymbol{N}/\,N_j\big)). \qquad (69)$$

由于存在部分对称性，我们注意到 $TBP(P_i)$ 对于 $(1 \le i \le 5)$ 都相同，而 $TBP(N_j)$ 对于 $(1 \le j \le 10)$ 都相同。因此，只需计算五个变量 P_i （例如 P_1）之一以及十个变量 N_j （例如 N_1）之一的布尔导数。根据公式 (2)，我们计算

$$\frac{\partial f}{\partial P_1} = \; P_2 \; P_3 \; P_4 \; P_5 \;\; Sy(10;\{4..10\};\boldsymbol{N}). \qquad (70)$$

$$\frac{\partial f}{\partial N_1} = P_1 \; P_2 \; P_3 \; P_4 \; P_5 \;\; (Sy(9;\{4..9\};\boldsymbol{N}/\,N_1) \oplus \; Sy(9;\{3..9\};\boldsymbol{N}/\,N_1))$$
$$= P_1 \; P_2 \; P_3 \; P_4 \; P_5 \;\; (Sy(9;\{3\};\boldsymbol{N}/\,N_1), \qquad (71)$$

其对应于（见附录 C）的班扎夫总权力

$$TBP(P_1) = (1)\sum_{a\in\{4..10\}} \;\; c(10,a) = C(10{,}4) = \; 1024 - (1 + 10 + 45 + 120) = 848. \qquad (72)$$

$$TBP(N_1) = (1)\; c(9,3) = 84. \qquad (73)$$

请注意，式（72）中的 4 变量函数（$P_2 \; P_3 \; P_4 \; P_5$）的权重为 1，这恰好与式（73）中的 5 变量函数（$P_1 \; P_2 \; P_3 \; P_4 \; P_5$）的权重相同。十五名成员的总权力为（5）（848）+（10）（84）= 5080。一名常任理事国成员和一名非常任理事国成员的标准化班扎夫总权力分别为 $NTBP$（P_i）= 848/5080 = 0.167，（$1 \le i \le 5$），以及 $NTBP$（N_j）= 84/5080 = .0165，（$1 \le j \le 10$）。

我们回顾一下，虚设投票人是这样一种投票者：V 由于 TBP（V）严格等于 0，他或她对投票制度的结果没有任何发言权。该投票者完全没有权力，因为无论如何，他或她都无法影响决议的通过。虚设投票人的存在违背了投票制度的宗旨；投票制度本应让每一位投票者都有某种合理的机会——即使机会很小——去影响或左右该制度所作出的决定。联合国安全理事会的投票制度尚未达到将非常任理事国成员认定为虚设者的程度，尽管它几乎使这些成员成为虚设者。一名非常任理事国成员的TBP 与一名常任理事国成员的权力相比小得令人担忧，但并不严格等于 0。联合国安全理事会十名非常任理事国成员合在一起的 TBP ，略低于一名常任理事国成员的权力。联合国安全理事会中的投票权力基本上分为六份，其中五份由常任理事国成员均分，第六份则分成若干子份额，在世界其他地区的轮换众议员之间流动。Napel 和 Widgrén [86] 认为，非常任理事国成员是他们在投票博弈中所称“弱势参与者”的一种特殊情形，因此只有常任理事国成员才可被视为具有权力的成员。这些作者提出了一种新的投票指数，称为严格权力指数（SPI），使得对于有权力的成员，SPI（X_i）$= TBP$（X_i），而对于弱势参与者，SPI（X_i）$= 0$；这是一种巧妙的方式，可以将虚设公理强化为针对弱势参与者的公理。

由于现任联合国安全理事会五个常任理事国拥有否决权，联合国安全理事会的投票制度在效率、公平、有效性、合法性和功能性等各个方面都存在严重缺陷 [87-90]。当前研究的一个重要领域是探讨改革联合国安全理事会的最佳方法，以及识别主要阻碍此类改革

实现的行动者或结构 [91-97]。遗憾的是，许多“改革”提案都要求扩大常任及阻挠成员的范围。这类提案不一定能保证改进一个本已存在缺陷的制度，反而往往会使其更加缺陷重重。一项受到一定关注的提案是加权投票 [85], ，但问题在于如何以公平的方式设定权重，使其能够为所有国家所接受。

5. 六成员投票制度

本节讨论六成员投票制度 [65；47, 46, 17, 16, 2, 1], 该制度代表2007 [98]苏格兰议会。该制度的前五名成员是政党，第六名成员则是一位独立个人。在许多研究中（例如 [99]），这个独立个人往往被忽略；这些研究考察的是简化后的五成员制度 [65；47, 46, 17, 16, 2]。我们先考察简化后的制度，再来看完整制度。对于简化后的制度，其决策函数可表示为最小和／完全和：

$$f(\boldsymbol{X}) = X_1X_2 \vee X_1X_3X_4 \vee X_1X_3X_5 \vee X_1X_4X_5 \vee X_2X_3X_4 \vee X_2X_3X_5. \tag{74}$$

该函数有六个质蕴含项，分别对应六个最小获胜联盟（$MWCs$），即 X_1X_2、 $X_1X_3X_4$、 $X_1X_3X_5$、$X_1X_4X_5$、 $X_2X_3X_4$ 和 $X_2X_3X_5$，每个都是由未取反文字构成的乘积项。现在我们应用不交化技术 [64, 67, 71, -, 得到（ ）的 74, 77 79] f $\boldsymbol{X}$ 不交和，在此表达式中，或运算符可以合法地替换为异或运算符，即：

$$f(\boldsymbol{X}) = X_1X_2 \oplus X_1\overline{X}_2X_3X_4 \oplus X_1\overline{X}_2X_3\overline{X}_4X_5 \oplus X_1\overline{X}_2\overline{X}_3X_4X_5 \oplus \overline{X}_1X_2X_3X_4 \oplus \overline{X}_1X_2X_3\overline{X}_4X_5. \tag{75}$$

现在，我们计算

$$wt(f) = 8 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1 = 15. \tag{76a}$$

$$wt((f/\overline{X}_1)\overline{X}_1) = wt(X_2X_3X_4 \oplus X_2X_3\overline{X}_4X_5) = 2 + 1 = 3. \tag{76b}$$

$$wt\left((f/\overline{X}_2)\overline{X}_2\right) = wt(X_1X_3X_4 \oplus X_1X_3\overline{X}_4X_5 \oplus X_1\overline{X}_3X_4X_5) = 2 + 1 + 1 = 4. \tag{76c}$$

$$wt((f/\overline{X}_3)\overline{X}_3) = wt(X_1X_2 \oplus X_1\overline{X}_2X_4X_5) = 4 + 1 = 5. \tag{76d}$$

$$wt\left((f/\overline{X}_4)\overline{X}_4\right) = wt(X_1X_2 \oplus X_1\overline{X}_2X_3X_5 \oplus \overline{X}_1X_2X_3X_5) = 4 + 1 + 1 = 6. \tag{76e}$$

请注意，上述得到的所有布尔商均由不交项组成（见附录D），这一特点使权重的计算更加简便。根据公式（5），我们得到

$$TBP(X_1) = 15 - (2)(3) = 9. \tag{77a}$$

$$TBP(X_2) = 15 - (2)(4) = 7. \tag{77b}$$

$$TBP(X_3) = 15 - (2)(5) = 5. \tag{77c}$$

$$TBP(X_5) = TBP(X_4) = 15 - (2)(6) = 3. \tag{77e}$$

最后，班扎夫总权力向量和归一化总班扎夫权力向量为 e

$$\boldsymbol{TBP} = [\ 9 \quad 7 \quad 5 \quad 3 \quad 3]^T,\ \boldsymbol{NTBP} = \left[\frac{9}{27} \quad \frac{7}{27} \quad \frac{5}{27} \quad \frac{3}{27} \quad \frac{3}{27}\right]^T. \tag{78}$$

互补函数 $f(\boldsymbol{X})$ 有六个质蕴含项，分别对应六个极大失败联盟（$MLCs$），每个联盟都是由未取反文字构成的乘积项，即

$$\overline{f}(\boldsymbol{X}) = \overline{X}_1\overline{X}_2 \vee \overline{X}_1\overline{X}_3 \vee \overline{X}_1\overline{X}_4\overline{X}_5 \vee \overline{X}_2\overline{X}_3\overline{X}_4 \vee \overline{X}_2\overline{X}_3\overline{X}_5 \vee \overline{X}_2\overline{X}_4\overline{X}_5. \tag{79}$$

注意，$\overline{f}$ 的一个质蕴含项，例如 $\overline{X}_1\overline{X}_2$，表示前两位成员反对该决议草案，因此它对应于一个最大失败联盟（MLC），该联盟由其余成员 $\{X_3\ X_4\ X_5$ 组成。$W_3 + W_4 +, , \}$ $W_5 = 17 + 16 + 2 = 35$ 这个联盟是失败联盟，因为其总权重（ ）小于配额 65。它是最大的，因为只要再加入一位投票者（X_1 或 X_2），它就会从失败转变为获胜。现在，我们运用不交化技术，为 $f(\boldsymbol{X})$ 求得一个不交和，其中或运算符可以合理地替换为异或运算符，即

$$\overline{f}(\boldsymbol{X}) = \overline{X}_1\overline{X}_2 \oplus \overline{X}_1 X_2\overline{X}_3 \oplus \overline{X}_1X_2X_3\,\overline{X}_4\overline{X}_5 \oplus X_1\overline{X}_2\overline{X}_3\overline{X}_4 \oplus X_1\overline{X}_2\overline{X}_3\,X_4\overline{X}_5 \oplus X_1\overline{X}_2\,X_3\overline{X}_4\overline{X}_5. \tag{80}$$

现在，我们用取反的函数 $f(\boldsymbol{X})$ 及其相对于未取反的 X_m、$1 \le m \le 4$ 的布尔商，重复先前的计算。

$$wt(\overline{f}) = 8 + 4 + 1 + 2 + 1 + 1 = 17. \tag{81a}$$

$$wt\left((\overline{f}/X_1)X_1\right) = wt(\overline{X}_2\overline{X}_3\overline{X}_4 \oplus \overline{X}_2\overline{X}_3\,X_4\overline{X}_5 \oplus \overline{X}_2\,X_3\overline{X}_4\overline{X}_5) = 2 + 1 + 1 = 4. \tag{81b}$$

$$wt\left((\overline{f}/X_2)X_2\right) = wt(\overline{X}_1\,\overline{X}_3 \oplus \overline{X}_1X_3\,\overline{X}_4\overline{X}_5) = 4 + 1 = 5. \tag{81c}$$

$$wt((\overline{f}/X_3)X_3) = wt(\overline{X}_1\overline{X}_2 \oplus \overline{X}_1X_2\,\overline{X}_4\overline{X}_5 \oplus X_1\overline{X}_2\overline{X}_4\overline{X}_5) = 4 + 1 + 1 = 6. \tag{81d}$$

$$wt\left((\overline{f}/X_4)X_4\right) = wt(\overline{X}_1\overline{X}_2 \oplus \overline{X}_1\,X_2\overline{X}_3 \oplus X_1\overline{X}_2\overline{X}_3\,\overline{X}_5) = 4 + 2 + 1 = 7. \tag{81e}$$

注意，$wt(f)$ 和 $wt(f)$ 的和为 $2^5 = 32$，符合要求；并且，上述得到的所有布尔商仍然由不交项构成，这一特点有助于计算权重。根据与公式 (5) 互补的公式，我们得出先前的结果

$$TBP(X_1) = 17 - (2)(4) = 9. \tag{82a}$$

$$TBP(X_2) = 17 - (2)(5) = 7. \tag{82b}$$

$$TBP(X_3) = 17 - (2)(6) = 5. \tag{82c}$$

$$TBP(X_5) = TBP(X_4) = 17 - (2)(7) = 3. \tag{82d}$$

上述分析表明，在计算班扎夫指数时，使用决策函数 $f(\boldsymbol{X})$ 还是其补函数 $f(\boldsymbol{X})$ 并无影响。其他一些投票权指数则不具备这一性质。一个显而易见的例子是 Manfred Holler 提出的公共物品指数（PGI）

Holler [47, 48, 99]。值得一提的是，Manfred Holler（无疑是当代最杰出的博弈论学家之一）或许会感到遗憾：倘若他（据推测）并非声名不显，他提出的公共物品指数（PGI）或许也会像班扎夫指数一样广为人知 [99]。我们注意到，PGI 考察$f(\boldsymbol{X})$，以统计表示 $MWCs$ 的乘积项中出现某位投票者的未取反文字的乘积项数量，并将这个数量作为该投票者的权力。在当前示例中，$\boldsymbol{PGI} = [\,4 \quad 3 \quad 4 \quad 3 \quad 3]^T$。如果改为考察$f(\boldsymbol{X})$，统计表示$MLCs$ 的乘积项中出现该投票者取反文字的乘积项数量，则会得到一个互补指数（记作 $CPGI$）。在当前示例中，$\boldsymbol{CPGI} = [\,3 \quad 4 \quad 3 \quad 3 \quad 3]^T$，显然二者不同。当然，可以通过计算算术平均数、几何平均数或调和平均数，将PGI 与$CPGI$ （或其归一化版本）结合起来。无论是PGI 还是$CPGI$ ，都不具备权重方面的局部单调性（班扎夫指数则具备）。投票指数的单调性要求，权重较大的投票者所享有的投票权力不能低于权重较小的投票者。

扩展六成员系统 [65 的决策函数 $f(\boldsymbol{X})$；47, 46, 17, 16, 2, 1] 正是缩减的五成员系统 [65; 47, 46, 17, 16, 2], 的决策函数，并增加两个额外的$MWCs$，即 $X_1X_3X_6$ 和 $X_2X_4X_5\,X_6$。 $f(\boldsymbol{X})$ 的表达式 (74) 应与 $(X_1X_3X_6 \ \vee \ X_2X_4X_5\,X_6)$ 作或运算，而其不相交表达式 (75) 则需要与 $(X_1\overline{X}_2X_3\overline{X}_4\overline{X}_5X_6 \ \oplus \ \overline{X}_1X_2\overline{X}_3X_4X_5\,X_6)$ 作异或运算。如果 $f(\boldsymbol{X})$ 保留原有表达式，其权重只需加倍，因为它现在是一个六变量函数，而不是五变量函数。但现在我们需要（将权重从 15 加倍到 30 后）再加上 $wt(X_1\overline{X}_2X_3\overline{X}_4\overline{X}_5X_6 \ \oplus \ \overline{X}_1X_2\overline{X}_3X_4X_5\,X_6) = 1 + 1 = 2$ ，使其达到 32。现在，我们通过将 (76b)-(76e) 中各量的原值加倍，并加上 $(X_1\overline{X}_2X_3\overline{X}_4\overline{X}_5X_6 \ \oplus \ \overline{X}_1X_2\overline{X}_3X_4X_5\,X_6)$ 的相应布尔商的权重，来重复计算，前提是不相交性得以保留。具体而言，我们得到

$$wt(\left(f/\overline{X}_1\right)\overline{X}_1) = (2)(3) + \ wt(\,X_2\overline{X}_3X_4X_5\,X_6) = 6 + 1 = 7. \tag{83a}$$

$$wt\left(\left(f/\overline{X}_2\right)\overline{X}_2\right) = (2)(4) + \ wt\left(X_1X_3\overline{X}_4\overline{X}_5X_6\right) = 8 + 1 = 9. \tag{83b}$$

$$wt(\left(f/\overline{X}_3\right)\overline{X}_3) = (2)(5) + \ \ wt(\,\overline{X}_1X_2X_4X_5\,X_6) = 10 + 1 = 11. \tag{83c}$$

$$wt\left(\left(f/\overline{X}_4\right)\overline{X}_4\right) = (2)(6) + \ \ wt\left(X_1\overline{X}_2X_3\overline{X}_5X_6\right) = 12 + 1 = 13. \tag{83d}$$

此外，我们将新术语 $wt\,((f/X_6)X_6)$ 作为原始 5-变量 f 的权重，其值为 15。根据公式（5），我们得到

$$TBP(X_1) = 32 - (2)(7) = 18. \tag{84a}$$

$$TBP(X_2) = 32 - (2)(9) = 14. \tag{84b}$$

$$TBP(X_3) = 32 - (2)(11) = 10. \tag{84c}$$

$$TBP(X_5) = TBP(X_4) = 32 - (2)(13) = 6. \tag{84d}$$

$$TBP(X_6) = 32 - (2)(15) = 2. \tag{84e}$$

最后，班扎夫总权力向量和归一化总班扎夫权力向量为 e

$$\boldsymbol{TBP} = [\,18 \quad 14 \quad 10 \quad 6 \quad 6 \quad 2\,]^T, \boldsymbol{NTBP} = [\tfrac{18}{56} \quad \tfrac{14}{56} \quad \tfrac{10}{56} \quad \tfrac{6}{56} \quad \tfrac{6}{56} \quad \tfrac{2}{56}\,]^T. \tag{85}$$

扩展六成员系统 [65 的互补函数 $f(\boldsymbol{X})$； 47, 46, 17, 16, 2, 1] 现在有八个质蕴含项，即

$$\overline{f}(\boldsymbol{X}) = \overline{X}_1\overline{X}_2 \vee \overline{X}_1\overline{X}_3\overline{X}_4 \vee \overline{X}_1\overline{X}_3\overline{X}_5 \vee \overline{X}_1\overline{X}_3\overline{X}_6 \vee \overline{X}_1\overline{X}_4\overline{X}_5 \vee \overline{X}_2\overline{X}_3\overline{X}_4 \vee \overline{X}_2\overline{X}_3\overline{X}_5 \vee \overline{X}_2\overline{X}_4\overline{X}_5\overline{X}_6. \tag{86}$$

现在，我们应用不交化技术，得到 $f(\boldsymbol{X})$ 的不交和，其中或运算符可以合理地替换为异或运算符，即

$$\overline{f}(\boldsymbol{X}) = \overline{X}_1\overline{X}_2 \oplus \overline{X}_1X_2\overline{X}_3\overline{X}_4 \oplus \overline{X}_1X_2\overline{X}_3X_4\overline{X}_5 \oplus \overline{X}_1X_2\overline{X}_3X_4X_5\overline{X}_6 \oplus \overline{X}_1X_2X_3\overline{X}_4\overline{X}_5 \oplus X_1\overline{X}_2\overline{X}_3\overline{X}_4 \oplus X_1\overline{X}_2\overline{X}_3X_4\overline{X}_5 \oplus X_1\overline{X}_2X_3\overline{X}_4X_5\overline{X}_6. \tag{87}$$

现在，我们根据取反后的函数 $f(\boldsymbol{X})$ 及其相对于未取反的 X_m、 $m = 1$、2、3、4、$\overline{6}$ 的布尔商，重复之前的计算。

$$wt(\overline{f}) = 16 + 4 + 2 + 1 + 2 + 4 + 2 + 1 = 32. \tag{88a}$$

$$wt\left((\overline{f}/X_1)X_1\right) = wt(\overline{X}_2\overline{X}_3\overline{X}_4 \oplus \overline{X}_2\overline{X}_3X_4\overline{X}_5 \oplus \overline{X}_2X_3\overline{X}_4\overline{X}_5\overline{X}_6) = 4 + 2 + 1 = 7. \tag{88b}$$

$$wt\left((\overline{f}/X_2)X_2\right) = wt(\overline{X}_1\overline{X}_3\overline{X}_4 \oplus \overline{X}_1\overline{X}_3X_4\overline{X}_5 \oplus \overline{X}_1\overline{X}_3X_4X_5\overline{X}_6 \oplus \overline{X}_1X_3\overline{X}_4\overline{X}_5) = 4 + 2 + 1 + 2 = 9. \tag{88c}$$

$$wt((\overline{f}/X_3)X_3) = wt(\overline{X}_1\overline{X}_2 \oplus \overline{X}_1X_2\overline{X}_4\overline{X}_5 \oplus X_1\overline{X}_2\overline{X}_4\overline{X}_5\overline{X}_6) = 8 + 2 + 1 = 11. \tag{88d}$$

$$wt\left((\overline{f}/X_4)X_4\right) = wt(\overline{X}_1\overline{X}_2 \oplus \overline{X}_1X_2\overline{X}_3\overline{X}_5 \oplus \overline{X}_1X_2\overline{X}_3X_5\overline{X}_6 \oplus X_1\overline{X}_2\overline{X}_3\overline{X}_5) = 8 + 2 + 1 + 2 = 13. \tag{88e}$$

$$wt\left((\overline{f}/X_6)X_6\right) = wt(\overline{X}_1\overline{X}_2 \oplus \overline{X}_1X_2\overline{X}_3\overline{X}_4 \oplus \overline{X}_1X_2\overline{X}_3X_4\overline{X}_5 \oplus \overline{X}_1X_2X_3\overline{X}_4\overline{X}_5 \oplus X_1\overline{X}_2\overline{X}_3\overline{X}_4 \oplus X_1\overline{X}_2\overline{X}_3X_4\overline{X}_5\,) = 8 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1 = 15. \tag{88f}$$

请注意， $wt(f)$ 与 $wt(\overline{f})$ 相加为 $2^6 = 64$，符合要求；并且上文得到的所有布尔商仍然由不交项构成，这一特点有助于计算权重。根据一个与公式（5）互补的公式，我们恢复了先前的结果

$$TBP(X_1) = 32 - (2)(7) = 18. \tag{89a}$$

$$TBP(X_2) = 32 - (2)(9) = 14. \tag{89b}$$

$$TBP(X_3) = 32 - (2)(11) = 10. \tag{89c}$$

$$TBP(X_5) = TBP(X_4) = 32 - (2)(13) = 6. \tag{89d}$$

$$TBP(X_6) = 32 - (2)(15) = 2. \tag{89e}$$

上述分析再次表明，在计算班扎夫指数时，使用决策函数 $f(\boldsymbol{X})$ 还是使用其补函数 $\bar{f}(\boldsymbol{X})$并无区别。对于扩展的 6 人系统 [65； 47, 46, 17, 16, 2, 1], 公共物品指数及其补函数为

$$\boldsymbol{PGI} = [\ 5 \quad 4 \quad 5 \quad 4 \quad 4 \quad 2\ ]^T, \boldsymbol{CPGI} = [\ 5 \quad 4 \quad 5 \quad 4 \quad 4 \quad 2\ ]^T. \tag{90}$$

这一次，两个指数相同，尽管它们仍不具备权重的局部单调性（而班扎夫指数具备）。

6. 一个由k取n制议院组成的三院制议会

在本节中，我们考虑一个虚构的三院制议会，它由一个维数为 3 的向量加权投票系统建模。该议会的议院分别是由投票者 $\boldsymbol{X}$ 组成的 k_1-取-n_1 制度、由投票者 $\boldsymbol{Y}$ 组成的 k_2-取-n_2 制度，以及由投票者 $\boldsymbol{Z}$ 组成的 k_3-取-n_3 制度。由于对称性，同一议院成员的投票权力相同，因此只需计算每个议院一名成员的权力。决策函数 $f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})$ 的最小和（由于它是单调的，因此也恰好是它的完全和）为

$$f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}) = Sy(n_1;\{k_1..n_1\};\boldsymbol{X}) \wedge Sy(n_2;\{k_2..n_2\};\boldsymbol{Y}) \wedge Sy(n_3;\{k_3..n_3\};\boldsymbol{Z}), \tag{91}$$

而补函数的是

$$\bar{f}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}) = Sy(n_1;\{0..k_1-1\};\boldsymbol{X}) \vee Sy(n_2;\{0..k_2-1\};\boldsymbol{Y}) \vee Sy(n_3;\{0..k_3-1\};\boldsymbol{Z}). \tag{92}$$

(91) 中构成性简单博弈函数 $Sy(n_1;\{k_1..n_1\};\boldsymbol{X})$ 关于其任一变量（例如 X_m $(1 \le m \le n_1)$）的布尔-香农展开可由 (34) 如下得出

$$Sy(n_1;\{k_1..n_1\};\boldsymbol{X}) = \bar{X}_m\ Sy(n_1-1;\{k_1..n_1-1\};\boldsymbol{X}/X_m) \vee X_m\ Sy(n_1-1;\{k_1-1..n_1-1\};\boldsymbol{X}/X_m),\ (1 \le m \le n_1), \tag{93}$$

因此，我们可以利用 (25)、(93)、(6)、(C.4) 和 (C.6) 计算出以下结果

$$wt(f) = \left(\sum_{a\in\{k_1..n_1\}} c(n_1,a)\right)\left(\sum_{a\in\{k_2..n_2\}} c(n_2,a)\right)\left(\sum_{a\in\{k_3..n_3\}} c(n_3,a)\right) = C(n_1,k_1)\ C(n_2,k_2)\ C(n_3,k_3). \tag{94}$$

$$wt(f/\bar{X}_m) = wt(Sy(n_1-1;\{k_1..n_1-1\};\boldsymbol{X}/X_m) \wedge Sy(n_2;\{k_2..n_2\};\boldsymbol{Y}) \wedge Sy(n_3;\{k_3..n_3\};\boldsymbol{Z})) = C(n_1-1,k_1)\ C(n_2,k_2)\ C(n_3,k_3). \tag{95}$$

$$TBP(X_m) = (C(n_1,k_1) - 2\ C(n_1-1,k_1))\ C(n_2,k_2)\ C(n_3,k_3)$$

$$= (C(n_1-1,k_1-1) - C(n_1,-1,k_1))\ C(n_2,k_2)\ C(n_3,k_3)$$

$$= c(n_1-1,k_1-1)\ C(n_2,k_2)\ C(n_3,k_3). \tag{96}$$

其中，$c(n,k)$ 是组合系数，而 $C(n,k) = \sum_{m=k}^{n} c(n\ m\ ,)$ 是累积组合系数（见附录 C）。类似地，我们得到

$$TBP(Y_m) = \ C(n_1, k_1)\ c(n_2 - 1, k_2 - 1)\ C(n_3, k_3), \tag{97}$$

$$TBP(Z_m) = \ C(n_{1,}, k_1)\ C(n_2, k_2)\ c(n_3 - 1, k_3 - 1). \tag{98}$$

如果假设第三议院是始终赞成的 0 取 0 系统，那么所考虑的三院制系统可能会简化为两院制系统，其中 $Sy(0; \{\ 0.\ .0\};\ \boldsymbol{Z}) = 1$ 且 $C(0, 0) = 1$。在这种情况下，我们得到

$$TBP(X_m) = \ c(n_1 - 1, k_1 - 1)\ C(n_2, k_2). \tag{99}$$

$$TBP(Y_m) = \ C(n_1, k_1)\ c(n_2 - 1, k_2 - 1). \tag{100}$$

现在我们可以重现前两节的结果。第3节中的家庭议会是一个1取2系统与一个2取3系统的交集。因此

$$TBP(P_1) = c(1, 0)\ C(3, 2) = (1)(4) = 4. \tag{101}$$

$$TBP(X_1) = C(2, 1)\ c(2,1) = (3)(2) = 6, \tag{102}$$

第4节中的联合国安全理事会是一个5取5系统与一个4取10系统的交集。因此

$$TBP(P_1) = c(4, 4)\ C(10, 4) = (1)(848) = 848, \tag{103}$$

$$TBP(N_1) = C(5, 5)\ c(9, 3) = (1)(84) = 84. \tag{104}$$

现在，让我们考虑一个三院制系统，它是一个7取9系统、一个5取7系统和一个3取5系统的交集。三个议院中代表性成员的班扎夫指数为

$$TBP(X_m) = c(8, 6)C(7, 5)\ C(5, 3) = (28)(29)(16) = 12{,}992, \tag{105}$$

$$TBP(Y_m) = C(9, 7)c(6, 4)\ C(5, 3) = (46)(15)(16) = 11{,}040, \tag{106}$$

$$TBP(Z_m) = \ C(9, 7)C(7, 5)\ c(4, 2) = (46)(29)(6) = 8{,}004. \tag{107}$$

我们稍作讨论，考察由相同组件构成的k取n系统的有效冗余区域，即系统可靠性优于单个组件可靠性时，组件可靠性所处的区间 [100-102]。对于所考察的三个议院，该区域分别为 **(0.842, 1.00)**、**(0.744, 1.00)** 和 **(0.500, 1.00)** [100]。我们的计算表明，在当前这个三院制议会的成员中，权力最大的是其k取n系统拥有最窄有效冗余区域的议院成员。这意味着，投票制度的冗余越弱，其投票者享有的投票权力就越大。如果三个议院之一是串联系统（没有冗余），那么其成员的权力就大于其他议院的成员。反之，如果三个议院之一是并联系统（完全冗余），那么其成员的权力就小于其他议院的成员。

我们还可以注意到，在上述系统中，只有第三议院（5人中须有3人赞成）采用简单多数规则。相比之下，前两个议院实行特别多数规则，这背离了简单多数，转而趋向全体一致或共识。这里，9人中须有7人赞成的议院

所要求的绝对多数高于7人中须有5人赞成的议院所要求的绝对多数。议院要求的绝对多数越高，决策成本也越高（因为必须有更多投票者同意，才能通过一项决议草案，而且决策也更难通过），但多数对少数的剥削成本会降低（因为能够被多数票否决或剥削的投票者减少，且每位投票者的权力都会增大）[85]。

我们可以将目前的研究结果用于对美国（US）联邦投票制度进行一项诚然过度简化的分析。该制度是一个由 537 个变量构成的系统，包括总统 P、副总统 V, S_i 或参议员 i （参议院成员 i ）（$1 \le i \le 100$），以及 H_j 或众议院议员 j （$1 \le j \le 435$）[2, 18]。如果忽略总统及副总统的权力，问题便简化为两院制议会的问题，应通过方程（99）和（100）求解。为了贴近实际，我们将问题分为两种情况。第一种情况下，总统不行使否决权，联邦制度便简化为参议院（51 席中的 51 席制）与众议院（435 席中的 218 席制）的交集（即每个议院均采用简单多数）。对于这种情况，我们得到

$$TBP(S_i) = c(99, 50)\, C(435, 218) = 5.045\mathrm{e}(+28) \times 4.436\mathrm{e}(+130) = 2.238\mathrm{e}(+159), \quad (108)$$

$$TBP(H_j) = C(100, 51)\, c(434, 217) = 5.834e(+29) \times 1.698\mathrm{e}(+129) = 9.906\mathrm{e}(+158). \quad (109)$$

在第二种情况下，总统行使否决权，联邦制简化为参议院作为一个 100 席中需获 67 席支持的系统，与众议院作为一个 435 席中需获 290 席支持的系统的交集（即每个议院均须获得三分之二多数）。对于这种情况，我们得到

$$TBP(S_i) = c(99, 66)\, C(435, 290) = 1.974e(+26) \times 1.420e(+119) = 2.804e(+145). \quad (110)$$

$$TBP(H_j) = C(100, 67)\, c(434, 289) = 5.538e(+26) \times 4.797e(+118) = 2.656e(+145). \quad (111)$$

Taylor 和 Pacelli [2] 仅通过忽略副总统的权力处理了上述问题。他们得到 $NTBP(P) = 0.038$、 $NTBP(S_i) = 0.0033$ 和 $NTBP(H_j) = 0.0015$。根据 [2], 参议员的权力与众议员的权力之比（$TBP(S_i)/TBP(H_j)$）为 2.200，而我们的近似计算表明，若总统不行使否决权，该比值为 2.259；若总统行使否决权，则为 1.056。

7. 结论

本文是一个持续进行的项目 [8, 10, 11, 16-18] 中的重要一步，该项目旨在为加权单调投票系统构建开关代数理论。人们自然期望这一新理论能够补充而非取代对这些系统占据主导地位且涵盖全面的博弈论描述。尽管本文完全致力于探讨一种重要的投票权力指数，即 Banzhaf 指数，但我们也有机会对另外两个相关指数略作评论，分别是：(a) Napel 和 Widgrén 提出的严格权力指数（SPI）[86], ，以及 (b) Holler（和 Packel）提出的公共物品指数（PGI）[47,48, 99]。本文以教程的形式介绍相关开关代数量的计算，包括布尔差分（布尔微分）、布尔商构造（布尔限制），以及开关函数的权重（真向量或最小项的数量）计算。本文还力求充分利用对称开关函数的性质及其展开，从而发挥对称性的优势。

本文针对四个示例给出了详尽（且多种）的解法，涵盖标量加权和向量加权投票系统。

在本文中，我们尝试了几种计算单调系统班扎夫指数的公式。在这些公式中，方程（2）使用开关函数的偏微分，而方程（5）、（6）和（7）则依赖于布尔商的构造。上述所有方程都需要计算开关函数的权重；将这些函数写成不相交与或式有助于完成这项计算。方程（5）至（7）的优点在于，其构造布尔商的过程能够保持不相交性，从而便于计算权重。方程（2）则没有这一优点，因为偏微分有时会破坏不相交性。

在本文采用的分析中，我们明确假设所研究系统中的变量在统计上相互独立。未来的研究需要放宽这一假设，并探讨以下问题：（a）党派认同与承诺 [103-105],这会使许多投票者呈现相似的投票模式（类似于可靠性研究中的共同原因效应）；以及（b）某些投票者之间的不相容问题 [106-108], 这种不相容会排除任何可能同时包含这些投票者的联盟。另一个值得探索的方向，是将投票理论的切换代数方面与定性比较分析（QCA）[14, 52, 109] 相结合。 Haake 和 Schneider [110] 为这种结合奠定了基础，他们提出，班扎夫指数衡量单个条件的解释力，并对所有条件的充分

小获胜联盟（$MWCs$）由切换代数表达式直接表示，因此值得考察早期将$MWCs$ 与投票权力相关联的研究 [8, 23, 24, 47, 48, 111-114]。

投票制度通过赋予投票者不同的权重，体现了投票者并非人人平等这一理念。在这种情况下，如果互换两名投票者不会改变博弈的结果，那么这两名投票者在该博弈中就是对称的。在每一种加权投票博弈中，权重相同的两名投票者自然是对称的，但反过来却不一定成立。事实上，权力／影响力分布并非权重分布的忠实映照。这两种分布不一定完全一致，不过对于大多数投票制度而言（根据大多数权力指数），二者相当接近或较为吻合 [115]。这种权重分配不一致的情形，正是权力指数文献中“设计问题”或“逆问题”的由来。这个问题可以表述如下：“给定一个投票者权力或影响力的目标向量，以及一个特定的权力指数，确定一种标量加权投票博弈，使不同投票者之间的权力／影响力分布尽可能接近给定的目标向量 [116-120]。”在这一表述中，权力指数是从规范性视角而非描述性视角加以运用的；我们选择“尽可能接近”这一说法，而非“完全一致”。事实上，我们并不总能找到一种权重分配，准确反映期望的权力／影响力 [121]。然而，某些加权投票制度确实存在一种权重选择，能够准确反映预先设定的权力／影响力 [7, 121]。

在另一项未来研究中，我们计划采用开关代数技术来处理其他标准投票制度。一个值得研究且计算复杂度很高的典型系统是向量加权537变量系统，它描述了美利坚合众国的联邦投票制度 [2, 18]。本文针对参议员与众议员的权力之比给出了一个近似解，其中忽略了总统和副总统的角色。不过，我们还需要求得一个精确解，以确定所有相关人员的权力，尤其是总统的权力。另一个值得研究的典型例子是《里斯本条约》下2014—2020年期间的欧盟理事会投票制度[31-34, 122]。该制度要求满足以下两个条件之一（即析取而非合取）：（a）至少16个成员国支持，且这些国家代表至少65%的欧盟总人口；或（b）当时28个成员国中至少25个成员国支持 [122]。我们还将探讨与投票权力相关的一些悖论，例如再分配悖论、新成员悖论、争吵悖论、捐赠悖论和大规模悖论 [123-129]。我们相信，完成上述任务后，便能从纯粹的开关代数视角完整讲述投票制度的故事。

附录A：单调布尔函数

布尔函数 $f(\boldsymbol{X}) = f(X_1, X_2, \dots, X_{m-1}, X_m, X_{m+1}, \dots, X_n)$ 被称为单调函数，当且仅当（iff）它可以表示为一种规范形式（乘积项之和或和项之积），且其中没有任何变量同时以取反和未取反的形式出现，即每个变量都是单形式，没有变量是双形式。这意味着，单调函数的乘积项之和（和项之积）表达式中的任意两个项或乘积项（和项或和）之间不存在对立。若存在一个规范形式的函数表示，其中 X_m 不以取反形式出现，则称单调布尔函数关于其参数 X_m 为正极性。当且仅当文字 $\bar{X}_m$ 的每次出现都是冗余的、可以被消去时，才会发生这种情况；也就是说，当且仅当存在与 X_m 无关的函数 f_{m1} 和 f_{m2}，使得 [14-18]

$$f(\boldsymbol{X}) = X_m\ f_{m1}(X_1, X_2, \dots, X_{m-1}, X_{m+1}, \dots, X_n) \vee\ f_{m2}(X_1, X_2, \dots, X_{m-1}, X_{m+1}, \dots, X_n). \quad \text{(A.1)}$$

简记为 $(f = X_m\ f_{m1} \vee\ f_{m2})$。每个自变量都具有正极性的单调布尔函数 X_m 称为单调不减函数（简称单调递增），用于表示单调标量加权投票系统 [8] 的决策，或相干阈值可靠性系统 [6, 7, 15]的成功。

如果函数 $f(\boldsymbol{X})$ 关于其变量 X_m 为正极性，那么它的子函数 $f(\boldsymbol{X}|1_{\mathrm{m}}) = f(\boldsymbol{X})/X_m = f_{m1} \vee f_{m2}$ 和 $f(\boldsymbol{X}|0_{\mathrm{m}}) = f(\boldsymbol{X})/\bar{X}_m = f_{m2}$，这意味着 $f(\boldsymbol{X}|0_{\mathrm{m}}) \leq f(\boldsymbol{X}|1_{\mathrm{m}})$。单调函数的布尔-香农展开中的子函数也是单调函数，且关于其余变量具有相同类型的极性（正极性、负极性或混合极性）。所有阈值（线性可分）函数都是单调函数，但反之则不成立。函数$X_1X_2 \vee X_3X_4$ 就是一个非阈值单调函数的例子。单调函数的所有质蕴含项都是本质的，因此它只有一个不可约析取形式，该形式既是其（唯一的）最小和，也是其完全和。反之则未必成立。

顺便强调一下，我们在此将分析范围限定于单调投票系统，其决策函数 $f(\boldsymbol{X})$ 是正极性单调函数。在对这些函数进行数学处理（例如展开、求导和不交化）时，我们可能会构造出包含某些变量的取反文字的函数公式。然而，该函数仍保持其单调性。相比之下，如果对函数 $f(\boldsymbol{X})$ 施加某些限制，则可能会破坏其单调性（至少部分如此）。例如，如果规定投票者 X_m 和X_k 不能同时属于同一个联盟，就需要将 $f(\boldsymbol{X})$ 中出现的乘积项 $X_m\,X_k$ 全部置零。这种置零会破坏 $f(\boldsymbol{X})$ 关于变量 X_m 和 X_k 各自的单调性，但不会破坏它对其余变量的单极化。

附录 B：单调非递减布尔函数的班扎夫指数替代公式证明

单调非递减布尔函数的权重由公式 (A.1) 和 (20) 得到：

$$wt(f) = wt\,(X_m\ f_{m1} \vee f_{m2}) = wt\,(X_m\,(f_{m1} \vee f_{m2}) \oplus \bar{X}_m\ f_{m2}) = wt\,(X_m\,(f_{m1} \vee f_{m2})) + wt(\bar{X}_m\,f_{m2}) = wt\,(X_m)\,wt\,(f_{m1} \vee f_{m2}) + wt(\bar{X}_m)\,wt(f_{m2}) = (1)\,wt\,(f_{m1} \vee f_{m2}) + (1)\,wt(f_{m2}) = wt\,(f_{m1} \vee f_{m2}) + wt(f_{m2}) = wt(f_{m1}) + wt(f_{m2}) - wt(f_{m1}\,f_{m2}) + wt(f_{m2}) = wt(f_{m1}) + 2\,wt(f_{m2}) - wt(f_{m1}\,f_{m2}). \tag{B.1}$$

关于 X_m 的 $f(\boldsymbol{X}) = (X_m\,(f_{m1} \vee f_{m2}) \oplus \bar{X}_m\ f_{m2})$ 偏导数为

$$(f_{m1} \vee f_{m2}) \oplus f_{m2} = (f_{m1} \vee f_{m2})\,\overline{f_{m2}} \vee f_{m2}\,\overline{f_{m1}}\ \overline{f_{m2}} = f_{m1}\overline{f_{m2}}. \tag{B.2}$$

根据方程（2），第 m $(1 \le m \le n)$ 位投票者的班扎夫总权力为

$$TBP(X_m) = wt\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial X_m}\right) = wt\left(f_{m1}\overline{f_{m2}}\right) = wt(f_{m1}) - wt(f_{m1}\,f_{m2}). \tag{B.3}$$

方程（5）中的第一项涉及权重

$$wt((f(\boldsymbol{X})/X_m)X_m) = wt\,(X_m\,(f_{m1} \vee f_{m2})) = wt\,(X_m)\,wt\,(f_{m1} \vee f_{m2}) = wt(f_{m1}) + wt(f_{m2}) - wt(f_{m1}\,f_{m2}).$$

因此，（5）中 $TBP(X_m)$ 的另一种表达式，对于 $(1 \le m \le n)$，可表示为

$$TBP(X_m) = 2\,wt((f(\boldsymbol{X})/X_m)X_m) - wt\big(f(\boldsymbol{X})\big) = 2(wt(f_{m1}) + wt(f_{m2}) - wt(f_{m1}\,f_{m2})) - \big(wt(f_{m1}) + 2\,wt(f_{m2}) - wt(f_{m1}\,f_{m2})\big) = wt(f_{m1}) - wt(f_{m1}\,f_{m2}). \tag{B.4}$$

方程（B.3）和（B.4）对 $(1 \le m \le n)$ 的班扎夫指数 $TBP(X_m)$ 给出了完全一致的表达式。现在，方程（6）中的第二项涉及权重

$$wt(\big(f(\boldsymbol{X})/\overline{X}_m\big)\overline{X}_m) = wt(\bar{X}_m\ f_{m2}) = wt(f_{m2}). \tag{B.5}$$

因此，对于（$1 \le m \le n$），式（6）中 $TBP(X_m)$ 的另一种表达式为

$$TBP(X_m) = wt\big(f(\boldsymbol{X})\big) - 2\,wt\left(\big(f(\boldsymbol{X})/\overline{X}_m\big)\overline{X}_m\right) = wt(f_{m1}) + 2\,wt(f_{m2}) - wt(f_{m1}\,f_{m2}) - 2wt(f_{m2}) = wt(f_{m1}) - wt(f_{m1}\,f_{m2}). \quad \text{(B.6)}$$

方程（B.3）、（B.4）和（B.6）对（$1 \le m \le n$）的班扎夫指数 $TBP(X_m)$ 给出了完全一致的表达式。顺便指出，如果函数 $f(\boldsymbol{X})$ 是阈值开关函数，那么其特征 Chow 参数本质上与式（5）或（B.4）[130-132] 中给出的班扎夫指数 $TBP(X_m)$ 一致。

附录 C：累积组合系数的迭代计算

二项式（组合）系数 $c(n,k)$（定义在 $(0 \le k \le n)$ 上）满足递归关系

$$c(n,k) = c(n-1,k) + c(n-1,k-1), \qquad (0 < k < n), \quad \text{(C.1)}$$

以及边界条件

$$c(n,0) = c(n,n) = 1, \quad n \ge 0. \quad \text{(C.2)}$$

我们使用大写形式 $C(n,k)$，以区别于小写形式 $c(n,k)$ 所表示的标准组合系数。我们将累积系数定义为

$$C(n,k) = \sum_{m=k}^{n} c(n,m), \qquad (0 \le k \le n). \quad \text{(C.3)}$$

该系数满足与 (C.1) 中类似的递归关系，即

$$C(n,k) = C(n-1,k) + C(n-1,k-1), \qquad (0 < k < n), \quad \text{(C.4)}$$

但边界条件为

$$C(n,0) = \sum_{m=0}^{n} c(n,m) = 2^n. \quad \text{(C.5a)}$$

$$C(n,n) = \sum_{m=n}^{n} c(n,m) = c(n,n) = 1. \quad \text{(C.5b)}$$

注意，虽然可以通过求和关系式 (C.3) 从 $c(n,k)$ 值数组得到 $C(n,k)$ 值数组，但根据 $c(n,n) = 1$ 或 $C(n,n+1) = 0$，以及差分关系，可以从 $C(n,k)$ 数组得到 $c(n,k)$ 数组

$$c(n,k) = C(n,k) - C(n,k+1). \qquad (0 \le k < n). \quad \text{(C.6)}$$

图 C.1 展示了在由 k（垂直向下）和 n（垂直向右）构成的二维平面上，$c(n,k)$（上方）和 $C(n,k)$（下方）的帕斯卡三角形构造。黄色线条是边界线，即顶部的水平线（$k = 0$）和对角线（$k = n$）。由这两条边界线划定的卦限内的每个节点，分别通过 $c(n,k)$ 的递归关系 (C.2) 和 $C(n,k)$ 的递归关系 (C.4) 得到。在这两种情况下，该节点的值等于其左侧节点的值与该左侧节点上方节点的值之和。通过按列迭代构造图 C.1 下方的构造，直到第 N 列，即可高效地计算累积组合系数。以下类帕斯卡代码片段可实现此计算。

$C(0,0) \coloneqq 1;\ C(1,0) \coloneqq 2;\ C(1,1) \coloneqq 1;$
$For\ n = 2\ to\ N\ do\ begin C(n,n) \coloneqq 1; For\ k = ($
$n-1)\ downto\ 1\ do C(n,k)\ = C(n-1,k)\ + C($
$n-1, k-1); C(n,0) \coloneqq 2 * C(n-1,0);$ 结束;

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		1	3	6	10	15	21	28	36	45
			1	4	10	20	35	56	84	120
				1	5	15	35	70	126	210
					1	6	21	56	126	252
						1	7	28	84	210
							1	8	36	120
								1	9	45
									1	10
										1

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023
		1	4	11	26	57	120	247	502	1013
			1	5	16	42	99	219	466	968
				1	6	22	64	163	382	848
					1	7	29	93	256	638
						1	8	37	130	386
							1	9	46	176
								1	10	56
									1	11
										1

图 C.1. 在以 k（垂直向下）和 n （垂直向右）为坐标轴的二维平面上，组合系数 $c(n, k)$（上图）和累积组合系数 $C(n, k)$（下图）的帕斯卡三角形构造。绿色单元格分别为 $c(9,3) = 84$（用于式 (73) 和 (104)）以及 $C(10,4) = 848$ （用于式 (72) 和 (103)）。

Ap附录 D：构造布尔商时保持不相交性

与或式 $\bigvee_{k=1}^{m} D_k$ 是两两不相交的乘积项 D_{k_1} 和 D_{k_2} 组成的，也就是说，$D_{k_1} \wedge D_{k_2} = 0$。当两个乘积项之间至少存在一个对立时，即至少有一个变量 X_j 在其中一个乘积项中取反，而在另一个乘积项中不取反 [64, 71, 79]，就会出现这种情况。现在，如果我们针对前述文字 X_j 或其补函数（文字 $\bar{X}_j$）构造该和的布尔商，那么这两个乘积项中的一个会缩减，因此仍与另一个保持不相交。如果我们针对不同于任何对立文字 X_j 或 $\bar{X}_j$的文字 X_i 构造该和 $\bigvee_{k=1}^{m} D_k$ 的布尔商，那么布尔商（D_{k_1}/X_i ）和（D_{k_2}/X_i）仍然不相交，因为其中一个含有 X_j 作为文字，而另一个含有 $\bar{X}_j$ 作为文字。这意味着，构造布尔商能够保持与或式的不相交性。

相比之下，不相交性不一定能在偏微分过程中保持。例如，对式（52）中的不相交表达式 $(P_1 \oplus \overline{P}_1 P_2)$ 关于 P_1 求偏导，得到式（53）中的非不相交表达式 $(1 \oplus P_2)$。同样，式（B.2）中 $f(\boldsymbol{X})$的不相交公式，其偏导数也不是不相交的。

参考文献

[1] Taylor, A., & Zwicker, W. (1999).《简单博弈》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，美国。[2] Taylor, A. D., & Pacelli, A. M. (2008).《数学与政治：策略、投票、权力与证明》，第二版，施普林格科学与商业媒体，纽约，美国。[3] Holler, M. J., & Nurmi, H.（编者）。

Wallis, ...2014).《选举与投票的数学》，施普林格国际出版，查姆，瑞士。[5] Hodge, J. K., & Klima, R. E. (2018).《投票与选举的数学：实践方法》。第二版。美国数学会，普罗维登斯，美

299-3 ，《应用科学杂志》

Alturki, A. M., & Rushdi, A. M. A. (2016). 加权投票系统：阈值布尔函

阈值系 ，《英国数学与计算机科学杂志》，19(6)，1-17。[10]

Rushd

学与计

2017). 工程与管理科学

在项目

数字与计算机科学进展杂志》，21(6)，1-15。[13] Rushdi, A. M. A., & 算机科学

[14] Rushdi, R. A., & Rushdi, A. M. (2018). 卡诺图在医学研究中的用途：胎儿营养不良案例。《
M. (20
科学杂
念向布
Publis
Rushd
https:
于布尔
34(2)。
可靠性
戴德金
[21] I
Acade
字设计
于权力指数与最小获胜联盟。《控制与控制论》，26，609-612。[24] Kirsch, W., & Langner, J. (2010). 权力指数与最小获胜联盟，《社会选择与福利》，34(1)，33-46。[25] Muro
Crama, Y., and Hammer, P. L. (2011年).《布尔函数：理论、算法与应用》，剑桥大学出版社，剑桥，英国。[27] Hidayat, T., & Rushdi, A. M. (2021). 基于阈值系统的家用微电网可靠性分析。《能源研究与评论杂志》，7(3)，14-26。[28] Budiman, F. N., & Rushdi, A. M. (2022). 利用故障树分析评估电力系统的可靠性。《卡西姆大学学报：工程与计算机科学》，14(1)，37-63。[29] Lee, K. D., & Lee, Y. H. (1994年). 阈值布尔滤波器。《IEEE 信号处理汇刊》，42(8)，2022-
156(2
学杂志
维数：
W. S.,
arXiv
《优化
度中权

[36] Strafiin Jr., P. D. (1988). Shapley-Shubik 和 Banzhaf 权力指数作为概率。载于 Roth, A. E.（编），《Shapley 值：向 Lloyd S. Shapley 致敬的论文集》，剑桥大学出版社，英格兰剑桥，第71-81页。[37] Freixas, J., Marciniak, D., & Pons, M. (2012). Johnston-Banzh
Banzh II, J. F. (1964). 加权投票行不通：一项数学分析。《罗格斯法律评论》，19，317-343。[39] Yamamoto, Y. (2012). Banzhaf 指数与布尔差分，载于《2012 年 IEEE 第42届多值逻辑国际研讨会》，191-196。[40] Penrose, L. S. (1946). 多数投票的基础统计。《皇家统计学会杂志》，109(1)，53-57。[41] Coleman, J. S. (2012). 集体的控制与集体的行动权力。载于《社会选择》（劳特利奇重印版），283-306。[42] Johnston, R. J. (1978). 关于权力测量：对 Laver 的一些回应。《环境与规划A》，10(8)，907-914。[43] Lorenzo-Freire, S., Alonso-Meijide, J. M., Casas-Méndez, B., & Fiestras-Janeiro, M. G. (2007). Deegan–Packel 和 Joh
Packe 的一种新权力指数。《国际博弈论杂志》，7，113-123。[45] I 。《理论 6] Fishburn, P. C., & Brams, S. J. (1996). 加权多数投票博 397-417。[47] Hoffer, M. J. (1982) 368-371。[48] Hollen, M. J. & Packe ／《经济学杂志》，43(1)，21-29。 [50] Leech, D. (2002). 经典权力指数表现的实证比较。《政治研究》，50(1)，1-22。[51] Laruelle, A., & Valenciano, F. (2001). 重新审视 Shapley-Shubik 指数和 Banzhaf 指数。《运筹学数 的卡诺图 计算机科学》，10(1)，53-88。[53] Rushc
Savir, 式设计。《IEEE计算机汇刊》，29(06)，442-451。[55] F
703-71 算。《微电子与可靠性》，27(6)，
权重。——SETA 2012：第7届国际会议，清铁户，安大略省，加拿大，2012年6月4日至8日。论文集》第7卷（第89-100页）。施普林格·柏林·海德堡。

[58] Brown, A., & Cusick, T. W. (2012). 某些布尔函数的递归权重。《数学密码学期刊》，6(2), 无需查看真值表即可求得汉明重量。《密码学与通信》，5，7-18。[60] Rushdi, A. M. A. & Ghaleb, F. A. M. (2015). 开关函数的沃尔什谱与实变换：从卡诺图视角进行综述。《卡西姆大学学报：工程与计算机科学》，7(2)，73-112。[61] Cusick, T. W. (2016). 对称布尔函数的汉明重量。《离散应用数学》，215，14-19。[62] Brown, F. M. (2003).《布尔推理：布尔方程逻辑》。Kluwer Academic Publishers，荷兰多德雷赫
开关代)16年新兴通信技术趋势国际会议（ETCT）》（第1-5页）。IEEE。
载于 M. 性与系统工程进展》，管理与工业工程丛书，施普林格国际出版，瑞士查姆，第139-161页。[65] Rushdi, A. M., & Rushdi, M. A. (2018). 命题逻辑现代三段论方法的数学原理与示例。第6章，载于 M. Ram（编），《信息系统中的应用数学》，Bentham Science Publishers，阿拉伯联合酋长国沙迦酋长国，第6卷，第123-167页。[66] Rushdi, A. M. A., (2019). 对称开关函数在多状态 k取n系统符号可靠性分析中的应用。《国际数学、工程与管理科学杂志》，4(2)，306-326。[67] Rushdi, A. M., & Amashah, M. H. (2021). 容斥、概率就绪表达式与布尔-香农展开在多状态可靠性分析中的关联。《阿卜杜勒阿齐兹国王大学学报：计算与信息技术科学》，10(2)，1-17。[68] Muroga, S. (1979).《逻辑设计与开关理论》，威利，纽约，纽约州，美国。[69] Astola, J., & Stankovic, R. S. (2006).《开关理论与逻辑设计基础》。施普林格，德国海德堡。[70] Roth Jr, C. H., Kinney, L. L., & John, E. B. (2020).《逻辑设计基础》，增强版第七版。圣智学习，波士顿，马萨诸塞州，美国。[71] Rushdi, A. M. & D. L. Al-Khateeb. (1983). 系统可靠性分析方法综述：卡诺图视角。《第一届沙特工程会议论文集》，沙特阿拉伯吉达，第1卷，第57-95页。[72] Hao, Z., Yeh, W. C., Wang
[73] I
A. M. A., & Hussain, A. R. (2019). 282-295。[75] Rushdi, A. M. A. & Amashah, M. H. (2021). 传统与 科学研究杂志》，8(1)，21-45。

[76] Rushdi, A. M. A., & Amashah, M. H. (2023年).《多状态容斥原理：传统版本与改进版本》，载于《数学与计算机科学研究亮点》第5卷第9章，Book Publisher International，印度西孟加拉邦胡格利，87-128页。 [77] Abraham, J. A. (1979年). 一种改进的网络可靠性算法，《IEEE可靠性汇刊》，R-28 (1)，58-61页。 [78] Dotson, W., and Gobien J. (1979年). 一种概率图的新分析技术，《IEEE电路与系统汇刊》，CAS-26(10)，855-865页。 [79] Bennetts, R. G. (1982年). 运用布尔技术分析可靠性框图，《IEEE可靠性汇刊》，R-31(2)，159-166页。 [80] Rushdi, A. M. (1986). 对称开关函数在k取n系统可靠性计算中的应用，《微电子与可靠性》，26(5)，973-987页。 [81] Rushdi, A. M. (1993年). k取n系统的可靠性，载于Misra, K. B.（编），《系统可靠性评估新趋势》第16卷，《工程基础研究》，爱思唯尔科学出版社，荷兰阿姆斯特丹，185-227页。 [82] Little, T. R. (1956年). 阿拉伯联盟：重新评估。《中东杂志》，10(2)，138-150页。 [83] Barnett, M., & Solingen, E. (2007年). 是蓄意设计使其失败，[illegible]的比较视角》，180-220页。 [84] Patterson, A., & McLean, C. (2015年). 阿拉伯国家联盟（LAS）。载于《国际组织与保护责任的落实》（第110-122页）。劳特利奇。[85] Posner, E. A., & S[illegible] 195-2[illegible]论杂志[illegible] Park, T. W. (1977年). 联合国安全理事会投票权力的[illegible]理事会[illegible]突解决杂志》，40(2)，219-237页。 [89] Ayis, D. N. (2013年). 联合国安全理事会是否具有公平的代表性？《 PRIAD 政策杂志》，1(2)，1-23 页。 [90] Felsenthal, D. S., & Machover, M. (2014年). 联合国安全理事会的投票权力：详细计算。《伦敦政治经济学院》，英国伦敦。 [91] Weiss, T. G. (2003年). 联合国安全理事会改革的幻象。《华盛顿季刊》，26(4)，147-161页。[92] Blum, Y. Z. (2005年). 联合国安全理事会改革提案。《美国国际法杂志》，99(3)，632-649页。[93] Voeten, E. (2007年). 为什么联合国安全理事会改革没有进展？制度主义理论的经验教训。载于《全球化时代的多边主义与安全机构》（第302-319页）。劳特利奇。[94] Gould, M., & Rablen, M. D. (2017年). 联合国安全理事会改革：公平与[illegible]). 为什么[illegible]比缓慢？评估联合国安全理事会改革的前景。《经济政策改革杂志》，22(1)，35-50[illegible]全球治[illegible]71-101页。 [97] Kang, B. Z., & Mukhtaruddin, M. I. (2022年). 联合国安全[illegible]

[98] Denver, D. (2007年). “历史性时刻”？2007年苏格兰议会选举结果。《苏格兰事务》，60(1)，61-79页。 [99] Holler, M. J. (2019年). 贫困公共物品指数的由来。《计算集体智能汇刊》第XXXIV卷，171-179页。 [100] Rushdi, A. M., & Al-Hindi, K. A. (1993年). k取n系统有效冗余区域下界表。《微电子与可靠性》，33(7)，979-992页。 [101] Rushdi, A. M. A., & Hassan, A. K. (2015年). 异质生态廊道中生境斑块间迁移的可靠性。《生态建模》，304，1-10页。 [102] [illegible]的系统[illegible] E. (197[illegible] [104] [illegible]，13(3)，[illegible]的关系：比较证据[illegible]《民主[illegible]kuba, V. (2008). 对联盟组成施加限制时的班扎夫指数评估。[illegible] Casas-[illegible]算存在不相容参与者时的班扎夫–科尔曼指数[illegible] [108] Skibski, O., Suzuki[illegible]与盟友[illegible] Badaw[illegible]的定性比较分析。《国际数学、工程与管理科学杂志》，[illegible]用班扎[illegible]释力（第150号）。帕德博恩大学国际经济学中心。[111] Alonso[illegible]指数。[illegible]模何时[illegible]联盟中的议价能力。《理论政治学杂志》，7(3)，301-316页。 [113] [illegible]》，41(2)，[illegible]n, W. (2016年). 投票与权力的数学视角。《数学与社会》，欧洲数学[illegible] Tannenbaum, P. (1997年). 加权投票系统中的权力。《数学杂志》，[illegible]额和权重集合，以实现预期的[illegible] (2010年[illegible]。 [118] Kurz, S. (2012). 关于逆权[illegible] [19] Weber, M. (2016年). 两级投票：衡量不平[illegible]会中权[illegible]，47(1)，65-88页。

[121] Houy, N., & Zwicker, W. S. (2014年). 投票权的几何：加权投票与超椭球。《博弈与经济行为》，105，122-147.[132] 关于第二量词的难题。《4OR》，19(2), 157-181.[123] Brams, S. J., and Affuso, P. J. (1976). 权力与规模：一个新悖论，《理论与决策》，7(1)，29-56. [124] Fischer, D., and Schotter, A. (1978年). 投票权重分配中“再分配悖论”的必然性，《公共选择》，33(2)，49-67. [125] Brams, S. J., and Affuso, P. J. (1985). 欧洲共同体部长理事会中的新投票权悖论，《选举研究》，4(2)，135-139. [126] Felsenthal, D. S., and Machover, M. (1995). 相对投票权的公设与悖论——批判性重新评估，《理论与决策》，38(2)，195-229. [127] Felsenthal, D. S., & Machover, M. (1998). 投票权的测量：理论与实践、问题与悖论。载于《投票权的测量》。爱德华·埃尔加出版社。[128] Van Deemen, A., and Rusino Laruel Valenciano, F. (2005年). 对若干投票权悖论的批判性重新评估，《公共选择》，125(1)，17-41. [130] O'Donnell, R., & Servedio, R. A. (2008, 五月). Chow 参数问题。载于《第四十届 ACM 计算理论年会论文集》（第517-526页）。[131] De, A., Diakonikolas, I., & Served Diakor AAAI人