arXiv:2304.07818v1 [math.GR] 16 Apr 2023

自由群的周期自同构在自由斜域中可对角化

GREGOR PODLOGAR

摘要。我们研究自由斜域上的所谓弱周期扭曲乘法自同构。特别地，我们证明，任何由自由群的周期自同构所定义的自由斜域自同构，都等价于一个对角自同构。

目录

1. 引言 1 1.1. 论文结构 3 2. 预备知识 3 2.1. 非交换有理函数 3 2.2. 自由群的周期自同构与 n， n_1-树 4 3. 定理 1.1 的证明 5 4. 循环群的非交换有理不变量 12 参考文献 13

1. 引言

自由斜域 $\mathbb{C}(\langle x_1, \ldots\ldots, x_d\rangle)$ 也称为非交换有理函数的斜域，是自由代数 $\mathbb{C}\langle x_1, \ldots\ldots, x_d\rangle$ 以及由 $x_1, \ldots\ldots, x_d$ 生成的自由群 Γ 的群代数的商的泛斜域。因此，我们使用记号 $\mathbb{C}(\langle x_1, \ldots\ldots, x_d\rangle) = \mathbb{C}(\langle\Gamma\rangle)$。

非交换有理函数出现在数学的许多领域，例如控制理论 [BGM05], 、自动机理论 [BR11], 、自由概率 [HMS18] 以及自由实代数几何 [HMV06, HKM12] 。在本文中，我们关注自由斜域的自同构，尤其是所谓的乘法的自同构。我们研究非交换有理不变量以及非交换诺特问题的一个版本 [KPPV20, Pod23]，正是出于这一动机。

对有限维向量空间的每个周期自同构，只要适当地扩张标量，它就等价于一个对角自同构。我们进一步探讨一个遥远的类比：

日期：2023年4月18日。2020 数学主题分类。主要分类08A35；次要分类 20E05、16K40。关键词和短语。自由群的周期自同构、自由斜域的自同构。

每个自由斜域的周期自同构是否都等价于一个对角自同构? 对于由底层自由群的周期自同构所定义的自由斜域自同构，我们回答了这个问题。自由群的周期自同构已由 [DPS75、McC80] 分类。

首先，我们为自由斜域 $\mathbb{C}(<\Gamma>)$ 的自同构引入一些术语。
(1) 若自同构 σ 对每个变量 x_i 的像 $\sigma(x_i)$ 都是变量的线性组合，即 $\sigma(x_j) \in V = \mathrm{Lin}_{\mathbb{F}}\{x_1, \ldots\ldots, x_d\}$，则称其为线性的 。(2) 若自同构 σ 对每个变量 x_j 都有 $\sigma(x_j) = c_j x_j$，其中 $c_j \in \mathbb{F}$ 是某个元素，则称其为对角的 。(3) 若自同构 σ 对每个变量 x_j 都有 $\sigma(x_j) \in \Gamma$，则称其为乘法的 。(4) 若自同构 σ 对每个变量 x_j 都有 $c_j\sigma(x_j) \in \Gamma$，其中 $c_j \in \mathbb{F}$ 是某个元素，则称其为扭曲乘法的 。

若存在自同构 ζ 使得 $\zeta\sigma_1\zeta^{-1} = \sigma_2$，则称两个自同构 σ_1 和 σ_2 等价 。若一个自同构等价于某个对角自同构，则称其为可对角化的 。

每个乘法的自同构都由自由群 Γ 的一个自同构定义。每个扭曲乘法自同构都是乘法的自同构与对角自同构的复合。如果一个扭曲乘法自同构是一个周期乘法的自同构与一个对角自同构的复合，我们就称其为弱周期的 。

定理 1.1。 任何弱周期扭乘自同构 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}(<\Gamma>))$ 都等价于一个对角自同构。

例 1.2. 最基本的例子是对一个变量的有理函数自同构 $\mathbb{C}(<x>) = \mathbb{C}(x)$ 的对角化，该自同构由 $x \mapsto cx^{-1}$ 给出，且阶为 2，其中 $c \in C$ 是任意非零标量。它可在新变量 $y = (\sqrt{c} + x)^{-1}(\sqrt{c} - x)$ 中对角化，其中 $\sqrt{c}$ 是方程 $z^2 = c$ 的任意解。

一个更有趣的例子是对 $\mathbb{C}(<x_1, x_2>)$ 上 3 阶自同构的对角化，该自同构定义为

$$x_0 \mapsto cx_1, \quad x_1 \mapsto d(x_0x_1)^{-1},$$

其中 $c, d \in \mathbb{C}$ 是任意非零标量。令 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 为本原三次单位根。该自同构在线性化后的新变量中表示为

$$y_1 = \left(1 + c^{-\frac{2}{3}}d^{-\frac{1}{3}}x_0 + c^{-\frac{1}{3}}d^{-\frac{2}{3}}x_0x_1\right)^{-1}\left(1 + \omega c^{-\frac{2}{3}}d^{-\frac{1}{3}}x_0 + \omega^2 c^{-\frac{1}{3}}d^{-\frac{2}{3}}x_0x_1\right),$$

$$y_2 = \left(1 + c^{-\frac{2}{3}}d^{-\frac{1}{3}}x_0 + c^{-\frac{1}{3}}d^{-\frac{2}{3}}x_0x_1\right)^{-1}\left(1 + \omega^2 c^{-\frac{2}{3}}d^{-\frac{1}{3}}x_0 + \omega c^{-\frac{1}{3}}d^{-\frac{2}{3}}x_0x_1\right).$$

我们得到

$$y_1 \mapsto \omega^2 y_1, \quad y_2 \mapsto \omega y_2.$$

我们通过用 y_1 和 y_2 表示 x_0 和 x_1，简要说明它们是生成元。注意到 $\omega + \omega^2 = -1$。于是得到

$$z_0 = 2(y_1 + y_2 + 1)^{-1} = 1 + c^{-\frac{2}{3}}d^{-\frac{1}{3}}x_0 + c^{-\frac{1}{3}}d^{-\frac{2}{3}}x_0x_1$$

于是我们有

$$2 - z_0(y_1 + y_2) = c^{-\frac{2}{3}} d^{-\frac{1}{3}} x_0 + c^{-\frac{1}{3}} d^{-\frac{2}{3}} x_0 x_1$$

and

$$-i\frac{\sqrt{3}}{3} z_0(y_1 - y_2) = c^{-\frac{2}{3}} d^{-\frac{1}{3}} x_0 - c^{-\frac{1}{3}} d^{-\frac{2}{3}} x_0 x_1.$$

从这里开始，如何表示 x_0 和 x_1 就很清楚了。

1.1. 本文概述。 在第2节中，我们介绍自由斜域和自由群的周期自同构的预备知识。在第3节中，我们证明定理 1.1。在第4节中，我们给出关于有限循环群的非交换有理不变量的一些推论。

2. 预备知识

2.1. 非交换有理函数。 我们介绍围绕非交换有理函数的术语和基本概念。我们以复数 $\mathbb{C}$ 为基域。关于更详细的论述，请参阅 [Ami66、Lew74、Coh95、Coh06、KVV12、Vol18]。

一个非交换有理表达式 是由 $+$、$\cdot$、逆元和括号等运算，以及 $\mathbb{C}$ 上的标量、变量按照语法有效组合而成的表达式，例如：

$$\left(2x_1^3 x_2^4 x_1^5 - ((x_1 x_2 - x_2 x_1)^{-1} + 1)^2\right)^{-1} + x_3.$$

这类表达式可以在系数属于 $\mathbb{C}$ 且大小相同的方阵元组上进行求值。如果某个表达式可以在某个矩阵元组上有效求值，则称其为非退化 表达式。两个非退化表达式在二者均有定义时取值相同，则称它们等价。一个非交换有理函数 是一个非退化有理表达式的等价类；这些函数构成自由斜域 $\mathbb{C}(\langle x_1、\ldots\ldots、x_d\rangle)$。自由斜域 $\mathbb{C}(\langle x_1、\ldots\ldots、x_d\rangle)$ 是自由代数 $\mathbb{C}\langle x_1、\ldots\ldots、x_d\rangle$的泛斜分式域。它具有如下泛性质：从 $\mathbb{C}\langle x_1、\ldots\ldots、x_d\rangle$ 到某个斜域 D 的任意满同态，都可以延拓为从 $\mathbb{C}(\langle x_1、\ldots\ldots、x_d\rangle)$ 到 D 的特化。

如果某个斜域同构于自由斜域$\mathbb{C}(\langle x_1，\ldots\ldots，x_d\rangle)$，其中 $d \in \mathbb{N}$为某个对象，我们就称该斜域在 $\mathbb{C}$ 上是有理的（或自由的）。变量 $x_1，\ldots\ldots，x_d$在 $\mathbb{C}(\langle x_1，\ldots\ldots，x_d\rangle)$ 中在乘法运算下生成一个自由群Γ。斜域 $\mathbb{C}(\langle x_1，\ldots\ldots，x_d\rangle)$ 也是群代数 $\mathbb{C}\Gamma$的万能分式域，因此我们也使用记号 $\mathbb{C}(\langle x_1，\ldots\ldots，x_d\rangle) = \mathbb{C}(\langle\Gamma\rangle)$。

斜域中的元素 $y_1，\ldots\ldots，y_d$若在 $\mathbb{F}$ 上有理独立，则由 $y_1，\ldots\ldots，y_d$生成的 $\mathbb{F}$上的斜域同构于 $\mathbb{C}(\langle x_1，\ldots\ldots，x_d\rangle)$。有理独立的元素必定代数独立，但反之不成立。生成 $\mathbb{C}(\langle x_1，\ldots\ldots，x_d\rangle)$ 的有理独立元素集称为自由生成集，其元素称为自由生成元。

定理 2.1. [Coh95，推论 5.8。14] 自由斜域 $\mathbb{C}(\langle x_1, \ldots, x_d\rangle)$ 中由 d 个元素组成的任意生成集 $y_1, \ldots, y_d$ 都是自由生成集，而且自由斜域的任意两个自由生成集所含元素的个数相同。

根据上述定理，任意自同构都由从一个自由生成集到另一个自由生成集的映射定义。

2.2. 自由群的周期自同构与 $n,\ n_1$-树。我们沿用 [McC80], 的做法，使用 $n,\ n_1$-树对自由群的周期自同构进行分类。

设 T 是一棵根为 a的根树。其他顶点用小写字母表示： b、 c、 d, ...。顶点 c 的层级 $l(c)$是从根 a 到 c的唯一约化路径的长度。非根顶点 d 的前驱 $p(d)$是与 d 相邻且满足$l(p(d)) = l(d) - 1$的顶点。固定一个整数 $n \geq 2$，并作如下指定：

(1) 对每个顶点 b，指定正整数 γ_b 和 τ_b，使得 $\gamma_b > 1$ 且 $\gamma_b\tau_b = n$。对根顶点 a，指定 $\tau_a = 1$ 和 $\gamma_a = n$。(2) 对非根顶点 d 及其前驱 $p(d) = c$，指定整数$\alpha_{c,d}$、β_d，满足$\alpha_{c,d} > 1$、$\beta_d > 1$、$\alpha_{c,d}|\gamma_c$、$\beta_d|\gamma_d$以及$\gamma_c\beta_d = \alpha_{c,d}\gamma_d$。(3) 对每个满足 $l(e) \leq l(f)$的顶点有序对(e, f)，指定一个由（可能为空的）集合$I_{e,f}$索引的正整数族$\delta_{e,f,i}$、$\rho_{e,f,i}$、$\eta_{e,f,i}$，满足$\delta_{e,f,i}|\gamma_e$、$\rho_{e,f,i}|\gamma_f$、$\gamma_e\rho_{e,f,i} = \gamma_f\delta_{e,f,i}$以及$0 \leq \eta_{e,f,i} < \gcd(\tau_e, \tau_f)$。若 $e \neq f$，还要求$\delta_{e,f,i} > 1$以及$\rho_{e,f,i} > 1$。

令 n_1 为所有 $\beta_d\tau_d$、$\delta_{e,f,i}\tau_e$ 的最小公倍数。赋予整数标记的树 T 称为一个(基于) $n,\ n_1$-树。

设 T 为一个 $n,\ n_1$-树。对于 T 的非根顶点 d，定义一个字母（变量）集合

$$S(d) = \left\{D_0, D_1, \ldots, D_{(\beta_d-1)\tau_d-1}\right\},$$

其中，带索引的大写字母对应相同的小写字母，例如 $S(c)$ ={C_0、C_1、.....、$C_{(\beta_c-1)\tau_c-1}$}。对于满足 $l(e) \leq l(f)$ 的一对顶点 $e,\ f$，以及一个指标$i \in I_{e,f}$，定义

$$S(e, f, i) = \left\{T_{e,f,i,0}, T_{e,f,i,1}, \ldots, T_{e,f,i,\rho_{e,f,i}\tau_f-1}\right\}.$$

令 $S = S(\mathrm{T})$ 为集合 $S(d)$ 与 $S(e,\ f,\ i)$ 的不交并，其中 d 遍历 T 的所有非根顶点，而 e, f, i 遍历所有满足 $l(e) \leq l(f)$ 的顶点三元组 $e,\ f$，以及一个指标 $i \in I_{e,f}$。令 $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{T}}$为由 S 生成的自由群。

对于顶点 d 和整数 $j \geq 0,\ k > 0$，我们记

$$M_d(j, k) = D_j D_{j+\tau_d} D_{j+2\tau_d} \cdots D_{j+(k-1)\tau_d}$$

并将记号扩展为 $M_d(j,\ 0) = 1$（以不同方式书写的相同字母彼此对应，例如，$M_c(1, 3) = C_1C_{1+\tau_c}C_{1+2\tau_c}$）。

接下来，我们定义 Γ 的一个自同态 $\phi = \phi_{\mathcal{T}}$。对于 T 的每个非根顶点 d，我们定义

$$\phi D_j = D_{j+1} \quad \text{for} \quad 0 \leq j \leq (\beta_d - 1)\tau_d - 2.$$

令 $A_j = 1$ 对每个非负整数 j成立。我们归纳地继续。取一个非根顶点 d 和 $c = p(d)$。假设对每个 $j \in \mathbb{N}_0$，$\phi^j C_0$ 都已定义，并记$C_j = \phi^j C_0$。于是我们定义

$$\phi D_{(\beta_d-1)\tau_d-1} = M_d(0, \beta_d - 1)^{-1} M_c(0, \alpha_{c,d}),$$

这就定义了对每个 $j \in \mathbb{N}$的 $D_j = \phi^j D_0$。对于每一对满足$l(e) \leq l(f)$的顶点 (e, f)，以及每个指标 $i \in I_{e,f}$，我们定义

$$\phi T_{e,f,i,j} = T_{e,f,i,j+1} \quad \text{for} \quad 0 \leq j \leq \rho_{e,f,i}\tau_f - 2$$

and

$$\phi T_{e,f,i,\rho_{e,f,i}\tau_f - 1} = M_f(0, \rho_{e,f,i})^{-1} T_{e,f,i,0} M_e(\eta_{e,f,i}, \delta_{e,f,i}).$$

定理 2.2。对于每棵 n, n_1-树$\mathcal{T}$，自同态 $\phi_{\mathcal{T}}$是 $\Gamma_{\mathcal{T}}$的一个阶为 n_1的自同构。

如果 ϕ 是自由群 Γ的一个非平凡的、阶为 n 的自同构，那么存在一棵 n, n-树$\mathcal{T}$以及一个同构 $\psi\colon \Gamma \to \Gamma_{\mathcal{T}}$，使得 *and* $\phi = \psi^{-1}\phi_{\mathcal{T}}\psi$。

根据上述定理，只需研究那些由 n, n-树定义的自同构。

例 2.3。由字母 B_0 生成的自由群的自同构，由 $B_0 \mapsto B_0^{-1}$定义，对应于一棵 2,2-树，它有两个顶点：根 a 和顶点 b，以及$\beta_b = 2, \tau_b = 1$。

由字母 B_0 和 B_1 生成的自由群的自同构，由 $B_0 \mapsto B_1 \mapsto (B_0B_1)^{-1}$ 定义，对应于一棵 3,3-树，它有两个顶点：根 a 和顶点 b，以及$\beta_b = 3, \tau_b = 1$。

3. 定理 1.1 的证明

首先，我们考察由 n, n-树 T 定义的自同构的一些性质。然后，我们构造将该自同构对角化的元素。

引理 3.1。设 d 是一个非根顶点，其前驱为 c。
(1) $\alpha_{c,d}\tau_c = \beta_d\tau_d$*(2)* 对任意非负整数 j，有

$$D_{(\beta_d+j)\tau_d} = M_d(0, \beta_d + j)^{-1} M_d(0, j+1) M_c((j+1)\tau_d, \alpha_{c,d}).$$

(3) 对任意非负整数 j，有

$$M_d(0, \beta_d + j) = M_d(0, j) M_c(j\tau_d, \alpha_{c,d}).$$

(4) 对任意非负整数 i、j 和 k，有

$$M_d(i, k\beta_d + j) = M_d(i, j) M_c(j\tau_d + i, k\alpha_{c,d}).$$

(5) 存在 $\lambda \in \mathbb{N}$，使得 $M_d(0, \lambda) = 1$。令 $\lambda_d \in \mathbb{N}$ 为满足 $M_d(0, \lambda_d) = 1$ 的最小者，则有 $\beta_d | \lambda_d$ 和 $\lambda_d | \gamma_d$。此外，$M_d(j, \lambda) = 1$ 当且仅当 λ 能被 λ_d 整除。

(6) 设 $\lambda_d = u_d\beta_d$，令 $c = p(d)$ 为前驱，并令 λ_c 为满足 $M_c(0, \lambda_c) = 1$ 的最小正整数。于是 $u_d\alpha_{c,d}$ 是 $\alpha_{c,d}$ 和 λ_d 的最小公倍数。

证明。 (1) 由 $\gamma_c\tau_c = \gamma_d\tau_d = n$ 和 $\gamma_c\beta_d = \alpha_{c,d}\gamma_d$ 可得

$$\alpha_{c,d}(\gamma_c\tau_c) = (\alpha_{c,d}\gamma_d)\tau_d = \gamma_c\beta_d\tau_d,$$

因此 $\alpha_{c,\ d}\tau_c = \beta_d\tau_d$。

(2) 我们对 j 使用归纳法。对于基例 $j = 0$，有

$$D_{\beta_d\tau_d} = \phi^{\tau_d}D_{(\beta_d-1)\tau_d} = \phi^{\tau_d}\left(M_d(0,\beta_d-1)^{-1}M_d(0,\alpha_{c,d})\right) = M_d(\tau_d,\beta_d-1)^{-1}M_c(\tau_d,\alpha_{c,d})$$

并且 $M_d(\tau_d,\ \beta_d-1) = D_0^{-1}M_d(0,\ \beta_d) = M_d(0,\ 1)^{-1}M_d(0,\ \beta_d)$，因此

$$D_{\beta_d\tau_d} = M_d(0,\beta_d)^{-1}M_d(0,1)M_d(\tau_d,\alpha_{c,d}).$$

从 j 到 $j+1$，我们有

$$D_{(\beta_d+j+1)\tau_d} = \phi^{\tau_d}(D_{(\beta_d+j)\tau_d}) = \phi^{\tau_d}\left(M_d(0,\beta_d+j)^{-1}M_d(0,j+1)M_c((j+1)\tau_d,\alpha_{c,d})\right) =$$

$$M_d(\tau_d,\beta_d+j)^{-1}M_d(\tau_d,j+1)M_c((j+2)\tau_d,\alpha_{c,d}).$$

应用 $M_d(\tau_d,\ \beta_d+j) = D_0^{-1}M_d(0,\ \beta_d+j+1)$ 和 $D_0M_d(\tau_d,\ j+1) = M_d(0,\ j+1)$，得到

$$D_{(\beta_d+j+1)\tau_d} = M_d(0,\beta_d+j+1)^{-1}M_d(0,j+2)M_c((j+2)\tau_d,\alpha_{c,d}).$$

(3) 我们再次使用归纳法。对于 $j = 0$，得到

$M_d(0,\ \beta_d) = M_d(0,\ \beta_d-1)D_{(\beta_d-1)\tau_d} = M_d(0,\ \beta_d-1)M_d(0,\ \beta_d-1)^{-1}M_c(0,\ \alpha_{c,\ d})$
$= M_c(0,\ \alpha_{c,\ d})$。对于 $j > 0$，我们有

$$M_d(0,\beta_d+j) = M_d(0,\beta_d+j-1)D_{(\beta_d+j-1)\tau_d}.$$

应用 (2)，得到 $M_d(0,\ \beta_d+j) = M_d(0,\ j)M_c(j\tau_d,\ \alpha_{c,\ d})$。

(4) 只需证明 $i = 0$ 时等式成立。对于其他取值，只需应用 ϕ^i。我们对 k 使用归纳法。$k = 0$ 的情形显然，$k = 1$ 的情形已在 (3) 中讨论。利用 (3) 和归纳假设，从 k 过渡到 $k+1$，得到

$$M_d(0,(k+1)\beta_d+j) = M_d(0,k\beta_d+j)M_c(k\beta_d\tau_d+j\tau_d,\alpha_{c,d}) =$$

$$= M_d(0,j)M_c(j\tau_d,k\alpha_{c,d})M_c(k\beta_d\tau_d+j\tau_d,\alpha_{c,d}).$$

应用 $\beta_d\tau_d = \alpha_{c,\ d}\tau_c$ 和 $M_c(j\tau_d,\ k\alpha_{c,\ d})M_c(k\alpha_{c,\ d}\tau_c+j\tau_d,\ \alpha_{c,\ d}) = M_c(j\tau_d,\ (k+1)\alpha_{c,\ d})$，得到

$$M_d(0,(k+1)\beta_d+j) = M_d(0,j)M_c(j\tau_d,(k+1)\alpha_{c,d}).$$

(5) 和 (6) 设 $D_0(\lambda) = 1$，并将 $\lambda = k\beta_d+j$ 写作某个 $k \geq 0$ 和 $\beta_d > j \geq 0$。由 (4) 得

$$M_d(0,\lambda) = M_d(0,j)M_c(j\tau_d,k\alpha_{c,d}).$$

对于 $\beta_d > j > 0$，$M_c(j\tau_d,\ k\alpha_{c,\ d})$ 中出现的变量都不会出现在 $M_d(0,\ j)$ 中，并且显然 $M_d(0,\ j) \neq 1$，因此，$\beta_d|\lambda$。

假设 λ_d 存在，我们证明 $M_d(0,\ \lambda) = 1$ 当且仅当 λ 可被 λ_d 整除。首先设 $D_0(\lambda) = 1$。λ 和 λ_d 都具有 $n\beta_d$ 和 $m\beta_d$ 的形式。将 $n = sm+r$ 写作满足 $0 \leq r < m$ 的形式，则

$$1 = M_d(0,n\beta_d) = M_d(0,sm\beta_d+r\beta_d) =$$

$M_d(0,\ m\beta_d)M_d(m\beta_d\tau_d,\ m\beta_d)\cdots M_d((s-1)m\beta_d\tau_d,\ m\beta_d)M_d(sm\beta_d\tau_d,\ r\beta_d) = M_d(sm\beta_d\tau_d,\ r\beta_d)$6

而 m 的最小性意味着 $r=0$。同样的计算表明，对于每个 $s\in\mathbb{N}$， $M_d(0,\ s\lambda_d)\ =1$。

最后，我们证明 λ_d 的存在性。我们对 $l(d)$ 使用归纳法。记 $p(d)$ 为 $=c$。

对于 $l(d)\ =\ 1$，有 $c\ =\ a$。于是，对于每个 j，都有 $C_j\ =\ A_j\ =\ 1$，因此 $M_d(0,\ \beta_d)\ =M_a(0,\ \alpha_{c,\ d})\ =1$。所以 $\lambda_d=\beta_d$ 且 $\lambda_d|\gamma_d$。

对于 $l(d)>1$，令 μ 为 λ_c 和 α_c 的最小公倍数$_{,\ d}$，并记 $\mu=v\lambda_c=u\alpha_{c,\ d}$。利用(4)，有

$$M_d(0,u\beta_d)=M_c(0,u\alpha_{c,d})=M_c(0,v\lambda_c)=1.$$

事实上， $\lambda_d=u\beta_d$。反设，对于小于 u 的 k，有 $1=M_d(0,\ k\beta_d)$，则 $k\alpha_{c,\ d}$ 能被 λ_c 整除，这与 μ 的最小性矛盾。

将 $\gamma_c\beta_d=\alpha_{c,\ d}\gamma_d$ 乘以 u，得到 $\gamma_c\lambda_d=\mu\gamma_{d.}$。由于 λ_c 和 $a_{c,\ d}$ 都整除 γ_c，它们的最小公倍数 μ 也整除 γ_c，因此 $\lambda_d|\gamma_d$。□

注记 3.2。如果等式 $M_d(j,\lambda)\ =1$ 对某个非负整数 j成立，那么它对所有非负整数都成立，因为 $M_d(j',\lambda)\ =\phi^{j'-j}(M_d(j,\lambda))\ =\phi^{j'-j}(1)\ =1$。

~设 $\phi\ =\ \phi\varphi$ 是 $\mathbb{C}(<\Gamma)>$的弱周期扭乘自同构，其中 ϕ 是 $\mathbb{C}(<\Gamma)>$ 的周期自同构，由一棵 n,n-树 T 定义。对于 T 的每个顶点 d 和每个整数 $j\geq 0$，我们有 $\phi(D_j)\ =d_{j+1}D_{j+1}$，其中某个标量为 $d_{j+1}\in\mathbb{C}$。对于整数j,k，记

$$m_d(j,k)=\prod_{l=0}^{k-1}d_{j+l\tau_d}$$

并将记号扩展为 $m_d(j,0)\ =1$。那么 $\tilde{\phi}(D_j)^k=\left(\prod_{l=1}^{k}d_{j+l}\right)D_{j+k}$ 以及 $\tilde{\phi}(M_d(j,k))\ =m_d(j+1,k)M_d(j+1,k)$。

~我们开始构造 $\mathbb{C}(<\Gamma)>$ 中将 ϕ 对角化的元素。选取树 T 的一个非根顶点d，并令 ω 为一个本原 β_d 次单位根。

命题 3.3. 存在非零标量 ξ_d 和 $\xi_d(i,k)$，对应于 $k\ =\ 0,\ldots,\lambda_d-1$ 和$i=0,\ldots,\tau_d-1$，使得

$$\tilde{X}(d,i,j)=\sum_{k=0}^{\lambda_d-1}\omega^{jk}\xi_d(i,k)M_d(i,k)$$

下列等式成立：

(1) $\tilde{\phi}\left(\tilde{X}(d,i,j)\right)=\tilde{X}(d,i+1,j)$ *for* $i=0,\ldots,\tau_d-1$;

(2) $\tilde{\phi}\left(\tilde{X}(d,\tau_d-1,j)\right)=\omega^{-j}\xi_dD_0^{-1}\tilde{X}(d,0,j)$.

证明。对于 $i=0,\ldots,\tau_d-2$，我们有

$$\tilde{\phi}\left(\tilde{X}(d,i,j)\right)=\sum_{k=0}^{\lambda_d-1}\omega^{jk}\xi_d(i,k)m_d(i+1,k)M_d(i+1,k).$$

我们得到等式 将 $\xi_d(i,k)m_d(i+1,k)\ =\xi_d(i+1,k)$ 平移到 $i=0,\ldots,\tau_d-2$

$$\xi_d(i,k)=\xi_d(0,k)\prod_{l=1}^{i}m_d(l,k)\tag{3.1}$$

对于 $i = 0, \ldots, \tau_d - 2$。

我们有

$$\tilde{\phi}\left(\tilde{X}(d, \tau_d - 1, j)\right) = \sum_{k=0}^{\lambda_d - 1} \omega^{jk} \xi_d(\tau_d - 1, k) m_d(\tau_d, k) M_d(\tau_d, k)$$

我们将上述表达式与 $\omega^{-j}\xi_d D_0^{-1}\tilde{X}(d,\ 0,\ j)$ 相等，并注意到等式 $M_d(\tau_d,\ k) = D_0^{-1}M_d(0,\ k+1)$。比较 $D_0^{-1}M_d(0,\ k)$ 处 $k = 1,\ \ldots,\ \lambda_d - 1$ 的系数，得到

$$\omega^{-j}\xi_d\omega^{jk}\xi_d(0,k) = \omega^{(k-1)j}\xi_d(\tau_d - 1, k-1)m_d(\tau_d, k-1).$$

应用 (3.1)，得到

$$\xi_d(0,k) = \xi_d^{-1}\xi_d(0,k-1)\prod_{l=1}^{\tau_d} m_d(l, k-1)$$

或者等价地

$$\xi_d(0,k) = \xi_d^{-k}\xi_d(0,0)\prod_{l=1}^{\tau_d}\prod_{t=0}^{k-1} m_d(l,t) \tag{3.2}$$

对于 $k = 1, \ldots, \lambda_d - 1$.

通过比较 $D_0^{-1}M_d(0,\ 0) = D_0^{-1}M_d(0,\ \lambda_d)$ 处的系数，得到

$$\omega^{-j}\xi_d\xi_d(0,0) = \omega^{(\lambda_d-1)j}\xi_d(\tau_d - 1, \lambda_d - 1)m_d(\tau_d, \lambda_d - 1).$$

由于 $\beta_d|\lambda_d$，我们有 $\omega^{(\lambda_d-1)j} = \omega^{-j}$。应用 (3.2)，得到

$$\xi_d\xi_d(0,0) = \xi_d^{-\lambda_d+1}\xi_d(0,0)\prod_{l=1}^{\tau_d}\prod_{t=0}^{\lambda_d-1} m_d(l,t).$$

最后，我们令 $\xi_d(0,0) = 1$ 和 ξ_d 为 $\prod_{l=1}^{\tau_d}\prod_{t=0}^{\lambda_d-1} m_d(l,t)$ 的任意 λ_d 次根。由此定义这些标量，使所需的等式成立。□

下一个引理表明，这些元素

$$\tilde{X}(d,i,j) = \sum_{k=0}^{\lambda_d-1}\omega^{jk}\xi_d(i,k)M_d(i,k)$$

均非零，因此都有逆元。

引理 3.4. 元素 $M_d(i,k)$、$k = 0$、.....、$\lambda_d - 1$ 互不相同。

证明。假设对于 $0 \le k_1 < k_2 \le \lambda_d - 1$，有 $M_d(i,k_1) = M_d(i,k_2)$。根据定义，我们有$M_d(i,\ k_2) = M_d(i,k_1)M_d(i + k_1\tau_d, k_2 - k_1)$，因此 $M_d(i + k_1\tau_d, k_2 - k_1) = 1$。这与 λ_d的最小性矛盾。□

我们固定命题 3.3 中的标量 ξ_d 和 $\xi_d(i,k)$，并记

$$\tilde{Y}(d,i,j) = \tilde{X}(d,i,0)^{-1}\tilde{X}(d,i,j)$$

为 $i = 0, \ldots, \tau_d - 1$和 $j = 1, \ldots, \beta_d - 1$。根据前引理，逆元 $\tilde{X}(d,i,0)^{-1}$ 存在。

引理 3.5. *(1)* $\tilde{\phi}\left(\tilde{Y}(d,i,j)\right) = \tilde{\phi}\left(\tilde{Y}(d,i+1,j)\right)$ 对于 $i = 0, \ldots, \tau_d - 2$,8

(2) $\tilde{\phi}\left(\tilde{Y}(d,\tau_d-1,j)\right)=\omega^{-j}\tilde{\phi}\left(\tilde{Y}(d,0,j)\right)$.

证明。 由命题 3.3 得出。 □

引理 3.6。令 $\lambda_d=u_d\beta_d$。

(1) $\sum_{j=1}^{\beta_d-1}\tilde{X}(d,\ i,\ j)=\beta_d\sum_{s=0}^{u_d-1}\xi_d(i,\ s\beta_d)M_c(i,\ s\alpha_{c,\ d})-M_d(i,\ 0)$。

(2) $\sum_{j=1}^{\beta_d-1}\tilde{Y}(d,\ i,\ j)=\beta_d\tilde{X}(d,\ i,\ 0)^{-1}\left(\sum_{s=0}^{u_d-1}\xi_d(i,\ s\beta_d)M_c(i,\ s\alpha_{c,\ d})\right)-1$。

(3) 对于 $s=0$、……、 u_d-1，元素彼此不同 $M_c(i,\ s\alpha_{c,\ d})$

证明。(1) 对于 $\lambda_d=u\beta_d$，我们有

$$\sum_{j=1}^{\beta_d-1}\tilde{X}(d,i,j)=\sum_{k=0}^{\lambda_d-1}\left(\sum_{j=1}^{\beta_d-1}\omega^{jk}\right)=\sum_{s=0}^{u_d-1}\sum_{k=0}^{\beta_d-1}\left(\sum_{j=1}^{\beta_d-1}\omega^{jk}\right)\xi_d(i,s\beta_d+k)M_d(i,s\beta_d+k)$$

我们应用

$$\sum_{j=1}^{\beta_d-1}\omega^{jk}=\begin{cases}\beta_d-1 & ;\beta_d|k\\ -1 & ;\text{otherwise}\end{cases}$$

加到上面的和式中，得到

$$\sum_{j=1}^{\beta_d-1}\tilde{X}(d,i,j)=(\beta_d-1)\sum_{s=0}^{u_d-1}\xi_d(i,s\beta_d)M_d(i,s\beta_d)-\sum_{s=0}^{u_d-1}\sum_{k=1}^{\beta_d-1}\xi_d(i,s\beta_d+k)M_d(i,s\beta_d+k).$$

重新整理求和式，得到

$$\sum_{j=1}^{\beta_d-1}\tilde{X}(d,i,j)=\beta_d\sum_{s=0}^{u_d-1}\xi_d(i,s\beta_d)M_d(i,s\beta_d)-\sum_{k=0}^{\lambda_d-1}\xi_d(i,k)M_d(i,k).$$

应用引理 3.1 中的 (4)，得到所需的等式 $M_d(i,s\beta_d)=M_c(i,s\alpha_{c,d})$。

(1) 直接由 (2) 得出。

(3) 假设对 $0\le s_1<s_2\le u-1$，有 $M_c(i,s_1\alpha_{c,d})=M_c(i,s_2\alpha_{c,d})$。我们有 $M_c(i,s_2\alpha_{c,d})=M_c(i,s_1\alpha_{c,d})M_c(i+s_1\tau_c,(s_2-s_1)\alpha_{c,d})$，因此 $M_c(i+s_1\tau_c,(s_2-s_1)\alpha_{c,d})=1$。于是 $(s_2-s_1)\alpha_{c,d}$ 是 λ_c 的倍数，这与 $u_d\alpha_{c,d}$ 是 λ_d 和 $\alpha_{c,d}$ □的最小公倍数矛盾

对于满足 $l(e)\le l(f)$ 且 $i\in I_{e,\ f}$ 的 T 的顶点 $e,\ f$，令 $u_{e,\ f,\ i}$ 和 $v_{e,\ f,\ i}$ 为满足 $M_f(0,\ u\rho_{e,\ f,\ i})=1$ 且 $M_e(0,\ v\delta_{e,\ f,\ i})=1$ 的最小$u,\ v\in\mathbb{N}$。由引理 3.1 的 (5)，具有此性质的整数存在。

引理 3.7。 *(1)* $\rho_{e,f,i}\tau_f=\delta_{e,f,i}\tau_e$

(2) 对于 $k=0,\ldots,u_{e,\ f,\ i}-1$，元素 $M_f(j,k\rho_{e,\ f,\ i})$ 互不相同。*(3)* 对于 $k=0,\ldots,v_{e,\ f,\ i}-1$，元素 $M_e(j+\eta_{e,\ f,\ i},k\delta_{e,\ f,\ i})$ 互不相同。

*Pr*证毕。(1) 根据定义，我们有 $\gamma_e\tau_e=\gamma_f\tau_f=n$ 和 $\gamma_e\rho_{e,\ f,\ i}=\gamma_f\delta_{e,\ f,\ i}$。于是

$$\rho_{e,f,i}\gamma_f\tau_f=\rho_{e,f,i}\gamma_e\tau_e=\gamma_f\delta_{e,f,i}\tau_e$$

和 $\rho_{e,f,i}\tau_f=\delta_{e,f,i}\tau_e$.

(2) 假设对于 $0\le k_1<k_2<u_{e,f,i}$，$M_f(j,k_1\rho_{e,f,i})=M_f(j,k_2\rho_{e,f,i})$。那么 $M_f(j,k_2\rho_{e,f,i})=M_f(j,k_1\rho_{e,f,i})M_f(j+k_1\rho_{e,f,i}\tau_e,(k_2-k_1)\rho_{e,f,i})=M_f(j,k_1\rho_{e,f,i})$，因此 $M_f(j+k_1\rho_{e,f,i}\tau_e,(k_2-k_1)\rho_{e,f,i})=1$，这与 $u_{e,f,i}$ 的最小性矛盾。

（3）推理与（2）相同。 □

命题 3.8. 存在非零标量 $\mu_{e,f,i}$, $\mu_{e,f,i}(j,k)$ 以及 $\nu_{e,f,i}$, $\nu_{e,f,i}(j,k)$ ，对于 $j=0,1,\ldots,u_{e,f,i}-1$ ，使得对于

$$\tilde{L}_{e,f,i}(j)=\sum_{k=0}^{u_{e,f,i}-1}\mu_{e,f,i}(j,k)M_f(j,k\rho_{e,f,i})^{-1}$$

and

$$\tilde{R}_{e,f,i}(j)=\sum_{k=0}^{v_{e,f,i}-1}\nu_{e,f,i}(j,k)M_e(j+\eta_{e,f,i},k\delta_{e,f,i})^{-1}$$

以下方程成立

(1) For $j=0,\ldots,\rho_{e,f,i}\tau_f-2$, *we have* $\tilde{\phi}\left(\tilde{L}_{e,f,i}(j)\right)=\tilde{L}_{e,f,i}(j+1)$;
(2) $\tilde{\phi}\left(\tilde{L}_{e,f,i}(\rho_{e,f,i}\tau_f-1)\right)=\mu_{e,f,i}\tilde{L}_{e,f,i}(0)M_f(0,\rho_{e,f,i})$;
(3) For $j=0,\ldots,\rho_{e,f,i}\tau_f-2$, *we have* $\tilde{\phi}\left(\tilde{R}_{e,f,i}(j)\right)=\tilde{R}_{e,f,i}(j+1)$;
(4) $\tilde{\phi}\left(\tilde{R}_{e,f,i}(\rho_{e,f,i}\tau_f-1)\right)=\nu_{e,f,i}M_e(\eta_{e,f,i},\delta_{e,f,i})^{-1}\tilde{R}_{e,f,i}(0)$.

证明。我们首先求出满足（1）和（2）的标量。对于 $j=0,\ldots,\rho_{e,f,i}\tau_f-2$，我们得到

$$\tilde{\phi}\left(\tilde{L}_{e,f,i}(j)\right)=\sum_{k=0}^{u_{e,f,i}-1}\mu_{e,f,i}(j,k)m_f(j+1,k\rho_{e,f,i})^{-1}M_f(j+1,k\rho_{e,f,i})^{-1}$$

这意味着方程 $\mu_{e,f,i}(j,k)m_f(j+1,k\rho_{e,f,i})^{-1}=\mu_{e,f,i}(j+1,k)$，并且进一步

$$\mu_{e,f,i}(j,k)=\mu_{e,f,i}(0,k)\prod_{l=1}^{j}m_f(l,k\rho_{e,f,i})^{-1}. \tag{3.3}$$

我们有

$$\tilde{\phi}\left(\tilde{L}_{e,f,i}(\rho_{e,f,i}\tau_f-1)\right)=\sum_{k=0}^{u_{e,f,i}-1}\mu_{e,f,i}(\rho_{e,f,i}\tau_f-1,k)m_f(\rho_{e,f,i}\tau_f,k\rho_{e,f,i})^{-1}M_f(\rho_{e,f,i}\tau_f,k\rho_{e,f,i})^{-1}.$$

我们应用

$$M_f(\rho_{e,f,i}\tau_f,k\rho_{e,f,i})^{-1}=M_f(0,(k+1)\rho_{e,f,i})^{-1}M_f(0,\rho_{e,f,i}),$$

$M_f(0,\ u_{e,\ f,\ i}\rho_{e,\ f,\ i})=M_f(0,\ \ 0)$，并比较系数以得到方程

$$\mu_{e,f,i}\mu_{e,f,i}(0,k)=\mu_{e,f,i}(\rho_{e,f,i}\tau_f-1,k-1)m_f(\rho_{e,f,i}\tau_f,(k-1)\rho_{e,f,i})^{-1}$$

对于 $k=1,\ .....,\ u_{e,\ f,\ i}-1$。应用（3.3）式可得

$$\mu_{e,f,i}\mu_{e,f,i}(0,k)=\mu_{e,f,i}(0,k-1)\prod_{l=1}^{\rho_{e,f,i}\tau_f}m_f(l,(k-1)\rho_{e,f,i})^{-1}$$

进一步地

$$\mu_{e,f,i}(0,k)=\mu_{e,f,i}^{-k}\mu_{e,f,i}(0,0)\prod_{t=0}^{k-1}\prod_{l=1}^{\rho_{e,f,i}\tau_f}m_f(l,t\rho_{e,f,i})^{-1}. \tag{3.4}$$

比较 $M_f(0,\rho_{e,f,i})$ 处的系数，得到方程

$$\mu_{e,f,i}\mu_{e,f,i}(0,0)=\mu_{e,f,i}(\rho_{e,f,i}\tau_f-1,u_{e,f,i}\rho_{e,f,i})m_f(l,u_{e,f,i}\rho_{e,f,i})^{-1}.$$

应用 (3.3) 和 (3.4)，得到

$$\mu_{e,f,i}^{u_{e,f,i}}\mu_{e,f,i}(0,0) = \mu_{e,f,i}(0,0)\prod_{t=0}^{u_{e,f,i}}\prod_{l=1}^{\rho_{e,f,i}\tau_f} m_f(l, t\rho_{e,f,i})^{-1}.$$

我们取 $\mu_{e,\ f,\ i}(0,\ 0) = 1$ 和 $\mu_{e,\ f,\ i}$ 为任意的 $u_{e,\ f,\ i}$ 次根 $\prod_{l=1}^{\rho_{e,\ f,\ i}\tau_f} m_f(l,\ t\rho_{e,\ f,\ i})^{-1}$，从而得到所需的标量。

满足 (3) 和 (4) 的标量 $\nu_{e,\ f,\ i}$，$\nu_{e,\ f,\ i}(j,\ k)$ 的构造方式非常相似。我们只需使用引理 3.7 中的 $\rho_{e,\ f,\ i}\tau_f = \delta_{e,\ f,\ i}\tau_e$，

$$M_e(\rho_{e,f,i}\tau_f + \eta_{e,f,i}, k\delta_{e,f,i}) = M_e(\eta_{e,f,i}, \delta_{e,f,i})^{-1}M_e(\eta_{e,f,i}, (k+1)\delta_{e,f,i})$$

并且 $M_e(j,\ v_{e,\ f,\ i}\delta_{e,\ f,\ i}) = 1$。 □

我们固定上述命题中的标量，并定义

$$\widetilde{T}_{e,f,i,j} = \tilde{L}_{e,f,i}(j)T_{e,f,i,j}\tilde{R}_{e,f,i}(j)$$

对于 $j = 0, 1, \ldots, \rho_{\sim e,\ f,\ i}\tau_f - 1$。注意，根据引理 3.9，$L_{e,\ f,\ i}(j)$ 和 $R_{e,\ f,\ i}(j)$ 均非零。

引理 3.9. *(1) $\phi T_{e,f,i,j} = \phi T_{e,f,i,j}$ 对于 $j = 0, 1, \ldots, \rho_{e,f,i}\tau_f - 2$*

(2) $\phi T_{e,f,i,\rho_{e,f,i}\tau_f - 1} = \mu_{e,f,i}\nu_{e,f,i}T_{e,f,i,0}$.

证明。 由命题 3.8 得出。 □

对于非根顶点 d，我们定义

$$\widetilde{S}(d) = \left\{\tilde{Y}(d,i,j) \mid i = 0, \ldots, \tau_d - 1,\ j = 1, \ldots, \beta_d - 1\right\}$$

对于一对 $(e,\ f)$，若 $l(e) \le l(f)$ 且 $i \in I_{e,\ f}$，我们定义

$$\widetilde{S}(e,f,i) = \left\{\widetilde{T}_{e,f,i,j} \mid j = 0, \ldots, \rho_{e,f,i}\tau_f - 1\right\}.$$

令 S 为所有 $S(d)$ 以及所有 $S(e,\ f,\ i)$ 的并，其中 d 遍历 T 的所有非根顶点，e，f遍历所有满足 $l(e) \le l(f)$ 的顶点对；对于给定顶点 e，f，指标 i 遍历索引集 $I_{e,\ f}$。

命题 3.10。 集合 S 是 $\mathbb{C}(<\Gamma_{\mathcal{T}}>)$ 的自由生成集。

证明。 由于 $|S| = |S|$，根据定理 2.1，只需证明 S 生成 $\mathbb{F}(<\Gamma_{\mathcal{T}}>)$。我们对 $l(d)$使用归纳法。对于给定的顶点 d，证明 $S(d)$ 的元素可以用 $S(d)$ 的元素以及集合 $S(c)$ 中满足 $l(c) < l(d)$ 的元素表示；根据归纳假设，这些元素可以用 S 中的元素表示。我们用 $S(d)$ 表示这些集合的并集。

归纳法的基础情形 $l(d) = 0$ 是平凡的。我们假设 $l(d) > 0$。根据引理 3.6 的 (4)，我们可以用 $S(d)$ 的元素表示 $X(d,i,0)$，其中 $i = 0, 1, \ldots, \tau_d - 1$。因此，我们也可以将 $X(d,i,j) = X(d,i,0)Y(d,i,j)$ 表示出来，其中 $j = 1, \ldots, \beta_d - 1$ 且 $i = 0, 1, \ldots, \tau_d - 1$。根据引理 3.1 的 (4) 以及 $u_d\beta_d = \lambda_d$，我们写作

$$\tilde{X}(d,i,j) = \sum_{s=0}^{u_d-1}\sum_{k=0}^{\beta_d-1}\omega^{jk}\xi_d(i, s\beta_d + k)M_d(i, s\beta_d + k) =$$

$$\sum_{s=0}^{u_d-1}\sum_{k=0}^{\beta_d-1}\omega^{jk}\xi_d(i,s\beta_d+k)M_d(i,k)M_c(k\tau_d+i,s\alpha_{c,d}) =$$

$$\sum_{k=0}^{\beta_d-1}\omega^{jk}M_d(i,k)\left(\sum_{s=0}^{u_d-1}\xi_d(i,s\beta_d+k)M_c(k\tau_d+i,s\alpha_{c,d})\right).$$

由于范德蒙德矩阵 $V(1,\ \omega,\ \omega^2,\ \ldots,\ \omega^{\beta_d-1})$ 可逆，我们可以表示

$$M_d(i,k)\left(\sum_{s=0}^{u_d-1}\xi_d(i,s\beta_d+k)M_c(k\tau_d+i,s\alpha_{c,d})\right)$$

~作为 $X(d,i,j)$ 的线性组合，其中 $j=1,\ldots,\beta_d-1$。我们注意到

$$\left(\sum_{s=0}^{u_d-1}\xi_d(i,s\beta_d+k)M_c(k\tau_d+i,s\alpha_{c,d})\right)$$

根据引理 3.6 的 (3)，in 非零，因此我们可以仅使用 $S(d)$ 中的元素表示 $M_d(i,k)$，其中 $i=0,1,\ldots,\tau_d-1,k=1,\ldots,\beta_d-1$。利用这些，我们可以仅使用 D_s 表示初始变量，其中 $s=0,1,\ldots,(\beta_d-1)\tau_d-1$，如所要求。

对于顶点 e,f 和指标 $i\in I_{e,f}$，我们可以用 $S(e,f,i)$、$S(e)$ 和 $S(f)$ 中的元素，以直接的方式表示 $S(e,f,i)$ 的元素，即 □

~根据引理 3.5 和 3.9，显然自同构 ϕ 在生成元集合 ~ ~ ~ S 上是线性的。对于每个顶点 d，向量空间 $V(d)=\mathrm{Lin}\,S(d)$ 在 ϕ 下封闭，并且

$$(\tilde{\phi}|_{V(d)})^{\tau_d}=\omega^{-j}\,\mathrm{Id}$$

~由命题 3.5 可知，因此存在 $V(d)$ 的一组基，使得 $\phi|_{V(d)}$ 在其上是对角的。在 ~ ~生成元集合 S 中，我们用这组基替换 $S(d)$。

对于一对顶点 $e,\ f$，其中 $l(e)\le l(f)$，以及一个指标 $i\in I_{e,\ f}$，向量空间 $V(e,\ f,\ i)=$~ ~Lin $S(e,\ f,\ i)$ 在 ϕ 下封闭，并且

$$(\tilde{\phi}|_{V(e,f,i)})^{\rho_{e,f,i}\tau_f}=\mu_{e,f,i}\nu_{e,f,i}\,\mathrm{Id}$$

~由命题 3.9 可知，因此存在 $V(e,\ f,\ i)$ 的一组基，使得 $\phi|_{V(e,f,i)}$ 在其上是对角的。 ~ ~在生成元集合 S 中，我们用这组基替换 $S(e,\ f,\ i)$。

我们找到了上述对角的，因此定理成立，使得完成。

4. 循环群的非交换有理不变量

KPPV20, Pod23]研究了在可解群的线性作用下保持不变的非交换有理函数。我们使用的结果是：若有限阿贝尔群 A 在 $\mathbb{C}(<x_1,\ \ldots\ldots,\ x_d>)$上忠实地对角作用，则不变量斜域 $\mathbb{C}(<x_1,\ \ldots\ldots,\ x_d>)^A$ 是自由的，具有$|A|(d-1)+1$ 个自由生成元 [KPPV20，定理 4.1]。

我们注意到，循环群 C_n 在 $\mathbb{C}(<x_1,\ldots,x_d>)$ 上的任何忠实作用，都是通过一个阶为 n的自同构定义的。

推论 4.1. 设循环群 C_n 通过扭曲乘法自同构作用于 $\mathbb{C}\left(<x_1, \ldots, x_d>\right)$，则不变量斜域 $\mathbb{C}\left(<x_1, \ldots, x_d>\right)^{C_n}$ 是自由的，具有 $n(d-1)+1$ 个自由生成元。

证明。 直接由定理 1.1 和 [KPPV20，定理 4.1] 得出。 □

参考文献

[Ami66] S.A Amitsur. 有理恒等式及其在代数和几何中的应用。《代数杂志》，3(3):304–359，1966。3[BGM05] Joseph A. Ball、Gilbert Groenewald 和 Tanit Malakorn。结构化非交换多维线性系统。《SIAM 控制与优化杂志》，44(4):1474–1528，2005。1[BR11] Jean Berstel 和 Christophe Reutenauer。非交换有理级数及其应用，数学及其应用百科全书第 137 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2011。1[Coh95] Paul Moritz Cohn。斜域：一般除环理论。数学及其应用百科全书。剑桥大学出版社，剑桥，1995。3[Coh06] Paul Moritz Cohn。自由理想环及一般环中的局部化，新数学专著第 3 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2006。3[DPS75] Joan L Dyer 和 G Peter Scott。自由群的周期自同构。《通讯代数》，3(3):195–201，1975。2[HKM12] J William Helton、Igor Klep 和 Scott McCullough。第 8 章：自由凸代数几何。载于《半定优化与凸代数几何》，第 341–405 页。SIAM，2012。1[HMS18] J William Helton、Tobias Mai 和 Roland Speicher。实现（又称线性化）在自由概率中的应用。《泛函分析杂志》，274(1):1–79，2018。1[HMV06] J William Helton、Scott A McCullough 和 Victor Vinnikov。非交换凸性源自线性矩阵不等式。《泛函分析杂志》，240(1):105–191，2006。1[KPPV20] Igor Klep、James Eldred Pascoe、Gregor Podlogar 和 Jurij Volčič。有限可解群作用下不变的非交换有理函数。《数学分析与应用杂志》，490(2):124341，2020。1，12，13[KVV12] Dmitry S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi 和 Victor Vinnikov。非交换有理函数、其差分微分演算及实现。《多维系统与信号处理》，23(1-2):49–77，2012。3[Lew74] Jacques Lewin。自由群群代数的分式域。《美国数学会汇刊》，192:339–346，1974。3[McC80] James McCool。自由群周期自同构的刻画。《美国数学会汇刊》，260(1):309–318，1980。2，4[Pod23] Gregor Podlogar。具有非交换实有理不变量的有理斜域的有限可解群。《通讯代数》，51(6):2268–2292，2023。1，12[Vol18] Jurij Volčič。非交换有理函数的矩阵系数实现理论。《代数杂志》，499:397–437，2018。3

Gregor Podlogar，卢布尔雅那大学，数学与物理学院，卢布尔雅那，斯洛文尼亚电子邮件地址：gregor.podlogar@fmf.uni-lj.si