arXiv:2304.07811v1 [math.CA] 16 Apr 2023

斯图姆-刘维尔算子的谱子空间与可变带宽

MARK JASON CELIZ[1], KARLHEINZ GR¨OCHENIG[2], 和 ANDREAS KLOTZ[2]

摘要。我们研究斯图姆-刘维尔算子 $f \mapsto -(pf')'$ 在 $\mathbb{R}$ 上的谱子空间，其中 p 是一个正的分段常数函数。这些子空间中的函数可被视为具有由 $1/\sqrt{p}$ 决定的局部带宽。利用斯图姆-刘维尔算子的谱理论，我们使这些谱子空间的再生核表达得更加明确，并在某些情形下将其完全计算出来。作为对采样理论的贡献，我们随后证明了这些子空间中采样与插值的必要密度条件，并确定了将稳定采样集与插值集区分开的临界密度。

1. 引言

在 [9] 中，我们提出了可变带宽这一新概念，它将 $\mathbb{R}$ 上的斯图姆-刘维尔算子理论与信号处理中的概念联系起来。粗略地说，带宽是信号（或函数）f 在实数轴上的最大频率，因此 f 可以表示为 $f(x) = \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$，通过傅里叶逆变换得到。直观上，谈论某个时刻附近的最大频率是合理的，x 换言之，也就是谈论可变带宽。然而，要对可变带宽作出精确的数学表述似乎很困难。工程文献提出了若干非正式定义 [3, 5, 11, 19], ，但迄今为止，没有一种得到认可。文献 [1, 2] 中的数学方法只能在索博列夫空间上得到一类新的范数，却缺少带宽的基本特征。Kempf 和 Martin [14] 尝试利用微分算子的自伴扩张，以算法方式处理可变带宽。

我们在 [9] 中通过 $\mathbb{R}$ 上的斯图姆-刘维尔算子的谱子空间来定义可变带宽；这一思想与 Pesenson 和 Zayed 关于抽象帕利-维纳空间的工作密切相关（[12, 15], 另见 [18]）。具体而言，设 $p > 0$ 是 $\mathbb{R}$ 上的严格正且足够光滑的函数，并在 $L^2(\mathbb{R})$ 中的适当定义域上考虑斯图姆-刘维尔算子 $A_p f = -(pf')'$，使得 A_p 成为正的自伴算子。谱定理断言存在一个投影值测度 $\Lambda \mapsto \chi_\Lambda(A_p)$。在 [9] 中，我们论证了，这样一个正交投影的值域是可变带宽的良好模型，并将帕利-维纳空间定义为（用工程术语来说，这是一个

2020 数学主题分类。 34A36,34B24,34L05, 34L25, 46B15,46E22 .关键词和短语。 帕利-维纳空间、谱子空间、可变带宽、再生核希尔伯特空间、采样、密度条件、斯图姆-刘维尔理论、谱理论。作者获奥地利科学基金（FWF）项目 P31887-N32 资助。M.J.C. 还感谢 OeAD-GmbH（奥地利教育与国际化机构）提供的支持。1

带限函数空间）

$$PW_{[0,\Omega]}(A_p) = \chi_{[0,\Omega]}(A_p)\, L^2(\mathbb{R}).$$

对于任意有限测度的博雷尔集 $\Lambda \subset [0,\infty)$，我们将相应的谱子空间记作 带限函数空间$_\Lambda(A_p)$ $= \chi_\Lambda(A_p)L^2(\mathbb{R})$。

取 $p \equiv 1$ 和 $A_p = -\frac{d^2}{dx^2}$，我们看到 $A_p f$的傅里叶变换为 $\widehat{A_p f}(\xi) = \xi^2 \hat{f}(\xi)$。因此，谱值 $\xi^2 \in [0,\Omega]$ 对应于频率 $\xi \in [-\sqrt{\Omega}, \sqrt{\Omega}]$。于是，带限函数空间$_{[0,\Omega]}(-\frac{d^2}{dx^2})$ $= \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \operatorname{supp} \hat{f} \subseteq [-\sqrt{\Omega}, \sqrt{\Omega}]\}$，并且与最大频率为 $\sqrt{\Omega}$ 的经典带限函数空间一致。[1]

在 [9] 中，我们证明了关于一般帕利-维纳空间 PW$_{[0,\Omega]}$(A$_p$)的若干一般性定理，以支持对可变带宽的诠释。其中包括一个一般且近乎最优的采样定理：从离散集合 X $\subseteq \mathbb{R}$ 上的样本 $\{f(x) : x \in X\}$ 重建 PW$_{[0,\Omega]}$ (A$_p$)中的函数；以及采样所必需的密度条件。这些结果表明，PW$_{[0,\Omega]}$(A$_p$)中的函数在 x 附近的表现类似于最高频率为（Ω/ p(x))$^{1/2}$ 的函数。因此，定义斯图姆-刘维尔算子的函数 p 对局部带宽进行了参数化。

尽管理论取得了成功，并且已有明确的迭代重建算法，但要实现预期的数值计算，仍面临一些直接而严峻的困难。即使采用最简单粗略的数值处理，也需要了解再生核，也就是 PW$_{[0,\Omega]}$(A$_p$)中能够确定点值的那些函数$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)k_x(y)dy$ $= \langle f, k_x \rangle$。由于$PW_{[0,\Omega]}(A_p)$是再生核希尔伯特空间 [9,（命题 3），这些函数确实存在。但这个再生核究竟是什么呢?

要深入研究帕利-维纳空间，或尝试以数值方式实现采样重建，都必须了解再生核。在某种意义上，这种情形类似于解析函数空间（伯格曼空间）的理论，其中一些最深刻的结果都取决于再生核的精妙性质（参见 [7] 中的一个著名例子）。

尽管谱投影是与斯图姆-刘维尔算子相关的自然对象，但令人惊讶的是，目前似乎鲜有明确的相关知识。可以从谱理论推导出如下通用公式。设 $\Phi(\lambda, \cdot) = (\Phi^+(\lambda, \cdot)\ \Phi^-(\lambda, \cdot))$ 是 $A_p f = -(pf')' = \lambda f$ 在 $\mathbb{R}$ 上的一个合适的基本解系，并且它关于 $\lambda \in \mathbb{R}$ 连续变化。若 $\Lambda \subseteq [0,\infty)$ 的勒贝格测度有限，则存在一个由 $\Phi(\lambda, \cdot)$ 构造的正矩阵值博雷尔测度 2×2（详情参见例如 [21, 第 14] 节），使得 $PW_\Lambda(A_p)$ 的再生核为

$$k_\Lambda(x,y) = k_x(y) = \int_\Lambda \overline{\Phi(\lambda,x)} \cdot \Phi(\lambda,y)\, d\mu(\lambda) = \langle \Phi(\cdot,y), \Phi(\cdot,x) \rangle_{L^2(\Lambda,\mu)}. \tag{1.1}$$

[1]由于我们处理的是二阶微分算子，最大的频率 $\sqrt{\Omega}$ 对应最大的谱值 Ω。由于我们采用谱定义来描述可变带宽，因此倾向于在定义中将最大的特征值作为参数。

$L^2([0,\Omega],\ \mu)$ 中的内积为

$$\langle F,G\rangle_{L^2(\mathbb{R},\mu)}=\int_\Lambda F(\lambda)\cdot\overline{G(\lambda)}\,d\mu(x)=\sum_{j,k=1}^{2}\int_\Lambda F_j(\lambda)\overline{G_k(\lambda)}\,d\mu_{jk}(\lambda)$$

其中 μ_{jk}是 μ的分量测度。参见 [6, 第 XIII 节。5] 关于矩阵测度的更多细节。

在这个经典公式中，核仍依赖于基本解的知识，因此远非显式。

本文研究斯图姆-刘维尔算子$A_p f\ =-(pf')'$，其中p 是分段常数的正函数，并尽可能显式地给出再生核k。设$t_1<t_2<\cdots<t_n$为p的跳跃点位置，并令$t_0=-\infty$和$t_{n+1}=+\infty$。那么阶梯函数

$$p(x)=\sum_{j=0}^{n}p_j\chi_{(t_j,t_{j+1}]}(x)\tag{1.2}$$

就是我们用于参数化可变带宽的模型。事实上，这是最自然的假设，因为可以证明，对于这样的参数化函数，$f\in PW^{[0,\Omega]}(A_p)$ 在区间 $I_j=[t_j,t_{j+1})$ 上的限制，等于一个带宽为 $(\Omega/p_j)^{1/2}$ 的经典带限函数在该区间上的限制。这是合理的，因为算子 A_p限制在 $L^2(I_j)$ 上时，恰为 $-p_j d^2/dx^2$，其特征函数为 $e^{\pm i\lambda x}$，对应的特征值为 $p_j\lambda^2$。因此，谱值 $p_j\lambda^2\le\Omega$对应于频率$|\lambda|\le(\Omega/p_j)^{1/2}$，参见 [9, 命题 3.5]。

对于这类自然的参数化函数，我们可以比 (1.1) 更明确地描述再生核。设 $\Phi(\lambda,\cdot)=(\Phi^+(\lambda,\cdot)\ \Phi^-(\lambda,\cdot))$ 是 $A_p f\ =-(p f')'=\lambda f$ 的一个基本解系，且它关于 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$解析依赖。那么，$PW_\Lambda(A_p)$ 的再生核如下。

定理 1.1. 设 $\Lambda\subset\mathbb{R}_0^+$和 p 是分段常数正函数，如 (1.2)所示。则 $PW_\Lambda(A_p)$是一个再生核希尔伯特空间，其核具有如下形式

$$k_\Lambda(x,y)=\frac{1}{2\pi}\sum_{j,k=1}^{n}\chi_{(t_j,t_{j+1}]}(x)\chi_{(t_k,t_{k+1}]}(y)\int_{\Lambda^{1/2}}\frac{\vartheta_{jk}(u)}{\kappa(u)}\,du,\quad x,y\in\mathbb{R}.$$

所有函数 ϑjk 和 κ 都仅依赖于参数 $\{p_j:j=1,\ldots,n\}$ 以及 p 的跳跃点$\{t_j\}$。此外，每个函数 ϑjk 和 κ 都是实系数的几乎周期多项式。

对于谱 $\Lambda=[0,\Omega]$ and $n=2$，即 p 有两个跳跃点，并将 $\mathbb{R}$ 划分为三个局部带宽恒定的区间，κ可以显式计算为（令 $q_k=p^{-1/2}{}_k$，$k=0,\ 1$）

$$\kappa(u)=\tfrac{1}{16q_0^2}\left[\left(1+\tfrac{q_0}{q_1}\right)^2\left(1+\tfrac{q_1}{q_2}\right)^2+\left(1-\tfrac{q_0}{q_1}\right)^2\left(1-\tfrac{q_1}{q_2}\right)^2\right]+\tfrac{1}{8q_0^2}\left(1-\tfrac{q_0^2}{q_1^2}\right)\left(1-\tfrac{q_1^2}{q_2^2}\right)\cos 2q_1Tu.$$

核k 可通过计算以下形式的参数积分得到

$$J(s) = \int_{\Lambda^{1/2}} \frac{e^{isu}}{C + K\cos\zeta u}\, du, \quad s \in \mathbb{R}.$$

这个积分似乎是一种新型特殊函数。于是，核可以借助该函数显式写出J。这将在定理4.4中完成。

在论文的第二部分，我们仿照 Landau [13]，针对分段常数参数函数 p 的情形，推导 带限函数空间$_\Lambda(A^p)$中的采样和插值必要密度条件。与 [9, 节 6], 中一样，我们考虑正测度

$$\mu_p([a,b]) = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{p(x)}},$$

该测度由参数化函数 p 决定。我们还回顾以下概念。若存在C_1,$C_2 > 0$ 使得X 是带限函数空间带限函数空间$_\Lambda(A^p)$的稳定采样集，则称X 为该空间的稳定采样集。

$$C_1 \|f\|_2^2 \le \sum_{x\in X} |f(x)|^2 \le C_2 \|f\|_2^2 \quad \text{for all } f \in PW_\Lambda(A_p).$$

此外，若对每个$c \in \ell^2(X)$，都存在$f \in$ 带限函数空间$_\Lambda(A^p)$，使得对所有$x \in X$，均有$f(x) = c_x$，则X 是带限函数空间$_\Lambda(A^p)$的插值集。利用 μ_p 给出的 Beurling 上、下密度的修正版，我们推导出以下形式的密度定理。

定理 1.2（带限函数空间$_\Lambda$（A^p）中的密度定理）。 设 p 是一个分段常数函数，且$\Omega > 0$。

（i）若 X 是带限函数空间$^{[0,\Omega]}$（A^p）的稳定采样集，则

$$D_p^-(X) = \liminf_{r\to\infty} \inf_{x\in\mathbb{R}} \frac{\#(X\cap B_r(x))}{\mu_p(B_r(x))} \ge \frac{\Omega^{1/2}}{\pi}.$$

（ii）若 X 是带限函数空间$^{[0,\Omega]}$（A^p）的插值集，则

$$D_p^+(X) = \limsup_{r\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\#(X\cap B_r(x))}{\mu_p(B_r(x))} \le \frac{\Omega^{1/2}}{\pi}.$$

尽管密度定理并未提及再生核，但定理 1.1对其证明至关重要。在定理1.2 的证明中，我们将应用再生核希尔伯特空间中关于采样与插值的一般密度定理 [8]。该定理指出，再生核的平均迹就是临界密度。基于定理 1.1的半显式公式，我们将证明平均迹等于 $\sqrt{\Omega}/\pi$（见定理 5.9）。

定理 1.2 适用于更一般的谱 Λ。事实上，若 $\Lambda \subset \mathbb{R}^+$ 具有有限的勒贝格测度，则采样的必要条件为

$$D_p^-(X) \ge \tfrac{1}{\pi}\big|\{x\in\mathbb{R} : x^2 \in \Lambda\}\big|,$$

其中，$|I|$ 表示集合$I \subseteq \mathbb{R}$的勒贝格测度。

最后，所需密度的表述与 [9,定理 6.2，63]中的主要结果相同。然而，对参数化函数 p 的假设截然不同

。在 [9] 中，我们假设p 至少是光滑的C^2,，然后将 Sturm-Liouville 算子变换为一个等价的薛定谔算子，并应用散射理论。在 [10] 的多变量版本中，我们甚至假设$p \in C^\infty$，并利用椭圆偏微分方程的正则性理论来推导再生核的信息。对于奇异函数p 的情形，所有这些工具都完全失效；我们的主要工具是算子A_p 的简单形式，以及由此对再生核获得的更明确认识。

1.1. 文章结构。本文安排如下：第 2 节回顾斯图姆-刘维尔理论中的若干概念和结果。第 3 节严格引入帕利-维纳函数空间 $\mathrm{PW}_\Lambda(\mathrm{A}_p)$。我们将确定一个适当的基本解系，以及 A_p 的谱测度 μ。第 4 节计算分段常数参数函数 p 对应的 $\mathrm{PW}^{[0,\Omega]}(\mathrm{A}_p)$ 的再生核。第 5 节推导分段常数 p 对应的 $\mathrm{PW}_\Lambda(\mathrm{A}_p)$ 中采样和插值的必要密度条件。

致谢：我们感谢同事 Gerald Teschl 和 Jussi Behrndt 就斯图姆-刘维尔算子的谱理论进行讨论并提供建议。

2. 斯图姆-刘维尔算子的谱理论

本节改编自 [9],，简要回顾了 $\mathbb{R}$ 上奇异斯图姆-刘维尔微分表达式的相关谱理论，该表达式采用散度形式。给定一个正函数 p 定义在 $\mathbb{R}$上，我们定义微分表达式 τ_p 如下：$\tau_p f = -(pf')'$。

命题 2.1。若 p 是定义于 （1.2）中的分段常数函数，则 τ_p 其定义域为

$$\mathscr{D}(A_p) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f, pf' \in AC_{loc}(\mathbb{R}) \text{ and } \tau_p f \in L^2(\mathbb{R})\},$$
$$A_p f = \tau_p f, f \in \mathscr{D}(A_p)$$

在 L^2（$\mathbb{R}$）上定义了自伴算子 A_p。A_p 的谱是纯绝对连续谱，由正半轴组成： σ（A_p） $= \sigma_{ac}$（A_p） $= [0,\infty)$。

证明。关于自伴性的断言是标准结论，参见例如 [17, 21, 6]。关于纯绝对连续谱的结果可由 [16]推得。 ∎

我们还有 $\mathrm{A}A_p$ 的如下谱表示（见 [9]）。

命题 2.2。若 Φ（λ，x） $= \big(\phi_1$（λ，x） ϕ_2（λ，x）$\big)$ 是方程 （$\tau - \lambda$）$\phi = 0$ 的基本解系，并且关于 λ 连续，则存在一个 2×2 矩阵测度ρ，使得算子

$$\mathscr{F}_{A_p} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}, d\rho); \quad \mathscr{F}_{A_p} f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\overline{\Phi(\lambda, x)}\,dx$$

是酉矩阵，并将 A 对角化，即

$$\mathscr{F}_{A_p} A \mathscr{F}_{A_p}^{-1} G(\lambda) = \lambda G(\lambda)$$

对所有的 $G \in L^2(\mathbb{R}, d\rho)$。其逆矩阵形式为

$$\mathscr{F}_{A_p}^{-1} G(x) = \int_{\mathbb{R}} G(\lambda) \cdot \Phi(\lambda, x)\, d\rho(\lambda).$$

对于 $G \in L^2(\mathbb{R},\ d\rho)$。

若 g 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的有界 *Borel* 函数，则对于每个 $f \in L^2(\mathbb{R})$，

$$g(A) f(x) = \int_{\mathbb{R}_0^+} g(\lambda) \mathscr{F}_{A_p} f(\lambda) \cdot \Phi(\lambda, x)\, d\rho(\lambda).$$

所有积分 $\int_{\mathbb{R}}$ 均应理解为 $\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int ba$，且在 L^2 中收敛。

$\mathscr{F}_{A_p}$ 称为谱变换（也称为A的谱表示）。

注。总可以选取一个基本解系 $\Phi(\lambda,\ \cdot)$，使其连续（甚至解析）地依赖于 λ [21]。随后可以（并且将会）根据这样一组基本解$(A - z)\phi = 0$显式构造谱测度，参见 [6, 17, 20, 21]。

特别地，与博雷尔集 $\Lambda \subseteq \mathbb{R}_0^+$ 对应的谱投影 $\chi_\Lambda(A_p) : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ 由下式给出

$$\chi_\Lambda(A_p) f = \int_\Lambda \mathscr{F}_{A_p} f(\lambda) \cdot \Phi(\lambda, \cdot)\, d\mu(\lambda) = \mathscr{F}_{A_p}^{-1}(\chi_\Lambda \mathscr{F}_{A_p} f)$$

对所有 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 都成立。利用这个投影算子，我们定义了研究可变带宽方法的核心对象。

定义 2.3。设 A_p 如命题 2.1 中所定义，且 $\Lambda \subset \mathbb{R}_0^+$为有限测度。帕利-维纳空间记为带限函数空间$_\Lambda(A_p)$，它是 $\chi_\Lambda(A_p)$的值域，即

$$PW_\Lambda(A_p) = \chi_\Lambda(A_p)(L^2(\mathbb{R})).$$

等价地，函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 属于 带限函数空间$_\Lambda(A_p)$，当且仅当 $f = \chi_\Lambda(A_p) f$。

关于可变带宽函数的一些基本性质可见 [9,第 3] 节。正如 [9], 所述，这一定义是赋予可变带宽这一概念以意义的一种方式。

3. 具有分段常数参数化的帕利-维纳空间

现在我们给出关于带限函数空间$_\Lambda(A_p)$的结果，其中p 如（1.2）中所示为分段常数。我们将推导谱测度的公式，并讨论计算再生核的策略。

3.1.（$\tau_p-\lambda$）f $=0$ 的基本解。为了推导谱表示 $\mathscr{F}_{A_p}$，我们选取基本解系 $\Phi(z\cdot)=(\Phi^+$ $(z\cdot)\ \Phi^-(z\cdot))$，它由（$\tau_p-z$）f $=0$ 的（经典）解组成，且依赖于 z 的解析性 $\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$，并满足其中一个解在 $L^2(\mathbb{R})$ 中右侧可积，另一个在左侧可积（若对某个 $c\in\mathbb{R}$，函数 f 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中满足 f $\in L^2(c\ \infty)$，则称 f 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中右侧可积。类似地，若 f $\in L^2(-\infty,c)\in\mathbb{R}$，则称 f 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中左侧可积）。这些额外的可积性条件是为推导谱测度做准备。

策略如下。由于在区间 $I_k=[t_k,t_{k+1})$ 上 p 为常数 $p(x)=p_k$，特征值方程 $A_pf=zf$ 变为 $(-p_kD^2-z)f=0$（I_k 上），因此，A_p 的每个特征函数限制在 I_k 上时，都可以用指数函数表示为初等解。要得到定义在整个 $\mathbb{R}$ 上的 A_p 的特征函数，我们必须将这些局部解拼接起来，这种构造类似于样条函数。下面我们统一使用以下记号

$$q_k=\frac{1}{\sqrt{p_k}},$$

因为这就是特征函数的精确局部频率。我们还将 z 的主平方根定义如下：若 $z=re^{i\theta}\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$，其中 $r>0$ 且 $-\pi<\theta<\pi$，则 $\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{i\theta/2}$。特别地，$\mathrm{Im}z$ 与 $\mathrm{Im}\sqrt{z}$ 同号。

定理 3.1. 设 p 为分段常数函数。则存在解析函数 a_l^+、b_l^+、a_j^-、b_j^-，它们从 $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ 映射到 $\mathbb{C}$，使得对于每个 $z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$，函数

$$\Phi^+(z,x)=\begin{cases}a_l^+(z)e^{iq_l\sqrt{z}x}+b_l^+(z)e^{-iq_l\sqrt{z}x}, & x\in I_l,0\le l\le n-1,\\ e^{iq_n\sqrt{z}x}, & x\in I_n,\end{cases}\tag{3.1}$$

$$\Phi^-(z,x)=\begin{cases}e^{-iq_0\sqrt{z}x}, & x\in I_0,\\ a_j^-(z)e^{iq_j\sqrt{z}x}+b_j^-(z)e^{-iq_j\sqrt{z}x}, & x\in I_j,1\le j\le n\end{cases}\tag{3.2}$$

是$(\tau_p-z)f=0$在 $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$上关于 z 解析的解。

若 $Imz>0$，则 $\Phi(z\cdot)=\left(\Phi^+(z\cdot)\ \phi^-(z\cdot)\right)$是$(\tau_p-z)f=0$的一组基本解系，其中 $\Phi^+(z\cdot)$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中属于右侧，而 $\Phi^-(z\cdot)$ 属于左侧，并且

类似地，若 $Imz<0$，则 $\overline{\Phi}(z\cdot)$是$(\tau_p-z)f=0$的一组基本解，其中$\Phi^+(z\cdot)$在 $L^2(\mathbb{R})$ 中属于右侧，而 $\overline{\Phi}^-(z\cdot)$属于左侧。

令

$$L_k(z)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\left(1+\frac{q_k}{q_{k-1}}\right)e^{it_k(q_{k-1}-q_k)\sqrt{z}} & \left(1-\frac{q_k}{q_{k-1}}\right)e^{-it_k(q_{k-1}+q_k)\sqrt{z}}\\ \left(1-\frac{q_k}{q_{k-1}}\right)e^{it_k(q_{k-1}+q_k)\sqrt{z}} & \left(1+\frac{q_k}{q_{k-1}}\right)e^{-it_k(q_{k-1}-q_k)\sqrt{z}}\end{bmatrix},\tag{3.3}$$

系数 $a^\pm$、$b^\pm$ 满足递推关系

$$\begin{bmatrix}a_k^\pm(z)\\ b_k^\pm(z)\end{bmatrix}=L_k(z)\begin{bmatrix}a_{k-1}^\pm(z)\\ b_{k-1}^\pm(z)\end{bmatrix}.$$

因此，系数 $a^{\pm}$、$b^{\pm}$ 是变量 $\sqrt{z}$ 的几乎周期三角多项式。

证明。 固定 $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$。在区间 $I_k = [t_k, t_{k+1})$ 上，参数化函数 p 为常数，因此我们需要求解

$$(A_p - z)f(x) = (-p_k \frac{d^2 f}{dx^2} - zf)(x) = 0 \qquad \in I_k .$$

显然，这些局部解 $\varphi_k(z\ \cdot)$ 具有如下形式

$$\varphi_k(z,x) = a_k(z)e^{iq_k\sqrt{z}x} + b_k(z)e^{-iq_k\sqrt{z}x}, \quad x \in I_k$$

对于某些常数 $a_k(z), b_k(z) \in \mathbb{C}, 0 \le k \le n$. 我们需要以适当的方式选取这些常数，使函数

$$\varphi(z,x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(z,x)\chi_{I_k}(x)$$

满足 $\varphi(z\ \cdot), p\varphi'(z\ \cdot) \in AC_{loc}(\mathbb{R})$。这些条件意味着，对每个 k,

$$\begin{bmatrix} \varphi_{k-1}(z,t_k) \\ \frac{1}{q_{k-1}^2}\varphi'_{k-1}(z,t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(z,t_k) \\ p(t_k)\varphi'(z,t_k) \end{bmatrix} = \lim_{x \downarrow t_k} \begin{bmatrix} \varphi(z,x) \\ p(x)\varphi'(z,x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_k(z,t_k) \\ \frac{1}{q_k^2}\varphi'_k(z,t_k) \end{bmatrix} .$$

代入局部解后，得到

$$\begin{bmatrix} e^{iq_{k-1}\sqrt{z}t_k} & e^{iq_{k-1}\sqrt{z}t_k} \\ i\frac{\sqrt{z}}{q_{k-1}}e^{iq_{k-1}\sqrt{z}t_k} & -i\frac{\sqrt{z}}{q_{k-1}}e^{iq_{k-1}\sqrt{z}t_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{k-1}(z) \\ b_{k-1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{iq_k\sqrt{z}t_k} & e^{iq_k\sqrt{z}t_k} \\ i\frac{\sqrt{z}}{q_k}e^{iq_k\sqrt{z}t_k} & -i\frac{\sqrt{z}}{q_k}e^{iq_k\sqrt{z}t_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k(z) \\ b_k(z) \end{bmatrix} .$$

根据式（3.3）中的矩阵L_k（z），φ（$z\ \cdot$）是（$\tau_p - z$）$f = 0$的一个解，当且仅当以下关系成立：

$$\begin{bmatrix} a_k(z) \\ b_k(z) \end{bmatrix} = L_k(z) \begin{bmatrix} a_{k-1}(z) \\ b_{k-1}(z) \end{bmatrix}$$

对所有k均成立。特别地，取a_0^-（z）$= 0$、b_0^-（z）$= 1$，并通过以下方式递归生成其余系数：

$$\begin{bmatrix} a_j^-(z) \\ b_j^-(z) \end{bmatrix} = L_j(z) \begin{bmatrix} a_{j-1}^-(z) \\ b_{j-1}^-(z) \end{bmatrix}, \quad 1 \le j \le n, \tag{3.4}$$

我们生成 Φ^-（$z\ \cdot$），它是（$\tau_p - z$）$f = 0$的一个解，$z \in \mathbb{C} \setminus$（$-\infty$，$0$] 正如式（3.2）所述。类似地，我们利用以下方法生成 Φ^+ 式（3.1）中的

$$R_k(z) = L_k^{-1}(z) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{q_{k-1}}{q_k}\right) e^{-it_k(q_{k-1}-q_k)\sqrt{z}} & \left(1 - \frac{q_{k-1}}{q_k}\right) e^{-it_k(q_{k-1}+q_k)\sqrt{z}} \\ \left(1 - \frac{q_{k-1}}{q_k}\right) e^{it_k(q_{k-1}+q_k)\sqrt{z}} & \left(1 + \frac{q_{k-1}}{q_k}\right) e^{it_k(q_{k-1}-q_k)\sqrt{z}} \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

初始值

$$a_n^+(z) = 1, b_n^+(z) = 0$$

以及递推关系

$$\begin{bmatrix} a_l^+(z) \\ b_l^+(z) \end{bmatrix} = R_{l+1}(z) \begin{bmatrix} a_{l+1}^+(z) \\ b_{l+1}^+(z) \end{bmatrix}, \quad 0 \le l \le n-1. \tag{3.6}$$

在 $\mathbb{C}\setminus(-\infty 0]$ 中，对所有 $x \in \mathbb{R}$，由 $z \mapsto e^{\pm iq_k\sqrt{}zx}$ 的解析性可知 $a_k^{\pm}$、$b_k^{\pm}$, 以及因此 Φ^+ 和 Φ^- 关于 z 的解析性。最后，若 $\mathrm{Im} z > 0$，则 $\mathrm{Im}\sqrt{z} > 0$。此外，

$$|e^{\pm iq\sqrt{z}x}| = e^{\mp q\mathrm{Im}\sqrt{z}x}, \quad x \in \mathbb{R}, q > 0, z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty, 0].$$

因此，$\Phi^-(z, x) = e^{-iq_0\sqrt{}zx} \in L^2(I_0)$，且 $\Phi^+(z,x) = e^{iq_n\sqrt{}zx} \in L^2(I_n)$。这意味着 $\Phi^-(z\ \cdot)$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中位于左侧，而 $\Phi^+(z\ \cdot)$ 位于右侧。对于 $\mathrm{Im} z < 0$ 的情形，$\overline{\Phi^+(z\ \cdot)}$ 和 $\overline{\Phi^-(z\ \cdot)}$ 的结论可类似证明。 ∎

我们称 $a_k^{\pm}$和 $b_k^{\pm}$为 连接系数，它们对应于 Φ^+ 和 Φ^-。由（3.4）和（3.6）中的迭代计算可知

$$\begin{bmatrix} a_l^+(z) \\ b_l^+(z) \end{bmatrix} = R_{l+1}(z)R_{l+2}(z)\cdots R_n(z) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 0 \le l \le n-1 \tag{3.7}$$

$$\begin{bmatrix} a_j^-(z) \\ b_j^-(z) \end{bmatrix} = L_j(z)L_{j-1}(z)\cdots L_1(z) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad 1 \le j \le n.$$

这些系数用于在每个I_k上将 $(\tau_p - z) f = 0$ 的局部解连续地拼接起来，从而得到两个全局解 $\Phi^+(z\ \cdot)$ 和 $\Phi^-(z\ \cdot)$，它们分别在$L^2(\mathbb{R})$中右侧衰减和左侧衰减。此外，上述公式表明，连接系数是关于 $\sqrt{z}$ 的实系数几乎周期多项式。

注记 3.2. 递推关系（3.7）中隐含着一种群结构。为此，对 $1 \le k \le n$ 定义以下量

$$\gamma_k = \left(\frac{q_{k-1}}{q_k}\right)^{1/2}, \quad \eta_k = t_k(q_{k-1} - q_k) \quad \text{and} \quad \theta_k = t_k(q_{k-1} + q_k).$$

于是，我们可以将$L_k(z)$表示为

$$L_k(z) = \gamma_k^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\gamma_k + \gamma_k^{-1}}{2} e^{i\eta_k\sqrt{z}} & \frac{\gamma_k - \gamma_k^{-1}}{2} e^{-i\theta_k\sqrt{z}} \\ \frac{\gamma_k - \gamma_k^{-1}}{2} e^{i\theta_k\sqrt{z}} & \frac{\gamma_k + \gamma_k^{-1}}{2} e^{-i\eta_k\sqrt{z}} \end{bmatrix}, \quad \det L_k(z) = \gamma_k^{-2}$$

以及（3.5）表示为

$$R_k(z) = \gamma_k \begin{bmatrix} \frac{\gamma_k + \gamma_k^{-1}}{2} e^{-i\eta_k\sqrt{z}} & -\frac{\gamma_k - \gamma_k^{-1}}{2} e^{-i\theta_k\sqrt{z}} \\ -\frac{\gamma_k - \gamma_k^{-1}}{2} e^{i\theta_k\sqrt{z}} & \frac{\gamma_k + \gamma_k^{-1}}{2} e^{i\eta_k\sqrt{z}} \end{bmatrix}, \quad \det R_k(z) = \gamma_k^2.$$

对于$z \in (0, \infty)$，矩阵 $\gamma_k L_k(z)$ 和 $\gamma_k^{-1} R_k(z)$ 是李群的元素

$$SU(1,1) = \left\{ \begin{bmatrix} \overline{a} & b \\ \overline{b} & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \text{ and } |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}.$$

因此，

$$\gamma_j L_j(z)\cdot\ldots\cdot\gamma_1 L_1(z)=\left(\prod_{k=1}^{j}\gamma_k\right)\begin{bmatrix}\overline{b_j^-(z)} & a_j^-(z)\\ \overline{a_j^-(z)} & b_j^-(z)\end{bmatrix}$$

因此

$$L_j(z)\cdot\ldots\cdot L_1(z)=\begin{bmatrix}\overline{b_j^-(z)} & a_j^-(z)\\ \overline{a_j^-(z)} & b_j^-(z)\end{bmatrix},\quad 1\le j\le n. \tag{3.8}$$

同理，可以证明

$$R_{l+1}(z)\cdot\ldots\cdot R_n(z)=\begin{bmatrix}a_l^+(z) & \overline{b_l^+(z)}\\ b_l^+(z) & \overline{a_l^+(z)}\end{bmatrix},\quad 0\le l\le n-1.$$

引理 3.3. 令 $\Phi=(\Phi^+,\Phi^-)$ 如定理 *3.1* 中所定义。则 Φ 在 $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ 上一致有界。

证明。 根据 Φ 的定义，我们看到对于 $0\le k\le n$ 以及 $(\lambda,x)\in\mathbb{R}^+\times I_k$,

$$|\Phi^{\pm}(\lambda,x)|\le|a_k^{\pm}(\lambda)|+|b_k^{\pm}(\lambda)|=\left\|\begin{bmatrix}a_k^+(\lambda) & b_k^+(\lambda)\end{bmatrix}^T\right\|_1.$$

相对于 $\|\cdot\|_1$ 的矩阵范数也用同一符号表示。由 (3.7) 可知，对于 $(\lambda,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$,

$$|\Phi^+(\lambda,x)|\le\max_{0\le k\le n}\left\|\begin{bmatrix}a_k^+(\lambda) & b_k^+(\lambda)\end{bmatrix}^T\right\|_1\le\max\left\{1,\max_{1\le k\le n}\|R_kR_{k-1}\cdots R_n\|_1\right\}.$$

由（3.5），对于 $1\le k\le n$ 可得以下估计

$$\|R_k\|_1=\tfrac{1}{2}\left(\left|1+\tfrac{q_{k-1}}{q_k}\right|+\left|1-\tfrac{q_{k-1}}{q_k}\right|\right)\le 1+\tfrac{q_{k-1}}{q_k}$$

由 $\|\cdot\|_1$ 的次乘性立即可得该结论。关于 $\Phi^-(\lambda,x)$ 的估计可用同样的方法推出。 ■

接下来，我们推导连接系数的若干基本恒等式。这些表达式将由（修正的）朗斯基行列式的性质推出。

引理 3.4. 设 $n\in\mathbb{N}$ 且 $a_k^{\pm}$、$b_k^{\pm}$、$0\le k\le n$ 为 $\Phi=(\Phi^+,\Phi^-)$ 的连接系数。则以下恒等式成立。

(i) 若 $z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$，则对所有 $1\le k\le n-1$

$$\frac{a_0^+(z)}{q_0}=\frac{1}{q_k}\left(a_k^+(z)b_k^-(z)-a_k^-(z)b_k^+(z)\right)=\frac{b_n^-(z)}{q_n} \tag{3.9}$$

(ii) 若 $\lambda\in(0,\infty)$，则对所有 $0\le k\le n$,

$$q_0(|b_k^-(\lambda)|^2-|a_k^-(\lambda)|^2)=q_n(|a_k^+(\lambda)|^2-|b_k^+(\lambda)|^2)=q_k. \tag{3.10}$$

因此，

$$\frac{|a_k^+(\lambda)|^2}{q_0}+\frac{|a_k^-(\lambda)|^2}{q_n}=\frac{|b_k^+(\lambda)|^2}{q_0}+\frac{|b_k^-(\lambda)|^2}{q_n}. \tag{3.11}$$

(iii) 若 $\lambda\in(0,\infty)$，则对所有 $1\le k\le n-1$

$$\frac{b_0^+(\lambda)}{q_0}=\frac{1}{q_k}\left(b_k^+(\lambda)\overline{b_k^-(\lambda)}-a_k^+(\lambda)\overline{a_k^-(\lambda)}\right)=-\frac{\overline{a_n^-(\lambda)}}{q_n}. \tag{3.12}$$

证明。令

$$W_p(u,v)=\begin{vmatrix} u & v\\ pu' & pv'\end{vmatrix}=u(pv')-v(pu')$$

为一对解的修正的朗斯基行列式u，v属于$(Ap-z)f=0$并回忆微分方程的解的朗斯基行列式是常数，且与变量无关x（例如参见 [17, 21]）。我们将这一事实应用于 Φ^+ 和 Φ^- 在每个区间I_k上。

(i) 令 $z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,\ 0]$。于是对于 $x\in I_k$，$0\le k\le n$ 以及

$$\Phi^{\pm}(z,x)=a_k^{\pm}(z)e^{iq_k\sqrt{z}x}+b_k^{\pm}(z)e^{-iq_k\sqrt{z}x},$$

我们直接计算得

$$\begin{aligned} &W_p\left(\Phi^+(z,x),\Phi^-(z,x)\right)=\\ &=a_k^+(z)b_k^-(z)W\left(e^{iq_k\sqrt{z}x},e^{-iq_k\sqrt{z}x}\right)+b_k^+(z)a_k^-(z)W\left(e^{-iq_k\sqrt{z}x},e^{iq_k\sqrt{z}x}\right)\\ &=-\frac{2i\sqrt{z}}{q_k}\left(a_k^+(z)b_k^-(z)-a_k^-(z)b_k^+(z)\right). \end{aligned} \tag{3.13}$$

在无界区间I_0 和I_n上，(3.13) 化简为

$$\begin{aligned} W_p\left(\Phi^+(z,x),\Phi^-(z,x)\right)&=-\frac{2i\sqrt{z}}{q_0}a_0^+(z)\quad(k=0:a_0^-(z)=0,b_0^-(z)=1)\\ W_p\left(\Phi^+(z,x),\Phi^-(z,x)\right)&=-\frac{2i\sqrt{z}}{q_n}b_n^-(z)\quad(k=n:a_n^+(z)=1,b_n^+(z)=0). \end{aligned} \tag{3.14}$$

三个表达式相等，得出 (3.9) 对所有 $z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,\ 0]$.

(ii) 已知 $\lambda\in(0,\infty)$，由 p 为实值可知，$(\Phi^-(\lambda,\cdot)\ \Phi^-(\lambda,\cdot))$ 和 $(\Phi^+(\lambda,\cdot)\ \Phi^+(\lambda,\cdot))$ 也分别是 $(\tau_p-\lambda)\,f=0$ 的一对解。恒等式 (3.10) 可通过相应解对的朗斯基行列式类似地推导得出。

(iii) 已知 $\lambda\in(0,\infty)$，恒等式 (3.12可通过计算解对 $(\Phi^+(\lambda,\ \cdot)\ \Phi^-(\lambda,\ \cdot))$ 的朗斯基行列式得出，该解对是 $(\tau_p-\lambda)f=0$在每个区间 I_k上的解。 ■

注。利用备注 3.2 中说明的底层群结构，可以给出 (ii) 的另一种证明。设 z $=\lambda\in(0,\infty)$。若 k $=0$，则 $a_0^-(\lambda)=0$，$b_0^-(\lambda)=1$，且 (3.10) 显然成立。现在，假设 $1\le$k $\le$n。对 (3.8) 两边取行列式，并令 j =k，可得

$$|b_k^-(\lambda)|^2-|a_k^-(\lambda)|^2=\gamma_k^{-2}\cdot\ldots\cdot\gamma_1^{-2}=\frac{q_k}{q_0},$$

证明 (3.10)。另一个恒等式的证明类似。

由恒等式（3.9）和（3.11）可立即得到以下结论。

推论 3.5. 采用引理 *3.4* 中的记号，且对于 $\lambda \in (0,\infty)$ 我们有

$$\frac{|b_0^+(\lambda)|^2}{q_0^2} + \frac{1}{q_0 q_n} = \frac{|a_0^+(\lambda)|^2}{q_0^2} = \frac{|b_n^-(\lambda)|^2}{q_n^2} = \frac{1}{q_0 q_n} + \frac{|a_n^-(\lambda)|^2}{q_n^2}.$$

3.2. 谱测度。现在我们可以讨论 A_P 的一些谱性质，并推导 A_P 的谱测度 μ 的公式。我们需要以下表达式。将 [20, 定理 7.8] 应用于基本解系 Φ，可知对于 $z \in \rho(A_P) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A_P)$，预解算子 $R_z(A_P) = (A_P - z)^{-1}$ 可表示为积分算子

$$R_z(A_p)g(x) = \int_{\mathbb{R}} r_z(x,y)g(y)\,dy, \quad g \in L^2(\mathbb{R})$$

其预解核 $r_z(x,y)$ 定义为

$$r_z(x,y) = \frac{1}{W_p(\Phi^+(z,\cdot),\Phi^-(z,\cdot))} \begin{cases} \Phi^+(z,x)\Phi^-(z,y), & y \le x, \\ \Phi^-(z,x)\Phi^+(z,y), & y > x. \end{cases} \tag{3.15}$$

根据 Weidmann [21, 第 14] 节，我们可以找到 2×2 个矩阵 $m^{\pm}$，其元素在 $\rho(A_P)$ 上解析，使得

$$r_z(x,y) = \begin{cases} \overline{\Phi(\bar{z},x)} \cdot m^+(z)\Phi(z,y), & y \le x \\ \overline{\Phi(\bar{z},x)} \cdot m^-(z)\Phi(z,y), & y > x. \end{cases} \tag{3.16}$$

对于任意有界区间 $(\gamma,\lambda]$ 谱测度 μ 由 Weyl-Titchmarsh 公式给出（参见 [6, Thm. XIII.5.18], [20, Thm. 9.4], [21,Thm. 14.5]）：

$$\mu((\gamma,\lambda]) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta\downarrow 0} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\gamma+\delta}^{\lambda+\delta} \left(m^+(t+i\varepsilon) - m^+(t-i\varepsilon)\right) dt. \tag{3.17}$$

由于 μ 相对于 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度绝对连续，这个方程也可以写作

$$d\mu(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \left(m^+(\lambda+i\varepsilon) - m^+(\lambda-i\varepsilon)\right).$$

下面的定理描述了 A_P 的谱测度。

定理 3.6。设 $n \in \mathbb{N}$ 且 p 为具有 n 个跳跃点的阶梯函数。令 $\Phi = (\Phi^+,\Phi^-)$ 为定理 *3.1* 中构造的基本解系，其连接系数为 $a_k^{\pm}, 0 \le k \le n$。定义

$$\kappa(\sqrt{\lambda}) = \frac{|a_0^+(\lambda)|^2}{q_0^2} = \frac{|b_n^-(\lambda)|^2}{q_n^2} \ge \frac{1}{q_0 q_n}. \tag{3.18}$$

那么，A_p 的谱测度是一个 2×2 正矩阵测度 μ，其定义为

$$d\mu(\lambda)=\frac{1}{4\pi\kappa(\sqrt{\lambda})}\begin{bmatrix}\frac{1}{q_0} & 0\\ 0 & \frac{1}{q_n}\end{bmatrix}\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}. \tag{3.19}$$

谱变换

$$\mathscr{F}_{A_p}:L^2(\mathbb{R})\longrightarrow L^2([0,\infty),d\mu),\quad \mathscr{F}_{A_p}f(\lambda)=\int_{\mathbb{R}}f(x)\overline{\Phi(\lambda,x)}\,dx$$

给出了 A_p 的谱表示。逆变换 $\mathscr{F}_{A_p}^{-1}$ 的形式为

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_{A_p}^{-1}G(x)&=\int_0^\infty G(\lambda)\cdot\Phi(\lambda,x)\,d\mu(\lambda)\\ &=\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\frac{\frac{1}{q_0}G_1(\lambda)\Phi^+(\lambda,x)+\frac{1}{q_n}G_2(\lambda)\Phi^-(\lambda,x)}{\kappa(\sqrt{\lambda})}\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}\end{aligned}$$

对所有 $G=(G_1,G_2)\in L^2([0,\infty),d\mu)$。

证明。该结果直接由命题 2.2 得出。Φ 由定理 3.1 显式给出，因此我们可以进一步计算 μ。

我们沿用 [21] 的思路。设 Imz >0。由定理 3.1，$\Phi(z\cdot)$ 是 $(\tau_p-z)f=0$ 的基本解系，因此 $\Phi^+(z\cdot)$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中位于右侧，而 $\Phi^-(z\cdot)$ 位于左侧。由 (3.14) 和 (3.15),

$$r_z(x,y)=\frac{iq_0}{2a_0^+(z)\sqrt{z}}\begin{cases}\Phi^+(z,x)\Phi^-(z,y), & y\le x,\\ \Phi^-(z,x)\Phi^+(z,y), & y>x.\end{cases} \tag{3.20}$$

另一方面，由于 $\mathrm{Im}z<0$，$\overline{\Phi(z\cdot)}$ 是 $(\tau_p-z)f=0$ 的基本解系，其中 $\overline{\Phi^+(z\cdot)}$ 在右侧，而 $\overline{\Phi^-(z\cdot)}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中分别位于左侧。因此

$$r_{\bar z}(x,y)=\frac{-iq_n}{2\overline{b_n^-(z)}\sqrt{z}}\begin{cases}\overline{\Phi^+(z,x)\Phi^-(z,y)}, & y\le x\\ \overline{\Phi^-(z,x)\Phi^+(z,y)}, & y>x.\end{cases}$$

要应用 Weyl-Titchmarsh 公式，我们需要计算 2×2 矩阵 $m^\pm$（3.16）中的矩阵。这相当于将 $\Phi^\pm(z,x)$ 表示为 $\overline{\Phi}(z,x)$。

由于 $m^\pm(z)$ 在（3.16）中不依赖于 x,y，我们可以选择 x,y 位于无界区间内。这样的选择会使计算更简单。

对于 $x\in I_n$，我们得到

$$\overline{\Phi^+(\bar z,x)}=e^{-iq_n\sqrt{z}x},\quad \overline{\Phi^-(\bar z,x)}=\overline{a_n^-(\bar z)}e^{-iq_n\sqrt{\bar z}x}+\overline{b_n^-(\bar z)}e^{iq_n\sqrt{\bar z}x}$$

因此，

$$\begin{aligned}\Phi^+(z,x)&=e^{iq_n\sqrt{z}x}\\ &=\frac{1}{\overline{b_n^-(\bar z)}}\overline{\Phi^-(\bar z,x)}-\frac{\overline{a_n^-(\bar z)}}{\overline{b_n^-(\bar z)}}\overline{\Phi^+(\bar z,x)},\quad x\in I_n.\end{aligned} \tag{3.21}$$

假设 $y \le x$ 并将（3.21）代入（3.20）中的 $\mathrm{Im} z > 0$ 可得

$$r_z(x,y) = \frac{iq_0}{2a_0^+(z)\overline{b_n^-(\bar{z})}\sqrt{z}} \left\{ \overline{\Phi^-(\bar{z},x)} - \overline{a_n^-(\bar{z})}\,\overline{\Phi^+(\bar{z},x)} \right\} \Phi^-(z,y);$$

将此与（3.16）比较可得

$$m^+(z) = \frac{iq_0}{2a_0^+(z)\overline{b_n^-(\bar{z})}\sqrt{z}} \begin{bmatrix} 0 & -\overline{a_n^-(\bar{z})} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

对$x,\ y \in I_0, y \le x,$ 进行类似计算可得

$$m^+(\bar{z}) = \frac{-iq_n}{2a_0^+(\bar{z})\overline{b_n^-(z)}\sqrt{\bar{z}}} \begin{bmatrix} 1 & -b_0^+(\bar{z}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此，当 $\mathrm{Im} z > 0$ 时，我们有

$$m^+(z) - m^+(\bar{z}) = \begin{bmatrix} \dfrac{iq_n}{2a_0^+(\bar{z})\overline{b_n^-(z)}\sqrt{\bar{z}}} & \dfrac{-iq_0\overline{a_n^-(\bar{z})}}{2a_0^+(z)\overline{b_n^-(\bar{z})}\sqrt{z}} - \dfrac{iq_nb_0^+(\bar{z})}{2a_0^+(\bar{z})\overline{b_n^-(z)}\sqrt{\bar{z}}} \\ 0 & \dfrac{iq_0}{2a_0^+(z)\overline{b_n^-(\bar{z})}\sqrt{z}} \end{bmatrix}. \tag{3.22}$$

由于 μ 关于 $[0,\infty)$ 上的勒贝格测度绝对连续，根据（3.17），矩阵 $\mathscr{M}$ 的密度 μ 的元素为

$$\mathscr{M}_{jl}(\lambda) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \left(m_{jk}^+(\lambda + i\varepsilon) - m_{jk}^+(\lambda - i\varepsilon) \right).$$

将（3.9）、（3.12）和推论 3.5 应用于（3.22），令 $z = \lambda + i\varepsilon,\ \varepsilon \downarrow 0$ 可得

$$\begin{aligned}
\mathscr{M}_{11}(\lambda) &= \frac{q_n}{4\pi\sqrt{\lambda}a_0^+(\lambda)\overline{b_n^-(\lambda)}} = \frac{q_0}{4\pi\sqrt{\lambda}|a_0^+(\lambda)|^2} = \frac{1}{4\pi q_0 \kappa\left(\sqrt{\lambda}\right)\sqrt{\lambda}}, \\
\mathscr{M}_{22}(\lambda) &= \frac{q_0}{q_n}\mathscr{M}_{11}(\lambda), \\
\mathscr{M}_{12}(\lambda) &= -\frac{q_0q_n\left(\frac{1}{q_n}\overline{a_n^-(\lambda)} + \frac{1}{q_0}b_0^+(\lambda)\right)}{4\pi a_0^+(\lambda)\overline{b_n^-(\lambda)}\sqrt{\lambda}} = 0, \\
\mathscr{M}_{21}(\lambda) &= 0.
\end{aligned}$$

根据 κ 的定义以及推论 3.5，$\kappa(\sqrt{\lambda}) \ge {}^{1}{}_{q_0q_n} > 0$ 对所有 $\lambda \in (0,\infty)$ 均成立，且

$$d\mu(\lambda) = \mathscr{M}(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{4\pi\kappa(\sqrt{\lambda})} \begin{bmatrix} \frac{1}{q_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q_n} \end{bmatrix} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}.$$

谱变换及其逆变换的公式见定理 2.2。 ■

注 3.7。 代换 $\lambda = u^2$ 得到谱矩阵和逆谱傅里叶变换的如下表达式：

$$d\mu(u^2) = \frac{1}{2\pi\kappa(u)} \begin{bmatrix} \frac{1}{q_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q_n} \end{bmatrix} du,$$

$$\mathscr{F}_{A_p}^{-1} G(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\frac{1}{q_0} G_1(u^2)\Phi^+(u^2,x) + \frac{1}{q_n} G_2(u^2)\Phi^-(u^2,x)}{\kappa(u)} du.$$

此外，由于a^+和b^-是几乎周期三角多项式，因此存在$r \in \mathbb{N}$，它随p的跳跃点数增加而增大，以及常数$c0,\ldots,cr,\lambda_1,\ldots,\lambda_r \in \mathbb{R}$，使得

$$\kappa(u) = \frac{|a_0^+(u^2)|}{q_0^2} = c_0 + \sum_{j=1}^{r} c_j \cos(\lambda_j u), \quad u \in (0,\infty).$$

3.3. **帕利-维纳空间的再生核**带限函数空间$_\Lambda(A_P)$。 接下来，我们研究帕利-维纳空间带限函数空间$_\Lambda(A_P)$的再生核。给定A_P的谱测度后，带限函数空间$_\Lambda(A_P)$的一般性质与经典帕利-维纳空间完全相同。回顾定义，带限函数空间$_\Lambda(A_P) = \chi_\Lambda(A_P)(L^2(\mathbb{R}))$。

定理 3.8。 设 $\Lambda \subset \mathbb{R}_0^+$是一个有限测度的博雷尔集，且$p$是一个分段常数函数。定义 $\Lambda^{1/2} = \{\lambda \in \mathbb{R}_0^+ : \ \lambda^2 \in \Lambda\}$ 以及

$$\vartheta(u,x,y) = \frac{1}{q_0}\overline{\Phi^+(u^2,x)}\Phi^+(u^2,y) + \frac{1}{q_n}\overline{\Phi^-(u^2,x)}\Phi^-(u^2,y).$$

那么，$PW_\Lambda(A_P)$是一个再生核希尔伯特空间，其核为

$$k_\Lambda(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Lambda^{1/2}} \frac{\vartheta(u,x,y)}{\kappa(u)} du, \quad x,y \in \mathbb{R}. \tag{3.23}$$

证明。 我们首先断言， $\{\|\Phi(\cdot,x)\|_{L^2(\Lambda,d\mu)}\}_{x\in\mathbb{R}}$ 有界。事实上，定理 3.6表明，对每个 $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|\Phi(\cdot,x)\|_{L^2(\Lambda,d\mu)}^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{\Lambda^{1/2}} \frac{\frac{1}{q_0}|\Phi^+(u^2,x)|^2 + \frac{1}{q_n}|\Phi^-(u^2,x)|^2}{\kappa(u)} du \\ &\le \frac{1}{2\pi} \operatorname*{ess\,sup}_{u\in\Lambda^{1/2}} |\Phi^\pm(u^2,x)|^2 \int_{\Lambda^{1/2}} \frac{q_0+q_n}{q_0 q_n \kappa(u)} du. \end{aligned}$$

由（3.19）可知， $\left(q_0 q_n \kappa\left(\sqrt{\lambda}\right)\right)^{u\in\Lambda^{1/2}} \le 1$，而引理 3.3 断言 $\Phi^\pm$ 一致有界，因此

$$\|\Phi(\cdot,x)\|_{L^2(\Lambda,d\mu)} \le \operatorname*{ess\,sup}_{u\in\Lambda^{1/2}} |\Phi^\pm(u^2,x)| \left(\frac{q_0+q_n}{2\pi}|\Lambda^{1/2}|\right)^{1/2} = C < \infty.$$

对于每个 $x \in \mathbb{R}$。

因此，由该断言以及 $\mathscr{F}_{A_p}$的幺正性，我们得到

$$\begin{aligned}\left|\int_\Lambda \mathscr{F}_{A_p} f(\lambda)\cdot\Phi(\lambda,x)\,d\mu(\lambda)\right| &\le \|\Phi(\cdot,x)\|_{L^2(\Lambda,d\mu)}\|\mathscr{F}_{A_p} f\|_{L^2(\Lambda,d\mu)}\\ &= |\Phi(\cdot,x)\|_{L^2(\Lambda,d\mu)}\|f\|_2 \le C\|f\|_2,\end{aligned}$$

并且，对于每个 $x\in\mathbb{R}$ 以及所有 $f\in$ 带限函数空间$_\Lambda(A_p)$，积分都有意义。此外，

$$\begin{aligned}f(x)=\chi_\Lambda(A_p)f(x) &= \int_\Lambda \mathscr{F}_{A_p} f(\lambda)\cdot\Phi(\lambda,x)\,d\mu(\lambda)\\ &= \int_\Lambda\int_{\mathbb{R}} f(y)\overline{\Phi(\lambda,y)}\cdot\Phi(\lambda,x)\,dy\,d\mu(\lambda)\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\int_\Lambda \overline{\Phi(\lambda,y)}\cdot\Phi(\lambda,x)\,d\mu(\lambda)\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\overline{k_\Lambda(x,y)}\,dy.\end{aligned}$$

因此，求值映射$f\mapsto f(x)$，$f\in$ 带限函数空间$_\Lambda(A_p)$ 是有界的，换言之，带限函数空间$_\Lambda(A_p)$是一个再生核希尔伯特空间。公式（3.23）现在由将定理 3.1 和定理 3.6中的表达式代入（1.1）得到。另请参见 [6, 定理 XIII.5。24]）。

■

3.4. **再生核的计算**。 鉴于将来的数值实现，明确说明 k_Λ 的结构可能会有所帮助。根据定理3.8，k_Λ 取决于基本解 $\Phi^{\pm}$。

固定 x，$y\in\mathbb{R}$。由于连接系数 $a^{\pm}(u^2)$ 和 $b^{\pm}(u^2)$ 是关于 u 的几乎周期多项式，因此存在一个正整数 $m(x,\ y)$ 以及实数 $\alpha_k(x,\ y)$ $\beta_k(x,\ y)$，$1\le k\le m(x,\ y)$，使得

$$\vartheta(u,x,y)=\sum_{k=1}^{m(x,y)}\alpha_k(x,y)e^{i\beta_k(x,y)u}. \tag{3.24}$$

注意，对于固定的 $0\le j,\ l\le n$ 以及 $x\in I_j$，$y\in I_l$，系数 $\alpha_k(x,\ y)$ 只依赖于j和 l，因此在 $I_j\times I_l$ 上为常数。因此我们可以写成

$$\vartheta(u,x,y)=\sum_{j,l=1}^{n}\vartheta_{jl}(u)\chi_{I_j}(x)\chi_{I_l}(y)$$

与几乎周期函数 ϑ_{jl}。这就是引言中定理 1.1 的表述。

此外，将（3.1）和（3.2）代入 ϑ 的定义中，我们看到指数 β_k（x，y），$x\in I_j$，$y\in I_l$具有如下形式

$$\beta_k(x,y)=c_k^{(j,l)}\pm q_j x\pm q_l y,$$

其中，标量$c^{(j,l)}{}_k\in\mathbb{R}$ 取决于跳跃位置 $\{t_r\}_{r=1}^n$ 和局部参数$\{q_r\}_{r=0}^n$。

由于 κ 在 $(0,\infty)$ 上有下界，且 Λ 的勒贝格测度有限，因此积分

$$J(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Lambda^{1/2}}\frac{e^{isu}}{\kappa(u)}\,du,\quad s\in\mathbb{R}$$

是一个定义良好的函数，其傅里叶变换的支撑集位于 $\Lambda^{1/2}$。根据（3.23）和（3.24），现在可以将再生核k_Λ 写为

$$k_\Lambda(x,y)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m(x,y)}\alpha_k(x,y)\int_{\Lambda^{1/2}}\frac{e^{i\beta_k(x,y)u}}{\kappa(u)}\,du=\sum_{k=1}^{m(x,y)}\alpha_k(x,y)J(\beta_k(x,y)). \tag{3.25}$$

函数J 是谱测度中 κ 的傅里叶变换，通常需要通过数值计算或级数展开来求得（见下一节）。

4. 具体例子

本节中，我们推导$n=2$情形下再生核的显式表达式。$n=1$ 的情形（两个带宽恒定的区间），其再生核公式和采样定理可见 [9, 第 4]节。

4.1. **情形$n=2$：三个局部带宽恒定的区间**。我们考虑一个p 有两个跳跃点的阶梯函数。不失一般性，假设中间区间以原点为中心。首先，我们确定定理 κ 3.6中的（3.18）的密度函数。

引理 4.1。 设 $p_0,p_1,p_2,T>0$和 $\Lambda\subset\mathbb{R}_0^+$为有限测度，并令 $q_k=p^{-1/2}k$，$k=0$、1、2。令

$$p(x)=p_0\chi_{(-\infty,-T/2]}(x)+p_1\chi_{(-T/2,T/2]}(x)+p_2\chi_{[(T/2,\infty)}(x)\,, \tag{4.1}$$

$$C=\frac{1}{16q_0^2}\left[\left(1+\frac{q_0}{q_1}\right)^2\left(1+\frac{q_1}{q_2}\right)^2+\left(1-\frac{q_0}{q_1}\right)^2\left(1-\frac{q_1}{q_2}\right)^2\right], \tag{4.2}$$

$$K=\frac{1}{8q_0^2}\left(1-\frac{q_0^2}{q_1^2}\right)\left(1-\frac{q_1^2}{q_2^2}\right), \tag{4.3}$$

$$\zeta=2q_1T\,.$$

那么，式 (3.18) 中的谱测度密度为 $\kappa(u)=C+K\cos\zeta u$，相应的积分为

$$J(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Lambda^{1/2}}\frac{e^{isu}}{C+K\cos\zeta u}\,du,\quad s\in\mathbb{R}.$$

证明。 根据定理 3.1，基本解系 $\Phi(u^2,\cdot)=(\Phi^+(u^2,\cdot)\ \Phi^-(u^2,\cdot))$，$u\in(0,\infty)$ 具有如下形式

$$\Phi^+(u^2,x)=\begin{cases}a_0^+(u^2)e^{iq_0xu}+b_0^+(u^2)e^{-iq_0xu}, & x\in(-\infty,-\frac{T}{2}]\\ a_1^+(u^2)e^{iq_1xu}+b_1^+(u^2)e^{-iq_1xu}, & x\in(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]\\ e^{iq_2xu}, & x\in(\frac{T}{2},\infty)\end{cases}$$

$$\Phi^-(u^2,x)=\begin{cases}e^{-iq_0xu}, & x\in(-\infty,-\frac{T}{2}]\\ a_1^-(u^2)e^{iq_1xu}+b_1^-(u^2)e^{-iq_1xu}, & x\in(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]\\ a_2^-(u^2)e^{iq_2xu}+b_2^-(u^2)e^{-iq_2xu}, & x\in(\frac{T}{2},\infty).\end{cases}$$

应用（3.7）对于 $l=2$ 可得

$$\begin{bmatrix}a_0^+(u^2)\\ b_0^+(u^2)\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}\left(1+\frac{q_0}{q_1}\right)\left(1+\frac{q_1}{q_2}\right)e^{i\frac{T}{2}(q_0-2q_1+q_2)u}+\left(1-\frac{q_0}{q_1}\right)\left(1-\frac{q_1}{q_2}\right)e^{i\frac{T}{2}(q_0+2q_1+q_2)u}\\ \left(1-\frac{q_0}{q_1}\right)\left(1+\frac{q_1}{q_2}\right)e^{i\frac{T}{2}(-q_0-2q_1+q_2)u}+\left(1+\frac{q_0}{q_1}\right)\left(1-\frac{q_1}{q_2}\right)e^{i\frac{T}{2}(-q_0+2q_1+q_2)u}\end{bmatrix}$$

由于 $|Ae^{i\alpha}+Be^{i\beta}|^2=A^2+B^2+2AB\cos(\alpha-\beta)$，由此可从上式得到 κ所声称的公式：

$$\begin{aligned}\kappa(u)&=\tfrac{|a_0^+(u^2)|^2}{q_0^2}\\ &=\tfrac{1}{16q_0^2}\left[\left(1+\tfrac{q_0}{q_1}\right)^2\left(1+\tfrac{q_1}{q_2}\right)^2+\left(1-\tfrac{q_0}{q_1}\right)^2\left(1-\tfrac{q_1}{q_2}\right)^2\right]+\tfrac{1}{8q_0^2}\left(1-\tfrac{q_0^2}{q_1^2}\right)\left(1-\tfrac{q_1^2}{q_2^2}\right)\cos(2Tq_1u)\\ &=C+K\cos\zeta u,\end{aligned}$$

其中常数C 和 K 来自（4.2）和（4.3）。因此，

$$J(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Lambda^{1/2}}\frac{e^{isu}}{C+K\cos\zeta u}\,du$$

对于任意 $s\in\mathbb{R}$。 ∎

据我们所知，J 不属于任何已知的特殊函数类。如果谱 Λ 是一个区间，我们可以将J 展开为基数正弦函数 $\mathrm{sinc}x=\frac{\sin x}{x}$ 的级数。其部分和在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛到J，且收敛速率为几何速率。

定理 4.2。 设实数集 $=KC$ 且 $\Lambda=[0,\Omega]$。那么对于 $s\in\mathbb{R}$,

$$J(s)=\frac{\Omega^{1/2}}{2C\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{m}\left(-\frac{R}{2}\right)^m\binom{m}{l}e^{i\frac{\Omega^{1/2}}{2}(s+(m-2l)\zeta)}\mathrm{sinc}\left(\tfrac{\Omega^{1/2}}{2}(s+(m-2l)\zeta)\right).$$

此外，J 的第 M 个部分和 J_M 满足以下误差估计

$$\sup_{s\in\mathbb{R}}|J(s)-J_M(s)|\le\frac{\Omega^{1/2}}{2C\pi}\frac{|R|^{M+1}}{1-|R|}.$$

注意，根据K和C的定义，我们有 $|\text{实数集}| = |K|/C < 1$，因此J的被积函数没有任何奇点。因此，误差估计意味着部分和一致收敛，且该收敛速率仅取决于实数集，而它又仅取决于局部带宽p的参数。

证明。 根据假设，我们有 $|\text{实数集}| < 1$。$J(s)$（$s \in \mathbb{R}$）的表达式可以展开为几何级数。

$$J(s) = \frac{1}{2\pi C}\int_0^{\Omega^{1/2}} \frac{e^{isu}}{1-(-R\cos\zeta u)}\,du = \frac{1}{2\pi C}\sum_{m=0}^{\infty}(-R)^m \int_0^{\Omega^{1/2}} e^{isu}\cos^m\zeta u\,du. \tag{4.4}$$

上述积分与求和的交换可由魏尔斯特拉斯M判别法得出。对于$m \in \mathbb{N}_0$，定义带限函数

$$F_m(s) = \int_0^{\Omega^{1/2}} e^{isu}\cos^m\zeta u\,du, \quad s \in \mathbb{R}$$

使得$J = \frac{1}{2\pi C}\sum_{m=0}^{\infty}(-\text{实数集})^m F_m$。为了计算$F_m$，我们用复指数表示余弦：

$$\begin{aligned} F_m(s) &= \int_0^{\Omega^{1/2}} e^{isu}\cdot\left(\frac{e^{i\zeta u}+e^{-i\zeta u}}{2}\right)^m du \\ &= \frac{1}{2^m}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\int_0^{\Omega^{1/2}} e^{i(s+(m-2l)\zeta)u}\,du \\ &= \frac{\Omega^{1/2}}{2^m}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l} e^{i\frac{\Omega^{1/2}}{2}(s+(m-2l)\zeta)}\operatorname{sinc}\left(\tfrac{\Omega^{1/2}}{2}(s+(m-2l)\zeta)\right). \end{aligned} \tag{4.5}$$

将（4.5）代入（4.4）即可得到所需的展开式。现在，由于 $|F_m(s)| \le \Omega^{1/2}$ 对所有$m \in \mathbb{N}_0$都成立，因此对于 $M \in \mathbb{N}_0$，我们注意到

$$|J(s)-J_M(s)| = \frac{1}{2\pi C}\left|\sum_{m=M+1}^{\infty}(-R)^m F_m(s)\right| \le \frac{\Omega^{1/2}}{2\pi C}\sum_{m=M+1}^{\infty}|R|^m = \frac{\Omega^{1/2}}{2\pi C}\frac{|R|^{M+1}}{1-|R|}.$$

对所有$s \in \mathbb{R}$ 取上确界，即完成证明。 ∎

注释 4.3. (i) 利用正弦函数的倍角恒等式，可以证明J_r J 的实部为

$$J_r(s) = \frac{\Omega^{1/2}}{2C\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{m}\left(-\frac{R}{2}\right)^m\binom{m}{l}\operatorname{sinc}\left(\Omega^{1/2}(s+(m-2l)\zeta)\right), \quad s \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

(ii) 在特殊情形 $\Omega^{1/2} = 2\pi\zeta l = 4\pi q_1 T l$对于某个 $l \in \mathbb{N}$，即带宽与 p 的参数相关时，可以用特殊函数导出 J 的闭式公式。参见 [4, 定理 B.0.4、B.0.5]。

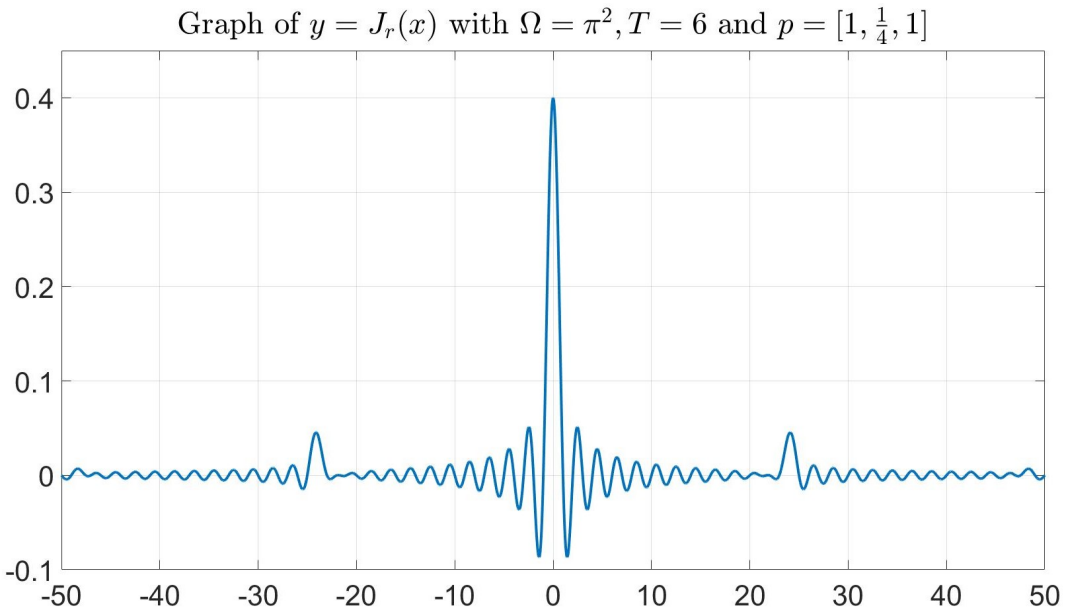


图 4.1. 当 $\Lambda = [0, \pi^2]$、$T = 6$、$p_0 = p_2 = 1$ 和$p_1 = \frac{1}{4}$时，J_r 在区间 $[-50, 50]$ 上的图像。

(iii) 在一般情形下，可以通过在（J_r 中进行变量代换 $m - 2l \to k$4.6）并改变求和顺序，推导出

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{\Omega^{1/2}}{2C\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{2j+|k|}{j} \left(-\frac{R}{2}\right)^{2j+|k|} \\ &= \frac{\Omega^{1/2}}{2C\pi} \left(-\frac{R}{2}\right)^{|k|} {}_2F_1\left(\frac{|k|+1}{2}, \frac{|k|+2}{2}; |k|+1; R^2\right), \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

我们得到

$$J_r(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \operatorname{sinc}(\Omega^{1/2}(s - k\zeta)).$$

若$s \in \bigcap_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\zeta + \frac{\pi}{\Omega^{1/2}}\mathbb{Z}^*\right)$，则$J_r(s) = 0$。在图4.1 中可以看到，对于所示参数集合，$J_r$的零点都是整数，且不是 $\zeta = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$的倍数；峰值在此处逐渐衰减。

现在，我们推导 带限函数空间$^{[0,\Omega]}(A^p)$在 p取（4.1）中给定的值时，其再生核的完整公式。

定理 4.4。 设 $p_0,p_1,p_2,T>0,\Lambda=[0,\Omega]\subset\mathbb{R}_0^+$且 $p=p^0\chi_{(-\infty,-T/2]}+p^1\chi_{(-T/2,T/2]}+p^2\chi_{[(T/2,\infty)}$。则带限函数空间 $PW^{[0,\Omega]}(A^p)$ 的再生核形式如下

$$k_\Lambda(x,y)=\sum_{j,l=0}^{2}k_{jl}(x,y)\chi_{I_j}(x)\chi_{I_l}(y),\quad x,y\in\mathbb{R}.$$

函数 k^{jl} 为

$$\begin{aligned}
k_{00}(x,y)&=\tfrac{q_0\Omega^{1/2}}{\pi}\mathrm{sinc}(q_0\Omega^{1/2}(x-y))+\tfrac{1}{4q_0}\left(1-\tfrac{q_0^2}{q_1^2}\right)\left(1+\tfrac{q_1^2}{q_2^2}\right)J_r(q_0(x+y+T))\\
&\quad+\tfrac{1}{8q_0}\left(1-\tfrac{q_0}{q_1}\right)^2\left(1-\tfrac{q_1^2}{q_2^2}\right)J_r(q_0(x+y+T)+2q_1T)\\
&\quad+\tfrac{1}{8q_0}\left(1+\tfrac{q_0}{q_1}\right)^2\left(1-\tfrac{q_1^2}{q_2^2}\right)J_r(q_0(x+y+T)-2q_1T)\\
k_{11}(x,y)&=\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{q_0}\left(1+\tfrac{q_1^2}{q_2^2}\right)+\tfrac{1}{q_2}\left(1+\tfrac{q_1^2}{q_0^2}\right)\right]J_r(q_1(x-y))+\tfrac{1}{2q_0}\left(1-\tfrac{q_1^2}{q_2^2}\right)J_r(q_1(x+y-T))\\
&\quad+\tfrac{1}{2q_2}\left(1-\tfrac{q_1^2}{q_0^2}\right)J_r(q_1(x+y+T)),\\
k_{22}(x,y)&=\tfrac{q_2\Omega^{1/2}}{\pi}\mathrm{sinc}(q_2\Omega^{1/2}(x-y))+\tfrac{1}{4q_2}\left(1+\tfrac{q_1^2}{q_0^2}\right)\left(1-\tfrac{q_2^2}{q_1^2}\right)J_r(q_2(x+y-T))\\
&\quad+\tfrac{1}{8q_2}\left(1-\tfrac{q_1^2}{q_0^2}\right)\left(1-\tfrac{q_2}{q_1}\right)^2J_r(q_2(x+y-T)-2q_1T)\\
&\quad+\tfrac{1}{8q_2}\left(1-\tfrac{q_1^2}{q_0^2}\right)\left(1+\tfrac{q_2}{q_1}\right)^2J_r(q_2(x+y-T)+2q_1T),\\
k_{01}(x,y)&=k_{10}(y,x)=\tfrac{1}{4q_0}\left(1+\tfrac{q_0}{q_1}\right)\left(1+\tfrac{q_1}{q_2}\right)^2J_r(q_0(x+\tfrac{T}{2})-q_1(y+\tfrac{T}{2}))\\
&\quad+\tfrac{1}{4q_0}\left(1-\tfrac{q_0}{q_1}\right)\left(1-\tfrac{q_1}{q_2}\right)^2J_r(q_0(x+\tfrac{T}{2})+q_1(y+\tfrac{T}{2}))\\
&\quad+\tfrac{1}{4q_0}\left(1+\tfrac{q_0}{q_1}\right)\left(1-\tfrac{q_1^2}{q_2^2}\right)J_r(q_0(x+\tfrac{T}{2})+q_1(y-\tfrac{3T}{2}))\\
&\quad+\tfrac{1}{4q_0}\left(1-\tfrac{q_0}{q_1}\right)\left(1-\tfrac{q_1^2}{q_2^2}\right)J_r(q_0(x+\tfrac{T}{2})-q_1(y-\tfrac{3T}{2})),\\
k_{02}(x,y)&=k_{20}(y,x)=\tfrac{1}{2q_0}\left(1-\tfrac{q_0}{q_1}\right)\left(1-\tfrac{q_1}{q_2}\right)J_r(q_0(x+\tfrac{T}{2})+q_1T-q_2(y-\tfrac{T}{2}))\\
&\quad+\tfrac{1}{2q_0}\left(1+\tfrac{q_0}{q_1}\right)\left(1+\tfrac{q_1}{q_2}\right)J_r(q_0(x+\tfrac{T}{2})-q_1T-q_2(y-\tfrac{T}{2})),\\
k_{12}(x,y)&=k_{21}(y,x)=\tfrac{1}{4q_2}\left(1+\tfrac{q_1}{q_0}\right)^2\left(1+\tfrac{q_2}{q_1}\right)J_r(q_1(x-\tfrac{T}{2})-q_2(y-\tfrac{T}{2}))\\
&\quad+\tfrac{1}{4q_2}\left(1-\tfrac{q_1}{q_0}\right)^2\left(1-\tfrac{q_2}{q_1}\right)J_r(q_1(x-\tfrac{T}{2})+q_2(y-\tfrac{T}{2}))\\
&\quad+\tfrac{1}{4q_2}\left(1-\tfrac{q_1^2}{q_0^2}\right)\left(1+\tfrac{q_2}{q_1}\right)J_r(q_1(x+\tfrac{3T}{2})+q_2(y-\tfrac{T}{2}))\\
&\quad+\tfrac{1}{4q_2}\left(1-\tfrac{q_1^2}{q_0^2}\right)\left(1-\tfrac{q_2}{q_1}\right)J_r(q_1(x+\tfrac{3T}{2})-q_2(y-\tfrac{T}{2})).
\end{aligned}$$

证明。 首先，我们需要考虑以下九对指标：

$$(j,l) \in \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}.$$

由再生核 $k_\Lambda(x,y) = k_\Lambda(y,x)$ 对所有 $x, y \in \mathbb{R}$均成立的对称性可知，(1, 0) 由 (0, 1) 得出，(2, 0) 由 (0, 2) 得出，而 (2, 1) 由 (1, 2) 得出。此外，由于 p 的节点关于原点对称，通过应用替换规则 $(x, y, T, q_0, q_1, q_2) \to (y, x - T, q_2, q_1, q_0)$，(2, 2) 由 (0, 0) 得出，(1, 2) 由 (0, 1) 得出。因此，只需考察情形 $(j, l) \in \{(0,0)、(0,1)、(0,2)、(1,1)\}$.

假设 $(j,l) = (0,0)$，即 $x, y \le -\frac{T}{2}$。那么重新排列各项后，我们得到

$$\begin{aligned}
\vartheta(u,x,y) &= \frac{1}{q_0}\overline{\Phi^+(u^2,x)}\Phi^+(u^2,y) + \frac{1}{q_n}\overline{\Phi^-(u^2,x)}\Phi^-(u^2,y),\\
&= \tfrac{1}{q_0}(\overline{a_0^+(u^2)}e^{-iq_0xu} + \overline{b_0^+(u^2)}e^{iq_0xu})(a_0^+(u^2)e^{iq_0yu} + b_0^+(u^2)e^{-iq_0yu}) + \tfrac{1}{q_2}e^{iq_0xu}e^{-iq_0yu}\\
&= \tfrac{|a_0^+(u^2)|^2}{q_0}e^{-iq_0(x-y)u} + \left(\tfrac{1}{q_2} + \tfrac{|b_0^+(u^2)|^2}{q_0}\right)e^{iq_0(x-y)u}\\
&+ \tfrac{1}{q_0}\left(a_0^+(u^2)\overline{b_0^+(u^2)}e^{iq_0(x+y)u} + \overline{a_0^+(u^2)}b_0^+(u^2)e^{-iq_0(x+y)u}\right).
\end{aligned}$$

上述表达式可化简，因为根据推论 3.5 以及式 (3.19) 中 $\kappa = |a_0^+(u)|^2/q_0^2$ 的定义，$|b_0^+(\lambda)|^2 q_0^2 + q_0 q_n = |a_0^+(\lambda)|^2 q_0^2$。代入引理 4.1 的证明中得到的连接系数 a_0^+ 和 b_0^+ 后，我们得到

$$\begin{aligned}
\vartheta(u,x,y) &= 2q_0\kappa(u)\cos(q_0(x-y)u) + \tfrac{1}{4q_0}\left(1+\tfrac{q_1^2}{q_2^2}\right)\left(1-\tfrac{q_0^2}{q_1^2}\right)\cos(q_0(x+y+T)u)\\
&+ \tfrac{1}{8q_0}\left(1-\tfrac{q_1^2}{q_2^2}\right)\left(1-\tfrac{q_0}{q_1}\right)^2\cos((q_0(x+y+T)+2q_1T)u)\\
&+ \tfrac{1}{8q_0}\left(1-\tfrac{q_1^2}{q_2^2}\right)\left(1+\tfrac{q_0}{q_1}\right)^2\cos((q_0(x+y+T)-2q_1T)u).
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
k_\Lambda(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\Lambda^{1/2}}\frac{\vartheta(u,x,y)}{\kappa(u)}\,du\\
&= \tfrac{q_0\Omega^{1/2}}{\pi}\mathrm{sinc}(q_0\Omega^{1/2}(x-y)) + \tfrac{1}{4q_0}\left(1+\tfrac{q_1^2}{q_2^2}\right)\left(1-\tfrac{q_0^2}{q_1^2}\right)J_r(q_0(x+y+T))\\
&+ \tfrac{1}{8q_0}\left(1-\tfrac{q_1^2}{q_2^2}\right)\left(1-\tfrac{q_0}{q_1}\right)^2 J_r(q_0(x+y+T)+2q_1T)\\
&+ \tfrac{1}{8q_0}\left(1-\tfrac{q_1^2}{q_2^2}\right)\left(1+\tfrac{q_0}{q_1}\right)^2 J_r(q_0(x+y+T)-2q_1T)\\
&= k_{00}(x,y).
\end{aligned}$$

其余情形也可用类似的方法证明。 ■

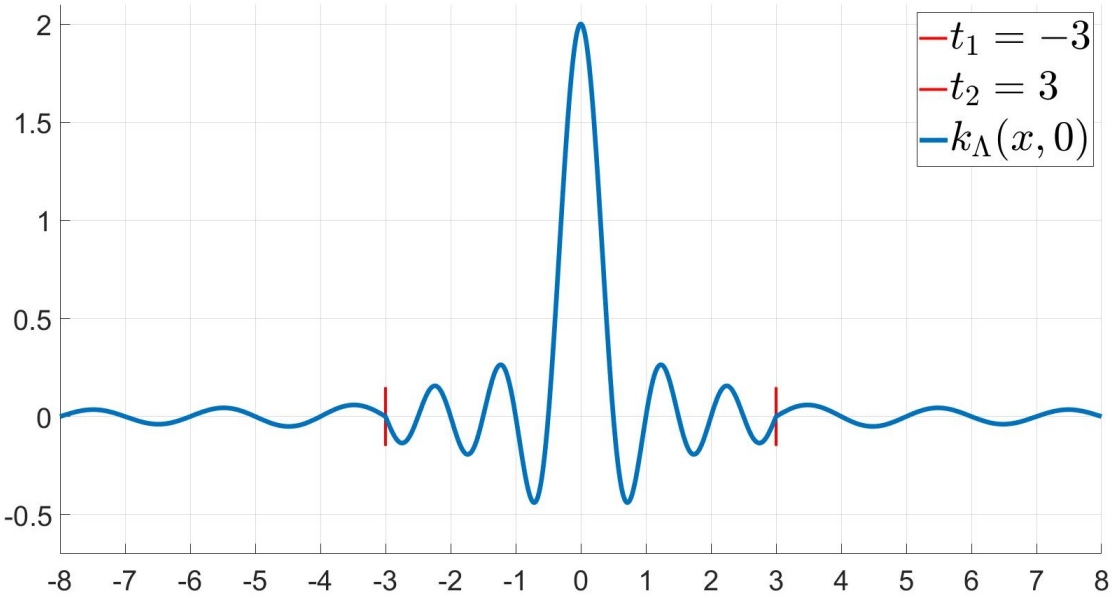


图4.2. 参数$\Lambda = [0,\pi^2]$、$p_0 = 1$、$p_1 = \frac{1}{4}$、$p_2 = 1$、$T = 6$对应的再生核$k_\Lambda(0,\cdot)$的图像。

再生核的图像见图4.2。我们还注意到，该图像关于y轴对称。注意，在区间$[-3,3]$上的局部带宽为$1/\sqrt{p_1} = 2$，这意味着每个单位区间内有两个零点（两次振荡）；而对于$|x| \geq 3$，局部带宽为$1/\sqrt{p_0} = 1/\sqrt{p_2} = 1$，这意味着每个单位区间内有一个零点。带限函数空间$PW_{[0,\Omega]}(A_p)$的核$k_\Lambda(0,\cdot)$，正是经典帕利-维纳空间中sinc核$\frac{\sin x}{x}$的精确对应物。

5. 可变带宽函数的密度定理

本节将利用带限函数空间$_\Lambda(A_p)$中的分段常数p，结合文献[8]关于再生核希尔伯特空间中采样的一般理论，推导采样与插值所需的必要密度条件。

5.1. 再生核希尔伯特空间中的采样。我们首先概述再生核希尔伯特空间中密度的定义及必要密度条件。详情请参见[8]。

对于博雷尔测度μ，我们将可分离集X的上、下Beurling密度定义为以下量

$$D_\mu^+(X) = \limsup_{r\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\#(X\cap B_r(x))}{\mu(B_r(x))},$$
$$D_\mu^-(X) = \liminf_{r\to\infty} \inf_{x\in\mathbb{R}} \frac{\#(X\cap B_r(x))}{\mu(B_r(x))}$$

在核k为$d\mu(x) = k(x,x)\,dx$的再生核希尔伯特空间中，采样所用的相关测度为此。与维数无关的 Beurling 密度$D_0^{\pm}(X)$是相对于测度$d\mu(x) = k(x,x)dx$定义的：

$$D_0^+(X) = \limsup_{r\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\#(X\cap B_r(x))}{\int_{B_r(x)} k(x,x)dx}, \quad D_0^-(X) = \liminf_{r\to\infty} \inf_{x\in\mathbb{R}} \frac{\#(X\cap B_r(x))}{\int_{B_r(x)} k(x,x)dx}$$

为了在 带限函数空间$\Lambda(A^p)$中导出关于分段常数 p的所需密度定理，我们将使用 [8,定理 2.2]的以下特殊情形。请注意，再生核在假设中起着关键作用。

定理 5.1。 设 k 是子空间 $\mathscr{H} \subset L^2(\mathbb{R}, dx)$ 的再生核，并满足以下条件：

(i) 对角线有界性：存在常数 $C_1, C_2 > 0$ 使得

$$C_1 \le k(x,x) \le C_2$$

对所有 $x \in \mathbb{R}$.

(ii) 弱局部化性质：对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $r(\varepsilon) > 0$ 使得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}\setminus B_{r(\varepsilon)}(x)} |k(x,y)|^2\,dy < \varepsilon^2.$$

(iii) 齐次逼近性质：假设子集 $X \subseteq \mathbb{R}$ 满足贝塞尔不等式

$$\sum_{x\in X} |f(x)|^2 \le C\,\|f\|_{\mathscr{H}}^2$$

对所有 $f \in \mathscr{H}$均成立。那么对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $r(\varepsilon) > 0$ 使得

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} \sum_{\substack{x\in X \\ |x-y|>r(\varepsilon)}} |k(x,y)|^2 < \varepsilon^2.$$

在这些假设下，$\mathscr{H}$中成立以下密度条件。*(A)* 若 X 是 $\mathscr{H}$的稳定采样集，则 $D_0^-(X) \ge 1$.*(B)* 若 X 是 $\mathscr{H}$的插值集，则 $D_0^+(X) \le 1$.

不使用测度 $k(x,x)dx$时，这个结果也可以用任意一个与勒贝格测度 μ 等价[2]的测度来表述。为此，定义 k 相对于 μ 的上、下平均迹如下

$$\mathrm{tr}_\mu^+ = \limsup_{r\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} k(y,y)\,dy,$$

$$\mathrm{tr}_\mu^- = \liminf_{r\to\infty} \inf_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} k(y,y)\,dy.$$

那么，定理 5.1的以下改述 [10, 引理 6。6]。

[2]其含义是 $d\mu = h\,dx$，其中 h 是可测函数h，满足 $0 < c \le h(x) < C$对所有 $x \in \mathbb{R}$ 均成立，且c 和C为某些常数。

引理 5.2。 设 $d\mu = h\,dx$ 与勒贝格测度等价。那么，当且仅当 $D_0^-(X) \geq 1$成立时，$D^{\bar{\mu}}(X) \geq \mathrm{tr}^{\bar{\mu}}$。类似地，当且仅当 $D_\mu^+(X) \leq \mathrm{tr}_\mu^+$时，$D_0^+(X) \leq 1$。

证明。 不等式 $D_0^-(X) \geq 1$ 表示，对于所有 $\varepsilon > 0$，存在一个 $r_\varepsilon > 0$，使得对于所有 $x \in \mathbb{R}$ 以及所有 $r > r\varepsilon$

$$\#(X \cap B_r(x)) \geq (1-\varepsilon) \int_{B_r(x)} k(y,y)\,dy,$$

或者等价地，

$$\frac{\#(X \cap B_r(x))}{\mu(B_r(x))} \geq (1-\varepsilon)\frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} k(y,y)\,dy.$$

用贝尔林密度表示，即为

$$D_\mu^-(X) \geq \liminf_{r\to\infty} \inf_{x\in\mathbb{R}^d} \frac{\int_{B_r(x)} k(y,y)\,dy}{\mu(B_r(x))} = \mathrm{tr}_\mu^-(k).$$

反向阅读上述论证即可得到反命题。 ■

5.2. **带限函数空间中的必要密度条件** $PW^{[0,\Omega]}(A_p)$。 对于帕利-维纳空间 $PW^{[0,\Omega]}(A_p)$，我们定义正测度 $\mu = \mu_p$ 如下：

$$\mu(I) = \mu_p(I) = \int_I \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}.$$

Sinc且p 为正且有正下界， μ_p 与勒贝格测度等价 .

在 $\mu = \mu_p$的情形下，我们用$D_p^\pm$，$\mathrm{tr}_p^\pm$代替$D_{\mu_p}^\pm(X)$等。我们的目标是证明以下定理，其中谱集 Λ 为一个区间。

定理 5.3 (带限函数空间中的密度定理 $PW^{[0,\Omega]}(A_p)$)。 设 $\Lambda = [0,\Omega]$ 且 p 为分段常数函数。

(i) 若 X 是 $PW_\Lambda(A_p)$的稳定采样集，则 $D_p^-(X) \geq \frac{|\Lambda^{1/2}|}{\pi}$.*(ii)* 若 X 是 $PW_\Lambda(A_p)$ 的插值集，则 $D_p^+(X) \leq \frac{|\Lambda^{1/2}|}{\pi}$. ——

该结果类似于 [9, 定理 6.2、6。3] ，但证明中存在显著差异。特别是，由于 p 不光滑，甚至不连续，我们无法使用刘维尔变换将 A_p 转化为等价的薛定谔算子，并应用散射理论（如 [9] 中所做的那样）。

证明的思路是验证定理 5.1 关于 带限函数空间(A_p)的再生核所需的条件。我们将逐一证明一系列引理，以验证定理 5.1的条件，然后求出核的平均迹。

5.3. **带限函数空间再生核的精细性质** 带限函数空间$^{[0,\Omega]}(A_p)$。 我们首先验证，定理 5.1 的性质对于带限函数空间 带限函数空间$^{[0,\Omega]}(A_p)$的再生核均成立。

引理 5.4 (对角线的有界性)。 设 $\Lambda \subset \mathbb{R}_0^+$是一个有限测度集合，$p$ 是一个分段常数函数，且 k_Λ 是带限函数空间 $PW_\Lambda(A^p)$的再生核。则存在常数 C_1,$C_2 > 0$ 使得

$$C_1 \leq k_\Lambda(x,x) \leq C_2$$

对所有 $x \in \mathbb{R}$。

证明。 .....的一致有界性 k_Λ （因此 C_2的存在性）由引理 3.3 得到的 A^p 的基本解一致有界性，以及定理 3.8 中的再生核公式k_Λ 可知 3.8。另一方面，

$$\begin{aligned} k_\Lambda(x,x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\Lambda^{1/2}} \frac{\frac{1}{q_0}|\Phi^+(u^2,x)|^2 + \frac{1}{q_n}|\Phi^-(u^2,x)|^2}{\kappa(u)}\,du \\ &\geq \frac{1}{2\pi q_0}\int_{\Lambda^{1/2}} \frac{|\Phi^+(u^2,x)|^2}{\kappa(u)}\,du \\ &\geq \min_{0\leq j\leq n}\inf_{x\in I_j}\frac{1}{2\pi q_0}\int_{\Lambda^{1/2}} \frac{|a_j^+(u^2)e^{iq_jxu} + b_j^+(u^2)e^{-iq_jxu}|^2}{\kappa(u)}\,du \\ &\geq \min_{0\leq j\leq n}\frac{1}{2\pi q_0}\int_{\Lambda^{1/2}} \frac{\big||a_j^+(u^2)| - |b_j^+(u^2)|\big|^2}{\kappa(u)}\,du = C_1. \end{aligned}$$

由于 $|a_j^+(u^2)| - |b_j^+(u^2)| = q_j - q_n$ 由（3.10）且 κ有界，我们得出 $C_1 > 0$。 ■

接下来我们证明核 k_Λ 具有非对角衰减。这里我们需要 Λ 是一个区间。

引理 5.5。 设 $\Lambda = [0,\Omega]$ 其中某个 $\Omega > 0$，p 是分段常数函数，且 k_Λ 是带限函数空间 $PW^{[0,\Omega]}(A^p)$的再生核。则存在常数 $C > 0$

$$|k_\Lambda(x,y)| \leq \frac{C}{1+|x-y|} \qquad \textit{for all } x,y \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

证明。 设 p 是某个 $n \in \mathbb{N}$ 的分段常数函数。回忆再生核的表达式（3.25）

$$k_\Lambda(x,y) = \sum_{k=1}^{m(x,y)} \alpha_k(x,y)J(\beta_k(x,y)), \quad m(x,y) \in \mathbb{N}, \alpha_k(x,y), \beta_k(x,y) \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq m(x,y)$$

其中 $J(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\Omega^{1/2}} e^{\kappa^{isu}(u)}\,du$ 且 $\beta_k(x,y) = c^{(}jl)k \pm q\,jx \pm q_l y$ 当 $x \in I_j$、$y \in I_l$。

第一步，我们证明对于足够大的 $|s|$，有 $J(s) = \mathcal{O}(s^{-1})$。事实上， κ 在 (0, ∞) 上是（无穷次）可微的，且导数有界，并且 $0 < \kappa^{1}(u) \leq q_0 q_n$ 对所有

$u \in (0,\infty)$，分部积分可得

$$J(s) = \frac{1}{2\pi i s}\left(\frac{e^{is\Omega^{1/2}}}{\kappa(\Omega^{1/2})} - \frac{1}{\kappa(0^+)}\right) + \frac{1}{2\pi i s}\int_0^{\Omega^{1/2}} \frac{\kappa'(u)}{\kappa(u)^2} e^{isu}$$

$$|J(s)| \le \frac{1}{2\pi|s|}\left\{\frac{1}{|\kappa(\Omega^{1/2})|} + \frac{1}{|\kappa(0^+)|} + \int_0^{\Omega^{1/2}} \frac{|\kappa'(u)|}{\kappa(u)^2}\, du\right\},$$

其中 $\kappa(0^+) = \lim_{u\downarrow 0}\kappa(u)$。因此，对所有 $s \neq 0$，

$$|J(s)| \le \frac{q_0 q_n}{2\pi|s|}\left(2 + q_0 q_n \Omega^{1/2} \sup_{0\le u\le\Omega^{1/2}} |\kappa'(u)|\right).$$

第二步，我们验证：对所有 k，存在某个 $N_k, r_k > 0$，使得 t

$$|\beta_k(x,y)| \ge N_k(1+|x-y|) \tag{5.2}$$

对于所有满足 $|x-y| > r_k$ 的 $x,y \in \mathbb{R}$，我们按如下方式进行：取 $a > 0$，使得 p 的节点 $\{t_k\}_{k=1}^n$ 包含于 $[-a,a]$ 中。考虑 x 和 y 在这些区间上取值的情形

$$(-\infty,-a) \subset I_0, \quad [-a,a] \supset I_1 \cup \ldots I_{n-1}, \quad (a,\infty) \subset I_n$$

当 $|x-y|$ 较大时。

• 假设 x 和 y 属于同一个无界区间，不失一般性地设 x,y $< -$a 。那么 βk(x, y) $=$ck $\pm$ q0(x $\pm$y)。由于 $|$x $\pm$y$| \ge |$x $-$y$|$，我们对$|$x $-$y$|$ 充分大时得到 (5.2)，即 $|$x $-$y$| \ge$rk。

• 同样，$|x| \ge a$ 且 $|y| \le a$ 意味着（5.2）。

• 剩下的情况是 $x < -a$ 且 $y > a$，或者根据对称性 $x > a$ 且 $y < -a$。那么$|q_0x + q_ny|$ 可能有界，尽管 $|x-y| \to \infty$，但（5.2）不成立。这里我们采用k_Λ的原始表述。我们有

$$\begin{aligned}
\vartheta(u,x,y) &= \frac{1}{q_0}\overline{\Phi^+(u^2,x)}\Phi^+(u^2,y) + \frac{1}{q_n}\overline{\Phi^-(u^2,x)}\Phi^-(u^2,y)\\
&= \frac{1}{q_0}\left(\overline{a_0^+(u^2)}e^{-iq_0x} + \overline{b_0^+(u^2)}e^{iq_0x}\right)e^{iq_nyu} + \frac{1}{q_n}e^{iq_0xu}\left(a_n^-(u^2)e^{iq_nyu} + b_n^-(u^2)e^{-iq_nyu}\right)\\
&= \left(\frac{\overline{b_0^+(u^2)}}{q_0} + \frac{a_n^-(u^2)}{q_n}\right)e^{i(q_0x+q_ny)u} + \frac{\overline{a_0^+(u^2)}}{q_0}e^{-i(q_0x-q_ny)u} + \frac{a_0^+(u^2)}{q_0}e^{i(q_0x-q_ny)u}\\
&= \frac{\overline{a_0^+(u^2)}}{q_0}e^{-i(q_0x-q_ny)u} + \frac{a_0^+(u^2)}{q_0}e^{i(q_0x-q_ny)u},
\end{aligned}$$

其中我们使用了引理 3.9 和（3.12）中的结果 3.4。这意味着不存在包含 $\pm(q_0x + q_ny)$ 的指数函数。同时，注意到

$$|q_0x - q_ny| = q_ny - q_0x \ge \min(q_0,q_n)(y-x)$$

且（5.2）成立。

综上，J 上的衰减估计以及（5.2）意味着存在一个$C > 0$ 使得

$$|k_\Lambda(x,y)| \le \frac{C}{1+|x-y|}$$

对所有 x，$y \in \mathbb{R}$。 ∎

引理 5.6 (弱局部化)。 设 $\Lambda = [0,\Omega]$ 对于某个 $\Omega > 0$，p 为分段常数函数，且 k_Λ 为带限函数空间$PW_{[0,\Omega]}(A_p)$的再生核。那么对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $r(\varepsilon) > 0$，使得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{|x-y|>r(\varepsilon)} |k_\Lambda(x,y)|^2\, dy < \varepsilon^2. \tag{5.3}$$

证明。 由引理 5.5，我们可以找到 $C > 0$ 使得对所有 x，$y \in \mathbb{R}$

$$|k_\Lambda(x,y)| \le \frac{C}{1+|x-y|}.$$

设 $\varepsilon > 0$ 并取 $r(\varepsilon) > \max\{b,\ 4C\frac{2}{\varepsilon^2} - 1\}$。那么对于固定的 $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\int_{|x-y|>r(\varepsilon)} |k_\Lambda(x,y)|^2\, dy &\le \int_{|x-y|>r(\varepsilon)} \frac{C^2}{(1+|x-y|)^2}\, dy = \int_{r(\varepsilon)}^{\infty} \frac{2C^2}{(1+z)^2}\, dz \\ &= \frac{2C^2}{1+r(\varepsilon)} < \frac{\varepsilon^2}{2}.\end{aligned}$$

对所有 $x \in \mathbb{R}$ 取上确界即可证明（5.3）。 ∎

为证明齐次逼近性质，我们回顾一下，集合 $X \subset \mathbb{R}$称为相对分离，如果

$$\operatorname{rel}(X) = \max_{x\in\mathbb{R}} \#(X \cap [x,x+1])$$

是有限的。中的引理 3.7表明，若 $\{k(x\ \cdot) : x \in X\}$ 是带限函数空间$PW_\Lambda(\mathbb{R})$ 中的 Bessel 序列，则 X 是相对分离的。

引理 5.7 (齐次逼近性质)。 设 $\Lambda = [0,\Omega]$ 对于某个 $\Omega > 0$，p 是一个分段常数函数，且 k_Λ 是带限函数空间 $PW_{[0,\Omega]}(A_p)$的再生核。假设 $X \subset \mathbb{R}$ 满足 $\{k_\Lambda(x\ \cdot) : x \in X\}$ 是带限函数空间 $PW_{[0,\Omega]}(A_p)$中的 *Bessel* 序列。那么对每个$\varepsilon > 0$，存在 $r(\varepsilon) > 0$ 使得

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} \sum_{\substack{x\in X \\ |x-y|>r(\varepsilon)}} |k_\Lambda(x,y)|^2 < \varepsilon^2.$$

证明。 取 $y \in \mathbb{R}$。由引理 5.5，存在 r，$C > 0$ 使得

$$\sum_{\substack{x\in X \\ |x-y|>r}} |k_\Lambda(x,y)|^2 \le \sum_{\substack{x\in X \\ |x-y|>r}} \frac{C^2}{1+|x-y|^2}.$$

由于X是相对分离的，当r足够大时，右侧可以小于给定的$\varepsilon > 0$。

■

引理 5.6 和 5.7 对任意有限测度的谱集 Λ 均成立，尽管 (k_Λ 在 (5.1) 中的非对角衰减不再成立。参见 [4, 引理 C.1.2、C.2。3] 以了解一般情形的处理方法。

5.4. **再生核的平均迹**。 接下来，我们计算抽象密度定理（引理 k 所需的 5.2）中的平均迹。对于这些论证， Λ可以是任意有限测度的集合。

为了改写再生核的对角线，我们定义辅助函数

$$h_j^{(1)}(u) = \frac{|a_j^+(u^2)|^2}{q_0} + \frac{|a_j^-(u^2)|^2}{q_n}$$
$$h_j^{(2)}(u) = \frac{\overline{a_j^+(u^2)}b_j^+(u^2)}{q_0} + \frac{\overline{a_j^-(u^2)}b_j^-(u^2)}{q_n}$$

对于 $0 \le j \le n$ 以及 $u \in (0,\infty)$。

引理 5.8. 设 $\Lambda \subset \mathbb{R}_0^+$为有限测度集，$p$ 是一个有 n 个跳跃点的阶梯函数，且 k_Λ 是带限函数空间 $PW_\Lambda(A^p)$的再生核。则

$$k_\Lambda(y,y) = \sum_{j=0}^{n} \Big(\frac{1}{\pi} \int_{\Lambda^{1/2}} \frac{h_j^{(1)}(u)}{\kappa(u)}\, du + \frac{1}{\pi} \mathrm{Re}\mathscr{F}\Big(\frac{h_j^{(2)}}{\kappa} \cdot \chi_{\Lambda^{1/2}} \Big)(2q_j y) \Big) \chi_{(t_j,t_{j+1}]}(y)\,.$$

证明。 利用命题 *3.8*，我们计算 k_Λ的对角线。固定 $y \in I_j$，取某个 $0 \le j \le n$。利用 k_Λ的公式（*3.23*），得到

$$\begin{aligned}
\vartheta(u,y,y) &= \frac{1}{q_0}|\Phi^+(u^2,y)|^2 + \frac{1}{q_n}|\Phi^-(u^2,y)|^2 \\
&= \frac{1}{q_0}|a_j^+(u^2)e^{iuq_jy} + b_j^+(u^2)e^{-iuq_jy}|^2 + \frac{1}{q_n}|a_j^-(u^2)e^{iuq_jy} + b_j^-(u^2)e^{-iuq_jy}|^2 \\
&= \left(\frac{|a_j^+(u^2)|^2}{q_0} + \frac{|b_j^+(u^2)|^2}{q_0} \right) + \left(\frac{|a_j^-(u^2)|^2}{q_n} + \frac{|b_j^-(u^2)|^2}{q_n} \right) \\
&\quad + 2\mathrm{Re}\left[\left(\frac{\overline{a_j^+(u^2)}b_j^+(u^2)}{q_0} + \frac{\overline{a_j^-(u^2)}b_j^-(u^2)}{q_n} \right) e^{-2iuq_jy} \right] \\
&= 2\left(\frac{|a_j^+(u^2)|^2}{q_0} + \frac{|a_j^-(u^2)|^2}{q_n} \right) + 2\mathrm{Re}\left[\left(\frac{\overline{a_j^+(u^2)}b_j^+(u^2)}{q_0} + \frac{\overline{a_j^-(u^2)}b_j^-(u^2)}{q_n} \right) e^{-2iuq_jy} \right],
\end{aligned}$$

其中，在最后一个等式中我们用到了（3.11）。于是

$$\begin{aligned} k_\Lambda(y,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\Lambda^{1/2}} \frac{\vartheta(u,y,y)}{\kappa(u)}\,du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\Lambda^{1/2}} \frac{h_j^{(1)}(u)}{\kappa(u)}\,du + \frac{1}{\pi}\int_{\Lambda^{1/2}} \frac{\mathrm{Re}(h_j^{(2)}(u)e^{-2iq_jyu})}{\kappa(u)}\,du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\Lambda^{1/2}} \frac{h_j^{(1)}(u)}{\kappa(u)}\,du + \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\,\mathscr{F}\left(\frac{h_j^{(2)}}{\kappa}\cdot\chi_{\Lambda^{1/2}}\right)(2q_jy) \end{aligned}$$

如所述。 ■

注意，第一项 $\int h^{(1)}{}_j$仅取决于区间 I_j，而不取决于 $y \in I_j$。

在下面的定理中，我们计算核k的平均迹。回顾一下，记号$f \lesssim g$ 表示存在$C \geq 0$ 使得$f \leq Cg$。

定理 5.9. 设 $\Lambda \subset \mathbb{R}_0^+$为有限测度，$p$ 为分段常数函数，k_Λ为带限函数空间 $PW_\Lambda(A^p)$的再生核。假设 I 是一个大区间，且 $I \not\subset [t_1,t_n]$。那么

$$\left|\frac{1}{\mu_p(I)}\int_I k_\Lambda(y,y)\,dy - \frac{|\Lambda^{1/2}|}{\pi}\right| \lesssim \mu_p(I)^{-1/2}.$$

特别是，

$$\mathrm{tr}^- = \liminf_{r\to\infty}\inf_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\mu_p(B_r(x))}\int_{B_r(x)} k_\Lambda(y,y)\,dy = \frac{|\Lambda^{1/2}|}{\pi},$$

同样$\mathrm{tr}^+ = \frac{|\Lambda^{1/2}|}{\pi}$。——

证明。 设p 是一个在 $\{t_k\}_{k=1}^n$处有n 个跳跃点的分段常数函数。我们可以假设区间$I = [\alpha,\beta] \supseteq [t_1,t_n]$。另外两种情况更容易处理。由于$\frac{1}{\sqrt{p(x)}}\chi_{(t_j,t_{j+1}]}(x) = q_j$对$x \in (t_j,t_{j+1}]$成立，我们得到

$$\mu_p(I)\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\,dx = [q_0(t_1-\alpha)+q_n(\beta-t_n)] + \sum_{j=1}^{n-1} q_j(t_{j+1}-t_j),$$

并且 $\mu_p(I) \geq (\beta-\alpha)\min_j q_j$。我们首先注意到

$$\frac{1}{\mu_p(I)}\int_I k_\Lambda(y,y)\,dy = \frac{1}{\mu_p(I)}\int_{I\setminus[t_1,t_n]} k_\Lambda(y,y)\,dy + \frac{1}{\mu_p(I)}\int_{[t_1,t_n]} k_\Lambda(y,y)\,dy.$$

由于这里的第二项具有以下形式$C\mu_p(I)^{-1}$，我们可以专注于第一项。我们使用引理 *5.8* 中得到的 k_Λ 的对角线表示式，并首先考虑

该表达式

$$T_1 = \frac{1}{\mu_p(I)\pi}\Big(\int_{\alpha_\alpha}^{t_1}\int_{\Lambda^{1/2}} \frac{h_0^{(1)}(u)}{\kappa(u)}\,du\,dy + \int_{t_n}^{\beta}\int_{\Lambda^{1/2}} \frac{h_0^{(1)}(u)}{\kappa(u)}\,du\,dy\Big).$$

利用初始条件 $a_0^- = b_n^+ = 0$，$a_n^+ = b_0^- = 1$ 以及 κ 在（3.19）中的定义，我们得到

$$h_0^{(1)}(u) = \frac{|a_0^+(u^2)|^2}{q_0} = q_0\kappa(u), \quad h_n^{(1)}(u) = \frac{|b_n^-(u^2)|^2}{q_n} = q_n\kappa(u),$$

因此

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{|\Lambda^{1/2}|}{\mu_p(I)\pi}\left(q_0(t_1-\alpha)+q_n(\beta-t_n)\right) \\ &= \frac{|\Lambda^{1/2}|}{\mu_p(I)\pi}\Big(\mu_p(I) - \sum_{j=1}^{n-1} q_j(t_{j+1}-t_j)\Big) = \frac{|\Lambda^{1/2}|}{\pi} + \mathscr{O}\big(\frac{1}{\mu_p(I)}\big). \end{aligned}$$

由此得到估计

$$\left|T_1 - \frac{|\Lambda^{1/2}|}{\pi}\right| \lesssim \mu_p(I)^{-1} \lesssim \mu_p(I)^{-1/2}.$$

对于第二项，我们进行类似的计算。令

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{\mu_p(I)\pi}\int_{I\setminus[t_1,t_n]} \mathrm{Re}\mathscr{F}\Big(\frac{h_j^{(2)}}{\kappa}\cdot\chi_{\Lambda^{1/2}}\Big)(2q_j y)\,dy \\ &= \frac{1}{\mu_p(I)\pi}\mathrm{Re}\left(\int_{\alpha}^{t_1}\int_{\Lambda^{1/2}} \frac{h_0^{(2)}(u)e^{-2iq_0yu}}{\kappa(u)}\,du\,dy + \int_{t_n}^{\beta}\int_{\Lambda^{1/2}} \frac{h_n^{(2)}(u)e^{-2iq_nyu}}{\kappa(u)}\,du\,dy\right). \end{aligned}$$

I交换积分顺序并先对y积分，我们得到

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{\mu_p(I)\pi}\mathrm{Re}\int_{\Lambda^{1/2}} \frac{h_0^{(2)}(u)e^{-2iq_0(t_1+\alpha)u}}{\kappa(u)}\cdot\frac{\sin(q_0(t_1-\alpha)u)}{q_0u}\,du \\ &\quad + \frac{1}{\mu_p(I)\pi}\mathrm{Re}\int_{\Lambda^{1/2}} \frac{h_n^{(2)}(u)e^{-2iq_n(\beta+t_n)u}}{\kappa(u)}\cdot\frac{\sin(q_n(\beta-t_n)u)}{q_nu}\,du. \end{aligned}$$

利用柯西–施瓦茨不等式，可估计得

$$\begin{aligned} |T_2| &\le \frac{1}{\mu_p(I)\pi}\left(C_0\left(\int_{\Lambda^{1/2}}\frac{\sin^2(q_0(t_1-\alpha)u)}{(q_0u)^2}du\right)^{1/2} + C_n\left(\int_{\Lambda^{1/2}}\frac{\sin^2(q_n(\beta-t_n)u)}{(q_nu)^2}du\right)^{1/2}\right) \\ &= \frac{C_0}{\mu_p(I)\pi}\left(\frac{t_1-\alpha}{q_0}\int_{q_0(t_1-\alpha)\Lambda^{1/2}}\mathrm{sinc}^2\omega\,d\omega\right)^{1/2} + \frac{C_n}{\mu_p(I)\pi}\left(\frac{\beta-t_n}{q_n}\int_{q_n(\beta-t_n)\Lambda^{1/2}}\mathrm{sinc}^2\omega\,d\omega\right)^{1/2} \\ &\le \frac{C}{\mu_p(I)\pi}\mu_p(I)^{1/2} \le C'\mu_p(I)^{-1/2}. \end{aligned}$$

将这些估计合并起来，我们得到

$$\left| \frac{1}{\mu_p(I)} \int_I k_\Lambda(y,y)\, dy - \frac{|\Lambda^{1/2}|}{\pi} \right| = \left| T_1 + T_2 - \frac{|\Lambda^{1/2}|}{\pi} \right| \leq C\mu_p(I)^{-1/2}.$$

■

5.5. **定理5.3的证明。**

证明。 定理 5.3 现在可由定理 5.1中陈述的一般密度定理推出。引理 5.4 — 5.7 验证了再生核满足相关条件，而在定理 5.9 中，我们计算了由核的平均迹给出的临界密度。

■

备注。 最后指出，对谱集 Λ 的假设可以放宽；当 Λ 仅为有限测度集时，定理 5.3 仍然成立。

如果谱集不是区间 $[0,\Omega]$，那么命题 5.5 便不再成立，因此引理 5.6 和5.7 的证明不适用于一般谱集。尽管如此，只要5.6 和 5.7 仍然成立，前提是 Λ 具有有限测度。证明更为微妙，感兴趣的读者可参阅 [4]。

参考文献

[1] R. Aceska 和 H. Feichtinger. 借助时频分析工具处理可变带宽函数。《数学分析与应用杂志》, 382(1):275 – 289, 2011.[2] R. Aceska 和 H. Feichtinger. 再生核与可变带宽。《函数空间与应用杂志》, 2012, 2012.[3] N. N. Brueller、N. Peterfreund 和 M. Porat. 非平稳信号：最优采样与瞬时带宽估计。载于*IEEE-SP* 国际时频与时标分析研讨会论文集（目录号 *98TH8380*），第 113–115 页，1998 年 10 月 .[4] M. J. Celiz. 由分段常数函数参数化的可变带宽函数空间。博士论文，维也纳，2022年。Universit¨at Wien，博士论文。[5] J. Clark、M. Palmer 和 P. Lawrence. 一种从非均匀间隔样本重建函数的变换方法。《*IEEE* 声学、语音与信号处理汇刊》，33(5):1151–1165, 1985 年 10 月。[6] N. Dunford 和 J. T. Schwartz. 线性算子。第二部分：谱理论。希尔伯特空间中的自伴算子。William G. Bade 和 Robert G. Bartle 协助编写。Interscience Publishers，John Wiley & Sons，纽约-伦敦，1963年。[7] C. Fefferman. 伪凸域的伯格曼核与双全纯映射。《*Invent. Math.*》, 26:1–65, 1974年。[8] H. F¨uhr、K. Gr¨ochenig、A. Haimi、A. Klotz 和 J. L. Romero. 再生核希尔伯特空间中的采样与插值密度。《*J. Lond. Math. Soc. (2)*》, 96(3):663–686, 2017年。[9] K. Gr¨ochenig 和 A. Klotz. 什么是可变带宽？《*Comm. Pure Appl. Math.*》, 70(11):2039–2083, 2017年。[10] K. Gr¨ochenig 和 A. Klotz. 椭圆微分算子谱子空间中采样与插值的必要密度条件。《*Anal. PDE*》, 2023年，即将发表。[11] K. Horiuchi. 时变频带连续信号的采样原理。《信息与控制》, 13:53–61, 1968年。

[12] I.Pesenson 和 A. Zayed. 希尔伯特空间中向量的 Paley–Wiener 子空间及其在积分变换中的应用。《数学分析与应用杂志》, 353(2):566 – 582, 2009年。[13] H. J. Landau. 某些整函数的采样与插值的必要密度条件。《数学学报》, 117:37–52, 1967年。[14] R. Martin 和 A. Kempf. 满足时变带限条件的函数空间。《数学分析与应用杂志》, 458(2):1597 – 1638, 2018年。[15] I. Pesenson.带限向量的采样。《傅里叶分析与应用杂志》, 7(1):93– 100, 2001年1月。[16] M. Schmied、R. Sims 和 G. Teschl. 斯图姆-刘维尔算子的绝对连续谱及其在径向量子树中的应用。《算子与矩阵》, 2(3):417–434, 2008年。[17] G. Teschl. 《量子力学中的数学方法》。数学研究生教材。美国数学学会，2014年。[18] V. K. Tuan 和 A. I. Zayed. 一类积分变换的 Paley–Wiener 型定理。《数学分析与应用杂志》, 266(1):200–226, 2002年。[19] D. Wei 和 A. V. Oppenheim. 基于局部带宽的采样。载于*2007*年第四十一届阿西洛马会议：信号、系统与计算会议录, 第 1103–1107 页，2007年11月。[20] J. Weidmann. 常微分算子的谱理论。数学讲义。Springer，1987年。[21] J. Weidmann. 希尔伯特空间中的线性算子¨：第二部分 应用。数学指南¨。Vieweg+Teubner 出版社，2003年。

†维也纳大学数学学院，奥地利维也纳奥斯卡·摩根施特恩广场1号，A-1090

‡菲律宾大学数学研究所，菲律宾奎松市迪利曼1101电子邮件地址: mjceliz@math.upd.edu.ph电子邮件地址: karlheinz.groechenig@univie.ac.at电子邮件地址: andreas.klotz@univie.ac.at