arXiv:2304.07814v1 [hep-th] 16 Apr 2023

“重要的不是停止提问”，包括标准模型所依据的对称性

Daniel Sternheimer

To the memory of Moshe Flato and of Noriko Sakurai

摘要。迄今为止，新的基本物理理论可以在事后看来被视为通过某种变形从现有理论中产生。这正是 Flato“变形哲学”的基础，其主要范式是二十世纪初物理学革命中的量子力学（通过变形量子化）和狭义相对论。基于这些事实，我们描述强子（强相互作用的基本粒子）的对称性可能“涌现”的两个主要方向：以某种方式（包括量子化）对反德西特对称性（AdS）进行变形；而反德西特对称性本身又是狭义相对论中庞加莱群的一种变形。最终目标是从基本原理出发，为强相互作用的动力学奠定基础；强相互作用的理论半个世纪前源于凭经验猜测的“内部”对称性。在快速介绍物理（强子）和数学（变形理论）背景之后，我们回顾一种可能的解释：光子是反德西特单粒子表示的复合体（与量子电动力学相容），轻子则是类似的复合体（由 5 个希格斯赋予质量，并将电弱模型扩展到 3 代）。随后，我们提出一个能够“生成模型”的多面向框架，在其中，反德西特时空将被变形并量子化（可能在单位根处量子化，和/或以一种数学上尚未发展完善的方式引入非交换“参数”）。这将通过变形为基本粒子的“内部”对称性赋予一种时空起源，而其动力学正是建立在这些对称性之上的；并且，这一框架要么对标准模型提出质疑，要么为其提供概念上坚实的基础，与爱因斯坦的名言一致：

“The important thing is not to stop questioning. Curiosity has its own reason for existing.”

数学主题分类（2010）。主要分类 81R50；次要分类 53D55、17B37、53Z05、81S10。

关键词。强子对称性、模型、反德西特、变形理论、变形量子化、单态、单位根处的量子群、“量子变形”。

本文发表于《物理学中的几何方法》第三十二届研讨会（2013年，比亚沃维耶扎），《数学趋势》，第7–37页，施普林格（2014）。©2014 Daniel Sternheimer。

1. 引言：变形哲学与本文的提案

1.1. 为什么要变形?

无论“万有理论”这个概念多么诱人，对我而言，它都不切实际。在物理学中，无论有意还是无意，人们都会采用近似，以便让理论（或模型）尽可能易于处理。尤其是当目标是描述当时已知的现实，即使人们怀疑还有更复杂的现实尚待发现时，情况更是如此。问题在于如何发现那个现实。根据以往的经验，我们认为，不应进行外推，而应当“变形”。

事实上，物理理论都有其适用域，例如由其中涉及的相关距离、速度、能量等所界定。但从一个域（如距离等）过渡到另一个域，并非毫无控制地发生：实验现象会出现，引发悖论并与公认理论相矛盾，这与费米的名言相符 [24]：有两种可能的结果：如果结果证实了假设，那么你就完成了一次测量；如果结果与假设相悖，那么你就有了一个发现。

最终，一种新的基本常数加入进来，促使形式体系发生改变：附加的结构（对称性、可观测量、态等）使初始结构变形为一种新结构；当新参数趋于零时，这种新结构在极限下会“收缩”到先前的形式体系。问题在于（至少在别无他法之前）物理学界倾向于随大流。唱着“未必如此”（我在本文中正是这么做的）并不受欢迎。

“变形”现象的第一个例子可以追溯到古代，当时人们逐渐认识到地球并非平坦。 [然而直到今天，仍有人对此提出质疑！] 在数学中，变形最早可追溯到19世纪的黎曼曲面理论，不过主要进展发生在一个世纪之后，尤其体现在 Kodaira 和 Spencer 开创性的解析几何研究中 [56] （以及 Grothendieck 对这些研究鲜为人知的诠释 [45], ，其中可以看到水印般的“EGA”，它始于几年之后）。Gerstenhaber 的代数变形理论在某种意义上将这些深刻的几何研究“线性化”了 [44]。

人们意识到变形对于物理学的发展至关重要，这发生在几年后的法国。当时，人们注意到，牛顿力学的伽利略不变性（$SO(3)\cdot\mathbb{R}^3\cdot\mathbb{R}^4$）按照 Gerstenhaber 的意义发生了变形 [44], ，成为狭义相对论的庞加莱群（$SO(3,1)\cdot\mathbb{R}^4$）。尽管当时发展起来的 Atiyah–Singer指标定理中不可或缺的伪微分算子符号的复合律，实际上是对其阿贝尔乘积的一种变形（我曾于巴黎参加 1963/64 年的 Cartan–Schwartz 研讨会，并参与了该定理的讲解），但又过了大约十年，我们才开发出相关工具，使我们能够明确、严格且令人信服地阐明许多人心中所想：

量子力学是经典力学的一种变形。由此发展出的理论后来被称为变形量子化，并衍生出流形上的种种形式；更广泛地说，人们也由此认识到，量子化就是变形。消除了这一障碍之后，变形在理论物理中的极端重要性便清晰显现 [26], ，由此产生了我称之为“Flato的变形哲学”的思想。

本文面向物理学家和数学家，涉及众多主题，因此对于来自这两个领域之一的读者来说，我们在许多部分可能显得过于概略（甚至流于浅显）。更多细节可见较近期的综述（ [21, 76, 77] 我本人撰写的综述，以及其他人撰写的许多综述）及其中引用的参考文献。我们希望这两个领域的读者都能领略本文所提出的模型框架（或许还能为之贡献力量）。这一框架以我自20世纪60年代初以来亲眼见证、并与Flato共同参与的诸多进展为基础；我们有时也曾因此引发争议。在围绕这些构想与科学家进行的无数次讨论中，尤其是在过去两年里，我惊讶地发现，许多人对其中不少主题往往只有模糊的认识，视野并未超出教科书和／或通俗读物所提供的观点。我大概是极少数能够（也敢于）以这种非传统方式探讨所有相关主题的人之一。数学方面的部分内容尚属未开垦的领域，无论如何都需要一种处理方式（可称为“数学工程”），着重研究具体实例，而非进行高度抽象的推演。另一方面，本文采用的基本物理学方法并不寻常；文中质疑的一些物理问题和模型，多年来一直在课程中被当作事实讲授，并在文献中被当作事实呈现。

1.2. 论文简述

19世纪末，许多人认为，尤其是有了牛顿力学（以及引力）和电磁学之后，物理学已被充分理解。然而，精彩的进展还在后头。上世纪上半叶，相对论和量子力学相继问世，如今我们可以将它们理解为变形。在基础物理方面，上世纪下半叶由基本粒子之间的相互作用主导，这些相互作用按强度递增排列，分别为引力、弱相互作用、电磁相互作用和强相互作用。20世纪40年代发展起来的量子电动力学（QED），以极高的精度解释了电磁相互作用（尽管该理论在数学上尚未完全严谨）。20世纪70年代，量子电动力学与弱相互作用相结合，形成了电弱模型；该模型需要希格斯玻色子，而它现在很可能已在 CERN 被发现。

概述物理和数学背景之后，我们将指出如何利用 AdS 对称性（庞加莱对称性的变形），将光子（量子电动力学的基础）解释为两个“单态”的复合体；单态是 $2+1$ 时空中的无质量粒子（它们本身是两个简谐振子的复合体）。接着，将电弱模型扩展到目前已知的三代轻子，或许可以解释它们在 AdS 中如何也能由单态复合而成，并由 5 个希格斯赋予质量。

因此，我们很想通过进一步变形 AdS，来获得构成强子动力学基础的强子对称性。这在李群范畴中行不通，但在 Hopf 代数（量子群）范畴中却可以实现。例如，单位根处的量子群（通常称为“受限量子群”）是有限维向量空间，并具有有限维酉不可约表示。这是目前所用简单幺正对称性的一项重要特征。当然还有许多其他问题需要处理，不能忽视；但如果这一方向能产生一个符合实验数据的模型，我们对物理学的理解或许将迎来一场革命。

这或许是过高的期望，可能需要更一般的变形，尤其是多参数变形（包括单位根处的情形；例如，参数取自 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$的群代数，以下记作$\mathbb{Z}_{(n)}$），或者一种数学上尚未发展起来的新型变形理论，其“变形参数”是非交换的（尤其是四元数，或属于 $\mathbb{S}_n$的群代数，即 n 个元素的置换群，例如 $n=3$）。

这两者都属于尚待开垦的数学领域；如果研究成功，我们或许不得不“回到绘图板前”，重新构建理论，并重新解释许多原始实验数据。这是值得未来几代人迎接的挑战，而且无论如何都应当能产生非平凡的数学成果。

2. 关于背景的极简概览：强子及其对称性

在20世纪50年代，已知基本粒子的数量急剧增加，费米有一天打趣道 [24]：年轻人，如果我能记住这些粒子的名字，我早就当植物学家了。

显然，当时人们已经感受到理论上的迫切需要：为迅速增加的 [8] 粒子纷乱局面理出头绪。由此出现了两个（彼此相关的）自然想法：将分子光谱学中行之有效的“光谱学”方法，尤其是群论 [83]，应用于粒子物理学；并尝试将某些粒子视为“更基本”的粒子，认为其他粒子是由它们复合而成的。

一个鲜少提及的注意事项：在分子光谱学中，例如，晶体结构破坏旋转对称性时（对于三方和四方晶体而言，这正是 Flato 在 Racah 指导下完成的理学硕士论文 [55] 研究主题；该论文于1960年答辩，直到其主要部分于1965年以法语发表为他的“第二篇论文”时，仍处于研究前沿），我们知道作用力，而这些作用力的对称性决定了谱（能级）。粒子物理学中的情况则恰恰相反：人们从观测到的谱中猜测对称性，据此解释实验数据，并发展出与之相容的动力学。

最初，为了解释质子 p和中子 n 在强相互作用下表现相似，人们引入了一个量子数（同位旋），

它与一种 $SU(2)$ 对称性有关，诞生于20世纪30年代。20世纪50年代，人们在宇宙射线中发现了新的粒子，它们的行为“奇怪”（例如，它们的寿命比预期长得多）。因此，人们引入了一个新的量子数（奇异数）；强相互作用和电磁相互作用会守恒这一量子数，但弱相互作用不会。其中一种粒子是重子 Λ。1956年，坂田昌一 [71], 在费米和杨振宁早先提议的基础上加以扩展（该提议只涉及质子和中子），提出了“坂田模型”。根据这一模型， p、 n 和 Λ 是“更基本的”，其他粒子则由这三种粒子及其反粒子组成。这个概念上颇具吸引力的模型（或许没有坂田洋子那么“性感”——她是一位顶级模特，当时尚未出生）产生了重大影响 [66], ，尽管它所作的一些实验预测后来被证明是错误的。

1961年初，一个酝酿已久的想法终于出现了：既然强相互作用中有两个守恒的量子数（同位旋和奇异数；如今我们会说是“两代”），我们就应该尝试用一个二阶紧李群，把我们已知的许多粒子“整齐地归类”。当时尤其写了三篇论文：一篇详尽的论文 [7] 指出，“由于现在要确定强相互作用的确切对称性还为时过早”，于是系统地研究了全部三种群（类型 A_2、 $B_2 = C_2$ 和 G_2），以及更多内容。另有两篇 [43, 65], 论文，只提出了最简单的那个（$SU(3)$，类型 A_2）。已知的由 8 个自旋为 $_1{}_2$ 的重子组成的“八重态”，以及由 8 个标量（自旋为 0）和矢量（自旋为 1）介子组成的“八重态”，都恰好适配八维伴随表示。（因此盖尔-曼将其称为“八重道”，借指“佛教八正道”。）1962年，列夫·奥昆提出用“强子”作为强相互作用粒子的统称：半整数自旋（费米子）的重子通常较重，而整数自旋（玻色子）的介子则较轻。当时已知的 9 个自旋为 $_3{}_2$ 的重子（$4\,\Delta + 3\,\Sigma^* + 2\,\Xi^*$）与十维表示相对应：“十重态”中缺少的那个粒子（$\Omega^-$）于1964年被发现，其性质大致符合盖尔-曼在1962年所作的预测。大获成功！（虽然谁都能猜到，4、3、2 后面就是 1... ...）

但如何处理 $SU(3)$ 的基本（3维）表示呢？通过张量乘积并约化为不可约分量，它们可以得到所有其他表示。1964年，默里·盖尔曼以及独立提出相同想法的乔治·茨威格认为，这些表示可以与3种实体（数量与坂田模型中的相同）及其反粒子联系起来。茨威格提议称它们为“王牌”，但对通俗名称颇有感觉的盖尔曼将它们称为“夸克”——这是他凭空想出的一个无意义词，不久后他发现詹姆斯·乔伊斯在《芬尼根守灵夜》中用过这个词：

> 给马斯特·马克三个夸克！当然，他的吠声
> 并不响亮；当然，他所有的吠声都不着边际。

那么，这些被“禁闭”的夸克如何能在强子中共存呢？它们的自旋为$_1{}_2$ （更不用说分数电荷了），而这违反了泡利不相容原理。同年，O.W. Greenberg（以及 Y. Nambu）

提出赋予它们不同的“色荷”，分别称为蓝、绿和红。最终，自20世纪70年代以来，这催生了量子色动力学（QCD），与量子电动力学（QED）并行发展，但其非阿贝尔“规范群” $SU(3)$取代了QED中的阿贝尔群 $U(1)$。为了让它们结合在一起，人们引入了“胶子”，它们传递强力。从那时起，粒子物理学的发展基本上沿着一条弹道轨迹前进，其理论最终变得越来越以唯象学为导向——不过，许多原始实验数据都是在主流模型的框架内加以解释的。

1964年，夸克有3种“味”（上夸克、下夸克和奇夸克），但同年，包括Sheldon Glashow在内的一些人出于各种原因提出了第四种味（命名为粲夸克）。这些理由逐渐变得更具说服力，直到1974年发现了一个“粲”介子J/Ψ，从而完成了夸克的2代，与2代轻子（e 和 μ）及其相应的中微子相对应。1973年，假定的夸克味增加到如今的6种；当时小林诚和益川敏英注意到，如果存在另一对夸克，那么一项实验观测（CP 破坏）便可以得到解释。这对夸克后来由Haim Harrari命名为底夸克和顶夸克，并分别于1977年和1995年在费米实验室被“观测”到（顶夸克的质量 [1] 比预期重得多）。与此同时，在1974年至1977年间，实验发现了一个质量更大的轻子 τ，并于2000年发现了它的中微子。小林诚和益川敏英与南部阳一郎共同获得了2008年诺贝尔物理学奖；早在1960年，南部阳一郎就描述了粒子物理学中自发对称性破缺的机制。他们还于1985年获得了首届J.J.樱井理论粒子物理学奖。该奖项是在J.J.于1982年英年早逝后，由美国物理学会（以及他的遗孀Noriko Sakurai——她于2008年成为我的妻子 [25]）设立的；南部阳一郎曾于1994年获得J.J.樱井理论粒子物理学奖。

因此，我们现在有三代轻子和三代夸克（分为六种味和三种色荷）。$SU(3)$又回来了，但含义与最初不同。最终，电弱模型被纳入其中，并以此为基础构建了精细的动力学理论；这一切似乎都与实验数据吻合。

在近期的一系列论文中（见 [13] 及其中的参考文献），阿兰·孔涅及其合作者指出：“非交换几何为统一包括引力在内的所有基本相互作用提供了一个颇有希望的框架。”在最后一篇论文中，他假设“时空是一个非交换空间，由一个连续的四维流形与一个有限空间作乘积构成”，并据此提出了一种颇具个人特色的尝试，以预测标准模型（可能包含四种色）。

但如果标准模型是个根基不稳的巨人呢（正如先知但以理对尼布甲尼撒的梦的解读所示：《但以理书》第2章，第31至36节）？如果它“完全偏离了目标”呢？？

[1] 夸克质量并非测量值，而是理论模型中使用、且与原始实验数据相符的参数。

3. 数学背景：变形理论与量子化

在本节中，为了内容完整起见，我们将简要概述若干书籍、论文和综述中的详细内容（尤其是 [21,77]）。量子化是我们“变形哲学”的主要范式，因此我们希望为尚不了解这些内容的读者介绍一些变形理论的基础知识，说明量子力学和场论如何能够被实现为其经典对应物的变形，以及这种方法在对称性方面的应用（尤其是“量子群”这一化身）。受过良好教育的读者，或不太在意数学细节的读者，暂时可以先浏览本节。不过请注意，变形量子化（如今的名称）最初见于“奠基论文” [6], ，它不仅仅是对通常量子力学的重新表述；特别是，它超越了正则量子化（见 $\mathbb{R}^{2\ell}$），并适用于一般的相空间（辛流形或泊松流形）。

3.1. Gerstenhaber 的代数变形理论

代数（结合代数、李代数、双代数等）在 $\mathbb{K}$ 上的 Gerstenhaber 变形（在参数 ν 的形式级数域 $\mathbb{K}[[\nu]]$ 上，其系数取自域 $\mathbb{K}$ ）的一种简洁表述是 [10, 44]:

˜定义 1. 代数 A 在 $\mathbb{K}$ 上的变形，是指在 ˜ ˜ ˜ ˜上的代数 $A\,\mathbb{K}[[\nu]]$ ，满足 $A/\nu A \approx A$。若两个变形 A 和 A' 在 $\mathbb{K}[[\nu]]$ 上同构，则称它们等价˜；若 A 与原代数 A 同构，其中原代数通过基域扩张被视为一个 $\mathbb{K}[[\nu]]$-代数，则称 A 是平凡的。

对于结合代数（分别地，李代数），上述定义告诉我们，存在一个新的乘积 $*$ （分别地，括号 $[\cdot,\cdot]$），使得新的（变形后的）代数再次具有结合性（分别地，为李代数）。将原来的复合律记为普通乘积（分别地，李括号 $\{\cdot,\cdot\}$），这意味着，对于 u_1、$u_2 \in A$（我们可以通过 $\mathbb{K}[[\nu]]$-线性将其扩展到 $A[[\nu]]$ ），有如下形式级数展开:

$$u_1 * u_2 = u_1 u_2 + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^r C_r(u_1, u_2) \tag{1}$$

$$[u_1, u_2] = \{u_1, u_2\} + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^r B_r(u_1, u_2) \tag{2}$$

其中，双线性映射 $(A \times A \to A)$ C_r 和（反对称的） B_r 分别是相应上同调（Hochschild 和˜Chevalley–Eilenberg）中所谓的 2-上链，并分别满足 $(u_1 * u_2) * u_3 = u_1 *(u_2 * u_3) \in A$和 $\mathcal{S}[[u_1, u_2], u_3] = 0$；其中 u_1、u_2、$u_3 \in A$、$\mathcal{S}$ 表示对循环置换求和。首项（分别为 C_1 或 B_1）必然是一个 2-余循环（前述条件中 ν 的系数可作为该项的定义）。

对于一个（拓扑）双代数（一个结合代数 A，此外还具有余乘法 $\Delta: A \longrightarrow A\otimes A$，并满足显然的相容关系），记 $\otimes_\nu$ 为 $\mathbb{K}[[\nu]]$-模的张量积，我们可以将 $\tilde{A}\hat{\otimes}_\nu\tilde{A}$ 认作 $(A\hat{\otimes}A)[[\nu]]$，其中 $\hat{\otimes}$ 表示在某种拓扑下完备化的代数张量积（例如，对于 A上的 Fr´echet˜核拓扑）。于是我们还有一个变形后的余乘法 $\Delta = \Delta + \sum_{r=1}^{\infty}\nu^r D_r$, $D_r \in \mathcal{L}(A, A\hat{\otimes}A)$，满足 $\tilde{\Delta}(u_1 * u_2) = \tilde{\Delta}(u_1) * \tilde{\Delta}(u_2)$，其中 $\mathcal{L}$ 表示线性映射空间。在此背景下，可以引入适当的上同调。Hopf 代数还有一些自然的附加要求（例如参见 [11]）。

3.2. 变形量子化

将上述抽象定义应用于辛流形或泊松流形 W 上的（可微）函数代数 $N(W)$ 时，它便不再那么抽象；特别是应用于具有泊松括号 P 的相空间 $\mathbb{R}^{2\ell}$（坐标为 p、$q\in\mathbb{R}^\ell$）上的情形。该括号作用于两个函数 u_1 和 u_2，在泊松流形 W 上定义为 $P(u_1,u_2) = \imath(\Lambda)(du_1\wedge du_2)$（其中 $\imath$ 表示内积，此处是 2- 形式 $du_1\wedge du_2$ 与定义 W 上泊松结构的 2-张量 Λ 的内积；对于辛流形，该张量处处非零，其逆为闭的非退化 2-形式 ω）。对于 $W=\mathbb{R}^{2\ell}$，可在双微分算子 P 的 r^{th} 次幂公式（$r\geq 1$）中令 $r=1$，从而写出 P（对重复指标求和）：

$$P^r(u_1,u_2) = \Lambda^{i_1j_1}\dots\Lambda^{i_rj_r}(\partial_{i_1\dots i_r}u_1)(\partial_{j_1\dots j_r}u_2) \tag{3}$$

其中 $i_k, j_k = 1,\dots,2\ell$, $k=1,\dots,r$ 以及 $(\Lambda^{i_kj_k}) = \left(\begin{smallmatrix}0 & -I\\ I & 0\end{smallmatrix}\right)$。我们可以将通常的函数乘积（由泊松括号驱动的变形）以及泊松括号的变形，分别写成如今所称的莫亚尔“星”乘积和括号。

$$u_1 *_M u_2 = \exp(\nu P)(u_1,u_2) = u_1u_2 + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\nu^r}{r!}P^r(u_1,u_2). \tag{4}$$

$$M(u_1,u_2) = \nu^{-1}\sinh(\nu P)(u_1,u_2) = P(u_1,u_2) + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\nu^{2r}}{(2r+1)!}P^{2r+1}(u_1,u_2). \tag{5}$$

它们分别对应于在 $\mathbb{R}^{2\ell}$ 上对函数 $H(q,p)$ 进行“正则”量子化所得算子的乘积和对易子；该函数的逆傅里叶˜变换为 $H(\xi,\eta)$，其表达式为（当权重为 $\varpi=1$ 时，这个公式早在 1927 年就由赫尔曼·外尔 [80] 找到）：

$$H\mapsto\hat{H} = \Omega_\varpi(H) = \int_{\mathbb{R}^{2\ell}}\tilde{H}(\xi,\eta)\exp(i(\hat{p}.\xi+\hat{q}.\eta)/\hbar)\varpi(\xi,\eta)d^\ell\xi d^\ell\eta \tag{6}$$

它将经典函数 H 映射为作用在 $L^2(\mathbb{R}^{2\ell})$ 上的算子，其中“核” $\exp(i(\hat{}p.\xi + \hat{} q.\eta)/\hbar)$ 是海森堡群在（射影意义下唯一的）表示中的相应酉算子，其生成元为 $\hat{}p_\alpha$ 和 $\hat{}q_\beta(\alpha,\beta = 1,\dots\ell)$，并满足正则对易关系

$[\hat{p}_\alpha, \hat{q}_\beta] = i\hbar\delta_{\alpha,\ \beta}I$。1932年，尤金·维格纳 [81] 找到了 Weyl 量子化公式的逆公式。该公式通过一种迹公式，将算子映射为数学家所称的符号：Ω_1 在 $L^2(\mathbb{R}^{2\ell})$ 与作用在 $L^2(\mathbb{R}^\ell)$ 上的希尔伯特–施密特算子之间定义了一个希尔伯特空间同构，其逆映射为

$$u = (2\pi\hbar)^{-\ell}\,\mathrm{Tr}[\Omega_1(u)\exp((\xi.\hat{p} + \eta.\hat{q})/i\hbar)]. \tag{7}$$

重要的是要记住，对于任意 W [21]，包括不存在 Weyl 或 Wigner 映射、且没有显而易见的希尔伯特空间量子化处理的情形，函数在 $N(W)$ 上的普通乘积都可以变形为“星乘积”（其首项的反对称部分为泊松括号 P）。星乘积也可以为代数簇、“带奇点的流形”以及（谨慎处理时）无限维流形定义。

关于变形量子化及其诸多形式的更多进展，例如可参阅 [6, 21, 77]，尤其是其中的参考文献。这些进展包括星乘积协变性的概念，以及由此允许的“星表示”（无需算子）。还包括量子群。量子群约于1980年在列宁格勒出现，起因则完全不同 [23]；但尤其是在 Drinfel’d [22]（他创造了这一名称）和 Jimbo [53]（关于量子包络代数）于20世纪80年代初发表开创性研究之后，量子群可以被视为（拓扑）Hopf 代数的变形（例如参见 [10, 11, 75]）。

在这方面，值得记住狄拉克的一句富有预见性的概括性论述 [19], ，它适用于物理学中的许多情形：
两种观点在数学上可能是等价的，因此你或许会认为，只要理解其中一种，就不必费心了解另一种，可以将其忽略。但一种观点可能会启发未来的发展，而另一种观点却不会；尽管这两种观点在当前阶段是等价的，却可能为未来带来不同的可能性。因此，我认为，我们不能忽视任何审视量子力学的可能视角，尤其不能忽视量子力学与经典力学的关系。

狄拉克当时想到的，无疑是约束系统的量子化；他不久后对其进行了发展，而如今它可以被视为变形量子化的一个特例。但这一原则适用于许多领域，甚至是一种极为有效的策略，能够将某个理论框架拓展到其最初适用范围之外。非交换几何就是一个绝佳的例子 [14], ；如今，它已成为数学的前沿领域，发展广泛，涵盖从数论到物理学诸多领域的内容。

为了说明，物理学中的重要具体问题可以通过变形量子化独立处理，而无须引入希尔伯特空间（大多数物理学家仍将其视为量子理论的必要条件），我们在 [6] 中处理了若干重要问题，首要的是谐振子（许多方法的基本范例），此外还有角动量、氢原子，以及一般而言，变形量子化中谱的定义，整个过程都不需要希尔伯特空间。此后，又有不少其他应用得到发展

，但这一方法最终应能在许多涉及量子现象的领域证明其成效（甚至成为必要手段），包括量子计算。诚然，在许多具体例子中，我们需要（至少是隐含地）借助“辅助条件”来限制可能过度的自由度；尤其对于谱而言，这种自由度源于缺少希尔伯特空间这一普罗克拉斯提斯之床。不过，即便如此，自由度过多也胜过自由度不足。

3.3. 进一步的重要变形（及收缩）

3.3.1. 多参数变形量子化的一个实例。一个自然的问题是，是否“故事到此为止”，也就是说，正如简单李群或代数的 Gerstenhaber 变形一样，所得到的结构是否是刚性的，或者是否还存在某些进一步的变形。关于这一问题，[5] 给出了答案：该答案探寻了带有另一个参数 β（除 $\nu = i\frac{\hbar}{2}$之外）的 $N(W)$的进一步变形，并将其应用于统计力学以及所谓的 KMS 态（参数为 $\beta = 1/kT$，其中 T 表示绝对温度）。结果表明，其中存在某种交织，但这种交织并非变形的等价：作为 ν-变形，二参数“星乘积”由一个“共形泊松括号”驱动，其共形因子具有 $\exp(-\frac{1}{2}\beta H)$ 的形式，其中 H为某个哈密顿量。

3.3.2. 量子群若干方面的简要综述。关于量子群（以及 Hopf 代数）的文献浩如烟海、内容多样（且仍在不断增长），因此我们建议有兴趣的读者从众多探讨这一概念各个方面（往往具有很强代数性）的教材和论文中自行选择。[61]中有一篇两页的入门介绍。

粗略地说，量子群通常可以视为 Poisson-Lie 群上的函数代数的 [22] 变形（定义 1 中所指的意义）（Poisson-Lie 群是 G 配备了与群乘法相容的泊松括号的李群，例如半单李群），或者视为其包络代数（或其某种闭包）的变形的“对偶方面” [22, 53] ；该包络代数$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$配备了自然的 Hopf 代数结构，而整个研究正是约在 1980年 $\mathcal{U}_t$从列宁格勒$\mathfrak{sl}$起步的。第一个例子是 $e(f(2))$，这是一个生成元为 h 的代数，其生成元与 $\mathfrak{sl}(2)$相同，但具有“变形”的对易关系，可以较形式化地写成如下形式（$t = 0$ 是 $\mathfrak{sl}(2)$ 的变形参数）：

$$[h, e] = 2e,\ [h, f] = -2f,\ [e, f] = \sinh(th)/\sinh t \tag{8}$$

或者更传统地，将其视为一个代数，其生成元为 E、F、K、K^{-1}（通常记作 $K^{\pm 1} = q^{\pm H}$），并满足以下关系

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1,\ KEK^{-1} = q^2E,\ KFK^{-1} = q^{-2}F, \tag{9}$$

$$EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}, \tag{10}$$

为求简便，我们这里不写出余乘法、余单位和反粒子的表达式；这些表达式是证明 Hopf 代数结构所必需的。对于高秩

单李代数，还需要满足三线性关系（变形 Serre 关系），这使问题更加复杂。所有这些内容都可以在文献中找到。

请注意，只有当 Hopf 代数是有限维向量空间时，它的代数对偶才也是 Hopf 代数；这一要求限制颇多。具体而言，量子群中所考虑的 Hopf 代数（单位根处的情形除外），例如泊松李群上的可微函数代数，都是（有限生成的）无限维向量空间；不过，我们可以在这些空间上 [10, 11] 定义自然拓扑（例如 Fr´echet 核拓扑），这些拓扑尤其体现了它们与“量子化包络代数”之间的对偶性。请记住，对于任意一个李代数为 $\mathfrak{g}$ 的连通李群 G，包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$的元素都可以视为作用在 G上的微分算子，也就是说，它们是支撑集位于 G 中任意一点（例如恒等元 $e \in G$）的分布，并属于紧支撑可微函数空间的拓扑对偶。这揭示了 Drinfeld 量子群中的一种“隐藏群结构” [10] ；它们 [22] 并非群（也不总是量子.....）

3.3.3. 关于单位根处的量子群。正如 1990 年前后，尤其是 Lusztig [59, 60]（另见例如 [17, 70]）所指出的，当变形参数是单位根时，情况会发生巨大变化。此时 Hopf 代数 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$变为有限维。

$\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$的情形已得到充分理解。对于 q 一个 $2p$次单位根，代数之所以是有限维的，是因为除关系式 (9) 和 (10) 外，还满足以下关系：

$$K^{2p} = 1,\ E^p = 0,\ F^p = 0. \tag{11}$$

特别是（例如见 [85]），所有有限维不可分解表示均已确定，张量积 [57] 的不可分解分解也已确定。高秩情形在很大程度上仍是一片数学处女地。看来，要么需要一种新方法，要么应将研究限制在特定情形，要么两者兼而有之。

3.3.4. 多参数量子群。更一般地说，从一开始就尝试研究具有多个标量参数的变形，是很自然的。就量子群而言，这个问题似乎最早由 Manin 等人 [18, 62], 着手研究，他们将这些多参数变形称为“非标准”变形；随后 Reshetikhin [69], 以及 Frønsdal[39, 41]也进行了研究。但这一概念似乎并未得到应有的关注，至少与量子群更传统方面的大量研究相比，关注程度并不高。至于更复杂的问题，例如在一般情形之外会发生什么——比如“在单位根处”（所有参数取同一个根，还是各自取不同的根）——似乎从未有人针对多参数量子群进行过探讨。

3.3.5. 非标量变形“参数”。Pinczon [68] 及其学生 Nadaud [63, 64], 研究了其他更一般的变形，这些变形比 Gerstenhaber 类型的变形更为普遍，其中“参数”作用于代数

（从左侧、右侧或两侧作用），而不是一个标量。例如，可以有 [68], ，其中 $\tilde{a} = \sum_n a_n \lambda^n$、 $a_n \in A$, 以及由 λ 进行的左乘，其形式为 $\lambda \cdot \tilde{a} = \sum_n \sigma(a_n)\lambda^{n+1}$，其中 σ 是 A的一个自同态。在这种情况下也可以建立类似的变形理论，并使用适当的上同调，从而得到新的、有趣的结果。

尤其是， [68], 虽然 Weyl代数 W_1 （由海森-伯格李代数 $\mathfrak{h}_1$生成）已知是 Gerstenhaber刚性的，但在这种超对称变形理论中，它可以非平凡地变形为超对称包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{osp}(1|2))$。不久之后， [64], 在二元多项式代数 $\mathbb{C}[x, y]$ 上发现了一类新型 Moyal型乘积；随后，人们研究了更一般的情形，其中相关的 Hochschild 上同调仍取值于该代数，但变形参数对代数的作用在两侧都带有“扭曲”。

3.3.6. 收缩。颇为有趣的是，在数学物理学中，最先引入的竟是对称性收缩这一（定义不太精确的）逆向概念 [51, 72]。收缩——在最初的例子中称为“李代数的极限”——可以视为变形的逆过程，但不一定是 Gerstenhaber型变形的逆过程。我们不再详述这一“逆向”概念（更深入的研究见 [78] ），而是简要介绍其特点，因为这样更容易理解本文所述的重要对称性变形。一个（有限维）李代数 $\mathfrak{g}$ 可在给定基 $L_i (i = 1, \ldots, n)$ 下由其结构常数$C_{i,\ j}^k$ 描述。支配李括号反对称性和雅可比恒等式的方程，确保所有结构常数的集合位于该 n^3 维空间 [58] 中的一个代数簇上。例如，对某些基元素作如下简单基变换 $L_i' = \varepsilon L_i$ ，并令 $\varepsilon \to 0$，便可得到一个收缩。以 $n = 3$ 为例，并将讨论限制在由对易关系 $[L_1, L_2] = c_3 L_3$ 及其循环置换所定义的三维李代数代数簇的三维子空间上。半单代数 $\mathfrak{so}(3)$ 和 $\mathfrak{so}(2, 1)$ 在开集 $c_1 c_2 c_3 \neq 0$ 中得到。经收缩可得到欧几里得代数，其中一个 c_i 为 0。“ 坐标轴 ”（两个 c_i 为 0）对应海森堡代数 $\mathfrak{h}_1$，而原点对应阿贝尔李代数。当然，这只是一幅不完整的图景（例如，缺少可解代数），但很有代表性。

上述从庞加莱李代数到伽利略李代数的过程，是此类李代数收缩的高维版本（将“洛伦兹推动”生成元 M_{0j} 乘以 ε）。对反德西特时空$_4$ 李代数 $\mathfrak{so}(3, 2)$进行类似的“技巧”操作，可得到庞加莱李代数。庞加莱李代数的一组传统基底为：洛伦兹李代数 $\mathfrak{so}(3, 1)$的 $M_{\mu\nu}$ ，以及时空平移（动量生成元）的 P_μ ，其中 μ、 $\nu \in \{0, 1, 2, 3\}$。共形李代数 $\mathfrak{so}(4, 2)$在基底 $M_{\mu\nu}$下的对易关系可写为（参见例如 [2]）
$[M_{\mu\nu}, M_{\mu'\nu'}] = \eta_{\nu\mu'} M_{\mu\nu'} + \eta_{\mu\nu'} M_{\nu\mu'} - \eta_{\mu\mu'} M_{\nu\nu'} - \eta_{\nu\nu'} M_{\mu\mu'}$，其度量张量为对角形式 $\eta_{\mu\mu}$ （例如，对 $\mu = 0$而言， $+1$ ；对 $\mu = 1$而言，5、-1、2、3、6）。例如，令 $P_\mu = M_{\mu 5} + M_{\mu 6}$，即可识别出一个庞加莱子代数。如果

省略 $\mu = 6$，就会得到反德西特时空$_4$ 李代数 $\mathfrak{so}(3,2)$，其中庞加莱时空平移的作用由 M_{j5} （$j \in \{1,2,3\}$）取代，而时间平移的作用则由 M_{05}取代。第5节中所用无质量表示如何实现从反德西特时空$_4$ 到庞加莱 $'$的收缩，见 [2]。由于物理学家可能更容易理解收缩这一概念，我们在此提及它，并用熟悉的记号详细说明所用示例（这些记号可能已经过时，但基底依据 $\mathbb{R}$）。

4. 关于内部对称性与外部对称性之间的联系

我们不会为了尽可能自成一体，而详细描述庞加莱群及其酉不可约表示（酉不可约表示）。自狄拉克（维格纳喜欢称他为“著名的姻亲”）的倡议下，维格纳发表了开创非紧李群酉不可约表示研究的论文以来，这些表示便已为人所知。与自由粒子相关的表示通常记作 $D(m,s)$，其中 $m \geq 0$ 是粒子的质量，s 是粒子的自旋（对于 $m > 0$）或螺旋度（对于 $m = 0$），它们分别与“平方质量卡西米尔算子”（位于庞加莱包络代数的中心）$P_\mu P^\mu$ 以及“小群”的诱导表示（分别为 $SO(3)$ 和 $SO(2) \cdot \mathbb{R}^2$）相关。 [字母 D源自德语“Darstellung”，常用于表示表示。]

20世纪60年代初，一个自然的问题浮现出来：用于分类相互作用基本粒子的“内对称性”（当时暂定为 $SU(3)$）与庞加莱对称性之间是否存在联系？庞加莱对称性的酉不可约表示与自由粒子相关联。这个问题并非无关紧要，因为有三个自旋不同的八重态对应于 $SU(3)$ 的同一个表示（八维伴随表示）。此外，八重态中的各个族（十重态也一样）呈现出质量谱。如果二者之间确有联系，就应当描述一种能够解释这一切的机制。当然，一个重要的问题是如何用数学方式表述这个问题。

4.1. 禁戒定理、反对意见、反例与推广

4.1.1. 李代数不可能定理与反例。在当时“粒子光谱学”的思路影响下，人们自然会设法寻找一个同时包含两种对称性（内部对称性和外部对称性）的李代数。1965年，在夸克和色荷被提出一年后，L. O’Raifeartaigh [67]提出了一条物理学家所谓的“不可能定理”。其要点是：由于动量生成元 P_μ 在庞加莱李代数中是幂零的，因此在任何包含庞加莱李代数的单李代数中，它们也都是幂零的，这就排除了离散质量谱。因而，要有质量谱，这种联系就必须是直和。几乎所有人都对此满意，只有法国的两个捣蛋鬼提出：“未必如此。”多亏了

伊西多尔·拉比（当时的美国物理学会主席，他记得 Moshe Flato 是一位极其出色的学生，在希伯来大学时，常常在 Giulio Racah 邀请他讲授的一个季度课程上提出难题）我们的异议很快便以 Moshe 希望的挑衅形式发表了 [33] 。随后又出现了反例 [34, 36]。 [67] 中的“证明”有个问题：它暗中假设整个李代数存在一个由可微向量构成的共同不变域；维格纳在 [82] 中谨慎地将此明确列为假设，后来（用维格纳本人的话说）“一位瑞典绅士”证明了巴拿赫李群表示满足这一条件 [42]。最终， [67] 中的论断得以在有限维李群的酉不可约表示的框架内得到证明 [54] ，之后又由多位作者（尤其是 L. O’ Raifeartaigh）进一步完善。然而，我们在 [36] 中表明，只需假设庞加莱部分可积化为酉不可约表示，便有可能得到质量谱；而且没有先验理由认为额外可观测量必须闭合成有限维群的酉不可约表示。我们还给出了反例 [37] ，其中采用了自然的无限维群，甚至证明了 [35] ，在有限生成无限维结合代数和幺正群的框架下，可以得到任意所需的质量谱。

和许多物理学“定理”一样，主要问题在于确定哪些假设和启发式推导可以视为“自然”。证明正面结果时可以接受一定的灵活性，但对禁戒定理应当持保留态度。

4.1.2. 后续进展及问题的相对重要性。正如我们在 [36], 中指出的，这些考量也适用于一条更精妙的不可能定理 [12], ；该定理是在 S矩阵的对称性背景下表述的，也可应用于无限维群。这项非常出色的研究成果，至今仍被大多数物理学家（尤其是在大学里学过它的人）视为确凿证明了直和联系（但这一结论依赖一些容易被遗忘的假设，其中有些甚至隐藏在看似自然的记号中）。

回顾起来，可以说，后一个结果的主要影响之一，源自尝试构造超对称扩展 [46], ，这表明在超对称的语境下或许可以绕过禁戒定理。这大大推动了后者的发展。顺便一提，人们普遍认为，Wess和Zumino [79] 提出的“超庞加莱群”实际上是超对称性的第一个实例。这并不完全正确。特别是，我们早在1967年（发表于CRAS）就引入了所谓的“类庞加莱群”：洛伦兹群与 $\mathbb{R}^8$ 的半直积，其中包含矢量和平旋量平移。不过，由于顾忌泡利，我们不敢为平旋量平移引入反对易子，同时为时空平移引入对易子，因此仍停留在李代数框架内。然而，在 [31] 中可以找到该群的一种物理应用，其中平旋量平移乘以一个与自身反对易的算子 F。那就是

实际上，超庞加莱群的第一个实现。几年前，Wess和Zumino都告诉我，他们并不知道这一点；看来，除了Frønsdal之外，也没有多少人注意到。

5. 单态物理

5.1. 单态作为无质量粒子的“平方根”

反德西特时空向庞加莱时空的收缩（在结构和表示两方面）是（参见 [2]）将反德西特时空(Sp)($\mathbb{R}^4$)（即 $SO(3,2)$ 的双覆盖）的某些最小权酉不可约表示称为“无质量”的理由之一。这些表示记作$D(E_0, s)$，其参数分别是紧子群 $SO(2) \times SO(3)$ 的能量和自旋的最低值。这些不可约表示在 $E_0 \geq s+1$ 适用于 $s \geq 1$ 、且 $E_0 \geq s+\frac{1}{2}$ 适用于 $s = 0$和 $s = \frac{1}{2}$时是酉的。因此， $SO(3,2)$ 的无质量表示（对于$s \geq \frac{1}{2}$）定义为 $D(s+1, s)$，而（对于零螺旋度）则定义为 $D(1,0) \oplus D(2,0)$。在幺正性边界处（固定 s 而降低 E_0 的取值时），Harish-Chandra模 $D(E_0, s)$ 变为不可分解，而物理酉不可约表示则表现为一个商，这是规范理论的标志。对于 $s \geq 1$ ，在极限情形下我们得到一个不可分解表示 $D(s+1, s)$ $D(s+2, s-1)$，其中（“泄漏至”）是 [28] 的简写；数学家会将其写作（无限维）模的短正合列。

关于 $SO(p,2)$ 的（覆盖群的）酉不可约表示的完整分类，例如可见于 [1]。对于 $p=3$ ，当狄拉克 [20] 引入最简并的“单态”表示时，分类工作已经完成。后者在一个子群上是不可约且无质量的；该子群是一个 $2+1$ 维时空的庞加莱子群，而反德西特时空是其共形群。这就是为什么（仿照狄拉克的“左矢”和“右矢”）我们将这些表示分别称为 $Di = D(1, \frac{1}{2})$ 和 $Rac = D(\frac{1}{2}, 0)$，分别对应旋量表示和标量表示。–单态表示具有一项基本性质：

$$(Di \oplus Rac) \otimes (Di \oplus Rac) = (D(1,0) \oplus D(2,0)) \oplus 2 \bigoplus_{s=\frac{1}{2}}^{\infty} D(s+1, s)。 \quad (12)$$

分解中出现的表示，就是我们所说的反德西特群的无质量表示，理由充分 [2]。对于 $s=0$，由于反德西特时空中的时间是紧致的，因此会出现分裂，正、负螺旋度也不作区分；这也是求和符号前要乘以 2 的原因。将其扩展到共形群 $SO(4,2)$——对于庞加莱群的无质量表示而言，该扩展在算子层面是唯一的；对于 $SO(3,2)$的无质量表示而言，在选定螺旋度符号后也是如此——或者将后者收缩为庞加莱群，都能恢复正、负螺旋度符号之间的区别，并为将式（12）右侧的表示称为反德西特无质量表示提供其他充分理由。

因此，与平直时空不同，在反德西特时空$_4$, 中，无质量态由两个单态“组成”。单态的平直时空极限是真空

而且，即使在反德西特时空$_4$, 中，单态的态也非常少：它们的（E, j）图只有一条轨迹（因此狄拉克给它们取了这个名字），不像反德西特时空中的无质量粒子那样形成格状结构。在通常单位制下，角动量为 j 的单态能量为 $E = （j + \frac{1}{2}）\rho$, 其中 ρ 是反德西特时空$_4$ 宇宙的曲率。这意味着，只有维数达到宇宙尺度的实验室才能探测到大到足以使 E 可测的 j：可以说，单态是“自然禁闭”的。

与反德西特时空$_n$/共形场论$_{n-1}$ 对应关系类似，其对称性部分的核心内容是，$SO(n-1, 2)$是 $n-1$维时空的共形群。单态存在于任意维数的时空中，$n \geq 3$ [3]、$n = 4$则有些特殊。对于 $n = 3$，式（12）的对应形式为（HO）$\otimes$（HO）$= Di \oplus Rac$，其中（HO）表示元辛群的谐振子表示（它是 $SL(2, \mathbb{R})$的双覆盖，而后者本身又是$SO(2, 1)$的双覆盖）；该表示是离散系列表示 $D(\frac{3}{4})$与互补系列表示 $D(\frac{1}{4})$之和。由此可见，这是一种“维数约化”，最终，无质量粒子可以被视为源自谐振子的相互作用。我把由此推导其结果的任务留给读者，也欢迎读者探究它与Gerard 't Hooft那些颇具挑战性的观点之间的联系（例如参见 [49, 50]及其中的参考文献）；这些观点涉及“量子决定论”，并特别以元胞自动机为基础。

备注 5.1.1. 相空间实现。满足海森堡正则对易关系（CCR）$[p_\alpha, q_\beta] = \delta_{\alpha\beta} I$的实变量$2\ell$ p_α和 q_β（$\alpha, \beta \in \{1, \ldots, \ell\}$）的二次多项式，生成辛李代数 $\mathfrak{sp}$（$\mathbb{R}^{2\ell}$）的一个实现。再加上线性多项式（在反对易子下），它们构成$\mathfrak{osp}$（$1|2\ell$）的一个不可约实现，对应的超代数（按$\mathbb{Z}_{(2)}$分级）。[$Di \oplus Rac$ 和（HO）是 $\ell = 2$的这一现象在 1（分别）时的特例。] 这一事实使我们得以在 [6] 中写出 t 的幂级数展开，即我们所谓的谐振子哈密顿量 $H = \frac{1}{2}$（$p^2 + q^2$）的“星指数”Exp$_*$（$tH/i\hbar$）（在 Weyl 量子化中对应于幺正演化算符）；而 Harish-Chandra 定理指出，酉不可约表示（在我们的形式体系中，其特征标是星指数在相空间上的积分）的特征标在原点总有一个奇点：在（HO）中，两个分量的奇点在原点相互抵消，这确实是一个奇迹，令许多李群表示论专家困惑不已！

5.2. 反德西特时空$_4$动力学

到目前为止，我们主要关注问题中所谓的“运动学方面”，也就是对称性。然而，在某个阶段，我们无法回避对其中动力学的考察。具体而言，我们必须研究协变场方程和拉格朗日量。事实上，Flato、Frønsdal及其合作者撰写了许多论文，尤其是在20世纪80年代和20世纪90年代，探讨单态物理的各个方面。其中包括BRST对称性、共形方面以及相关的不可分解表示（尤其是Gupta–Bleuler型表示）等。我们的目的是

在这些研究和“变形哲学”的基础上继续推进，而不是全面介绍所有这些工作；其中许多工作的参考文献可见Flato的最后一篇论文 [29]。在接下来的两个小节中，我们将简要介绍从本文所述观点来看最重要的两篇论文：复合量子电动力学 [28]，以及一种可称为扩展至三代轻子的电弱模型 [40]。

5.2.1. Flato–Frønsdal 的“单态量子电动力学”。动力学尤其需要考虑场方程，首先是在第一量子化层次上，特别是反德西特时空中针对Rac的克莱因–戈尔登方程的类比方程$_4$。在那里，正如对（ 1+2 时空中的）无质量表示所预期的那样，会出现规范，而单态的物理态由其场在反德西特时空$_4$ 的无穷远锥面上的取值决定（见下文；这里出现了全息现象 [48], ，在此情形下即反德西特时空$_4$/共形场论$_3$ 对应）。

因此，我们必须处理不可分解表示，即酉不可约表示的三重扩张，如同 Gupta–Bleuler （ GB ）理论及其张量积那样。[此外，最好在这些 GB 三元组层次上考虑共形协变性，这也能区分正、负螺旋度（在反德西特时空$_4$, 中，由于时间变量是紧致的，螺旋度为 $s > 0$ 的 SO(2,3)无质量表示会收缩（分别以唯一方式扩张）为庞加莱群（分别为共形群）的螺旋度为 $\pm s$ 的无质量表示。] 因此，情况变得复杂得多，与平直时空极限截然不同，这使得该理论更加引人入胜。

为了检验这一程序，有必要确保它与传统的量子电动力学（QED）相容；量子电动力学是人们理解得最透彻的量子场论，至少在物理层面的严谨性上如此。

因此，我们需要考察 QED 是否与由两个标量单态组成的无质量光子相容。鉴于 [29]中阐述的理由及其中引用的文献，我们对 Rac考虑偶极方程（$\Box - \frac{5}{4}\rho)^2\phi = 0$ 及边界条件 $r^{1/2}\phi < \infty$ （当 $r \to \infty$时），该方程携带不可分解表示 $D(\frac{1}{2},0)\ D(\frac{5}{2},0)$。一个值得注意的事实是，这一理论是拓扑场论；也就是说， [27],物理解仅通过其在$r \to \infty$处的边界值显现：$\lim r^{1/2}\phi$ 定义了无穷远处三维边界上的一个场。在那里，也就是边界上，规范不变相互作用是可能的，并由此形成一个三维共形场论（CFT）。

然而，如果无质量场（在四维中）是由单态复合而成的，那么单态就必须作为四维对象出现，这就要求引入非常规统计（既非玻色–爱因斯坦统计，也非费米–狄拉克统计）。双线性项必须具有普通（无质量）玻色子或费米子的性质，这一要求告诉我们，单态的统计必须另有一番性质。基本思路是 [28]，我们可以 ϕ按$x(=\sum_{-\infty}^{\infty}\phi^j)x$的形式将 Rac场算符a_j 分解为 $a^{*j} = a_{-j}$ 正能量产生算符 a_j 和湮灭算符 $j > 0$（其中），而暂不对它们的对易关系作任何假设。之后，在要求光子（被视为

作为 2-Rac 场）是玻色–爱因斯坦量子，也就是说，它们的产生算符和湮灭算符满足通常的正则对易关系（CCR）时，才选择对易关系。于是，单态遵循非常规统计（这完全可以接受，因为它们自然禁闭），整个代数则是一种新型且颇为有趣的无限维李代数，可视为正则对易关系的某种“平方根”。随后便可构造出适当的福克空间。基于这些原则，人们构造了一种（共形协变的）复合量子电动力学理论 [28], ，它具备通常理论的所有优点——不过，此时距离 Schwinger、Feynman、Tomonaga 和 Dyson 创立量子电动力学，已经过去多年。

注 5.2.1.1. 经典电动力学：一种处理耦合麦克斯韦–狄拉克方程的协变非线性偏微分方程方法。直到相对近期，经典电动力学（在四维平直时空上）才得到严格理解。这里指的是对耦合麦克斯韦–狄拉克方程证明渐近完备性与整体存在性，并研究红外问题。这项工作是 [32] 借助我们三部曲的第三个方面（与变形量子化和单态物理相辅相成）完成的，其基础是一种非线性群表示理论，此外还运用了大量艰深的分析，所用的初始数据空间则由线性群表示所启发。对这种经典电动力学进行变形量子化（例如，在无限维初始条件相空间上）仍有待完成。

5.2.2. 复合轻子，Frønsdal 的扩展电弱模型。继量子电动力学之后，一个自然的步骤是在电弱理论中引入复合性。按照上述思路，这需要找到某种“无限维超代数的平方根”，其中同时包含正则反对易关系（CAR）和正则对易关系（CCR）：自然禁闭的 Di 或 Rac 的产生与湮灭算符不一定满足 CAR 或 CCR；它们可以服从不同寻常的统计规律，只要双单态依其性质满足费米–狄拉克统计或玻色–爱因斯坦统计即可。这样，我们就会得到一个（可能是 $\mathbb{Z}$）分次代数，其中只有双单态的产生与湮灭算符满足 CCR 或 CAR。这项工作尚未完成。朝这一方向已经开始了一些探索，但数学问题极为艰巨，尤其是现在还必须考虑三代轻子。

但在这里，我们可以采取一种更务实的做法 [40], ：实验数据表明，不同代的中微子之间会发生振荡。因此，中微子不再能被视为无质量粒子。从反德西特时空的角度看，这并不像表面上那么令人惊讶，因为无质量的特征之一是存在规范。就群论而言，这些规范与表示图中幺正性的极限相关，而在反德西特时空中，中微子位于该极限之上： Di 则处于极限上。因此，九种轻子都可以一视同仁地加以处理。

因此，很自然地 [40] 将它们排列成一张方表（L^A_β）：各行对应三代轻子，每一代都带有“弱群” $S_W = SU(2) \otimes U(1)$的 Glashow 表示；并考虑这九个轻子 L^A_β（ν_e、 e_L、 e_R，另外两代也同样如此 μ 和 τ）

作为复合粒子，$L^A_\beta = R^A D_\beta$（$A = N$、L、R；$\beta = \epsilon$、μ、τ）。我们假设R^A是Rac，带有S_W的 Glashow 表示；而D_β是Di，不受S_W影响，但在与S_W同构的“味群”S_F作用下按 Glashow 三重态变换。为使理论更加简约，我们还假设两个$U(1)$被认同，即同一个超荷群同时作用于Di和Rac。如[40]中所述，轻子最初是无质量的（作为Di-Rac复合粒子），并通过希格斯场$K^{\alpha\beta}_{AB}$（实际上有五个）获得质量；这些场（与电弱模型中一样）与轻子存在汤川耦合。该模型与$W^\pm$和Z玻色子相对应，预言了两种新的玻色子$C^\pm$和C^3（由于三代轻子之间的质量差很大，难以探测），并解释了中微子质量。该模型在定性上颇有前景，但自由参数过多，限制了其定量预测能力。

人们或许会想在这幅图景中加入由强力引起的变形，以及18种夸克；它们（连同9种轻子）可以排列成一个立方体，也可以被视为复合粒子（引入强力后，或许由三个组分构成）。这或许能让这个“复合标准模型”更具预测力。但引入强子会带来显著的定量变化，因此也应当要求定性的改变，例如对AdS对称性作进一步变形。

6. 强子与量子化反德西特

6.1. 新图景的开端

我们不采取旨在建立“万有理论”的“极权主义”路径——至少就基本粒子而言——而是采用一种更务实、同时以基本原理为基础的方法。既然对称性是后来发展为标准模型的理论的出发点，而自由粒子由庞加莱群（狭义相对论的对称性）的酉不可约表示支配，我们就从后者出发，并以我们的“变形哲学”为指引继续推进。

6.1.1. 光子、轻子与强子。正如我们所见，假设在“微观世界”中，也就是在某个尺度上（最终将对此作出更精确的界定），宇宙具有微小的负曲率，则庞加莱群会变形为反德西特时空群，而无质量光子态可以在动力学上（以符合量子电动力学的方式）视为一个 2-Rac 态 [28]。接着，将电弱理论扩展到经实验发现的 3 代，利用庞加莱群的反德西特变形，可以将 9 种轻子视为初始无质量的 Di-Rac 态，再由 5 种希格斯玻色子赋予质量 [40]。

“棘手问题”在于如何解释强子和强相互作用。变形哲学建议尝试对反德西特时空进行变形：它无法作为群来变形，但可以作为 Hopf 代数变形为“量子群”qAdS。在“一般情形”下，所得的表示论将

与反德西特时空的情形不会有太大差异。这主要归因于“Drinfeld 扭曲”，它在反德西特时空与 qAdS 之间建立了交织关系，尽管这并不意味着变形等价（它是一种“外自同构”）。但在单位根处，情况会发生巨大变化：Hopf 代数变为有限维（一般 qAdS 并非如此），而且不可约表示的数量也有限。

6.1.2. 关于数学背景的几点说明。只有少数不可约表示可能与问题相关，这既令人鼓舞，也构成了限制；尤其是对于单位根处的量子群，这类表示的张量积理论（要将它们视为描述相互作用粒子，就必须考虑这一理论）在一般情形下虽“不错”，但并不简单。特别是，张量积通常是不可分解的，是由某些余循环定义的不可约表示直和的扩张（不过，这些余循环或许与观测到的共振“宽度”有关）。这一现象在秩一情形（单位根处量子化的 $\mathfrak{sl}(2)$）中已经出现：[57], 表示范畴不是编织的，而且两个表示的张量积 $R\otimes S$ 与 $S\otimes R$ 有时可能不同。高秩情形的一般理论似乎希望渺茫。不过，物理应用并不需要一般理论，甚至可能恰恰相反：如果只有少数表示表现得“不错”，而自然恰好选择了它们，那就再好不过了。[即使对于庞加莱群，酉不可约表示也只有一半在物理上相关：质量为正，以及质量为零且具有离散螺旋度的那些表示。] 秩 2 情形（尤其是 qAdS）似乎更有希望取得进展，尽管其中的数学问题极为复杂。目前已有一些相关研究正在进行，尤其是 Jun Murakami 最近 [16] 研究了量子 $6j$-符号 $SL(2,\mathbb{C})$。不过，要厘清其数学背景，还有大量工作有待完成。

6.2. 量子化反德西特（特别是在某些单位根处）及其推广

6.2.1. 关于 qAdS 表示的一些想法、问题与结果。20 多年前发表了一篇简明而有趣的论文 [30]„ 作者在不牺牲严谨性的前提下，采用了一种能吸引物理学家（但可能较难吸引数学家……）的语言（例如玻色产生与湮灭算符、超对称性、福克空间）来撰写该文。作者先简要概述了 $\mathfrak{so}(3,2)$ 的单态与无质量表示、它们的超对称扩展，以及（对于无质量表示）在共形李代数 $\mathfrak{u}(2,2)$ 中的嵌入；在此基础上，他们探讨了这一图景的 q 变形，尤其是 q-单态、q-无质量表示，以及其中 q 变形的 $\mathfrak{sl}(2)$ 的嵌入。他们研究了一般 q 的情形，也研究了 q 为偶数单位根的情形。在后一种情形下，一个主要目的是明确写出 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(3,2))$ 的定义关系，使之类似于（9）和（10）（现在还包括“q-Serre 关系”），并用更贴近物理学的语言表述这样一个事实：Lusztig [60] 几年前发现，在这种情况下可以得到有限维幺正表示。

顺便一提，不可约表示的“幺正化”对于可能的物理应用可能很重要。对于单位根处的量子群，相关研究尤其涉及反德西特时空，见 [30, 73] ；此外，[74], 中还研究了许多系列的简单非紧李代数，并证明在极限 $q \to 1$ 下可以恢复经典情形的幺正最高权模。

在“变形哲学”的指引下，我们因此开始探究：当我们假设某些区域具有（极微小的）负曲率时，庞加莱群的变形 AdS 如何进一步变形为量子群 qAdS。这个想法认为，“内部对称性”可能由此类变形产生；这在单位根处尤其引人注目，因为此时我们有有限维幺正表示。

现在，如果我们想尝试将粒子多重态对应到单位根处的量子反德西特 qAdS 的（不可约）表示，首先需要了解这些表示的维数。Jun Murakami（研究进行中）已求得单位根的六次根处的这些维数为：1；4、5；10、14、16；35、40；81。我们在 $2p^{\text{th}}$ 单位根处选择了 $p = 3$ ，从物理角度看，这是因为存在 3 代；从数学角度看，则是因为种种原因必须取 $p \geq 3$，因此这是第一个情况。

首批非平凡表示的维数为 4 和 5，这正如类型为 $B_2 \equiv C_2$ 的李代数所预期的那样（而 $\mathfrak{su}(3)$ 的情形下维数为 3，因此对应夸克）。因此，如果我们想仿效幺正对称性的做法，或许就得用两个“四重态”取代基本的八重态，除非能以某些数学或物理理由（也许考察相应的超对称性）证明维数加倍是合理的。

请注意，所有秩 2 的（紧）单群都曾从强相互作用对称性的角度在 [7] 中得到详细研究，最终出现了类型 A_2 ；而一般量子群的（有限维）表示论与经典情形相似。受限量子群却截然不同，因此不能先验地排除 B_2 型。一个显著的区别是，受限量子群只有有限多个有限维表示，这或许是一项优势。

但了解维数仅仅是开始的开始。特别是，我们需要研究想要使用的表示的张量积，这有助于描述两个粒子发生强相互作用并最终产生其他粒子时会发生什么。在单位根的情形下，这些张量积通常会产生不可分解表示，本质上是由某些余循环给出的不可约表示的扩张（有点类似于电磁场的 Gupta-Bleuler 形式体系）。这一事实或许与所产生的共振宽度有关，但目前这还只是一种猜想。

对这类张量积进行一般性研究（超出秩 1 情形，而后者本身已经相当复杂）在数学上并非易事。作为秩 2 的“热身练习”，不妨从 A_2 情形入手，即 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(3))$。

如果我们希望为强相互作用粒子构建一种类似于迄今为止借助幺正对称性所建立的图景，首先可以尝试用 qAdS 的某些低维表示来赋予粒子多重态。但由于现在自由对称性（Poincar´e）与强相互作用对称性（qAdS）之间存在联系（通过变形建立），这在概念上是一项优势，因此我们应该设想一种机制，解释为何要将某些自旋（传统上与 Poincar´e 群相关联）赋予这类多重态，以及如何在多重态内部得到质量谱。

假设我们完成这些（艰难的）“数学和物理作业”，那么摆在我们面前的物理学任务将更加艰巨：从唯象学和实验的角度出发，以新对称性为基础，批判性地重新审视半个世纪以来的粒子物理学。“回到绘图板前”之后，我们应当在新的框架下重新审视现有的唯象学，包括对原始实验数据的解释。迄今为止，这些解释都是在标准模型和夸克假说的背景下作出的：从核子和其他少数粒子出发，在这一框架内归纳解释加速器和宇宙射线中的观测结果。

请注意，正如我们在第5节中所见，现有理论（电弱模型）的一项主要成功，在将庞加莱对称性变形为反德西特时空时得以保留。本小节中的推测，是为了尝试运用我们的变形哲学描述强相互作用而作出的自然扩张。

既然我们要“简单地”用某种单位根处的量子反德西特取代内部对称性，那么从理论角度来说，我们也应重新审视建立在简单幺正对称性这一双脚可能是“泥做的”之上的动力学的各个方面（例如量子色动力学）。这是一项艰巨的任务，但并不像看起来那么艰巨，因为我们并非从零开始。过去几十年引入的许多精妙概念和取得的理论进展，或许都可以调整后用于我们这种“变形”的对称性观。弦框架的许多部分也可能包括在内。

更何况，本着同样的精神，更精妙（且尚未得到充分探索）的数学或许无需对当前这幅拼图做出如此剧烈的偏离，而拼图的各个部分（迄今为止）都严丝合缝。我们将在下文对此作出解释。

6.2.2. 推广：多参数、超化与仿射化。对于传统内部对称性（如 $SU(n)$，我们通常取 $n = 3$）的表示论而言，其重要部分归结为数论问题，涉及韦尔群（ $SU(n)$ 对应的 $\mathbb{S}_n$ ）以及群中心（在该情形下为 $\mathbb{Z}_{(n)}$ ）。因此，我们有必要研究：当选取群代数中心的一个元素 $\mathbb{C}\mathbb{Z}_{(n)}$作为变形参数时，关于 $\mathcal{U}(\mathfrak{so}(3,2))$ 的量子变形可以得出什么结论。也就是说，我们希望仍处于已经研究过的多参数变形范畴内（更大胆的设想见下一节）。一般情形相对而言已经得到了充分理解（参见第3.3.4节），但单位根的情形似乎尚未有人研究。甚至不清楚是否可以（或是否应该）

对中心的所有生成元都取同一个单位根。单位根的“扭曲效应”早已在式（11）中显现出来，可能会带来意想不到的问题。同样的过程也可应用于量子化超代数$\mathfrak{osp}(1|4)$：它是 [30,38] 由 $\mathfrak{so}$(3,2))在4个实变量（p_1, p_2； q_1, q_2）中的二次齐次多项式实现而得，再加入线性项（并赋予反对易子）。

考虑到可能要将动力学纳入对称性图景，并秉持弦框架的精神，将点（它们往往是奇点的成因）“吹起”成弦等对象，我们或许会想要考虑环代数（从闭弦 S^1 到所讨论对称性的映射，例如$\mathfrak{so}$(3,2)）及其量子化。沿着同样的思路，我们或许会想要考虑若干基于这一模式构造的无限维代数（卡茨–穆迪、维拉索罗等）。这是一个非常活跃的研究领域（例如参见 [47,52]），已有许多成果。但我们在此需要的具体实例尚未得到充分研究，而单位根情形的研究则更少（委婉地说）。此外，我们或许还想谈谈一个极其困难的问题：从比 S^1 更一般的对象（例如 K_3 曲面或卡拉比–丘复三维流形）映射到某些群或代数，以及此类结构可能的量子化。这些都还是完全未开垦的领域。

所有这些推广，即使是我们在此考虑可能应用时所需的具体情形，至少也是合理的数学问题。

6.2.3. “量子变形”（带有非交换的“参数”）。然而，一个颇具挑战性的想法或许能兼得两全之美。内部对称性可能源自以更广义的方式对时空对称性进行变形，这种方式也涵盖了对 $SU(n)$ 等酉对称性的运用。另一个意外收获甚至可能是，为我们观测到 3 代这一事实提供一种概念上优美的解释。

这个想法是将代数变形的 Gerstenhaber 定义 (1)“量子化”：不仅仅是考虑一个作用于代数上的参数（如第 3.3.5 节所述），而是尝试发展一种带有非交换“参数”的类似理论。这尚未有人做到，而且绝非显而易见。甚至连究竟需要何种上同调（如果确实需要的话）都不清楚。

特别是，可以考虑以四元数作为变形参数的变形。四元数域 $\mathbb{H}$ 是扩展复数域 $\mathbb{C}$的唯一数域，但它是非阿贝尔的。因此，我们可以把这种理论称为“量子变形”，因为人们常把通过“引入”非交换性来扩展现有数学概念的做法称为“量子”数学概念。众所周知， $\mathbb{H}$ 的元素可以写成 $a+bi+cj+dk$ 的形式，其中 a、$b.c.d \in \mathbb{R}$、 $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ 和 i、 j、 k彼此反对易（如泡利矩阵）。互换 i、j、 k的角色，就会得到一个对称性（$\mathbb{S}_3$ 或 $SO(3)$），这或许能解释为什么我们有 3 代（且只有 3 代）。对 $\mathcal{U}$（$\mathfrak{so}$(3, 2)）进行变形（实形式的选择可能很重要），采用这种（迄今仍属假设的）量子变形理论，尤其是在某种意义上取单位根时，或许可以产生内部对称性，而这些对称性

韦尔群 $\mathbb{S}_3$ 在 $SU(3)$（以及可能在 $SU(3)$）中的作用，将使我们能够重新推导以往基于 $SU(3)$的表示所完成的一切，这一次则立足于基本原理。我们仍需解释例如自旋如何分配给多重态，以及更多问题。但现在我们有了一个框架，可以在此基础上发展内部对称性与外部对称性之间微妙而非平凡的联系，并探讨其所有影响（尤其是涉及的动力学），同时只需对现有经验模型做相对有限的调整。

一种变体是建立一套以 $\mathbb{S}_n$ 的群代数为参数的变形理论。除了我们必须假设例如 $n = 3$ ，而不能“解释”为何只有 3 代这一点外，总体思路会类似，因此我们不再重复上述推测。

更一般地说，对此类“量子变形”进行数学研究本身就值得关注，即便这需要使用非常抽象的工具，而这些工具可能无法直接应用于我们最初提出的物理问题。

6.2.4. 备注：量子化反德西特空间及相关宇宙学。我们不应只尝试建立一套关于已知物质基本组成成分的理论（尽管它们仅占宇宙的约 4%），还应解释这一小部分是如何产生的；如果可能，也要解释为何我们看到的反物质如此之少。为此，量子化反德西特时空或许也会有所帮助。

当然，与近期观测宇宙学的研究结果一致，我们的宇宙在“大尺度上”很可能渐近于德西特时空，具有正曲率，其不变群为 $SO(4,1)$。这是庞加莱群的另一种简单群变形；然而，与反德西特时空不同，它无法容纳正能量算子。在我们所处的尺度上，出于大多数实际目的，我们可以将其视为闵可夫斯基的（平坦的）。若进一步“深入”探究，我们便会发现，它也可以被视为反德西特时空。在那里，可以将光子和轻子解释为存在于反德西特时空中的单态复合体。因此，尝试对反德西特时空进行量子化是很自然的。事实上，在 [9], 中，我们展示了如何构造这样的“量子化双曲球面”，即 Connes 式的非交换谱三元组，但处于洛伦兹背景下；它们在反德西特时空的一个（开）轨道中诱导出一个伪黎曼变形三元组，类似于 Connes 等人为量子化球面构造的三元组（预解式的紧致性除外）（例如参见 [15]）。这样的“量子化反德西特空间”具有视界，因此可以将其视为黑洞（类似于 [4], BTZ黑洞；当 $n \geq 3$时，它们存在于所有反德西特时空$_n$ 中）。 [若要处理全部三个区域，或许需要某种群胚结构。]

对于 q 一个偶数阶单位根，由于相应的量子反德西特群具有有限维酉不可约表示，这种量子化反德西特黑洞可以在某种有待精确定义的意义上被视为“q-紧致”。正如我们在 [9,76],中提到的，在宇宙的某些区域，闵可夫斯基时空在极小尺度上可能既会变形为反德西特时空，也会量子化为 qAdS。这些区域会呈现为黑洞，或许可以在

膨胀宇宙的边缘找到；它们是大爆炸时散布开来的初始奇点的某种“干细胞”。物质或许会从这些区域中（目前这还纯属猜测）涌现出来，最初可能是某种单态，它们通过与暗物质和／或暗能量相互作用而耦合并获得质量。在极大尺度上，这种设想或许能够解释观测到的正宇宙学常数，并可能使我们离实现引力量子化——现代物理学的圣杯——更近一步，无论这个问题是否切合实际（尽管近期备受关注的引力波观测或许表明，引力量子化确有必要）。

7. 结语与一份初步的“路线图”

经过如此漫长的概述，其中涉及大量基础数学和物理概念，许多内容还需要进一步阐述，一个自然而然的问题是（大多数物理学家读完摘要后可能都会提出这个问题）：为什么要质疑成功之作?

毕竟，标准模型（迄今为止）被视为粒子物理学的终极描述。我们曾在一盏路灯下（bei der Laterne）寻找知识的钥匙，找到了一把钥匙，它打开了附近的一扇门（并非最初寻找的那扇，不过也无妨）；一位蓝色天使 M 引领我们穿过这扇门，来到一条优美的大道，沿途岔路众多。但如果 M 只是海市蜃楼，而这条大道最终却是条死路呢？那么，我们就需要一支强力手电筒（或许就是变形），在黑暗的角落里找到一把奇夸克，用这把钥匙费尽力气打开一扇隐藏的门，进入另一条大道，在那里我们的一部分问题或许能够得到解答。

尽管如此，物理学家往往持相当实证主义的态度；在物理学的大多数领域，人们会把一些实验事实视为理所当然，而不试图从基本原理出发解释它们。粒子物理学为何会有所不同？爱因斯坦给出了一个初步答案：“好奇心自有其存在的理由。”理论粒子物理学无疑是一个可以提出并回答极其根本问题的领域；必要时，还可以借助发展精密数学工具来解答这些问题。

因此，尽管可能会被认为头脑简单，我还是要问：标准模型所依据的对称性为何会是模型中的这些对称性，而不只是它们是什么、如何发挥作用。换句话说，问题是：这必然如此吗？？

另一个（更务实的）理由是，在数学中，源自自然的问题往往比凭空想象出来的问题更具开创性。可以说，这是一条实验事实。因此，值得发展我们已经指出的新的数学工具，以及发展这些工具时将会引出的其他工具。如果这些工具能解决物理问题（无论是预期的问题还是其他问题），那就更好了。无论如何，这都应当能带来有实质意义的数学。我们将这一总体思路表述如下：

猜想 2. The Deformation Conjecture. 基本粒子的内部对称性通过某种形式的变形（可能是广义的，包括量子化）从其相对论对应物中涌现。

我们尤其希望实现一个量子变形梦想：

- 上述“量子变形”可以加以定义，进而据此定义“QQ群”，包括其“受限”版本（在单位根处），后者将是有限维代数；并且可以研究其表示的张量积。
- 如有需要，这一程序可以应用于 $\mathcal{U}(\mathfrak{so}(3,2))$（并将 $\mathcal{U}(\mathfrak{so}(1,2))$ 作为玩具模型），也可以结合超对称扩展，或许还可采用某种“仿射化”，从而为建立一套扎实的强相互作用理论奠定基础。

当然，不能排除对称性——它是“数学在自然科学中不合理的有效性”的基础之一—— [84], 在粒子物理学中作用甚微的可能性。我对此深表怀疑。

在我们遇到的问题中，从数学角度看，“最简单”的似乎是单位根处 qAdS（或其他秩 2 量子群）的表示的张量积会发生什么。秉持类似思路，研究 AdS 的多参数变形的表示（包括其张量积）或许更有意义。

在取得一些数学和理论进展之后，我们应该尝试看看如何运用这些知识来解释已知的强相互作用，并从最早被发现的粒子开始，一步步推进。这既需要理论研究和唯象研究，也可能需要重新开展实验，以检验理论结果。

一种更有吸引力的做法是尝试发展一种“量子变形”理论，尤其是基于四元数的理论。然后，如果我们确实建立了这样一种理论，就可以进一步探讨如何将其应用于反德西特时空（AdS），包括数学方面以及可能的理论物理应用。

最终，我们必须详细研究这些进展的唯象学影响。如果它们与目前对原始实验数据的解读略有不同，我们就需要修正这种解读，并可能重新进行一些实验。

请注意，任何此类修正都可能带来一项“额外好处”：如有需要，我们可以利用现有的实验工具完成修正；对于更早的数据，还可以借助现代技术的进步加以改进。公民社会不太可能为我们提供强大得多的加速器。

这些问题都值得深入探究。可以预见，它们必将以迎头痛击来证明自身的重要性。从一个基本问题出发，我提出了许多其他问题，并将它们与半个世纪以来物理数学研究中发展出的诸多概念和成果结合起来，同时指出了其中一些问题可能的解答方向。如今我已75 岁，接下来就留待新一代人进入那片应许之地，着手解决随之而来的众多问题。

致谢
这幅全景图得益于我与 Moshe Flato（及其合作者）长达35年的积极合作，得益于我与众多科学家（人数太多，无法一一列举）进行的近乎 \infty 次讨论，也得益于日本同仁的热情接待。在离开法国国家科学研究中心、结束了42年（有时颇为坎坷）的职业生涯后，我在日本度过了迄今十余年相对宽裕的退休生活。此外，我也要感谢本书各位编辑一直以来的友善与耐心。

参考文献

[1] E. Angelopoulos, *Sur les représentations unitaires irréductibles de ˆSO*0(*p*, 2), 巴黎科学院院报 S´er. I Math. 292 (1981), 469–471.[2] E. Angelopoulos、M. Flato、C. Fronsdal 和 D. Sternheimer, *Massless particles and de Sitter universe* 3 **23** 1981 ,

conformal group, , 《物理评论 D》 () (), 第 6 期, 1278–1289.[3] E. Angelopoulos 和 M. Laoues, *Singletons on AdSn*。Conf´erence Mosh´e Flato 1999，第二卷（第戎），3–23，数学物理研究 22，克吕维尔学术出版社，多德雷赫特，2000年。[4] M. Ba ˜ *Geometry of the* 2+1 nados、M. Henneaux、C. Teitelboim 和 J. Zanelli, , 《物理评论 D》 () (), –。[5] H. Basart、M. Flato、A. Lichnerowicz 和 D. Sternheimer, *Deformation theory applied to quantization and statistical mechanics* **8** 1984 , 《数学物理快报》 ()，483–494。[6] F. Bayen、M. Flato、C. Fronsdal、A. Lichnerowicz 和 D. Sternheimer, *Deformation theory and quantization I. Deformations of symplectic structures and II. Physical applications* , 《物理年刊》 **111** 1978 61 110 111 151 ()，– 和 –。[7] R.E. Behrends、J. Dreitlein、C. Fronsdal、B.W. Lee, *Simple groups and strong interaction symmetries* **34** 1962 1 40 。《现代物理评论》 () –。[8] J. Beringer 等（粒子数据组）, *2013 Review of Particle Physics*, 《物理评论 D》86，010001（2012），以及2014年版的2013年部分更新，见 http://pdg.lbl.gov/[9]P. Bieliavsky、L. Claessens、D. Sternheimer 和 Y. Voglaire, *Quantized anti de Sitter spaces and non-formal deformation quantizations of symplectic symmetric spaces* 1 24, , 《数学与物理学中的泊松几何》，–《当代数学》450，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008年。[10]P. Bonneau、M. Flato、M. Gerstenhaber 和 G. Pinczon, *The hidden group structure of quantum groups: strong duality rigidity and preferred deformations* , , 《数学物理通讯》 () , –。[11]P. Bonneau、M. Gerstenhaber、A. Giaquinto 和 D. Sternheimer, *Quantumgroups and deformation quantization: explicit approaches and implicit aspects*, 《数学物理学杂志》45(10)（2004），3703–3741。[12] S. Coleman 和 J. Mandula, *All Possible Symmetries of the S Matrix*, 《物理评论》159（1967年），1251–1256。[13] A. Chamseddine、A. Connes 和 W. van Suijlekom, *Beyond the Spectral Standard Model: Emergence of Pati-Salam Unification* 1311 2013 132 , 《高能物理学杂志》 ()。[14] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, 学术出版社，圣迭戈，1994年。

[15] A. Connes 和 M. Dubois-Violette, *Moduli space and structure of noncommutative 3-spheres* **66** 2003 99 121 , 《数学物理快报》（），–。[16] F. Costantino 和 J. Murakami, *On the SL(2,C)-quantum 6j-symbols and their relation to the hyperbolic volume* **4** 2013 303 351, 。《量子拓扑学》（），–；以及 J. Murakami，私人通信（2013、2014年）。[17] C. De Concini 和 V. Kac, *Representations of quantum groups at roots of 1* 第471–506页，载于 *Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory (Paris, 1989)* **92**, ¨ 1990 ，《数学进展丛书》，波士顿巴塞尔豪斯出版社。[18]E.E. Demidov、Yu.I. Manin、E.E. Mukhin、D.V. Zhdanovich, *Nonstandard quantum deformations of GL n and constant solutions of the Yang-Baxter equation.* （），《数学与量子场论的共同趋势》（京都，1990年）。《理论物理进展增刊》第102期（1990年），203–218（1991年）。[19] P.A.M. Dirac, *The relation of Classical to Quantum mechanics*, 1949年温哥华第二届加拿大数学大会论文集，第10–31页。多伦多大学出版社，1951年。[20] P.A.M. Dirac, *A remarkable representation of the* 3+2 *de Sitter group*, 《数学物理学杂志》4（1963年），901–909。[21] G. Dito 和 D. Sternheimer, *Deformation quantization: genesis develop-* , , 第–页，载于：（斯特拉斯堡，2001年），IRMA 数学与理论物理讲义，1，Walter de Gruyter，柏林，2002年（math.QA/0201168）[22]V. Drinfel'd, *Quantum Groups*, 《国际数学家大会论文集》，第1、2卷（加利福尼亚州伯克利，1986年），798–820，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1987年。可见：http://www.mathunion.org/ICM/ICM1986.1/Main/icm1986.1.0798.0820.ocr.pdf[23] L.D. Faddeev、N.Yu. Reshetikhin 和 L.A. Takhtajan, *Quantization of Lie groups and Lie algebras* 129 139 *Algebraic analysis Vol. I* ，第–页，载于：，，《学术出版社》，波士顿，1988年。[24]例如，见 Helge Kragh, *Quantum Generations*（1999），321。参见http://todayinsci.com/QuotationsCategories/B_Cat/Biography-Quotations.htm另见 http://www.goodreads.com/author/quotes/107005.Enrico_Fermi[25]Laura Fermi, *Atoms in the Family: My Life with Enrico Fermi*, 芝加哥大学出版社（1954年）。 [我的叔叔 Richard Sternheimer 当时是芝加哥大学的医学博士，曾为曼哈顿计划工作的物理学家们担任医生，并一直是费米一家的家庭医生.....[26] M. Flato, *Deformation view of physical theories*, 《捷克斯洛伐克物理学杂志》B32(4)（1982年），472–475。[27] M. Flato 和 C. Fronsdal, *Quantum field theory of singletons. The Rac*, 《数学物理学杂志》22（1981年），1100–1105。[28] M. Flato 和 C. Fronsdal, *Composite Electrodynamics*, 《几何与物理学杂志》5（1988 37 61 [*Single-* ），–。另见：*tons as a basis for composite conformal quantum electrodynamics* 65 76, M. Flato、C. Fronsdal 和 D. Sternheimer，载于 *Quantum Theories and Geometry*第–页，《数学物理研究》10，克吕维尔学术出版社，多德雷赫特，1988年。[29] M. Flato、C. Frønsdal 和 D. Sternheimer, *Singletons physics in AdS universe* , 《数学物理快报》（），–。*and oscillations of composite neutrinos* **48** 1999 109 119

[30] M. Flato、L.K. Hadjiivanov 和 I.T. Todorov, *Quantum Deformations of Singletons and of Free Zero-Mass Fields*, 《物理学基础》23（1993），571– 586。[31] M. Flato 和 P. Hillion, *Poincaré-like group associated with neutrino physics, and some applications* 3 **1** 1970 1667 1673 , 《Phys. Rev. D》（） （），–。[32] M. Flato、J.C.H. Simon 和 E. Taflin, *Asymptotic completeness global exis-* , , 《美国数学会回忆录》127（1997），第606号，x+311 页。[33] M. Flato 和 D. Sternheimer, *tence and the infrared problem for the Maxwell–Dirac equations Remarks on the connection between external and internal symmetries* **15** 1965 934 936 , 《Phys. Rev. Letters》（），–。[34] M. Flato 和 D. Sternheimer, *Local representations and mass-spectrum*, 《Phys. Rev. Letters》16（1966），1185–1186。[35] M. Flato 和 D. Sternheimer, *Noninjqueness of Mass-Formulas from Infinite-Dimensional Groups and Algebras* **19** 1967 254 255 , 《Phys. Rev. Letters》（），–。[36] M. Flato 和 D. Sternheimer, *Poincaré partially integrable local representations and mass-spectrum* **12** 1969 296 303 , 《Comm. Math. Phys.》（），–。[37] M. Flato 和 D. Sternheimer, *On an infinite-dimensional group*, 《Comm. Math. Phys.》14（1969），5–12。[38] C. Frønsdal, *Dirac supermultiplet*, 《Phys. Rev. D》26（1982年），1988–1995。[39] C. Frønsdal, *Generalization and exact deformations of quantum groups*, 《Publ. Res. Inst. Math. Sci.》33（1997），91–149。[40] C. Frønsdal, *Singletons and neutrinos*, 《Lett. Math. Phys.》52（2000年），51–59，Mosh´e Flato 1999 会议（第戎）（hep-th/9911241）。[41] C. Frønsdal 和 A. Galindo, *Deformations of multiparameter quantum gl(N)*, 《Lett. Math. Phys.》34（1995年），25–36。[42] L. G˚arding, *Note on continuous representations of Lie groups*, 《美国国家科学院院刊》33（1947），331–332。[43] M. Gell-Mann, *Symmetries of baryons and mesons*。《Phys. Rev.》（2）125（1962年），1067–1084。[加州理工学院同步辐射实验室报告 CTSL-20（1961年）]。[44] M. Gerstenhaber, *On the deformation of rings and algebras*, 《Ann. Math.》（2）79（1964），59–103；以及（IV）， *ibid.* **99** （1974年），257–276。[45]A. Grothendieck, *Techniques de construction en géométrie analytique*, 载于：《复空间族与解析几何基础》，S´eminaire H. Cartan 13（1960/61），´巴黎高等师范学院（1962年）。[46] R. Haag、J. Lopusza´nski 和 M. Sohnius, *All possible generators of supersym-* , 《Nuclear Phys. B》（） –。[47] D. Hernandez 和 M. Jimbo, *metries of the S-matrix* **88** 1975 257 274 *Asymptotic representations and Drinfeld rational fractions* **148** 2012 1593 1623 , 《Compos. Math.》（），–。[48] G. 't Hooft, *Dimensional reduction in quantum gravity* 284 296 *Salam-* , 见（A. Ali、J. Ellis 和 S. Randjbar-Daemi 编），第–页，世界科学出版社，1993年（*festschrift: a collection of talks* gr-qc/9310026）。[49] G. 't Hooft, *The Fate of the Quantum*, arXiv:1308.1007 [quant-ph].[50]G. 't Hooft, *Hamiltonian formalism for integer-valued variables and integer time steps and a possible application in quantum physics* 1312 1229 , arXiv: . [ ] math-ph .

[51] E. In ¨ ¨ *On the contraction of groups and their representations* **39** 1953 510 524 onu 和 E.P. Wigner, , 《美国国家科学院院刊》（） , [52] R.Q. Jian 和 M. Rosso, *Braided cofree Hopf algebras and quantum multi-brace algebras* **667** 2012 193 220 , 《J. Reine Angew. Math.》（） , –。[53] M. Jimbo, *A q-difference algebra of $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation*, 《Lett. Math. Phys.》10（1985年）, 63–69。[54] R. Jost, *Eine Bemerkung zu einem "Letter" von L. O'Raifeartaigh und einer Entgegnung von M. Flato und D. Sternheimer* **39** 1966 《Helv. Phys. Acta》（） , 369–375。[55] M. Kibler, *The Master thesis of Moshé Flato*, Mosh´e Flato 1999 会议，第II卷（第戎）, 177–184，数学物理研究，22，克吕维尔学术出版社，Dordrecht，2000年。[56] K. Kodaira 和 D.C. Spencer, *On deformations of complex analytic structures*, 《Ann. Math.》67（1958）, 328–466。[57]H. Kondo 和 Y. Saito, *Indecomposable decomposition of tensor products of modules over the restricted quantum universal enveloping algebra associated to $\mathfrak{sl}_2$* **330** 2011 103 129 , 《J. Algebra》（） , –。[58] M. L´evy-Nahas, *Deformations and contractions of Lie algebras*, 《J. Math. Phys.》8（1967年）, 1211–1222。[59] G. Lusztig, *Finite dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebra* **3** 1990 257 296 , 《J. Amer. Math. Soc.》（） , –。[60] G. Lusztig, *Quantum groups at roots of 1*, 《Geom. Dedicata》35（1990）, 89–113。[61] S. Majid, *What is . . . a Quantum Group*, 《Notices Amer. Math. Soc.》53（2006年）, 30–31。 http://www.ams.org/notices/200601/what-is.pdf[62] Yu.I. Manin, *Topics in noncommutative geometry.* M. B. Porter 讲座。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1991年。[63] F. Nadaud, *Generalised deformations, Koszul resolutions, Moyal Products*, 《Rev. Math. Phys.》10（1998年）, 685–704。& *Thèse*, 第戎（2000年1月）。[64] F. Nadaud, *Generalized Deformations and Hochschild Cohomology*, 《Lett. Math. Phys.》58（2001年）, 41–55。[65] Y. Ne'eman, *Derivation of strong interactions from a gauge invariance*。《Nuclear Phys.》26（1961年）, 222–229。[66] L.B. Okun, *The impact of the Sakata model*, 《Prog. Theor. Phys. Suppl.》167（2007年）, 163–174。[67] L. O'Raifeartaigh, *Mass differences and Lie algebras of finite order*, 《Phys. Rev. Lett.》14（1965年）, 575–577。[68] G. Pinczon, *Non commutative deformation theory*, 《Lett. Math. Phys.》41（1997）, 101–117。[69] N. Reshetikhin, *Multiparameter quantum groups and twisted quasitriangular Hopf algebras* **20** 1990 4, 331 335 , 《Lett. Math. Phys.》（） , 第–号 , [70] N. Reshetikhin 和 V.G. Turaev, *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups* **103** 1991 547 597 , 《Invent. Math.》（） , –。[71] S. Sakata, *On a composite model for the new particles*, 《Prog. Theor. Phys.》（Letter）16（1956年）, 686–688。

[72] I.E. Segal, *A class of operator algebras which are determined by groups*, 《杜克数学杂志》18（1951），221–265。[73] H. Steinacker, *Finite-dimensional unitary representations of quantum anti-de Sitter groups at roots of unity* **192** 1998 687 706 。《数学物理通讯》（），–。[74] H. Steinacker, *Unitary representations of noncompact quantum groups at roots of unity* **13** 2001 1035 1054 ，《数学评论》（），–。[75] D. Sternheimer, *Quantization is deformation* 331 352 *Noncommutative* ，第 – 页，载于《当代数学》391，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005年。[76] D. Sternheimer, *The geometry of space-time and its deformations from a physical perspective* *From geometry to quantum mechanics* 287 301, ，载于，–《数学进展》252，Birkhäuser Boston，2007年。[77] D. Sternheimer, *A very short presentation of deformation quantization some of its developments in the past two decades and conjectural perspectives* 205 228, ，，《数学研究》。第XX卷，– 卢森堡大学科学、技术与传播学院，卢森堡，2012年。http://wwwen.uni.lu/content/download/56018/661547/file/sternheimer.pdf [78] E. Weimar-Woods, *Contractions generalized Inönü-Wigner contractions and deformations of finite-dimensional Lie algebras* **12** 2000 ，《数学评论》（），1505–1529。[79] J. Wess和B. Zumino, *Supergauge transformations in four dimensions*, 《核物理学B》70（1974年），39–50。[80] H. Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics*, Dover，纽约，1931年；据*Gruppentheorie und Quantenmechanik*德文版译编，Hirzel Verlag，莱比锡，1928年。*Quantenmechanik und Gruppentheorie*, 《物理学杂志》46（1927），1–46。[81] E.P. Wigner, *Quantum corrections for thermodynamic equilibrium*, 《物理评论》40（1932年），749–759。[82] E. Wigner, *On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group*, 《数学年刊》（第二辑）40（1939），149–204。[83] E. Wigner, *Group theory: And its application to the quantum mechanics of atomic spectra.* 扩充修订版。J. J. Griffin从德文译出。《纯粹与应用物理》第5卷，学术出版社，纽约–伦敦，1959年。[84] E.P. Wigner, *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences* **13** 1960 1 14 ，《纯粹与应用数学通讯》（），–。[85] Jie Xiao, *Finite-dimensional representations of U_t（sl（2））at roots of unity*, 《加拿大数学杂志》49（1997），772–787。

Daniel Sternheimer，立教大学数学系，3-34-1 西池袋，东京丰岛区 171-8501，日本；勃艮第大学勃艮第数学研究所，邮政信箱 47870，F-21078 第戎 Cedex，法国。

电子邮件：Daniel.Sternheimer@u-bourgogne.fr