arXiv:2304.07833v1 [math.MG] 16 Apr 2023

八面体平移覆盖密度下界

Yiming Li、Yanlu Lian*、Miao Fu 和 Yuqin Zhang

摘要。 本文首次给出了八面体平移覆盖密度的非平凡下界。为此，我们证明，在八面体的任意平移覆盖中，相对于给定平行多面体的密度存在一个下界。由此得到的八面体平移覆盖密度下界为 $1+6.6\times10^{-8}$。

数学主题分类（2010年）。52C17,52B10,52C07,05C12.

关键词。 平移覆盖密度，八面体，平行多面体。

1. 引言

堆积与覆盖是纯数学中的经典课题，历史悠久且内容丰富。1611 年，J. Kepler 提出了他的猜想：最密球体堆积的密度应为 $\frac{\pi}{\sqrt{18}}$。1900 年，作为其第 18 个问题的一部分，D. Hilbert [17]提出了如下问题：确定球体或四面体等几何物体的最密堆积密度。然而，真正将堆积与覆盖作为其数论几何核心内容进行系统研究的是 Minkowski。在此过程中，许多杰出的数学家为这一领域作出了贡献，例如 Gauss、Lagrange、Dirichlet、Thue、Minkowski、Voronoi、Mahler、Davenport、Delone、Rogers、L. Fejes T´oth、Hlawka 等人。值得一提的是， $\mathbb{E}^8$ 中的球体堆积问题最近由 Viazovska [27] 以令人瞩目的突破性成果解决，随后其方法又迅速得到推广，解决了$\mathbb{E}^{24}$ [6]中的问题。关于堆积的更多详情，请参阅 [3], [4], [11], [20] 和 [29]。

作为堆积的对偶课题，球体覆盖也得到了许多学者的研究。设 $\theta^c(B_n)$、$\theta^t(B_n)$ 和 $\theta^l(B_n)$分别表示用单位球 B_n对 $\mathbb{E}^n$ 进行的最稀疏全等覆盖、最稀疏平移覆盖和最稀疏格覆盖的密度。显然， $\theta^c(B_n)$ =

*通讯作者。

$\theta^t(B_n)$。 $\theta^l(B_n)$的已知精确结果汇总于下表。至于 $\theta^t(B_n)$的精确值，我们只知道 $\theta^t(B_2) = \theta^l(B_2) = \frac{2\pi}{\sqrt{27}}$，这是 R. Kershner [19] 于1939年发现的。根据 $\mathbb{E}^n$多位作者的研究成果，尤其是 C. A. Rogers 的工作（见 [25]），我们知道 $\frac{n}{e\sqrt{e}} \ll \theta^t(B_n) \leq \theta^l(B_n) \leq c \cdot n(\log_e n)^{\frac{1}{2}} \log_2 2\pi e$.

n	$\theta^l(.)$	作者
2	$\frac{2\pi}{\sqrt{27}}$	Kershner 1939 [19]
3	$\frac{5\sqrt{5}\pi}{24}$	Bambah 1954 [1], Barnes 1956 [2], Few 1956 [12]
4	$\frac{2\pi^2}{5\sqrt{5}}$	Delone 和 Ry˘skov 1963 [7]
5	$\frac{245\sqrt{35}\pi^2}{3888\sqrt{3}}$	Ry˘skov 和 Baranovskii 1975 [26]

球体堆积与覆盖不仅是纯数学中的重要课题，在许多其他领域也有重要应用，例如编码理论：格密码学中的重要问题——最短向量问题和最近向量问题——与球的最密格堆积密度和最薄格覆盖密度密切相关。更多详情请参阅 [22]。然而，随着科学技术的进一步发展，科学家不可能固守现有的后量子密码系统，他们必然会研究并开发安全性（复杂度）更高的密码系统。我们还知道，除了 n 维球体之外，最有趣的凸体可能是存在于每个维度中的 n 维正多胞体：立方体、单纯形和交叉多胞体。 n 维立方体是一个铺砌体，因此其覆盖密度为 1。现在我们将聚焦于剩下的两种。

令 T_n 表示一个 n 维正单形，令 K 表示一个凸体。关于单形覆盖，我们的了解相对较为完整。在 $\mathbb{E}^2$ 中，我们有

$$\theta^t(T_2) = \theta^l(T_2) = \frac{3}{2},$$

其中， $\theta^l(T_2)$ 的值由 I. F´ary [9] 于 1950年 确定；然而， $\theta^t(T_2)$ 的值直到 2010年 才由 J. Januszewski [18] 证明。更令人惊讶的是，迄今为止，平面中的一些基本覆盖问题仍未解决（见 [30]）。例如，我们尚不清楚对于所有凸域， $\theta^t(K) = \theta^l(K)$ 是否成立。在 $\mathbb{E}^3$ 中，我们有

$$\frac{2^{16}+1}{2^{16}} \leq \theta^l(T_3) \leq \theta^t(T_3) \leq \frac{125}{63},$$

其中，上界由 C. M. Fiduccia、R. W. Forcade 和 J. S. Zito [13]，、R. Dougherty 和 V. Faber [8] 以及 R. Forcade 和 J. Lamoreaux [14]于 20 世纪 90 年代发现；下界则由 F. Xue 和 C. Zong [28] 于 2018年通过研究广义差体的体积而得到。

2006 年，J. H. Conway 和 S. Torquato [5] 得到了

$$\theta^c(T_3) \leq \frac{9}{8}$$

通过构造一种特定的四面体覆盖。最近，Y. Li、M. Fu 和 Y. Zhang [21] 证明了

$$\theta^t(T_3) \geq 1 + 1.227 \times 10^{-3}.$$

在 $\mathbb{E}^n$ 中，根据 R. P. Bambah、H. S. M. Coxeter、H. Davenport、P. Erd″os、L. Few、G. L. Watson，尤其是 C. A. Rogers 的工作 [25], ，我们知道

$$\theta^l(K) \leq n^{\log_2 \log_e n + c},$$
$$\theta^t(K) \leq n \log n + n \log \log n + 5n.$$

自20世纪60年代以来，覆盖方面的进展十分有限（见 [4]）。2018年，F. Xue 和 C. Zong [28] 得到了

$$\theta^l(T_n) \geq 1 + \frac{1}{2^{3n+7}}.$$

2021年，O. Ordentlich、O. Regev 和 B. Weiss [24] 将 Rogers上界改进为

$$\theta^l(K) \leq cn^2,$$

其中 c 是一个适当的正常数。最近，M. Fu、F. Xue 和 C. Zong[15] 证明了

$$\theta^l(T_n) > 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{(n-1)2^{n-1}}.$$

作为 l_1 空间的单位球， n维交叉多胞体 C_n在编码理论中有重要应用：Z_m^n 中最小 Lee距离为 d 的码，可以看作环面上半径为 $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ 的离散交叉多胞体的堆积，见 [16]。然而，无论是堆积还是覆盖，我们对它的了解仍十分有限。目前唯一已知的精确值是 C_3 （八面体）的格堆积密度为 18 19，这是 Minkowski [23] 于1904年证明的。显然， $\theta^l(C_3) \leq \frac{9}{8}$ ，因为截角八面体是一个平行多面体（由费多罗夫 [10] 于1885年证明）。令人颇感意外的是，$\theta^l(C_3)$的精确值仍然未知，而且关于 $\theta^t(C_3)$也没有任何非平凡的已知结果。

本文证明了以下结果：

定理 1.1。 如果 $C_3 + X$ 是 $\mathbb{E}^3$ 的平移覆盖，那么其密度至少为 $1 + \frac{4}{6^{10}}$。换言之，我们有

$$\theta^t(C_3) \geq 1 + \frac{4}{6^{10}} > 1 + 6.6 \times 10^{-8}.$$

2. 预备知识

定义

$$P = conv\{(8,0,0),(-8,0,0),(0,8,0),(0,-8,0),\\ (0,0,8),(0,0,-8),(8,8,8),(-8,-8,-8)\}, \tag{2.1}$$

它是一个平行多面体，即 $\mathbb{E}^3$ 的铺砌体。由于 $\theta^t(K)$ 在 K 上的非奇异线性变换下保持不变，我们将研究顶点为 (2，0，0)、(0，2，0)、(0，0，2)、(−2，0，0)、(0，−2，0)、(0，0，−2)、边长为 $2\sqrt{2}$ 且体积为 $\frac{32}{3}$ 的正八面体 C_3。显然，

$$4C_3 \subset P \text{ and } vol(P) = 1024, \tag{2.2}$$

其中 $vol(\cdot)$ 表示给定凸体的体积。

定义

$$D(K) = \{\mathbf{x} - \mathbf{y} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K\}.$$

通常，我们将 $D(K)$ 称为 K 的差体。显然， $D(K)$ 是一个以原点 $\mathbf{o}$ 为中心的中心对称凸体。

注 2.1. 当 K 是以原点 $\mathbf{o}$ 为中心的中心对称凸体时， $D(K) = 2K$。显然， $D(C_3) = 2C_3$。

引理 2.1. 若 $C_3 \cap (C_3 + \mathbf{x}) \neq \varnothing$，则 $C_3 + \mathbf{x} \subset 3C_3$。

证明。由于 $C_3 \cap (C_3 + \mathbf{x}) \neq \varnothing$，不失一般性，设 $\mathbf{z} \in C_3 \cap (C_3 + \mathbf{x})$。于是有 $\mathbf{z} \in C_3$，且 $-\mathbf{x} \in C_3 - \mathbf{z}$。由 C_3 的对称性可得

$$\mathbf{x} \in C_3 + \mathbf{z} \subset D(C_3).$$

因此， $C_3 + \mathbf{x} \subset C_3 + D(C_3) = 3C_3$ 若 $C_3 \cap (C_3 + \mathbf{x}) \neq \varnothing$，则引理得证。□

注 2.2. 事实上，由引理 *2.1* 和 *(2.2)*，当 $\mathbf{o} \in C_3 + \mathbf{x}$ 且 $(C_3 + \mathbf{x}) \cap (C_3 + \mathbf{y}) \neq \varnothing$，

$$\bigcup (C_3 + \mathbf{y}) \subset (3C_3 + \mathbf{x}) \subset 4C_3 \subset P, \tag{2.3}$$

Let

$$H_{z_0} = \{(x, y, z) : z = z_0, x, y \in \mathbb{R}\}$$

为与 z 轴垂直的 $\mathbb{E}^3$ 二维子空间。因此，通过常规推导，我们可以得出

引理 2.2。设 $\mathbf{x} = (x, y, z)$，则有

(1) 当且仅当 $z_0 \in [-2 + z, 2 + z]$ 时， $H_{z_0} \cap (C_3 + \mathbf{x}) \neq \varnothing$ 是二维截面；

(2) $H_{z_0} \cap (C_3 + \mathbf{x})$ 是一个正方形，其中心位于 (x, y, z_0)。

3. 八面体的平移覆盖

研究 $\theta^t(C_3)$ 最自然的方法是局部化。假设 X 是 $\mathbb{E}^3$ 中的离散点集，且 C_3+X 是 $\mathbb{E}^3$ 的平移覆盖。令 P 为 (2.1) 中定义的平行多面体。然后定义

$$\theta(C_3,X,P)=\frac{\sum\limits_{\mathbf{x}\in X} vol(P\cap(C_3+\mathbf{x}))}{vol(P)}. \tag{3.1}$$

令 $\mathfrak{X}$ 表示所有此类集合 X 的族。我们称

$$\theta(C_3,P)=\min_{X\in\mathfrak{X}}\theta(C_3,X,P) \tag{3.2}$$

C_3 对 P 的覆盖密度。由于 P 是平行多面体，显然，

$$\theta^t(C_3)\geq\theta(C_3,P). \tag{3.3}$$

定理 *1.1* 的证明。由于 C_3+X 是 $\mathbb{E}^3$ 的平移覆盖，必存在一个子集 $X'\subset X$，使得 C_3+X' 是 P 的覆盖。假设 $\mathbf{o}\in C_3+\mathbf{x}_{m+1}$，其中 $\mathbf{x}_{m+1}\in X'$。那么记

$$X''=\{\mathbf{x}_i\in X':(C_3+\mathbf{x}_{m+1})\cap(C_3+\mathbf{x}_i)\neq\varnothing\}.$$

不失一般性，我们假设

$$X''=\{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{m+1}\}.$$

由（2.3），我们得到

$$\bigcup_{i=1}^{m+1}(C_3+\mathbf{x}_i)\subset 3C_3+\mathbf{x}_{m+1}\subset 4C_3\subset P. \tag{3.4}$$

现在，我们通过考虑两种情况来估计 $\theta(C_3,X,P)$。

情形1。 $m\geq 27$。由 (2.2)、(3.1) 和 (3.4)，

$$\begin{aligned}
\theta(C_3,X,P)&=\frac{\sum\limits_{\mathbf{x}\in X} vol\left(P\cap(C_3+\mathbf{x})\right)}{vol(P)}\\
&\geq\frac{vol(P\setminus(3C_3+\mathbf{x}_{m+1}))+\sum\limits_{\mathbf{x}\in X} vol\left((3C_3+\mathbf{x}_{m+1})\cap(C_3+\mathbf{x})\right)}{vol(P)}\\
&\geq 1-\frac{9}{32}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{m+1} vol\left((3C_3+\mathbf{x}_{m+1})\cap(C_3+\mathbf{x}_i)\right)}{vol(P)}\\
&=\frac{23}{32}+(m+1)\cdot\frac{vol(C_3)}{vol(P)}\\
&\geq 1+\frac{1}{96}.
\end{aligned}$$

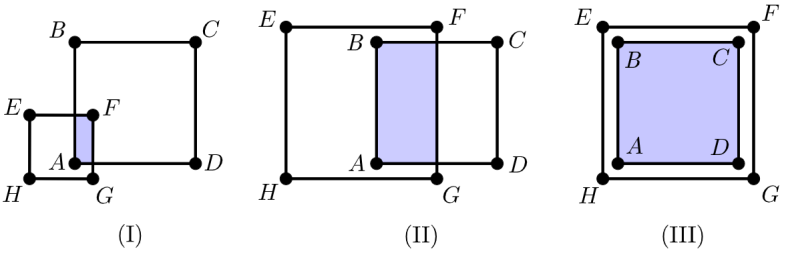

FIGURE 1. $R_{z_0}^{(m+1)}$与 $R_{z_0}^{(i)}$之间可能的相对位置。

情形2。 $m \leq 26$。 令 $\partial(\cdot)$ 表示一个凸体的边界。则

$$\partial(C_3 + \mathbf{x}_{m+1}) = \bigcup_{i=1}^{m} \left(\partial(C_3 + \mathbf{x}_{m+1}) \cap (C_3 + \mathbf{x}_i)\right). \tag{3.5}$$

假设 $R_{z_0}^{(i)} = H_{z_0} \cap (C_3 + \mathbf{x}_i)$ $i = 1, \ldots, m+1$，那么根据引理 2.2，$R_{z_0}^{(i)}$是边长小于或等于$2\sqrt{2}$ （包括零）的正方形。

首先，令 $l_{z_0}^{(i)}$表示 $R_{z_0}^{(i)}$的边长，其中 $1 \leq i \leq m+1$。可以验证，当 $l_{z_0}^{(i)} \leq \frac{\sqrt{2}}{27}$ 或 $l_{z_0}^{(i)} \geq \frac{53\sqrt{2}}{27}$ 时，满足 $R_{z_0}^{(i)}$存在的 z_0所在区间的长度为 $\frac{4}{27}$。结合 $m+1 \leq 27$，我们得到

$$(m+1) \times \frac{4}{27} \leq 4.$$

令 $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$，其中 $1 \leq i \leq m+1$。因此，存在一个 $z_0 \in (-2 + z_{m+1}, 2 + z_{m+1})$，使得 $R_{z_0}^{(m+1)}$是非空集，且 $R_{z_0}^{(i)}$是满足 $\frac{\sqrt{2}}{27} \leq l_{z_0}^{(i)} \leq \frac{53\sqrt{2}}{27}$ 的正方形，其中 $1 \leq i \leq m+1$。

接下来，由（3.5）可知， $R_{z_0}^{(m+1)}$的四条边都被 $\bigcup_{k=1}^{m} R_{z_0}^{(k)}$覆盖。设 $R_{z_0}^{(m+1)}$，B， C， D是 $R_{z_0}^{(m+1)}$的四个顶点，设 E， F， G， H是 $R_{z_0}^{(k)}$的四个顶点。根据 $R_{z_0}^{(m+1)}$中被 $R_{z_0}^{(k)}$覆盖的顶点数，存在三种可能的覆盖构型，如图1所示。

在构型（I）中，设 a 为 AD 与 EF 之间的距离，设 b为 AB 与 FG之间的距离。不失一般性，我们假设

$$0 \leq b \leq a \leq l_{z_0}^{(i)} \leq l_{z_0}^{(m+1)}.$$

在构型（II）中，设 c 为 BC 与 EF之间的距离，设 d 为 AD 与 HG之间的距离，设 e 为 AB 与 FG之间的距离。不失一般性，我们假设

$$c \leq d.$$

在构型（III）中，分别用 g, h, r, s表示 AD 与 HG、 AB 与HE、 CD与 FG、 BC与 EF之间的距离。不失一般性，我们假设

$$g \leq h \leq r \leq s.$$

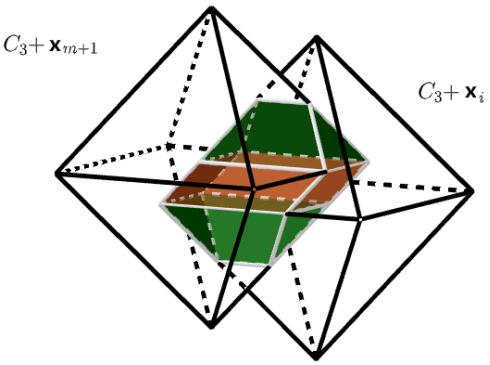

FIGURE 2. 子情况1中的构型（I）。

令$\mathbf{x}_i=(x_i,y_i,z_i)$，$1\le i\le m+1$。对于固定的 $z_0\in(-2+z_{m+1},2+z_{m+1})$，定义

$$\delta(R_{z_0}^{(i)})=\begin{cases}+1, & z_0\in[-2+z_i,z_i],\\ -1, & z_0\in(z_i,2+z_i].\end{cases}$$

我们考虑两种子情况。

子情况1。$\delta(R_{z_0}^{(m+1)})\cdot\delta(R_{z_0}^{(i)})=1$。

不失一般性，假设 $\delta(R_{z_0}^{(m+1)})=1,\delta(R_{z_0}^{(i)})=1$。以构型（I）为例，如图2所示，我们有

$$\begin{aligned}vol((C_3+\mathbf{x}_{m+1})\cap(C_3+\mathbf{x}_i))&=\int_{-2+z_{m+1}}^{2+z_{m+1}}S(R_z^{(m+1)}\cap R_z^{(i)})dz\\&\ge\int_{z_0-\frac{b}{\sqrt2}}^{z_0+\frac{2\sqrt2-l_{z_0}^{(m+1)}}{\sqrt2}}S(R_z^{(m+1)}\cap R_z^{(i)})dz\\&\quad+\int_{z_0+\frac{2\sqrt2-l_{z_0}^{(i)}}{\sqrt2}}^{z_0+\frac{4\sqrt2-l_{z_0}^{(m+1)}-l_{z_0}^{(i)}+b}{\sqrt2}}S(R_z^{(m+1)}\cap R_z^{(i)})dz\\&\ge2\times\frac{1}{3\sqrt2}(b+2\sqrt2-l_{z_0}^{(m+1)})^3\\&\ge\frac{\sqrt2}{3}\left(2\sqrt2-\frac{53\sqrt2}{27}\right)^3\\&=\frac{4}{3^{10}},\end{aligned}\tag{3.6}$$

其中 $S(\cdot)$表示一个二维凸集的面积。

对于构型（II），我们有

$$vol((C_3+\mathbf{x}_{m+1})\cap(C_3+\mathbf{x}_i))=\int_{-2+z_{m+1}}^{2+z_{m+1}}S(R_z^{(m+1)}\cap R_z^{(i)})dz$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \int_{z_0-\frac{e}{\sqrt{2}}}^{z_0+\frac{2\sqrt{2}-l_{z_0}^{(i)}}{\sqrt{2}}} S(R_z^{(m+1)} \cap R_z^{(i)})dz \\
&+ \int_{z_0+\frac{2\sqrt{2}-l_{z_0}^{(m+1)}}{\sqrt{2}}}^{z_0+\frac{4\sqrt{2}-l_{z_0}^{(m+1)}-l_{z_0}^{(i)}+e}{\sqrt{2}}} S(R_z^{(m+1)} \cap R_z^{(i)})dz \\
&\geq 2 \times \frac{1}{3\sqrt{2}}(2\sqrt{2}-l_{z_0}^{(i)}+e)^2(2\sqrt{2}-l_{z_0}^{(i)}+l_{z_0}^{(m+1)}) \\
&\geq \frac{\sqrt{2}}{3}(\frac{1}{27}\sqrt{2})^3 \\
&= \frac{4}{3^{10}}.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

对于构型（III），我们有

$$
\begin{aligned}
vol((C_3+\mathbf{x}_{m+1}) \cap (C_3+\mathbf{x}_i)) &= \int_{-2+z_{m+1}}^{2+z_{m+1}} S(R_z^{(m+1)} \cap R_z^{(i)})dz \\
&\geq \int_{z_0-\frac{l_{z_0}^{(m+1)}}{\sqrt{2}}}^{z_0+\frac{2\sqrt{2}-l_{z_0}^{(i)}+g}{\sqrt{2}}} S(R_z^{(m+1)} \cap R_z^{(i)})dz \\
&+ \int_{z_0+\frac{2\sqrt{2}-l_{z_0}^{(i)}+s}{\sqrt{2}}}^{z_0+\frac{4\sqrt{2}-l_{z_0}^{(i)}}{\sqrt{2}}} S(R_z^{(m+1)} \cap R_z^{(i)})dz \\
&= 2 \times \frac{1}{3\sqrt{2}}(g+2\sqrt{2}-l_{z_0}^{(i)}+l_{z_0}^{(m+1)})^3 \\
&\geq \frac{\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2}-\frac{53\sqrt{2}}{27})^3 \\
&= \frac{4}{3^{10}}.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

注3.1。 图*1*中的构型（*I*）、（*II*）和（*III*）分别表示$R_{z_0}^{(k)}$覆盖 $R_{z_0}^{(m+1)}$的*1*、*2*和*3*（*4*）个顶点。事实上，当 $R_{z_0}^{(k)}$未覆盖 $R_{z_0}^{(m+1)}$的任何顶点时，该构型等价于（*II*）。

子情形2. $\delta(R_{z_0}^{(m+1)}) \cdot \delta(R_{z_0}^{(i)}) = -1$。
根据 $R_{z_0}^{(k)}$所覆盖的 $R_{z_0}^{(m+1)}$顶点数，可能的覆盖构型有三种，如图1所示。

不失一般性，假设 $\delta(R_{z_0}^{(m+1)}) = 1, \delta(R_{z_0}^{(i)}) = -1$。在构型（I）和（II）中，根据覆盖结构，显然， AD 与 FG 的交点必须由另一个 $R_{z_0}^{(j)}$覆盖，其中 $j \in \{1,2,\ldots,m\} \setminus \{i\}$。由于 $\delta(R_{z_0}^{(m+1)})$和 $\delta(R_{z_0}^{(i)})$中必有一个与

$\delta(R_{z_0}^{(j)})$同号，根据子情况1的结果，我们有

$$vol((C_3+\mathbf{x}_{m+1})\cap(C_3+\mathbf{x}_j))+vol((C_3+\mathbf{x}_i)\cap(C_3+\mathbf{x}_j))\geq\frac{4}{3^{10}}. \quad (3.9)$$

对于构型（III），我们有

$$\begin{aligned}
vol((C_3+\mathbf{x}_{m+1})\cap(C_3+\mathbf{x}_i)) &= \int_{-2+z_{m+1}}^{2+z_{m+1}} S(R_z^{(m+1)}\cap R_z^{(i)})dz \\
&\geq \int_{z_0-\frac{l_{z_0}^{(m+1)}}{\sqrt{2}}}^{z_0+\frac{g}{\sqrt{2}}} S(R_z^{(m+1)}\cap R_z^{(i)})dz \\
&+ \int_{z_0+\frac{s}{\sqrt{2}}}^{z_0+\frac{l_{z_0}^{(i)}}{\sqrt{2}}} S(R_z^{(m+1)}\cap R_z^{(i)})dz \\
&= 2\times\frac{1}{3\sqrt{2}}(g+l_{z_0}^{(m+1)})^3 \\
&\geq \frac{\sqrt{2}}{3}(\frac{1}{27}\sqrt{2})^3 \\
&= \frac{4}{3^{10}}.
\end{aligned} \quad (3.10)$$

因此，根据（3.1）和（3.6）—（3.10）的结论，我们有

$$\begin{aligned}
\theta(C_3,X,P) &= \frac{\sum_{\mathbf{x}\in X} vol\left(P\cap(C_3+\mathbf{x})\right)}{vol(P)} \\
&= 1+\frac{\sum_{\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j\in X',i<j} vol\left(P\cap(C_3+\mathbf{x}_i)\cap(C_3+\mathbf{x}_j)\right)}{vol(P)} \\
&\geq 1+\frac{\sum_{1\leq i<j\leq m+1} vol\left((C_3+\mathbf{x}_i)\cap(C_3+\mathbf{x}_j)\right)}{vol(P)} \\
&\geq 1+\frac{1}{1024}\cdot\frac{4}{3^{10}} \\
&= 1+\frac{4}{6^{10}}.
\end{aligned}$$

综上这两种情形，我们有

$$\theta(C_3,X,P)\geq 1+\frac{4}{6^{10}}>1+6.6\times10^{-8}.$$

根据方程（3.1）、（3.2）和（3.3），我们得到

$$\theta^t(C_3)\geq\theta(C_3,P)=\min_{X\in\mathfrak{X}}\theta(C_3,X,P)\geq 1+\frac{4}{6^{10}}>1+6.6\times10^{-8},$$

定理得证。 □

注记 3.2。 通过用渐近的 $\delta^l(C_3) = \frac{18}{19}$ 代替 $\frac{vol_{(C_3)}}{vol(P)} = \frac{2}{3}$来覆盖该结构，我们可以略微提高定理 *1.1* 中的下界。不过，由于这项改进并非关键，因此这里不包含其证明。

致谢

本研究得到国家自然科学基金委员会（NSFC12226006、NSFC11921001、NSFC11801410 和 NSFC11971346）、中国国家重点研发计划（2018YFA0704701）以及国家留学基金管理委员会的资助。作者谨向 C. Zong 教授致以诚挚谢意，感谢他给予的指导与讨论。

参考文献

[1] R. P. Bambah，关于球的格覆盖。 *Proc. Nat. Inst. Sci. India* **20** (1954年), 25-52.[2] E. S. Barnes，球对空间的覆盖。 *Canad. J. Math*。**8** (1956年), 293- 304.[3] U. Betke，M. Henk,

3 *Computational Ge- -多ometry* **16** 2000 157 186
胞体的最密格堆积。( ), - .[4] P. Brass、W. Moser 和 J. Pach,
Research Problems in Discrete Geometry。施普林格，纽约，2005年。[5] J. H. Conway 和 S. Torquato，四面体的堆积、铺砌和覆盖。
Proc. Natl. Acad. Sci. USA **103**(2006年), 10612-10617.[6] H. Cohn、A. Kumar、S. D. Miller 和 M. Viazovska，24 维的球堆积问题。 *Ann. of Math.* **185** (2017年), 1017-1033.[7] B. N. Delone 和 S. S. Ry˘skov，等半径球对四维空间进行最稀疏格覆盖问题的解。 *Soviet Math. Dokl*。**4** (1963年), 1333-1334.[8] R. Dougherty 和 V. Faber，若干类凯莱图的度直径问题。I. 阿贝尔情形。 *SIAM J. Discrete Math*。**17** (2004年), 478-519.[9] I. F

´ ´ ´ *Bull. Soc. Math. France* **78** 1950 152 161

ary，关于凸域格子的密度。( ), - .[10] E. S. 费多罗夫，图形研究概论。 *Zap. Mineral. Imper. S. Petersburgskogo Obšč* **21** 2 1885 1 279 ( )

( ), - .[11] G. Fejes T´oth 和 W. Kuperberg，凸集的堆积与覆盖。
Handbook of Convex Geometry (编者 P. M. Gruber 和 J. M. Wills), 799-860, North-Holland 1993.[12] L. Few，球对空间的覆盖。 *Mathematika* **3** (1956年), 136-139.[13] C. M. Fiduccia、R. W. Forcade 和 J. S. Zito，阿贝尔群有向凯莱图的几何与直径界。 *SIAM J. Discrete Math*。**11** (1998年), 157-167.[14] R. Forcade 和 J. Lamoreaux，格单纯形覆盖与 84-形。*SIAM J. Discrete Math*。**13** (2000年), 194-201.

[15] M. Fu、F. Xue 和 C. Zong，单形格覆盖密度的下界。arXiv: 2202.06025.[16] S. W. Golomb 和 L. R. Welch，Lee 度量中的完美码与多格骨牌的堆积。 *SIAM J. Appl. Math.* **18** (1970年), 302-317.[17] D. Hilbert，《数学问题》。 *Arch. Math. Phys* **3** 1901 44 63 *Bull.* 。( ), - ; *Amer. Math. Soc* **37** 2000 407 436 . ( ), - .[18] J. Januszewski，用三角形的平移副本覆盖平面。 *Discrete Comput. Geom.* **43** 2010 167 178 ( ), - .

[19] R. Kershner，覆盖一个集合所需圆的数量。 *Amer. J. Math.* **61** (1939年), 665-671.[20] J. C. Lagarias 和 C. Zong，正四面体堆积之谜。 *Notices Amer. Math. Soc.* **59** 2012 1540 1549 ( ), - .

[21] Y. Li、M. Fu 和 Y. Zhang，四面体平移覆盖密度的下界。arXiv:2206.13252.[22] D. Micciancio，S Goldwasser， *Complexity of Lattice Problems: A Cryptographic Perspective* 2002 。

Kluwer Academic Publishers，波士顿。。[23] H. Minkowski，《全等物体的最密格子排列》。

Nachr. ( ), - . *K. Ges. Wiss. Gottingen* 1904 311 355

[24] O. Ordentlich、O. Regev 和 B. Weiss，格覆盖密度的新界。 *J. Amer. Math. Soc.* **35** (2021年), 295-308.[25] C. A. Rogers， *Packing and Covering*。剑桥大学出版社 1964年。[26] S. S. Ryˇskov 和 E. P. Baranovskii，等半径球对五维空间进行最稀疏格覆盖问题的解。 *Soviet. Math. Dokl*。**16** (1975年), 586-590.[27] M. Viazovska，八维的球堆积问题。 *Ann. of Math.* **185** (2017年), 991-1015.[28] F. Xue 和 C. Zong，关于单形的格覆盖。 *Adv. Geom.* **18** (2018年), 181-186.[29] C. Zong， *Sphere Packings*。Springer-Verlag，纽约。1999年。[30] C. Zong，二维空间中的堆积、覆盖与铺砌。

Expo. Math. ( ), - . **32** 2014 297 364

Yiming Li 天津大学应用数学中心 中国天津 300072 中华人民共和国 电子邮件：xiaozhuang@tju.edu.cn

Yanlu Lian* 杭州师范大学数学学院，中国杭州 311121 中华人民共和国 电子邮箱：yllian@hznu.edu.cn

Miao Fu 天津大学应用数学中心,
中国天津 300072 中华人民共和
国 电子邮箱:
miaofu@tju.edu.cn

Yuqin Zhang 天津大学数学学院
中国天津市，邮编 300072 电子
邮箱:
yuqinzhang@tju.edu.cn