arXiv:2304.07831v1 [math.AP] 16 Apr 2023

关于可数次可加性的评述

LOUKAS GRAFAKOS 和 MONICA VIS,AN

Abstract. 我们讨论如何在温和的连续性条件下，由算子的次可加性推导出其可数次可加性，并给出体现这类情形的例子。

1. Introduction

现代分析中的一个核心定理是 Hunt 的插值定理， [6, 7]。该定理是早期研究的成果，例如 [2, 3,9, 10, 11, 14, 15], Hunt 定理在洛伦兹空间的框架下，对著名的 Marcinkiewicz 插值定理作出了最终形式的表述。众所周知，洛伦兹空间构成了一种自然的空间尺度，其中包含 L^p 和弱 L^p 空间。

围绕简单函数阐述这些插值结果的文献既优雅又详尽；教科书式的介绍可参见例如 [4, 16]。随后，插值结果从简单函数推广到简单函数在其中稠密的那些洛伦兹空间。然而，在分析中一些最显著的洛伦兹空间——即弱 L^p 空间——里，简单函数并不稠密。

由于依赖简单函数的稠密性，插值定理的标准证明往往未能完整处理弱 L^p 空间的情形。因此，这些空间中的插值结果不可避免地需要针对每项应用中出现的特定算子，采用不同的临时论证。这一不足在一定程度上损害了插值这一优雅理论的普适性表述。

在本文中，我们主张，可数次可加性这一性质为解决该问题提供了一种有效且普适的方法。可数次可加性为证明这些插值定理提供了一种简明途径，免去了因考虑简单函数而必须采用的各种极限过程，从而能够统一处理所有 Lorentz 空间。因此，我们认为

2000 年数学学科分类。47A30、47A63、42A99、42B35。

除了科学价值之外，这种方法在阐释和教学方面也具有重要意义。

在命题 2.7 中，我们证明，Hunt 插值定理的假设已足以保证算子具有可数次可加性。事实上，我们证明，满足 Hunt 定理假设的次可加算子在插值空间上自动具有可数次可加性。

更一般地，本文探讨的问题是：在什么合理条件下，次可加映射实际上可以是可数次可加的。回顾一下，定义在赋范向量空间 $(W, |\cdot|_W)$ 上、取值于另一个赋范向量空间 $(V, |\cdot|_V)$ 的映射 T，称为次可加映射，如果

$$\big|T(f+g)\big|_V \le \big|T(f)\big|_V + \big|T(g)\big|_V \tag{1}$$

对每个 $f, g \in W$ 都成立。若级数 $\sum_{j\in\mathbf{Z}} f_j$ 在 W 的范数下收敛时总有下式成立，我们称 T 是可数次可加的：

$$\Big|T\Big(\sum_{j\in\mathbf{Z}} f_j\Big)\Big|_V \le \sum_{j\in\mathbf{Z}} \big|T(f_j)\big|_V. \tag{2}$$

许多例子表明，一般而言，次可加算子未必具有可数次可加性。例如，我们可以通过下式定义从 $L^1([0,1])$ 到 R 的 T：

$$T(f) = \min\Big\{1, \limsup_{n\to\infty}\, n\int_0^{\frac{1}{n}} |f(x)|\,dx\Big\}.$$

泛函 T 当然是次可加的，但在 $L^1([0,1])$ 上并非可数次可加，因为序列 $f_j = \chi_{(\frac{1}{j+1},\frac{1}{j}]}$, $j \in \mathbf{Z}^+$ 不满足 (2)。

若假设（不一定是线性的）算子 T 在“零点连续”，即对于给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得

$$f \in W, \quad |f|_W < \delta \implies |T(f)|_V < \varepsilon. \tag{3}$$

这一性质意味着，T 作用于收敛级数的尾项时，其范数趋于零；由此以及次可加性，可轻易推出可数次可加性。

虽然连续性蕴含可数次可加性，但应注意，反过来并不成立。例如，线性算子 $L(f)(x) = g(x)\int_{\mathbf{R}} f(t)\,dt$ 在 $L^1(\mathbf{R})$ 上是可数次可加的，但若 g 是处处表现不良的可测函数，则它从 $L^1(\mathbf{R})$ 到任何合理空间都不连续。

在分析中出现的许多情形下， V 和 W 不是赋范空间，而是拟赋范空间，这意味着式 (1) 中的三角不等式右侧带有一个乘法常数。拟赋范空间在分析中无处不在：例如，Hardy空间、 L^p 空间，以及指标小于 1 的 Lorentz 空间都是这类空间的例子。

当 V和 W 是拟赋范空间时，用拟可加性条件替换 (1) 是合理的

$$\big|T(f+g)\big|_V \le K\big(\big|T(f)\big|_V + \big|T(g)\big|_V\big) \tag{4}$$

对所有 f、g 属于 W 以及某个固定常数 $K>1$均成立。于是，在假设 (3) 和 (4) 下， T 具有可数 α-拟可加性性质

$$\Big|T\Big(\sum_{j\in\mathbf{Z}} f_j\Big)\Big|_V^{\alpha} \le 4\sum_{j\in\mathbf{Z}} \big|T(f_j)\big|_V^{\alpha} \tag{5}$$

对所有在 W的拟范数下收敛的级数 $\sum_{j\in\mathbf{Z}} f_j$ 均成立。这里， α 是满足 $(2K)^{\alpha}=2$的正数。

断言 (5) 可如下推出：根据 Aoki–Rolewicz 定理 [1, 8, 12] 有

$$\Big|T\Big(\sum_{j\in\mathbf{Z}} f_j\Big)\Big|_V^{\alpha} \le 4\sum_{|j|\le N} \big|T(f_j)\big|_V^{\alpha} + 4\,\Big|T\Big(\sum_{|j|>N} f_j\Big)\Big|_V^{\alpha} \tag{6}$$

对于任意 $N\in\mathbf{Z}^{+}$均成立。于是，给定 $\varepsilon>0$，只要 N 足够大并满足 $|\sum_{|j|>N} f_j|_W<\delta$，(6) 右端的最后一项就可以小于 $4\,\varepsilon^{\alpha}$。令 $N\to\infty$，我们得到

$$\Big|T\Big(\sum_{j\in\mathbf{Z}} f_j\Big)\Big|_V^{\alpha} \le 4\sum_{j\in\mathbf{Z}} \big|T(f_j)\big|_V^{\alpha} + 4\,\varepsilon^{\alpha} \tag{7}$$

并且，由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，我们推得（5）。

本文探讨底层空间W 和 V 为 σ-有限测度空间上的洛伦兹空间时，可数次可加性与可数次 α拟可加性的问题。我们的主要发现是，连续性断言 (3) 可由弱型甚至限制弱型估计推出。这一点体现在命题 2.7 中：该命题保证，满足 Hunt 插值定理假设的次可加算子在插值空间上具有可数次可加性。如前所述，这使我们能够直接证明 Hunt 定理（无需借助简单函数），并将其统一应用于所有洛伦兹空间，包括简单函数不稠密的空间。

第3节讨论了进一步的应用，其中包括 Yano外推定理和 Calderón–Zygmund 定理的推广，以及一项关于 0-局部算子的结果。

1.1. 致谢。L.G. 获得 Simons 基金会资助（624733号）。M.V. 获得 NSF DMS–2054194号资助。

2. Countable subadditivity and α-quasi-additivitity for operators between Lorentz spaces

本节中，我们证明，温和的有界性假设蕴含可数次可加性以及可数 α-拟可加性。

为固定记号，设 (X,μ) 和 (Y,ν) 是两个 σ-有限测度空间。我们用 $S(X)$ 表示 X 上复值简单函数的空间，用 $\mathscr{M}(X)$ 表示 X 上复值可测函数的空间。类似地定义 $S(Y)$ 和 $\mathscr{M}(Y)$。

沿用 [4], 的记号，我们用 $S_0(X)$ 表示 $S(X)$ 中由形如 $f_1-f_2+if_3-if_4$ 的函数构成的子集，其中每个 f_j 具有形式 $\sum_{k=m}^n 2^{-k}\chi_{A_k}$，这里 $m<n$ 是整数，A_k 是 X 中测度有限的子集。

定义 2.1。函数 $f\in\mathscr{M}(X)$ 的递减重排定义如下：对于任意 $t\in[0,\infty)$，

$$f^*(t)=\inf\{s>0:\ \mu(\{|f|>s\})\le t\}. \tag{8}$$

对于 $0<p,\ q\le\infty$，洛伦兹空间 $L^{p,q}(X)$ 是所有在 X 上的复值可测函数 f 所构成的空间，其拟范数

$$\|f\|_{L^{p,q}(X)}=\begin{cases}\displaystyle\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac1p}f^*(t)\right)^q\,\frac{dt}{t}\right)^{\frac1q} & \text{if } q<\infty\,,\\ \displaystyle\sup_{t>0}t^{\frac1p}f^*(t) & \text{if } q=\infty\end{cases}$$

是有限的。

注意，对于所有 $0<p\le\infty$，$L^{p,p}(X)=L^p(X)$，而当 $0<p<\infty$ 时，$L^{p,\infty}(X)$ 与弱 $L^p(X)$ 空间重合。

Lorentz 空间满足嵌套性质；具体而言，当 $0<p\le\infty$ 且 $0<q<r\le\infty$ 时，$L^{p,q}(X)\subset L^{p,r}(X)$。事实上，存在常数 $C(p,q,r)$，其仅依赖于 p、q、r，使得

$$\|f\|_{L^{p,q}(X)}\le C(p,q,r)\|f\|_{L^{p,r}(X)}. \tag{9}$$

早已有人注意到，对于所有$0<p$、$q<\infty$，简单函数空间 $S(X)$ 在 $L^{p,\,q}(X)$ 中稠密，这一点见于 [7]。关于 $S_0(X)$ 在 $L^{p,\,q}(X)$ 中对于 $0<p$、$q<\infty$ 稠密的证明，参见 [4] 中的命题 1.4.21。然而，当 μ 具有无限支撑时，对于任意 $0<p\le\infty$，$S(X)$ 在 $L^{p,\,\infty}(X)$ 中都不稠密；参见 [4] 中的习题 1.4.4。

定义 2.2. 设 T 是定义在洛伦兹空间 $L^{p,\,q}(X)$ 上并取值于空间 $\mathscr{M}(Y)$ 的映射。我们称

(a) T 在 $L^{p,q}(X)$上是次可加的，如果对于所有 $f, g \in L^{p,q}(X)$，都有

$$|T(f+g)| \le |T(f)| + |T(g)| \qquad \nu\text{-a.e.}$$

此外，如果 T 满足

$$|T(\lambda f)| = |\lambda||T(f)| \quad \text{for all } \lambda \in \mathbf{C} \text{ and } f \in L^{p,q}(X), \tag{10}$$

那么称 T 为次线性的。

(b) T 在 $L^{p,q}(X)$上是可数次可加的，如果$\sum_{j\in\mathbf{Z}} f_j$ 在 $L^{p,q}(X)$中收敛，则有

$$\Big|T\Big(\sum_{j\in\mathbf{Z}} f_j\Big)\Big| \le \sum_{j\in\mathbf{Z}} |T(f_j)| \qquad \nu\text{-a.e.}$$

(c) T 在 $L^{p,q}(X)$上是拟可加的，如果存在常数 $K > 1$，使得对于所有 $f, g \in L^{p,q}(X)$，都有

$$|T(f+g)| \le K(|T(f)| + |T(g)|) \qquad \nu\text{-a.e.}$$

此外，若 T 满足 (10)，则称 T 为拟线性。

(d) 若存在常数 $K' \ge 1$，使得每当 $\sum_{j\in\mathbf{Z}} f_j$ 在 $L^{p,q}(X)$ 中收敛时，T 在 $L^{p,q}(X)$ 上是可数 α-拟可加的，其中某个 $0 < \alpha \le 1$，

$$\Big|T\Big(\sum_{j\in\mathbf{Z}} f_j\Big)\Big|^{\alpha} \le K' \sum_{j\in\mathbf{Z}} |T(f_j)|^{\alpha} \qquad \nu\text{-a.e.}$$

接下来，我们回顾限制弱型和弱型条件。

定义 2.3. 我们称定义在 $\mathscr{M}(X)$ 的一个子集上、该子集包含 $S(X)$，且取值于 $\mathscr{M}(Y)$ 的映射 T 对 $0 < p < \infty$ 和 $0 < q \le \infty$ 是限制弱型 (p, q)，若存在常数 $C > 0$ 使得

$$\big\|T(\chi_A)\big\|_{L^{q,\infty}(Y)} \le C\,\mu(A)^{1/p} \tag{11}$$

对于 X 中所有具有有限测度的可测子集 A，
若存在常数 $C > 0$ 使得....., 则称 T 为弱型 (p, q)。

$$\big\|T(f)\big\|_{L^{q,\infty}(Y)} \le C\,\|f\|_{L^p(X)} \tag{12}$$

对所有 $f \in L^p(X)$。

我们回顾一下，次线性算子 T 具有（p, q）限制弱型，当且仅当它存在从 $L^{p,\,1}(X)$ 到 $L^{q,\infty}(Y)$ 的有界延拓，且满足 $0 < p < \infty$ 和 $1 < q < \infty$；例如参见 [4, 练习 1.4.7]。

正如引言中所指出的，可数次可加性和可数 α-拟可加性都是连续性的推论。我们首先注意到，弱型条件提供了一种强形式的连续性。

命题 2.4。固定 $0 < p < \infty$ 和 $0 < q \le \infty$。
(i) 弱型 (p,q) 次可加算子 T 在 $L^p(X)$ 上是可数次可加的。

(ii) 弱型 (p,q) 拟可加算子 T 在 $L^p(X)$ 上是可数 α-拟可加的。

证明。我们证明 (ii)，因为 (i) 的证明更简单。

设 $\sum_{j\in\mathbf{Z}} f_j$ 是一个在 $L^p(X)$ 中收敛的级数。由 Aoki–Rolewicz定理（取 $(2K)^\alpha = 2$），我们得到

$$\Big|T\Big(\sum_{j\in\mathbf{Z}} f_j\Big)\Big|^\alpha \le 4\sum_{|j|\le N}|T(f_j)|^\alpha + 4\Big|T\Big(\sum_{|j|>N} f_j\Big)\Big|^\alpha \quad \nu\text{-a.e.} \tag{13}$$

对任意 $N \in \mathbf{Z}^+$。

为完成证明，只需说明当 $N \to \infty$ 时，$T\big(\sum_{|j|>N} f_j\big)$几乎处处收敛到零（ ν）。由于 T 是弱型 (p,q)，我们有

$$\Big\|T\Big(\sum_{|j|>N} f_j\Big)\Big\|_{L^{q,\infty}(Y)} \le C\Big\|\sum_{|j|>N} f_j\Big\|_{L^p(X)}$$

对某个固定的 $C > 0$ 成立。由于右端当 $N \to \infty$ 时趋于零，我们得出 $T\big(\sum_{|j|>N} f_j\big)$ 依测度收敛到零。因此，存在一个子序列 $N_k \to \infty$，使得$T\big(\sum_{|j|>N_k} f_j\big) \to 0$ ν 几乎处处成立。在（13）中令 $N = N_k$，并令 $k \to \infty$，我们得到 T 在 $L^p(X)$ 上是可数 α-拟可加的。□

接下来，我们讨论一种较弱形式的连续性；在洛伦兹空间的情形下，这种连续性仍足以推出可数次可加性。

命题 2.5. 设 $0 < p < \infty$、$0 < q \le \infty$ 和 $0 < r < \min\{1, q\}$。设 T 是定义在 $S_0(X)$ 上、取值于 $\mathscr{M}(Y)$ 的次可加算子，且属于限制弱型 (p,q)。那么 $|T|$ 在 L^p、$^r(X)$ 上有唯一的可数次次可加延拓。

证明。由 [4] 中的引理 1.4.20 可知，存在常数 $C > 0$ 使得

$$\|T(\varphi)\|_{L^{q,\infty}(Y)} \le C\|\varphi\|_{L^{p,r}(X)} \tag{14}$$

对于子空间 $S_0(X)$ 中的所有函数 φ，该子空间是 L^p、$^r(X)$ 的子空间。

接下来，我们利用 $S_0(X)$ 在 $L^p,\,^r(X)$ 中的稠密性，结合 (14)，在 $L^p,\,^r(X)$ 上定义 $|T|$ 的延拓。给定一个序列 $\{\varphi_j\}_j \subset S_0(X)$，它在该空间的范数下收敛于给定的 $f \in L^p,\,^r(X)$，我们断言

$|T(\varphi_j)|$ 收敛于 $|T(f)|$，且收敛发生在 $L^{q,\infty}(Y)$ 中。为此，注意到根据次可加性，我们有

$$\big||T(\varphi_{j'})| - |T(\varphi_j)|\big| \le |T(\varphi_{j'} - \varphi_j)|.$$

利用（14），可知序列 $\{|T(\varphi_j)|\}_j$ 在完备度量空间 $L^{q,\infty}(Y)$ 中是柯西序列，因此它在该空间中有一个极限，我们将其记为 $|T(f)|^*$。此外，

$$\begin{aligned} \||T(f)|^*\|_{L^{q,\infty}(Y)} &= \lim_{j\to\infty} \|T(\varphi_j)\|_{L^{q,\infty}(Y)} \\ &\le C \lim_{j\to\infty} \|\varphi_j\|_{L^{p,r}(X)} = C\|f\|_{L^{p,r}(X)}. \end{aligned} \tag{15}$$

接下来我们注意到，对象 $|T(f)|^*$ 不依赖于用来逼近 f 的特定序列 $\{\varphi_j\}_j$。事实上，若 $\{\psi_j\}_j$ 是 $S_0(X)$ 中的另一个收敛于 f 的序列，则

$$\big||T(\psi_j)| - |T(\varphi_j)|\big| \le |T(\psi_j - \varphi_j)|.$$

结合（14）可知，$|T(\psi_j)|$ 与 $|T(\varphi_j)|$ 在 $L^{q,\infty}(Y)$ 中具有相同的极限。因此，对于每个 $f \in L^{p,r}(X)$，$|T(f)|^*$ 都是良定义的。

这使我们能够通过令 $|T|^*(f) = |T(f)|^*$，在 $L^{p,r}(X)$ 上定义 $|T|^*$ 对 $|T|$ 的一个延拓。此外，根据（15），该延拓满足

$$\||T(f)|^*\|_{L^{q,\infty}(Y)} \le C\|f\|_{L^{p,r}(X)}. \tag{16}$$

这个估计给出了所需的连续性，从而可证明延拓 $|T|^*$ 是 $L^{p,r}(X)$ 上的可数次可加算子。事实上，仿照命题 2.4 的证明，要推出可数次可加性，我们需要在 $\sum_{|j|>N} f_j \to 0$属于 $L^{p,r}(X)$ 时控制 $|T(\sum_{|j|>N} f_j)|^*$。估计式 (16) 表明，当 $N \to \infty$ 时，$\||T(\sum_{|j|>N} f_j)|^*\|_{L^{q,\infty}(Y)}$趋于零，因此存在一个子序列 $N_k \to \infty$，使得当 $k \to \infty$ 时，$|T(\sum_{|j|>N_k} f_j)|^*$ 几乎处处趋于零。由此可得延拓 $|T|^*$的可数次可加性。□

注 2.6. 命题 2.5 有一个自然的推广：当 T 是定义在 $S_0(X)$ 上、取值于 $\mathscr{M}(Y)$ 的拟可加算子，且对 $0 < p < \infty$ 和 $0 < q \le \infty$ 属于限制弱型 (p, q) 时，该推广成立。在此情形下，[4] 中的引理 1.4.20 给出了估计式 (14)，条件是

$$0 < r < \min\Big\{q, \tfrac{\log 2}{\log(2K)}\Big\},$$

其中，K 表示 T的拟可加常数。命题 2.5中的论证随后表明，$|T|$ 在 $L^{p,r}(X)$上具有唯一的可数 α-拟可加延拓，其中 α 的选取满足$(2K)^\alpha = 2$。

命题 2.5 表明，在简单函数上表现良好的算子具有同样表现良好的延拓。然而，命题 2.5 所提供的延拓未必是该算子的唯一延拓

，如下例所示：设 B 表示 $S_0(X)$ 的一个向量空间基，并设 B' 表示将 B 延拓为 $L^{p,r}(X)$ 的一个基。给定一个函数 $h \neq 0$，它可能属于也可能不属于 $L^{q,\infty}(Y)$，我们定义

$$T(f) = \begin{cases} 0, & \text{if } f \in B \\ h, & \text{if } f \in B' \setminus B, \end{cases}$$

并将 T 延拓为 $S_0(X)$ 和 $L^{p,r}(X)$ 上的线性算子。那么，命题 2.5 所提供的延拓在 $L^{p,r}(X)$ 上是零算子，因此并不与 T 在 $L^{p,r}(X)$ 上的取值一致。

事实上，当进一步知道该算子在某个其他空间上也是有界的时，限制弱型性质最为有用；在这种情况下，延拓不存在歧义。

本节的主要结果表明，如果已知两个估计（例如，在 Hunt 或 Marcinkiewicz 插值定理的情形下），那么算子的次可加性（分别地，拟可加性）性质必然蕴含其在插值空间上的可数次可加性（分别地，可数次 α-拟可加性）。

命题 2.7。设 $0 < p_0 < p < p_1 \leq \infty$ 和 $0 < q_0, q_1 \leq \infty$。设 T 是定义在$L^{p_0,1}(X) + L^{p_1,1}(X)$ 上、取值于 $\mathscr{M}(Y)$ 的拟可加（分别地，次可加）算子。假设 T 满足

$$\|T(f)\|_{L^{q_1,\infty}(Y)} \leq C_0 \|f\|_{L^{p_1,1}(X)}, \tag{17}$$

$$\|T(f)\|_{L^{q_2,\infty}(Y)} \leq C_1 \|f\|_{L^{p_2,1}(X)}, \tag{18}$$

对于固定的正常数 C_0, C_1。那么，对于任意 $0 < r \leq \infty$，T 在 $L^{p,r}(X)$ 上是可数次 α-拟可加的（分别地，可数次可加的），其中 α 通过 $(2K)^\alpha = 2$ 与拟可加常数 K 相关。

证明。我们证明 T 为拟可加的情形，因为次可加的情形也包含在内。

给定 $f \in L^{p,r}(X)$，我们可以将其分解为

$$f = f_0 + f_1 \quad \text{with } f_0 = f\chi_{\{|f| > f^*(1)\}}.$$

Then

$$f_0^*(t) \leq f^*(t)\chi_{(0,1)}(t) \qquad \text{and} \qquad f_1^*(t) \leq \begin{cases} f^*(1), & \text{if } t < 1 \\ f^*(t), & \text{if } t \geq 1 \end{cases}$$

由此得到

$$\|f_0\|_{L^{p_0,1}} + \|f_1\|_{L^{p_1,1}} \leq C(p, p_0, p_1)\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq C(p, p_0, p_1)\|f\|_{L^{p,r}}, \tag{19}$$

上面的最后一个不等式由 Lorentz 空间的嵌套性质 (9) 得出。

由 (19) 可知，空间 $L^{p,r}(X)$ 包含于 $L^{p_0,1}(X)+L^{p_1,1}(X)$。因此，给定序列 f_j in $L^{p,r}(X)$，我们可以将每个 $f_j = g_j + h_j$ 分解为 $g_j \in L^{p_0,1}(X)$ 和 $h_j \in L^{p_1,1}(X)$。如果级数 $\sum_j f_j$ 在 $L^{p,r}(X)$ 中收敛，那么由 (19) 可知，$\sum_j g_j$ 在 $L^{p_0,1}(X)$ 中收敛，且 $\sum_j h_j$ 在 $L^{p_1,1}(X)$ 中收敛。

由 T 的拟可加性可得

$$\Big|T\Big(\sum_{|j|>N} f_j\Big)\Big| \le K\Big|T\Big(\sum_{|j|>N} g_j\Big)\Big| + K\Big|T\Big(\sum_{|j|>N} h_j\Big)\Big|. \tag{20}$$

由 (17)、(18)，以及 $\sum_j g_j$ 在 $L^{p_0,1}(X)$ 中的收敛性和 $\sum_j h_j$ 在 $L^{p_1,1}(X)$ 中的收敛性，可知 $T\big(\sum_{|j|>N} g_j\big)$ 在 $L^{q_0,\infty}(Y)$ 中趋于零，且 $T\big(\sum_{|j|>N} h_j\big)$ 在 $L^{q_1,\infty}(Y)$ 中趋于零。取子序列 $N_k \to \infty$，于是我们可以保证，当 $k \to \infty$ 时，$T\big(\sum_{|j|>N_k} g_j\big)$ 几乎处处趋于零，且 $T\big(\sum_{|j|>N_k} h_j\big)$ ν-几乎处处趋于零。由 (20) 可知，当 $k \to \infty$ 时，$T\big(\sum_{|j|>N_k} f_j\big)$ ν-几乎处处趋于零。

接下来，我们运用 Aoki–Rolewicz定理推得

$$\Big|T\Big(\sum_{|j|\le N_k} f_j\Big)\Big|^{\alpha} \le 4\sum_{|j|\le N_k} \big|T(f_j)\big|^{\alpha} + 4\Big|T\Big(\sum_{|j|>N_k} f_j\Big)\Big|^{\alpha} \quad \nu\text{-a.e.} \tag{21}$$

令 $\kappa \to \infty$ 趋于……，便得到 T 的可数 α-拟可加性。 □

注意， T 的有界性性质 (17) 和 (18) 是 Hunt 插值定理 [6, 7] 中的标准假设。此外，由嵌套性质 (9)，若 T 是弱型 (p_0, q_0) 且是弱型 (p_1, q_1)，那么它也满足 (17) 和 (18)；弱型界是 Marcinkiewicz 插值定理中的标准假设。

命题 2.7 表明，Hunt 插值定理的通俗表述是成立的——无需讨论简单函数。事实上，命题 2.7 保证，在 Hunt 插值定理的传统假设下，算子 T 会自然延拓到整个 $L^{p,\,r}(X)$，即使 $r = \infty$ 也是如此。相比之下，传统论述只能保证插值界对简单函数成立，因此，只有当简单函数在其中稠密时，算子 T 才能延拓为 $L^{p,\,r}$ 上的有界算子。正如引言中所述，这排除了弱 L^p 空间。

3. Applications

本节将考察三个例子，其中可数次次可加性发挥着关键作用。

3.1. Yano 外推。作为第一个应用，我们证明 Yano 外推定理 [17] 的一个轻微延拓。

定理 3.1. 设 (X,μ) 和 (Y,ν) 为有限测度空间，并固定$1<p_*<\infty$ 及正常数 A, α。设 T 是一个次线性算子，对每个 $1<p<p_*$，都将 $L^{p,1}(X)$ 映射到 $L^{p,\infty}(Y)$，且其范数有界于 $A(p-1)^{-\alpha}$。那么对所有 $f\in\cup_{1<p<p_*}L^{p,1}(X)$，有

$$\int_Y |T(f)|\,d\nu \le A\,C_Y\left[\int_X |f|(\log_2^+|f|)^\alpha\,d\mu + C_{X,\alpha,p_*}\right], \tag{22}$$

其中 C_{X,α,p_*} 和 C_Y 是依赖于所示参数的常数。

证明。由命题 2.7，T 在所有 $1<p<p_*$下，在 $L^{p,1}(X)$ 上是可数次可加的。

对于某个 $1<p<p_*$，给定 $f\in L^{p,1}(X)$，我们将其分解为

$$f=\sum_{k=0}^{\infty} f\chi_{S_k},$$

其中 $S_0=\{|f|<2\}$且 $S_k=\{2^k\le|f|<2^{k+1}\}$，对 $k\ge 1$成立。由控制收敛定理可知，f 的级数表示在 $L^{p,1}(X)$ 中收敛。

令 $k_0\ge 1$ 满足对所有 $k\ge k_0$都有 $1+\frac{1}{k}<p_*$。当 $k\ge k_0$时，令 $p_k=\frac{k+1}{k}$。

根据 T的可数次可加性以及洛伦兹空间中的 H¨older 不等式，我们可以估计

$$\begin{aligned}
&\int_Y |T(f)|\,d\nu\\
&\le \sum_{k\ge 0}\int_Y |T(f\chi_{S_k})|\,d\nu\\
&\le \sum_{0\le k<k_0}\|T(f\chi_{S_k})\|_{L^{p,\infty}(Y)}\|1\|_{L^{p',1}(Y)} + \sum_{k\ge k_0}\|T(f\chi_{S_k})\|_{L^{p_k,\infty}(Y)}\|1\|_{L^{p_k',1}(Y)}\\
&\le \frac{A}{(p-1)^\alpha}\sum_{0\le k<k_0}\|f\chi_{S_k}\|_{L^{p,1}(X)}\nu(Y)^{\frac{1}{p'}} + \sum_{k\ge k_0}\frac{A}{(p_k-1)^\alpha}\|f\chi_{S_k}\|_{L^{p_k,1}(X)}\nu(Y)^{\frac{1}{p_k'}}\\
&\le AC_Y\Big[C_{X,\alpha,p_*}+\sum_{k\ge k_0}2^{k+1}k^\alpha\mu(S_k)^{\frac{k}{k+1}}\Big].
\end{aligned}$$

由此并应用杨氏不等式，可得断言 (22)：

$$\mu(S_k)^{\frac{k}{k+1}} \le \tfrac{k}{k+1}\, 4\mu(S_k) + \tfrac{1}{k+1}\, 4^{-k} \le 4\mu(S_k) + 4^{-k}.$$

对 $k \ge k_0$ 求和即可得到所声称的结论。 □

3.2. Calder´on–Zygmund 定理。下一个应用涉及 Calder´on–Zygmund 型奇异积分算子。处理这类算子的核心主题之一是：若已知该算子从 $L^r(\mathbf{R}^n)$到 $L^r(\mathbf{R}^n)$的有界性（其中$1 < r < \infty$满足某些条件），并且其核满足进一步的正则性条件，则可保证该算子为弱型 (1,1)。随后应用 Marcinkiewicz 插值定理，即可得出该算子从 $L^p(\mathbf{R}^n)$到 $L^p(\mathbf{R}^n)$存在有界延拓，对所有 $1 < p \le r$均成立；参见 [4, 13]。这里我们讨论一个类似的结论，其假设较为宽松：对于某个固定的 $1 < r < \infty$， T 从$L^{r,1}(\mathbf{R}^n)$到 $L^{r,\infty}(\mathbf{R}^n)$是有界的。

定理 3.2. 假设奇异积分算子 T 与核 $K(x,y)$相关联，具体而言：

$$T(f)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} K(x,y) f(y)\, dy \qquad \text{for } x \notin \operatorname{supp} f, \tag{23}$$

对于紧支撑的 f，上述关系成立。假设存在两个常数 A、$A' > 0$ 和 $1 < r < \infty$，使得

(i) $|K(x,y)| \le A\,|x-y|^{-n}$对 $x \ne y$一致成立；(ii) $\int_{|x-y| \ge 2|y-y'|} |K(x,y) - K(x,y')|\, dx \le A'$对 $y, y' \in \mathbb{R}^d$一致成立；(iii) T 是从 $L^{r,1}(\mathbf{R}^n)$到 $L^{r,\infty}(\mathbf{R}^n)$ 的有界算子。

那么 T 可延拓为弱型 (1, 1) 算子，其界与 $A' + \|T\|_{L^{r,1} \to L^{r,\infty}}$成正比。

证明。取 $f \in L^1 \cap L^{r,1}$，它是 L^1 的稠密子集。固定 $\lambda > 0$，并取一个稍后指定的常数 $\gamma > 0$，我们对 f 在水平 $\gamma\lambda$处进行 Calder´on–Zygmund 分解，从而写成$f = g + \sum_{j \in \mathbf{Z}} b_j$，其中

$$\|g\|_{L^1} \le \|f\|_{L^1} \qquad \text{and} \qquad |g| \le 2^n \gamma\lambda \quad \text{a.e.} \tag{24}$$

且每个 b_j 都支撑在一个二进立方体 Q_j 中，使得

$$\|b_j\|_{L^1} \le 2^{n+1}\gamma\lambda |Q_j| \qquad \text{and} \qquad \int_{Q_j} b_j(y)\, dy = 0. \tag{25}$$

此外，这些二进立方体 Q_j 的内部两两不相交，并且满足

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} |Q_j| \le (\gamma\lambda)^{-1}\|f\|_{L_1}. \tag{26}$$

对于每个立方体 Q_j，令 y_j 表示其中心。令 Q_j^* 表示 Q_j 的膨胀，其中心仍为 y_j，边长为 $\ell(Q_j^*) = 2\sqrt{n}\,\ell(Q_j)$。注意，鉴于假设 (i)，$T(b_j)$ 对于$x \notin Q_j^*$有表示 (23)。此外，由于

$$|x - y_j| \ge 2|y - y_j| \qquad \text{for all } y \in Q_j \text{ and } x \notin Q_j^*,$$

假设 (i) 和 (ii) 连同 (25) 得出

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n\setminus Q_j^*} |T(b_j)(x)|\,dx &\le \int_{\mathbf{R}^n\setminus Q_j^*}\int_{Q_j} |K(x,y) - K(x,y_j)||b_j(y)|\,dy\,dx \\ &\le 2^{n+1}A'\gamma\lambda|Q_j|. \end{aligned}\tag{27}$$

由 (24) 和插值可得 $g \in L^{r,\,1}$。事实上，

$$\|g\|_{L^{r,1}} \le \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{r}}(\gamma\lambda)^{1-\frac{1}{r}}. \tag{28}$$

因此，级数 $\sum_{j\in\mathbf{Z}} b_j = f - g \in L^{r,\,1}$ 几乎处处收敛。由控制收敛定理可知，该级数在 $L^{r,\,1}$ 中收敛。利用假设 (iii)，我们推得 $|T(\sum_{|j|>N} b_j)|$ 在 $L^{r,\,\infty}$ 中趋于零，其中 $N \to \infty$。运用一个熟悉的论证，便可得到

$$T(f) = T(g) + \sum_j T(b_j) \quad \text{a.e.} \tag{29}$$

接下来，我们使用假设 (iii)、(24)、(26)、(27)、(28)，并推导出该界 (29)

$$\begin{aligned}&\Big|\{x:\,|T(f)(x)|>\lambda\}\Big| \\ &\le \Big|\{x:\,|T(g)(x)|>\tfrac{\lambda}{2}\}\Big| + \sum_{j\in\mathbf{Z}}|Q_j^*| + \Big|\{x\notin\cup Q_j^*:\,\sum_{j\in\mathbf{Z}}|T(b_j)(x)|>\tfrac{\lambda}{2}\}\Big| \\ &\lesssim \big[\lambda^{-1}\|T(g)\|_{L^{r,\infty}}\big]^r + (\gamma\lambda)^{-1}\|f\|_{L^1} + \lambda^{-1}\int_{\mathbf{R}^n\setminus\cup Q_j^*}\sum_{j\in\mathbf{Z}}|T(b_j)(x)|\,dx \\ &\lesssim \big[\lambda^{-1}\|T\|_{L^{r,1}\to L^{r,\infty}}\|f\|_{L^1}^{\frac{1}{r}}(\gamma\lambda)^{1-\frac{1}{r}}\big]^r + (\gamma\lambda)^{-1}\|f\|_{L^1} + A'\lambda^{-1}\|f\|_{L^1} \\ &\lesssim \lambda^{-1}(A' + \|T\|_{L^{r,1}\to L^{r,\infty}})\|f\|_{L^1},\end{aligned}$$

选取 $\gamma = 1/\|T\|_{L^{r,\,1}\to L^{r,\,\infty}}$ 后。所有隐含常数仅依赖于维数（而不依赖于 A, f, λ）。

这证明 T满足 $f \in L^1 \cap L^{r,\,1}$ 上的弱型 (1, 1) 估计。因此，利用 $L^1 \cap L^{r,\,1}$ 在 L^1 中的稠密性，我们可以将 T 扩张为一个从 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{1,\,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子。□

3.3. 次可加的 0-局部算子。最后，我们讨论一个关于次可加算子的应用：这类算子保持积分为零的函数的支集不变；我们称这样的算子为 0-局部算子。

定理 3.3. 设 $1 < r \le \infty$。假设 S 是定义在 $L^1(\mathbb{R}^n) + L^{r,\,1}(\mathbb{R}^n)$ 上的次可加算子，且它从 $L^{r,\,1}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{r,\,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 有界。假设 S 是 0-局部的，即每当 h 支集包含于某个二进立方体 Q 且积分为零时，$S(h)$ 的支集就包含于 Q 的某个固定倍数 Q^* 中。那么 S 是弱型 (1, 1) 的。

证明。首先假设 f 属于 $L^1 \cap L^{r,\,1}$，它在 L^1 中稠密。对固定的 $\lambda > 0$ 以及一个稍后选定的常数 $\gamma > 0$，我们对 f 在高度 $\gamma\lambda$处应用 Calder´on–Zygmund 分解。由此，我们可以将 $f = g + b$ 写成满足 (24) 和 (25) 的形式。由于 $g \in L^1 \cap L^\infty$，我们有 $g \in L^{r,\,1}$，并且它满足界 (28)。根据假设，这意味着

$$\|S(g)\|_{L^{r,\infty}} \lesssim \|S\|_{L^{r,1}\to L^{r,\infty}} \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{r}} (\gamma\lambda)^{1-\frac{1}{r}}. \tag{30}$$

由于 $b = f - g \in L^{r,1}$ 且 S 从 $L^{r,1}$ 到 $L^{r,\infty}$有界，我们可以推出可数次可加性

$$|S(b)| \le \sum_j |S(b_j)| \qquad \text{a.e.}$$

由于每个 b_j 都支撑在 Q_j 上且均值为零，我们的假设保证 $S(b_j)$支撑在 Q_j^*上。因此，$\sum_j |S(b_j)|$ 支撑在 $\cup_j Q_j^*$上，而其测度不超过 $(\gamma\lambda)^{-1}\|f\|_{L^1}$的某个常数倍。

利用 $|S(f)| \le |S(g)| + |S(b)|$，结合 (30) 并取$\gamma = 1/\|S\|_{L^{r,1}\to L^{r,\infty}}$，我们可以得到如下估计

$$\begin{aligned} \lambda\big|\{|S(f)| > \lambda\}\big| &\le \lambda\big|\{|S(g)| > \tfrac{\lambda}{2}\}\big| + \lambda\big|\{|S(b)| > \tfrac{\lambda}{2}\}\big| \\ &\lesssim \lambda\Big(\tfrac{\|S(g)\|_{L^{r,\infty}}}{\lambda}\Big)^r + \lambda(\gamma\lambda)^{-1}\|f\|_{L^1} \\ &\lesssim \|S\|_{L^{r,1}\to L^{r,\infty}}\|f\|_{L^1}, \end{aligned}$$

其中所有隐含常数均与 λ 无关。这就证明了函数 $f \in L^1 \cap L^{r,1}$的弱型(1,1)估计。由于 S 已在 L^1上定义，稠密性论证可得

$$\|S(f)\|_{L^{1,\infty}} \lesssim \|S\|_{L^{r,1}\to L^{r,\infty}}\|f\|_{L^1}$$

对所有 $f \in L^1$。 □

注意，应用 Hunt 插值定理可知，定理 3.3 中的算子 S 将 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 映射到 $L^p(\mathbf{R}^n)$，对每个 $1 < p < r$ 均成立。

如果算子 S 仅定义在 $L^{r,\,1}$ 上，而未定义在 L^1上，那么我们可以推导出，它在 L^1 上有唯一的有界次可加延拓，该延拓为弱型 (1,1)；并且对于 $1 < p < r$，它在L^p 上有唯一的有界次可加延拓。

按照定理 3.3 的意义，0-局部次可加算子的例子可以如下构造：令 h_I 为哈尔函数，其中 I 遍历所有二进区间。这些函数在 I 的左半部分等于 $|I|^{-1/2}$，在右半部分等于 $-|I|^{-1/2}$。令 $\mathcal{D}_k$ 为所有长度为 2^{-k}的二进区间构成的集合。二进鞅差算子为

$$D_k(f) = \sum_{I\in\mathcal{D}_k} \langle f, h_I\rangle h_I, \qquad f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}). \tag{31}$$

对于有界且紧支撑的序列 $\{a_{k,j}\}_{k,\ j\in\mathbf{Z}}$，定义

$$S(f) = \sup_{j\in\mathbf{Z}} \Big| \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_{k,j} D_k(f)\Big|, \tag{32}$$

当 $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ 时。因此，S 是 0-局部的；事实上，若 f 支撑于长度为 2^{-k_0} 的二进区间 I_0 上且积分为零，那么对于任意 $k < k_0$ 以及任何包含 I_0 且长度为 2^{-k} 的 J，我们有f 支撑于 J 的左半部分或右半部分，而 h_J 在其中任一部分上都是常数。但若 f 均值为零，则可得 $D_k(f) = 0$，当$k < k_0$时。因此，和式 (32) 中出现的最小 k 是 k_0。此外，对于 $k = k_0$，和式 (31) 仅包含一项，即对应于 $I = I_0$的那一项。最后，和式 (31) 中满足$k > k_0$ 的部分仅包含支撑于 I_0的项。因此，$S(f)$支撑于 I_0。

此类算子 S 的例子受到定义在配备二进滤过 [5]的概率空间上的鞅差算子的极大组合的启发。

References

[1] Aoki, T.，《局部有界空间》，Proc. Imp. Acad. Tokyo 18 (1942)，第 10 号，585–634。[2] Calder´on, A.-P.，《中间空间与插值》，Studia Math.（特刊）Zeszyt 1 (1963)，31–34。[3] Calder´on, A.-P.，《中间空间与插值：复方法》，Studia Math. 24 (1964)，113–190。[4] Grafakos L.，《经典傅里叶分析》，第 3 版，数学研究生教材 249，施普普林格，纽约，2014 年。

[5] Grafakos, L.，Kalton, N. J.，《双线性算子的 Marcinkiewicz 乘子条件》，Studia Math. 146 (2001)，115–156。[6]Hunt, R. A.，《Marcinkiewicz 插值定理向 Lorentz 空间的延拓》，Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964)，803–807。[7] Hunt, R. A.，《关于 L(p,q) 空间》，Enseignement Math. (2) 12 (1966)，249–276。[8] Kalton, N. J.，Peck, N. T.，Roberts, J. W.，《 F-空间采样》，伦敦数学会讲义丛书，89，剑桥大学出版社，剑桥，1984 年。[9] Krein, S. G.，Semenov, E. M.，《空间尺度》，Dokl. Akad. Nauk SSSR 138 (1961)，763–766。[10] Lions, J.-L.，Peetre, J.，《关于一类插值空间》，Inst. Hautes´ Etudes Sci.，Publ. Math. No. 19 (1964)，5–68。[11] Peetre, J.，《插值空间的新性质》，C. R. Acad. Sci. Paris 256 (1963)，1424–1426。[12] Rolewicz, S.，《度量线性空间》，第 2 版，《数学及其应用》（东欧系列）20。D. Reidel 出版公司，Dordrecht；PWN 波兰科学出版社，华沙，1985 年。[13] Stein, E. M.，《调和分析：实变量方法、正交性与振荡积分》，普林斯顿数学丛书 43。《调和分析专著》III。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1993 年。[14] Stein, E. M.，Weiss, G.，《带测度变换的算子插值》，美国数学会会刊 87 (1958)，159–172。[15] Stein, E. M.，Weiss, G.，《Marcinkiewicz 定理的一个延拓及其若干应用》，数学与力学杂志 8 (1959)，263–284。[16] Stein, E. M.，Weiss, G.，《欧几里得空间上的傅里叶分析导论》，普林斯顿数学丛书 32。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1971 年。[17] Yano, S.，《傅里叶分析札记，XXIX：一个外推定理》，日本数学会杂志 3 (1951)，296–305。

Department of Mathematics, University of Missouri, Columbia, MO 65211， USA电子邮箱地址：grafakosl@missouri.edu

Department of Mathematics, University of California, Los Angeles, CA 90095, USA电子邮箱地址：visan@math.ucla.edu