arXiv:2304.07824v1 [math.GN] 16 Apr 2023

等度量 Baire 1 与等 Lebesgue 函数族的性质

ˇ ˇMAREK BALCERZAK、Lubica Hola 和 Dusan Holy

Abstract. 我们研究度量空间之间的等度贝尔第一级函数族的若干性质，并考察这类函数族相关的等勒贝格性质。我们探讨等度贝尔第一级函数族和等度勒贝格族在逐点收敛与一致收敛下的行为。特别地，我们得到一个判据，可从构成等度贝尔第一级函数族的函数序列中选取一致收敛子列，从而解决了 [3] 中提出的一个问题。最后，我们讨论等度团簇连续的概念，以及等度贝尔第一级函数族与等度连续点集之间的关系。

1. 引言

Lecomte [15] 引入的等度贝尔第一级函数族概念，后来由 Alikhani-Koopaei [1] 重新发现，其动机源于 Lee、Tang 和 Zhao [17] 对第一类贝尔函数给出的 ε-δ刻画。Lebesgue [14]，对第一类贝尔函数提出的另一种经典刻画，在此背景下也很有用，因为在某些一般情形中，等度贝尔第一级函数族与等度勒贝格族相同。等勒贝格族这一概念由我们在本文中引入，不过它在 [15，命题 32] 和 [1，定理 3.6]) 中已出现，只是未使用这一名称。

等度贝尔第一级函数族最近在 [3] 中得到了研究。在本文中，我们继续开展这方面的研究，并弱化了 [3] 中若干结果的部分假设。我们考察与逐点收敛和一致收敛有关的性质。特别地，我们完整解决了 [3] 中提出的以下问题 4.3：

> 设 (f_n) 是定义在波兰空间 X 上的实值贝尔第一级函数的一致有界序列，并假设函数族 $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是等度量 Baire 1 的。还需作出什么假设，才能保证 (f_n) 含有一个在 X 上一致收敛的子序列?

随后，我们研究其他相关性质。我们证明如下结果：设 (X, d_X) 是可分贝尔度量空间，(Y, d_Y) 是度量空间。如果 $\mathcal{F}$ 是从 X 到 Y 的等度量 Baire 1 函数族，那么其等度连续点集 $EC(\mathcal{F})$ 在 G_δ 中稠密。此外，我们还考虑相反的情形：从一个 G_δ 集合 $H \subset X$ 到 Y 的函数，若在 H 上等度连续，则可扩展为从 X 到 Y 的函数，并构成一个等度量 Baire 1 函数族。

下文中，设 $\mathbb{N}$ 为正整数集，$\mathbb{R}$ 为带通常欧几里得度量的实数空间，$\mathbb{R}^+$ 为正实数集。

若 (Y, d) 是一个度量空间，则以 $y_0 \in Y$ 为中心、$\varepsilon > 0$ 为半径的开 d-球记作 $S(y_0, \varepsilon)$，以 $y_0 \in Y$ 为中心、$\varepsilon > 0$ 为半径的闭 d-球记作 $B(y_0, \varepsilon)$。对于非空集合 $A \subset Y$，符号 $S(A, \varepsilon)$ 表示广义开球 $\{y: \operatorname{dist}(y, A) < \varepsilon\}$。$A \subset Y$ 的闭包记作 $\overline{A}$。给定 $\varepsilon > 0$，若对任意两个不同的 x、$y \in A$，都有 $d(x, y) \geq \varepsilon$，则称集合 $A \subset Y$ 是 ε-离散的。若一个拓扑空间可分且完全可度量化，则称其为波兰空间。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 54H05，26A21。*Key words and phrases.* 等贝尔 1 族、等度勒贝格族、逐点收敛、一致收敛、等度近似连续性、等度连续点。

本文结构如下。第 1 节回顾度量空间 X 和 Y 之间第一类贝尔函数的两种刻画，并确立使这些刻画成立的关于 X 和 Y 的最弱假设。第 2 节定义等度量 Baire 1 族和等度勒贝格函数族，并讨论二者之间的关系。第 4 节和第 5 节分别讨论关于逐点收敛和一致收敛的等度量 Baire 1 族与等度勒贝格族的相关性质。最后，第 6 节给出其他相关结果。我们将探讨等度近似连续性的概念，以及等度量 Baire 1 族与等度连续点集之间的关系。

2. Two characterizations of Baire 1 functions

度量空间 X 与 Y 之间的函数 f 称为 Baire 1 函数，若其为 F_σ-可测的，也就是说，任意开集的原像都是 F_σ （参见 [11, 定义 24.1]）。关于 Baire 1 函数已有若干刻画，其中一些归功于贝尔，见 [11, 定理 24.15]。通常还会对 X 和 Y 假设一些附加性质。我们将重点介绍两种刻画：一种经典刻画归功于 Lebesgue [14], ，另一种则是最近在 [17] 和 [6]中提出的。

Lebesgue 刻画最初是针对任意类 $\alpha > 0$的实值博雷尔可测函数提出的。更一般的版本见 [13]。下文将以稍作修改的形式给出其关于 $\alpha = 1$的表述，并为方便读者附上证明。

定理 2.1.（参见 [13, 第 375] 页）设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是度量空间。对于 $f\colon X \to Y$考虑以下条件：

(1) 函数 f 是 Baire 1；(2) 对每个 $\varepsilon > 0$ ， X 都有一个覆盖 $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ，由闭集组成，且对所有 $i \in \mathbb{N}$，diam $f(X_i) \leq \varepsilon$。

则 (2) $\Rightarrow$ (1) 成立。若 (Y, d_Y) 可分，则 (1) $\Rightarrow$ (2) 成立。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)：设 f 是 Baire 1。由于 (Y, d_Y) 可分，对于固定的 $\varepsilon > 0$ ，我们可以在 Y 中找到开球 $B_1, B_2, \ldots$，使得 $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ 且对所有 $n \in \mathbb{N}$，diam $B_n \leq \varepsilon$。对于 $n \in \mathbb{N}$，集合 $f^{-1}(B_n)$ 属于 F_σ类，因此可以表示为闭集 $F_{n,\ j}$, $j \in \mathbb{N}$的并集 $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} F_{n,\ j}$。将 $\{F_{n,j}\colon\ n, j \in \mathbb{N}\}$ 依次编号为 $\{X_i\colon\ i \in \mathbb{N}\}$，并注意到条件 (2) 中相应的条件成立。

(2) $\Rightarrow$ (1)：由 (2) 可知，对于每个 $k \in \mathbb{N}$ ，我们可以找到闭集 $X_{n,k}$, $n \in \mathbb{N}$ ，使得 $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_{k,n}$，且对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 diam $f(X_{k,n}) < 1/k$。令 U 为 Y 中的一个开集。定义 $\mathcal{F} = \{X_{k,n}\colon\ f(X_{k,n}) \subset U\}$。只需证明 $f^{-1}(U) = \bigcup \mathcal{F}$，因为这样一来， $f^{-1}(U)$ 就是 F_σ 型的。

首先，若 $x \in \bigcup \mathcal{F}$，则对于某些 $k, n \in \mathbb{N}$，有 $x \in X_{k,n}$，且 $f(X_{k,n}) \subset U$。因此 $f(x) \in U$，从而 $x \in f^{-1}(U)$。其次，若 $f(x) \in U$，我们可以找到 $k \in \mathbb{N}$，使得每个满足$d_Y(f(x)\ y) < 1/k$的 $y \in Y$ 都属于 U。找出 $n \in \mathbb{N}$，使得$x \in X_{k,n_0}$。由于 diam $f(X_{k,n}) < 1/k$，我们有 $f(X_{k,n}) \subset U$。因此 $x \in \mathcal{F}$，正如所需。□

如果度量空间 X 和 Y 之间的函数 f 满足定理 2.1 中的条件 (2)，则称 f 具有勒贝格性质。

因此，由定理 2.1 中蕴含关系 (2) $\Rightarrow$ (1) 可知，若 $f\colon X \to Y$ 具有勒贝格性质，则它是 Baire 1。我们注意到，对于定理 2.1 中的蕴含关系 (1) $\Rightarrow$(2)， Y的可分性是必要的。

命题 2.1. 设 (Y, d_Y) 是一个度量空间。以下条件等价：

(i) (Y, d_Y) 可分；(ii) 对于每个度量空间 (X, d_X)，每个第一类贝尔函数 $f\colon X \to Y$ 都具有勒贝格性质。

证明。我们只需证明 (ii) 推出 (i)。假设 (Y, d_Y) 不可分。那么存在 $\varepsilon > 0$ 和一个不可数的 ε-离散集 $L \subset Y$。令 $L = \{y_i : i \in I\}$。那么 $\{B(y_i, \varepsilon/4) : i \in I\}$ 是一个由两两不交的闭球组成的不可数族。

设 $X = Y$、$d_X = d_Y$ 和 $f: X \to Y$ 为恒等函数。则 f 是 Baire 1。根据 (ii)，存在 X 的一个覆盖 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$，由闭集组成，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$，diam $f(X_n) \leq \varepsilon/4$。必定存在 $m \in \mathbb{N}$，使得对于不可数多个球 $B(y_i, \varepsilon/4)$，$X_m \cap B(y_i, \varepsilon/4) \neq \emptyset$，矛盾。□

Lee、Thang 和 Zhao [17] 提出了一种以 epsilon-delta 形式表述的第一类贝尔函数的另一种刻画。他们的结果涉及波兰空间之间的函数情形。Fenecios 和 Cabral 在 [6] 中得到了以下推广。

定理 2.2。 [6] 设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 为可分度量空间。以下条件等价：

(1) 函数 $f: X \to Y$ 是 Baire 1；(2) 对每个 $\varepsilon > 0$，存在函数 $\delta : X \to \mathbb{R}^+$，使得对任意 x、$y \in X$，若 $d_X(x, y) < \min\{\delta(x), \delta(y)\}$，则 $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$。

如果度量空间 X 与 Y 之间的函数 f 满足定理 2.2 中的条件 (2)，我们就称 f 具有 LTZ 性质。有趣的是，[6] 中定理 5 的证明用到了勒贝格性质，对该证明的仔细分析表明，以下蕴含关系成立。

命题 2.2. 设 (X, d_X)、(Y, d_Y) 为度量空间，且 $f: X \to Y$。

(i) 若 X 可分且 f 具有 LTZ 性质，则 f 具有勒贝格性质。(ii) 若 f 具有勒贝格性质，则 f 具有 LTZ 性质。

注 2.1. 利用定理 2.1 和命题 2.2，可得定理 2.2，其中可以省略 Y 的可分性。此外，在定理 2.2 中，X 的可分性仅在蕴含 (2) $\Rightarrow$(1) 时需要。

我们注意到，对于命题 2.2 (i) 中的蕴含，X 的可分性是必要的.

命题 2.3. 设 (X, d_X) 是一个度量空间。以下条件等价：

(1) (X, d_X) 是可分的；(2) 对每个度量空间 (Y, d_Y)，每个具有 LTZ 性质的函数 $f: X \to Y$ 都具有勒贝格性质。

证明. 我们只需证明 (2) $\Rightarrow$ (1)。我们仿照命题 2.1 的证明。假设 (X, d_X) 不可分。那么存在 $\varepsilon > 0$ 和一个不可数的 ε-离散集 $L \subset X$。令 $L = \{x_i : i \in I\}$。那么 $\{B(x_i, \varepsilon/4) : i \in I\}$ 是一个由两两不相交的闭球组成的不可数族。

设 $Y = X$, $d_Y = d_X$，并令 $f: X \to Y$ 为恒等函数，它显然具有 LTZ 性质。因此，根据 (2)，它具有勒贝格性质。然而，对于 $\varepsilon/4$，不存在由闭集组成的 X 的覆盖 $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$，使得对所有 $i \in \mathbb{N}$，都有 diam $f(X_i) \leq \varepsilon/4$，矛盾。□

注 2.2. 设 (X, d_X)、(Y, d_Y) 为度量空间，且 (X, d_X) 具有遗传贝尔性质。根据 [10,定理 C]，，函数 $f: X \to Y$ 是 Baire 1，当且仅当它具有 LTZ 性质。

3. Equi-Baire 1 and equi-Lebesgue families

第一类贝尔函数的 LTZ 性质刻画启发 Lecomte 在其论文[15] 中引入了等度贝尔一类函数族的概念。随后，Alighani-Koopaei [1] 重新发现了这一概念，并展示了它在动力系统中的应用；另见其近期论文 [2]。

定义 3.1. 设 (X,d_X) 和 (Y,d_Y) 为度量空间。我们称由 X 到 Y 的函数族 $\mathcal{F}$ 是等度贝尔一类的，若对于每个 $\varepsilon>0$，都存在一个函数 $\delta\colon X\to\mathbb{R}^+$，使得对于所有 $f\in\mathcal{F}$ 和 x，$y\in X$ 条件 $d_X(x,y)<\min\{\delta(x)\ \delta(y)\}$ 蕴含 $d_Y(f(x)\ f(y))\le\varepsilon$。

注 3.1. 设 (X,d_X) 和 (Y,d_Y) 为度量空间。

(i) 根据命题 2.2(i)，若 (X,d_X) 可分，则从 X 到 Y 的等度贝尔一类函数族中的每个成员都是第一类贝尔函数。(ii) 根据注 2.2，若 (X,d_X) 是遗传贝尔空间，则从 X 到 Y 的等度贝尔一类函数族中的每个成员都是第一类贝尔函数。

我们提出如下等勒贝格族的定义。

定义 3.2. 设 (X,d_X) 和 (Y,d_Y) 为度量空间。若对于每个 $\varepsilon>0$，都存在由闭集构成的 X的覆盖 $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$，使得对所有 $i\in\mathbb{N}$和 $f\in\mathcal{F}$，diam $f(X_i)\le\varepsilon$，则称函数族 $\mathcal{F}$中的函数从 X 到 Y 是等勒贝格的。

等勒贝格族这一概念的一个优点是，从 X 到 Y 的函数的等勒贝格族中的每个成员都是 Baire 1 函数（见定理 2.1）。

由 [1] 中定理 3.6 的证明，我们可以推导出一个一般性事实，其中对空间 X 和 Y 的假设有所弱化。

事实 3.1. $[1,$ 定理 3.6$]$ 设 (X,d_X) 和 (Y,d_Y) 为度量空间，且 $\mathcal{F}$为从 X 到 Y的函数族。

(i) 若 $\mathcal{F}$ 是等勒贝格的，则它是等贝尔 Baire 1 的。(ii) 假设 (X,d_X) 是可分的。若 $\mathcal{F}$是等贝尔 Baire 1 的，则 $\mathcal{F}$是等勒贝格的。

事实 3.1 (ii) 中 X 的可分性是必要的。事实上，我们采用命题 2.3 证明中的思路。假设 (X,d_X) 不可分，并取恒等函数 $f\colon X\to X$。我们知道 f 是一个具有 LTZ 性质但不具有勒贝格性质的函数。因此，$\mathcal{F}=\{f\}$ 是等贝尔 Baire 1 的，但不是等勒贝格的。

4. Properties concerning pointwise convergence

设 X 是一个拓扑空间，(Y,d) 是一个度量空间，Y^X 是从 X 到 Y 的所有函数构成的空间。我们将用到一般拓扑学中的一些概念，例如一致结构和网。关于这些概念的更多信息，请参阅 [12]。

回忆一下，Y^X 上的逐点收敛拓扑 τ_p 是由逐点收敛一致结构 $\mathfrak{U}_p$ 诱导的，其基由以下形式的集合构成

$$W(A,\varepsilon)=\{(f,g)\colon\ \forall\ x\in A\ \ d(f(x),g(x))<\varepsilon\},$$

其中，A 是 X 的有限子集，且 $\varepsilon>0$。$f\in Y^X$ 的一般 τ_p-基本邻域记作 $W(f,A,\varepsilon)$，即 $W(f,A,\varepsilon)=W(A,\varepsilon)[f]$。换言之，

$$W(f,A,\varepsilon)=\{g\in Y^X\colon\ d(f(x),g(x))<\varepsilon \text{ for every } x\in A\}.$$

下面的结果是经典的。

定理 4.1. $[12,$ 第 7 章，定理 14$]$ 设 X 是一个拓扑空间，(Y,d) 是一个度量空间。若由 X 到 (Y,d) 的函数族 $\mathcal{F}$ 在 $x\in X$ 处等度连续，那么 $\mathcal{F}$ 关于逐点收敛拓扑的闭包在 x 处也等度连续。

因此，若从拓扑空间 X 到度量空间 (Y,d) 的连续函数网 (f_σ) 逐点收敛到函数 $f\colon X\to Y$，且网 (f_σ) 等度连续，则 f 连续。我们将为第一类贝尔函数寻找一个类似的结论。

下面的命题很容易验证。

命题 4.1. 设 (X,d_X) 和 (Y,d_Y) 是度量空间。设 $\mathcal{F}$ 是从 X 到 Y 的等勒贝格函数族。$\mathcal{F}$ 关于逐点收敛拓扑的闭包也是等勒贝格的。

我们有以下推论。

推论 4.1. 设 (X, d_X)、(Y, d_Y) 为度量空间，(f_σ) 是从 X 到 Y的第一类贝尔函数网，并逐点收敛于函数 $f\colon X \to Y$。若网 (f_σ) 是等勒贝格的，则 f 是 Baire 1。

证明. 利用命题 4.1 和定理 2.1。 □

推论 4.2. 设 (X, d_X)、(Y, d_Y) 为度量空间，且 X可分。设 (f_σ) 是从 X 到 Y的第一类贝尔函数网，并逐点收敛于函数 $f\colon X \to Y$。若网 (f_σ) 是等度量 Baire 1 的，则 f 是 Baire 1。

证明。利用事实 3.1 (ii) 和推论 4.1。 □

如 [3]中的例 4.1 所示，等勒贝格（等度量 Baire 1）的条件并非保证第一类贝尔函数序列的逐点极限仍为第一类贝尔函数所必需。该例使用带有欧几里得度量的 $X = Y = \mathbb{R}$。设 $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ 为有理数的一个枚举。对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $f_n = \chi_{\{q_n\}}$。序列 (f_n) 逐点收敛于零函数。然而，$\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ 不是等贝尔 Baire 1，并且根据事实 3.1 (i)，它不是等勒贝格。

这个例子可以推广如下。

命题 4.2。设 (X, d) 是一个度量空间。考虑 (X, d) 的两两不相交子集所成的非空族 $\mathcal{A}$。那么，族 $\{\chi_A : A \in \mathcal{A}\}$ 是等勒贝格，当且仅当 $\mathcal{A}$ 可数，$\mathcal{A}$ 的每个元素都是 F_σ，且 $\bigcup \mathcal{A}$ 是 G_δ。

证明。设 $\mathcal{A}$ 是(X, d)的一个两两不相交子集族，使得 $\mathcal{A}$ 是可数的，$\mathcal{A}$ 的每个元素都是 F_σ，且 $\bigcup \mathcal{A}$ 是 G_δ。那么容易验证，族$\{\chi_A : A \in \mathcal{A}\}$ 是等勒贝格的。

现在设 $\mathcal{A}$ 是(X, d)的一个两两不相交子集族，使得族$\{\chi_A : A \in \mathcal{A}\}$ 是等勒贝格的。由于对每个 $A \in \mathcal{A}$，函数 χ_A 必为 Baire 1，因此每个 $A \in \mathcal{A}$ 都必须是 F_σ。根据假设，存在 X 的一个由闭集组成的可数覆盖 $\mathcal{C}$，使得对所有 $C \in \mathcal{C}$ 和 $A \in \mathcal{A}$，$\operatorname{diam} \chi_A(C) < 1/2$。假设 $\mathcal{A}$ 是不可数的。必存在 $C \in \mathcal{C}$，使得对不可数多个 $A \in \mathcal{A}$，$C \cap A \neq \emptyset$，这就产生矛盾。

我们来证明 $\bigcup \mathcal{A}$ 是 G_δ。由于 $\mathcal{C}$ 是 X的覆盖，对于每个 $A \in \mathcal{A}$，都存在 $C \in \mathcal{C}$使得 $A \cap C \neq \emptyset$，这意味着 $C \subset A$，因为 $\operatorname{diam} \chi_A(C) < 1/2$ 意味着$\chi_A(C) = \{1\}$。因此，对每个 $A \in \mathcal{A}$，我们有 $A = \bigcup\{C \in \mathcal{C} : C \subset A\}$。所以 $X \setminus \bigcup \mathcal{A}$ 必定是一个 F_σ 集。□

注意，命题 4.2 在 [3] 中得到了推论 3.17；不过，当 X 是可分遗传贝尔度量空间时，该推论仍然成立，因为其证明是定理 3.16 在[3]中的直接推论。这里我们讨论一个更一般的情形，并给出直接证明。

命题 4.3. 设 (X, d_X)、(Y, d_Y) 是度量空间，且 (f_n) 是一列函数 $\overline{f_n : X \to Y, n \in \mathbb{N}}$，构成一个等勒贝格族。若对于每个 $x \in X$，$\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ 在(Y, d_Y)中是紧的，则存在一个子序列 (f_{n_k})逐点收敛到一个第一类贝尔函数。

证明。对于每个 $x \in X$，令 $K_x = \overline{\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}}$。集合 $\Pi_{x\in X} K_x$ 是紧的，并且对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $f_n \in \Pi_{x\in X} K_x$。存在一个函数 $f \in \Pi_{x\in X} K_x$，使得 f是 $\Pi_{x\in X} K_x$中(f_n)的聚点。根据命题 4.1，$\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{f\}$是等勒贝格的，因此 f是 Baire 1。

由于 $\mathcal{F}$是等勒贝格的，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，存在 X 的一个由闭集组成的覆盖 $(X_i^k)_{i\in\mathbb{N}}$，使得对于所有 $i \in \mathbb{N}$和 $g \in \mathcal{F}$，$\operatorname{diam} g(X_i^k) \leq 1/k$。存在一个可数集 $H \subset X$，使得对于所有 k，$H \cap X_i^k \neq \emptyset$ $i \in \mathbb{N}$。

集合 $\Pi_{x\in H}K_x$是第一可数的（甚至是可度量化的），且 $f|H$是 $\Pi_{x\in H}K_x$中序列 $(f_n|H)$的一个聚点。因此，存在一个收敛到 $\Pi_{x\in H}K_x$中 $f|H$的子序列 $(f_{n_k}|H)$。我们将证明序列 (f_{n_k})逐点收敛到 f。

设 $x\in X$ 和 $\varepsilon>0$。设 $k\in\mathbb{N}$ 满足 $3/k<\varepsilon$。存在一个由闭集组成的 X覆盖 $(X_i^k)_{i\in\mathbb{N}}$，使得对所有 $i\in\mathbb{N}$和 $g\in\mathcal{F}$，diam $g(X_i^k)\le 1/k$。设 $i\in\mathbb{N}$满足 $x\in X_i^k$。设 $z\in X_i^k\cap H$。存在 $l_0\in\mathbb{N}$，使得对每个 $l\ge l_0$，$d_Y(f_{n_l}(z)\ f(z))<1/k$。设 $l\ge l_0$。那么

$$d_Y(f_{n_l}(x),f(x))\le d_Y(f_{n_l}(x),f_{n_l}(z))+d_Y(f_{n_l}(z)),f(z))+d_Y(f(z),f(x))<3/k<\varepsilon.$$

□

我们在 [3]中给出了命题4.5的如下推广。

推论4.3。（[3] 对于 $Y=\mathbb{R}$）设（X，d_X）是可分度量空间，（Y，d_Y）是度量空间，并设（f_n）是函数 $f_n:\ X\to Y$，$n\in\mathbb{N}$的函数序列，构成一个等度Baire 1族。若对每个 $x\in X$，$\{f_n(x):\ n\in\mathbb{N}\}$ 在（Y，d_Y）中是紧的，则存在一个子序列（f_{n_k}），它逐点收敛到一个贝尔 1 函数。

证明。由事实 3.1 可知，如果 (X,d_X) 是可分的，那么等度贝尔一类族与等勒贝格族这两个概念相同。因此，我们可以使用命题 4.3。□

以下结果作为定理 3.3 收录于 [3]，其中 X 和 Y 是波兰空间。由事实 3.1 可知，即使 X 仅为度量空间且 Y 为可分度量空间，同一证明仍然适用。

命题4.4. 设 (X,d_X) 是度量空间，(Y,d_Y) 是可分度量空间。设 $\mathcal{F}=\{f_n:\ n\in\mathbb{N}\}$ 是从 X 到 Y 的连续函数族，且序列 (f_n) 在 X 上逐点收敛。那么 $\mathcal{F}$ 是等勒贝格族。

5. Properties concerning uniform convergence

定义 Y^X 上一致收敛的拓扑 τ_U。该拓扑由一致结构 $\mathfrak{U}_U$ 诱导，而 $\mathfrak{U}_U$ 的基由以下形式的集合组成

$$W(\varepsilon)=\{(f,g):\ \forall\ x\in X\ \ d(f(x),g(x))<\varepsilon\},$$

其中 $\varepsilon>0$。$f\in Y^X$ 的一般 τ_U-基本邻域记作 $W(f,\varepsilon)$，即 $W(f,\varepsilon)=W(\varepsilon)[f]$。换言之，

$$W(f,\varepsilon)=\{g\in Y^X:\ d(f(x),g(x))<\varepsilon \text{ for every } x\in X\}.$$

容易验证，可数族 $\{W(1/n):\ n\in\mathbb{N}\}$ 是一致结构 $\mathfrak{U}_U$ 的一个基。因此，一致结构 $\mathfrak{U}_U$ 是可度量化的 [12]。

最后，设 (X,d) 是一个度量空间。我们将在 Y^X 上定义有界集上一致收敛的拓扑 τ_{UB}。此拓扑由一致结构 $\mathfrak{U}_{UB}$ 诱导，其基由以下形式的集合组成

$$W(B,\varepsilon)=\{(f,g):\ \forall\ x\in B\ \ d(f(x),g(x))<\varepsilon\},$$

其中 B 是 X 的一个有界子集，且 $\varepsilon>0$。$f\in Y^X$ 的一般 τ_{UB}-基本邻域记作 $W(f,B,\varepsilon)$，即 $W(f,B,\varepsilon)=W(B,\varepsilon)[f]$。换言之，

$$W(f,B,\varepsilon)=\{g\in Y^X:\ d(f(x),g(x))<\varepsilon \text{ for every } x\in B\}.$$

容易验证，一致结构 $\mathfrak{U}_{UB}$ 是可度量化的。设 x_0 是 X 中任意一点。对每个 $n\in\mathbb{N}$，令 $B_n=B(x_0,n)$。那么，可数族 $\{W(B_n,1/k):\ n,k\in\mathbb{N}\}$ 是一致结构 $\mathfrak{U}_{UB}$ 的一个基。

命题 5.1. 设 (f_n) 是定义在度量空间 X 上的有界实值第一类贝尔函数序列。若 (f_n) 一致收敛到 $f\colon X\to\mathbb{R}$，则对每个 $\varepsilon>0$，存在 X 的有限覆盖 $\mathcal{B}$，其元素是 X 的子集，且这些子集均为 F_σ，并满足对所有 $B\in\mathcal{B}$ 和 $n\in\mathbb{N}$，diam $f_n(B)\le\varepsilon$。

证明。设 $\varepsilon > 0$。令 $\mathcal{F} = \{f, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$。则 $\mathcal{F}$ 是 $(\mathbb{R}^X, \tau_U)$ 中的紧集。存在函数 f_{k_1}、f_{k_2}、$\ldots f_{k_n} \in \mathcal{F}$，使得

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup\{W(f_{k_j}, \varepsilon/3) : j \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

为简便起见，对每个 $j \in \{1, \ldots, n\}$. 令 $g_j = f_{k_j}$。令 $M > 0$ 满足

$$\bigcup\{g_j(X) : j \in \{1, \ldots, n\}\} \subset [-M, M].$$

设 $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_m\}$ 是 $[-M, M]$ 的有限开覆盖，且该覆盖中各成员的直径小于 $\varepsilon/3$。对每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$ 和 $j \in \{1, \ldots, n\}$，令 $B_i^j = g_j^{-1}(V_i)$。由于 g_j 是第一类贝尔函数，因此对于所有 $j \in \{1, \ldots, n\}$ 和 $i \in \{1, \ldots, m\}$，集合 B_i^j 都是 F_σ。令

$$\mathcal{B}' = \{B_{i_1}^1 \cap \cdots \cap B_{i_n}^n : i_j \in \{1, \ldots, m\} \text{ for each } j \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

每个集合 $B \in \mathcal{B}'$ 都属于 F_σ 型。令 $\mathcal{B}$ 为由 $\mathcal{B}'$ 中所有非空集合组成的族。显然 $X = \bigcup \mathcal{B}$。可以验证，对于所有 $f_i \in \mathcal{F}$、$B \in \mathcal{B}$ 以及 p、$q \in B$，$|f_i(p) - f_i(q)| < \varepsilon$。□

定理 5.1. 设 (f_n) 是定义在贝尔度量空间 X 上的有界实值第一类贝尔函数序列。若 (f_n) 一致收敛于 $f\colon X \to \mathbb{R}$，则对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 X 的有限覆盖 $\mathcal{B}$，其成员是 X 的子集，且这些子集或者是开集，或者是 F_σ 无处稠密的，并且对所有 $B \in \mathcal{B}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\operatorname{diam} f_n(B) \leq \varepsilon$。

证明。设 $\varepsilon > 0$。令 $\mathcal{F} = \{f, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$。那么 $\mathcal{F}$ 是 $(\mathbb{R}^X, \tau_U)$ 中的紧集。存在函数 f_{k_1}、f_{k_2}、……、$f_{k_n} \in \mathcal{F}$，使得

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup\{W(f_{k_j}, \varepsilon/3) : j \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

为简便起见，对每个 $j \in \{1, \ldots, n\}\}.$，令 $g_j = f_{k_j}$。设 $M > 0$ 满足

$$\bigcup\{g_j(X) : j \in \{1, \ldots, n\}\} \subset [-M, M].$$

设 $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_m\}$ 是 $[-M, M]$ 的一个有限开覆盖，其中该覆盖中各成员的直径小于 $\varepsilon/3$。对每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$ 和 $j \in \{1, \ldots, n\}$，令

$$L_i^j = \{z \in C(g_j) : g_j(z) \in V_i\},$$

其中 $C(g_j) = \{z \in X\colon\ g_j$ 在 z处连续。由于 X 是一个贝尔空间，对于每个 $j \in \{1, \ldots, n\}$，$C(g_j)$ 都是 X 中的稠密 G_δ 集。

对于每个 $z \in L_i^j$，令 $W_i^j(z)$ 为 z的一个开邻域，使得 $g_j(W_i^j(z)) \subset V_i$。Le t

$$W_i^j = \bigcup\{W_i^j(z) :\ z \in L_i^j\}$$

and

$$\mathcal{U} = \{W_{i_1}^1 \cap \cdots \cap W_{i_n}^n : i_j \in \{1, \ldots, m\} \text{ for each } j \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

对于每个 $U \in \mathcal{U}$，令

$$P_i^j(U) = \{z \in \overline{U} \setminus U :\ g_j(z) \in V_i\}$$

and

$$\mathcal{P} = \{P_{i_1}^1(U) \cap \cdots \cap P_{i_n}^n(U) : U \in \mathcal{U} \text{ and } i_j \in \{1, \ldots, m\} \text{ for each } j \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

由于 g_j是一个第一类贝尔函数，对于所有 $j \in \{1, \ldots, n\}$、$i \in \{1, \ldots, m\}$和 $U \in \mathcal{U}$，集合 $P_i^j(U)$ 属于 F_σ类。因此，每个集合 $P \in \mathcal{P}$ 也属于 F_σ 类，而且显然是无处稠密的。

我们证明 $X = \bigcup \mathcal{U} \cup \bigcup \mathcal{P}$。集合 $\bigcup \mathcal{U}$ 是开稠密集。令 G 为 X中的一个非空开集。选取某个 $u \in G \cap C(g_1) \cap \cdots \cap C(g_n)$。那么对于每个 $j \in \{1, \ldots, n\}$，都有 $u \in W_{i_j}^j$，其中某个 $i_j \in \{1, \ldots, m\}$。因此 $u \in G \cap W_{i_1}^1 \cap \cdots \cap W_{i_n}^n$，即 $G \cap \bigcup \mathcal{U} \neq \emptyset$.

设 $z \in X \setminus \bigcup \mathcal{U}$。则 $z \in \overline{\bigcup \mathcal{U}}$。因此，存在 $U \in \mathcal{U}$使得 $z \in \overline{U} \setminus U$。由此可知，对每个 $j \in \{1, \ldots, n\}$，都存在 $i_j \in \{1, \ldots, m\}$ 使得 $z \in P_{i_j}^j(U)$，进而 $z \in \bigcup \mathcal{P}$。因此 $X = \bigcup \mathcal{U} \cup \bigcup \mathcal{P}$。

最后，设 $\mathcal{B}$ 为由 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{P}$中的所有非空集合构成的族。容易验证，对所有 $f_i \in \mathcal{F}$、 $B \in \mathcal{B}$ 以及 p、$q \in B$， $|f_i(p) - f_i(q)| < \varepsilon$。□

定理 5.2. 设 (f_n) 是定义在拓扑空间 X 上的实值函数逐点有界序列。假设对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 X 的有限覆盖 $\mathcal{B}$，使得对每个 $B \in \mathcal{B}$ 和每个 $n \in \mathbb{N}$，$\operatorname{diam} f_n(B) \leq \varepsilon$。那么 (f_n) 含有一个子序列，该子序列在 X 上一致收敛。

证明. 对每个 $x \in X$，令 $M_x > 0$ 满足

$$|f_n(x)| \leq M_x \text{ for every } n \in \mathbb{N}.$$

集合 $\Pi_{x\in X}[-M_x, M_x]$ 是紧的，并且对每个 $n \in \mathbb{N}$， $f_n \in \Pi_{x\in X}[-M_x, M_x]$。存在一个函数 $f \in \Pi_{x\in X}[-M_x, M_x]$，使得 f 是 (f_n) 在 $\Pi_{x\in X}[-M_x, M_x]$ 中的聚点。存在 (f_n) 的一个子网 (g_σ)，它逐点收敛到 f。首先，注意以下结论：设 $\eta > 0$ 和 $\mathcal{B}$ 是 X 的有限覆盖，使得对所有 $B \in \mathcal{B}$ 和每个 σ，$\operatorname{diam} g_\sigma(B) \leq \eta$。那么，对每个 $B \in \mathcal{B}$，也有 $\operatorname{diam} f(B) \leq \eta$。

我们将证明 (g_σ) 一致地收敛到 f。设 $\varepsilon > 0$。存在 X 的有限覆盖 $\mathcal{D}$，使得对每个 $D \in \mathcal{D}$ 和每个 σ，都有 $\operatorname{diam} g_\sigma(D) \leq \varepsilon/3$，并且对每个 $D \in \mathcal{D}$，都有 $\operatorname{diam} f(D) \leq \varepsilon/3$。对每个 $D \in \mathcal{D}$，取 $x_D \in D$。对每个 $D \in \mathcal{D}$，存在 σ_D，使得对每个 $\sigma \geq \sigma_D$，都有$|f(x_D) - g_\sigma(x_D)| < \varepsilon/3$。令 σ_0 满足对所有 $D \in \mathcal{D}$ 都有 $\sigma_0 \geq \sigma_D$。这样的 σ_0 存在，因为覆盖 $\mathcal{D}$ 是有限的。我们声称

$$|g_\sigma(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ for every } \sigma \geq \sigma_0 \text{ and for every } x \in X.$$

设 $x \in X$。存在 $D \in \mathcal{D}$，使得 $x \in D$。设 $\sigma \geq \sigma_0 \geq \sigma_D$。于是

$$\begin{aligned} |g_\sigma(x) - f(x)| &\leq |g_\sigma(x) - g_\sigma(x_D)| + |g_\sigma(x_D) - f(x_D)| + |f(x_D) - f(x)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

因此 (g_σ) 一致地收敛到 f，也就是说，(g_σ) 在可度量化空间 $(\mathbb{R}^X, \tau_U)$ 中收敛到 f。于是 f 是 (f_n) 在 $(\mathbb{R}^X, \tau_U)$ 中的聚点。由于 $(\mathbb{R}^X, \tau_U)$ 是可度量化的，存在 (f_n) 的一个子序列 (f_{n_k})，它在 $(\mathbb{R}^X, \tau_U)$ 中收敛到 f；也就是说，(f_{n_k}) 一致地收敛到f。□

注意，定理 5.2 对从拓扑空间 X 到度量空间 (Y, d) 的函数也成立，条件是对每个 $x \in X$， $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ 都是紧的。

我们从 [3]得到了对问题 4.3 的如下回答。

定理 5.3. 设 (f_n) 是定义在贝尔度量空间 X 上的一致有界实值贝尔第一级函数序列。以下条件等价：

(1) (f_n) 含有一个在 X 上一致收敛的子序列；(2) (f_n) 有一个子序列 (f_{n_k}) 满足以下性质：对每个 $\varepsilon > 0$，都有一个由 X 的子集构成的 X 的有限覆盖 $\mathcal{B}$，其中这些子集或者是开集，或者是 F_σ 无处稠密集，并且对每个 $B \in \mathcal{B}$ 和每个 $k \in \mathbb{N}$，都有 $\operatorname{diam} f_{n_k}(B) \leq \varepsilon$。

证明. (1) ⇒(2) 可由定理 5.1 推出。

(2) ⇒ (1)：根据 (2)，考虑 (2) 中所述的 (f_n) 的一个子序列 (f_{n_k})。根据定理 5.2，序列 (f_{n_k}) 存在一个在 X 上一致收敛的子序列。然而，(f_{n_k}) 的这个子序列也是 (f_n) 的子序列。因此，(f_n) 含有一个在 X 上一致收敛的子序列。□

我们提出定理 3.1 的以下推广，见 [3]。

命题 5.2. 设 (X, d_X) 是一个度量空间，(Y, d_Y) 是一个可分度量空间。设 (f_n) 是一列从 X 到 Y 的第一类贝尔函数。若 (f_n) 在有界集上一致收敛到 $f\colon X \to Y$，则族 $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是等勒贝格的。因此，由事实 3.1 可知，它是等度量 Baire 1 的。

证明。令 x_0 是 X 中任意一点。对每个 $n\in\mathbb{N}$，令 $B_n=B(x_0,n)$。令 $l\in\mathbb{N}$ 和 $\varepsilon>0$。设 $\mathcal{F}=\{f_1,f_2,\dots,f_n,\dots\}$。那么 $\mathcal{F}$ 是 (Y^X,τ_{UB}) 中的全有界集。存在函数 f_{k_1}、f_{k_2}、$\dots f_{k_n}\in\mathcal{F}$，使得

$$\mathcal{F}\subseteq\bigcup\{W(f_{k_j},B_l,\varepsilon/3):j\in\{1,\dots,n\}\}.$$

为简便起见，对每个 $j\in\{1,\dots,n\}$.，令 $g_j=f_{k_j}$

设 $\mathcal{V}=\{V_1,\dots,V_n,\dots\}$ 是 Y 的一个可数开覆盖，其中该覆盖中各成员的直径小于 $\varepsilon/3$。对每个 $j\in\{1,\dots,n\}$ 和 $i\in\mathbb{N}$，令 $B_i^j=g_j^{-1}(V_i)$。由于 g_j 是第一类贝尔函数，因此对所有 $j\in\{1,\dots,n\}$ 和 $i\in\mathbb{N}$，B_i^j 都是一个 F_σ 集。令

$$\mathcal{B}'=\{B_l\cap B_{i_1}^1\cap\dots\cap B_{i_n}^n:i_j\in\mathbb{N},\ j\in\{1,\dots,n\}\}.$$

每个集合 $B\in\mathcal{B}'$ 都属于 F_σ 类。设 $\mathcal{B}$ 是由 $\mathcal{B}'$ 中所有非空集合构成的族。显然，$B_l=\bigcup\mathcal{B}$，且族 $\mathcal{B}$ 是可数的。可以验证，对所有 $f_i\in\mathcal{F}$ 以及所有 $B\in\mathcal{B}$，都有 $\operatorname{diam}f_i(B)<\varepsilon$。由于 $X=\bigcup\{B_l:\ l\in\mathbb{N}\}$，证毕。□

6. Further results

团簇函数的概念由 Thielman 在 [18] 中提出。

定义 6.1. [18] 设 X 是一个拓扑空间，(Y,d) 是一个度量空间。若函数 $f\colon X\to Y$ 在 $x\in X$ 处满足：对每个 $\varepsilon>0$ 以及 x 的每个开邻域 U，都存在一个非空开集 $G\subset U$，使得对所有 $x,y\in G$，$d(f(x),f(y))<\varepsilon$，则称其在 $x\in X$ 处团簇连续。若函数 $f\colon X\to Y$ 在每个点 $x\in X$ 处都团簇连续，则称其为团簇连续函数。

在 [8] 中证明了以下结果。（在更一般的情形下，我们仍采用第一类贝尔函数的定义。）

命题 6.1. 设 X 是一个贝尔空间，(Y,d) 是一个可分度量空间。若 $f\colon X\to Y$ 是一个第一类贝尔函数，则 f 是团簇连续的。

根据 命题 6.1 在 [8] 中的证明，我们可以推出以下更强的结果 t.

命题 6.2. 设 (X,d_X) 是一个贝尔度量空间，(Y,d_Y) 是一个度量空间。若 $f\colon X\to Y$ 具有勒贝格性质，则 f 是团簇连续的。

已知（参见 [5]），若 X 是一个贝尔空间，且 (Y,d) 是一个度量空间，则 $f\colon X\to Y$ 是团簇连续的，当且仅当 f 的连续点集在 X 中稠密。具有后一性质的函数称为逐点不连续函数，参见 [13, 第 105] 页。

在 [4, 定义 4], 中，引入了从拓扑空间到度量空间的函数序列的等度团簇连续性这一概念。我们为函数族提出以下定义。

定义 6.2. 设 X 是一个拓扑空间，(Y,d) 是一个度量空间。若对每个 $\varepsilon>0$ 以及 x 的每个邻域 $U\subset X$，都存在一个非空开集 $G\subset U$，使得对所有 $f\in\mathcal{F}$，均有 $\operatorname{diam}f(G)\le\varepsilon$，则称由 X 到 Y 的函数族 $\mathcal{F}$ 在 $x\in X$ 处等度团簇连续。若由 X 到 Y 的函数族 $\mathcal{F}$ 在每个 $x\in X$ 处都等度团簇连续，则称其为等度团簇连续的。

对于从拓扑空间 X 到度量空间 (X,d) 的函数族 $\mathcal{F}$，我们用 $EC(\mathcal{F})$ 表示 $\mathcal{F}$ 的等度连续点集。众所周知，该集合是 G_δ，因为 $EC(\mathcal{F})=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}O(1/n)$，其中

$$O(\varepsilon)=\bigcup\{U:U\subset X,\ U\text{ nonempty open},\ \operatorname{diam}f(U)<\varepsilon\text{ for every }f\in\mathcal{F}\}$$

对每个 $\varepsilon>0$ 都是开集；参见 [7, 引理 3.2]。

注意，在 [7] 中，作者定义了连续函数族的几乎等度连续性概念，该概念与等度团簇连续性的概念相似。

定义 6.3. [7] 设 X 和 (M,d)分别是豪斯多夫完全正则空间和度量空间，并令 $C(X,M)$表示从 X到 M的所有连续函数的集合。如果子集 $G \subset C(X,M)$在 X的一个稠密子集上等度连续，则称其为几乎等度连续。

命题 6.3. 设 (X,d_X) 是一个贝尔度量空间，(Y,d_Y) 是一个度量空间。若 $\mathcal{F}$ 是从 X 到 Y 的等度团簇连续函数族，则集合 $EC(\mathcal{F})$ 在 G_δ 中稠密，因而是余稠密的。

证明。由于 $\mathcal{F}$ 是等度团簇连续的，上文给出的集合 $O(\varepsilon)$ 在 X 中稠密。由于 X 是一个贝尔空间，G_δ 集合 $EC(\mathcal{F}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O(1/n)$ 稠密，因而是余稠密的。□

命题 6.4. 设 (X,d_X) 是一个贝尔度量空间，(Y,d_Y) 是一个度量空间。若 $\mathcal{F}$ 是从 X 到 Y 的等勒贝格函数族，则 $\mathcal{F}$ 是等度团簇连续的。

证明。设 $x \in X$ 和 $U \subset X$ 是 x 和 $\varepsilon > 0$的一个开邻域。由于族 $\mathcal{F}$ 是等勒贝格的，存在由闭集构成的 X 的覆盖 $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$，使得对所有 $i \in \mathbb{N}$ 和 $f \in \mathcal{F}$，都有 diam $f(X_i) \le \varepsilon$。集合 U 是 F_σ。设 $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 X 中的一个闭集族，且 $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$。那么

$$U = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) \cap \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (F_n \cap X_i).$$

由于 X 是贝尔空间，存在 n、$i \in \mathbb{N}$ 和非空开集 $V \subset U$，使得$V \subset F_n \cap X_i$。因此，对每个 $f \in \mathcal{F}$，都有 diam $f(V) \le \varepsilon$。所以 $\mathcal{F}$在 $x \in X$处等度团簇连续。由于x 是任意的，$\mathcal{F}$ 是等度团簇连续的。□

推论 6.1。设 (X,d_X) 是一个贝尔度量空间，(Y,d_Y) 是一个度量空间。那么，对于从 X到 Y 的每个等勒贝格函数族 $\mathcal{F}$，集合 $EC(\mathcal{F})$ 在 G_δ 中稠密。此外，如果 (X,d_X) 还是可分的，那么对于从 X 到 Y的每个等度贝尔一类函数族，集合 $EC(\mathcal{F})$ 在 G_δ中稠密。

证明。对于前一个断言，我们使用命题 6.3 和 6.4。后一个断言由事实 3.1 (ii) 得出。□

当然，一般来说，我们不能指望推论 6.1 中的等度贝尔一类函数族在整个空间上等度连续。

例 6.1。令 $X = [0,1]$ 和 $Y = \mathbb{R}$ 配备通常的欧几里得度量。定义 $f\colon X \to Y$，使得 $f(x) = \sin(1/x)$，如果 $x \neq 0$，且 $f(0) = 0$。族 $\{f\}$ 是等度贝尔一类的，但它在 0 处不可能等度连续。[1] 中的例 3.8 给出了一个从 X 到 Y 的连续函数等度贝尔族，但该族在 0 处不等度连续。

自然会产生这样的问题：从度量空间 (X,d_X) 到度量空间 (Y,d_Y) 的函数族 $\mathcal{F}$，若集合 $H = EC(\mathcal{F})$ 在 (X,d_X) 中稠密，该函数族是否为等度贝尔一类；或者，对于 $f \in \mathcal{F}$，函数 $f|H$ 能否扩展为 X 上的等度贝尔一类族。首先，我们证明第一个问题的答案是否定的。

例 6.2. S. Marcus 在其论文 [16] 中证明，存在一个拟连续函数f，它将区间 $[0,1]$ 映射到 $\mathbb{R}$，但不是勒贝格可测的。因此，f 不可能是第一类贝尔函数。众所周知，从贝尔空间到度量空间的每个拟连续函数，在一个稠密 G_δ 集的点处连续（见 [9]）。

我们也对第二个问题给出了完全一般情形下的肯定回答。

定理 6.1. 设 (X,d_X) 是一个可分度量空间，(Y,d_Y) 是一个可分完备度量空间。设 $H \subset X$ 是一个非空 G_δ 集，且 $\mathcal{F}$ 是从 H 到 (Y,d_Y) 的等度连续函数族。那么，$\mathcal{F}$ 中的所有函数都可以扩展为一个从 X 到 Y 的等度贝尔一类函数族。

证明。我们采用 [13, 第 434–435] 页中关于 $\alpha = 1$ 的思路。固定 $\varepsilon > 0$。于是，对每个 $x \in H$，存在 H 中的一个开集 O_x，使得 $x \in O_x$，并且对每个 $f \in \mathcal{F}$，都有 $\operatorname{diam} f(O_x) < \varepsilon/2$。由于 X 有可数基，我们可以设存在 H 中的开集 $G_1, G_2, \ldots$，使得 $H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$，且对所有 $f \in \mathcal{F}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\operatorname{diam} f(G_n) < \varepsilon/2$。存在一个可数离散集 $I \subset Y$，使得对每个 $y \in Y$，都存在 $z \in I$，满足 $d_Y(y, z) < \varepsilon/2$。

对于所有 $f \in \mathcal{F}$和 $i \in \mathbb{N}$，取 $y_i^f \in I \cap S(f(G_i), \varepsilon/2)$。然后，对于每个 $f \in \mathcal{F}$，令 $g^f\colon H \to Y$定义如下：如果 $x \in G_1$，则 $g^f(x) = y_1^f$；如果 $x \in G_k \setminus \bigcup_{i<k} G_i$且 $k > 1$，则 $g^f(x) = y_k^f$。容易验证，$g^f\colon H \to Y$是 Baire 1，且对于每个 $x \in H$，$d_Y(f(x), g^f(x)) < \varepsilon$。

现在，对于每个 $f \in \mathcal{F}$和每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $g_n^f\colon H \to Y$为函数 g^f，其定义为$\varepsilon = 1/2^{n+1}$。显然，$(g_n^f)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 H上一致收敛到 f。注意，对于所有n、$k \in \mathbb{N}$ 以及每个 $f \in \mathcal{F}$，我们有

$$d_Y(g_n^f(x), g_k^f(x)) \le 1/2^k \text{ for each } x \in H \text{ if } n \ge k.$$

根据构造，对于所有 $f \in \mathcal{F}$和 $n \in \mathbb{N}$，像 $g_n^f(H)$ 都是一个可数离散集。

按照 [13], 中的证明，我们可以将每个 g_n^f 延拓为一个第一类贝尔函数 $h_n^f\colon X \to g_n^f(H)$，使得

$$d_Y(h_n^f(x), h_k^f(x)) \le 1/2^k \text{ for each } x \in H \text{ if } n \ge k. \tag{1}$$

此外，给定 $n \in \mathbb{N}$，所有满足 $f \in \mathcal{F}$ 的函数 h_n^f 都以相同的方式定义，即 $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i^n$，其中 F_i^n 是 X 中的一个 F_σ 集，并且对每个 $i \in \mathbb{N}$，都有 $|h_n^f(F_i^n)| = 1$。由于 (Y, d_Y) 是完备的，条件 (1) 表明，对每个 $f \in \mathcal{F}$，对所有 $x \in X$，(一致)极限 $\lim_n h_n^f(x) = f^*(x)$ 都存在，从而定义了 f 的延拓 $f^*\colon X \to Y$。此外，若 (1) 中有 $n \to \infty$，则对所有 $x \in X$，可得 $d_Y(f^*(x), h_k^f(x)) \le 1/2^k$。

我们将证明 $\{f^*\colon f \in \mathcal{F}\}$是等勒贝格的。根据事实 3.1.(i)，这便得出所述结论；该事实指出，每个等勒贝格族都是等贝尔的。只需证明，对每个 $k \in \mathbb{N}$，对于所有 $i \in \mathbb{N}$和 $f \in \mathcal{F}$，都有 $\operatorname{diam} f^*(F_i^k) \le 1/2^{k-1}$。因此，固定 k、$i \in \mathbb{N}$和$f \in \mathcal{F}$。对于任意 x、$x' \in F_i^k$，我们有

$$d_Y(f^*(x), f^*(x')) \le d_Y(f^*(x), h_k^f(x)) + d_Y(h_k^f(x), h_k^f(x')) + d_Y(f^*(x'), h_k^f(x')) \le 1/2^{k-1}$$

其中 $d_Y(h_k^f(x), h_k^f(x')) = 0$，因为 $|h_k^f(F_i^k)| = 1$。 □

References

1. A. Alikhani-Koopaei, *Equi-Baire one family of functions on metric spaces: A generalization of equi-continuity; and some applications* **277** 2020 107170 , 《Topology and its Applications》 ( ) 。2. A. Alikhani-Koopaei, *On dynamics of families of equi-Baire one functions on metric spaces*, 《Topology and its Applications》322（2022）108267。3. M. Balcerzak, O. Karlova, P. Szuca, *Equi-Baire 1 families of functions*, 《Topology and its Applications》305（2022）107900。4. J. Bors´ık, ˇL. Hol´a, D. Hol´y, *Baire spaces and quasicontinuous mappings*, 《Filomat》25（2011）, 69–83。5. J. Ewert, *Note of limits of simply continuous and cliquish functions*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 1（3）（1994）, 447–450。6. J. P. Fenecios, E. A. Cabral, *A simpler proof for the $\varepsilon - \delta$ characterization of Baire class one function*, 《Real Analysis Exchange》39（2）（2013/14）, 441–446。7. M. V. Ferrer, S. Hern´andez, L. Tarrega, *Equicontinuity criteria for metric-valued sets of continuous functions* **225** 2017 220 236 《Topology and its Applications》 ( ) , –。8. ˇL. Hol´a, *There are 2^c quasicontinuous non Borel functions on uncountable Polish space*, 《Results in Mathematics》（2021）76:126。9. ˇL. Hol´a, D. Hol´y, W. Moors, *USCO and Quasicontinuous Mappings*, De Gruyter数学研究丛书，第81卷，De Gruyter，柏林，2021年。10. O. Karlova, V. Mykhaylyuk, *On composition of Baire functions*, 《Topology and its Applications》216（2017）, 8–24。11. A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer-Verlag，纽约，1987年。12. J. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand，纽约，1955年。13. K. Kuratowski, *Topology*, Academic Press，伦敦，1966年。14. H. Lebesgue, *Sur les fonctions représentables analyquement*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 1（1905）, 139–216。15. D. Lecomte, *How can we recover Baire one functions?*, 《Mathematika》50（2003）, 171–198。

16. S. Marcus, *Sur les fonctions quasi-continues au sense Kempisty*, 《数学讨论会》8（1961），45–53。17. P. Y. Lee, W. K. Tang 和 D. Zhao, *An equivalent definition of functions of the first Baire class*, 美国数学会会刊129（8）（2001），2273–2275。18. H. P. Thielman, *Types of functions*, 《美国数学月刊》60（1953），156–161。

Institute of Mathematics, Lodz University of Technology, al. Politechniki 8, 93-590 Łódź,Poland

Email address: marek.balcerzak@p.lodz.pl

Academiy of Sciences, Institute of Mathematics, Štefánikova 49, 814 73 Bratislava, Slovakia*Email address*: hola@mat.savba.sk

Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Education, Trnava Univer-sity, Priemyselná, 918 43 Trnava, Slovakia*Email address*: dusan.holy@truni.sk