微分 KZ 方程与动力学方程的模 p^s 多项式解

Pavel ETINGOF [a] 和 *Alexander VARCHENKO* [b]

a) 麻省理工学院数学系，美国马萨诸塞州剑桥市 *02139*电子邮件：
etingof@math.mit.edu
b) 北卡罗来纳大学教堂山分校数学系，美国北卡罗来纳州教堂山市
*27599-3250*电子邮件： *anv@email.unc.edu*

收稿日期：2023年4月18日，定稿日期：2023年8月23日；在线发表日期：2023年9月1日
https://doi.org/10.3842/SIGMA.2023.061

摘要。 我们构造了模 p^s 的多项式解，其中 p 是奇素数；这些解满足微分 KZ 方程与动力学方程。

关键词： 微分 KZ 方程与动力学方程；模 p^s 的多项式解；超几何积分

*2020*年数学主题分类：81R12;11C08; 14H52

arXiv:2304.07843v2 [math.AG] 1 Sep 2023

1 引言

KZ 方程由 Knizhnik 和 Zamolodchikov [7]提出，用于描述黎曼球面上共形块所满足的微分方程。KZ 方程的不同版本见于数学物理、代数几何和特殊函数理论中，例如参见 [3, 9]。KZ 方程的一项重要性质是，它们可实现为适当的 Gauss–Manin 联络。这一构造通过多重超几何积分给出了 KZ 方程解的表示，参见 [1, 2, 13]。

某些闭微分形式在圈上的积分满足线性微分方程，这一事实可由斯托克斯定理从适当的上同调关系推出；在该关系中，相应微分算子作用于积分的被积函数所得的结果，等于一个低一阶微分形式的微分。关于任意 Kac–Moody 代数所对应的 KZ 方程，这类上同调关系已在 [14] 中得到发展。

KZ 方程具有双谱性质——它们存在一个与相应动力学参数相关的相容动力学方程组，参见 [4, 5, 9, 11, 18]。

设 p 是一个奇素数。在 [15, 23], 中，微分 KZ 方程是模 p^s考虑的，并构造了模 p^s 的多项式解，作为超几何积分的类比。该构造基于这样一个事实： [14] 中描述的所有上同调关系都定义在 $\mathbb{Z}$ 上，且可以模 p^s约化。研究模 p^s 的解，有助于深入了解 KZ 方程在复数域和 p-进域上的解，例如参见 [16]。

本文研究微分 KZ 方程与微分动力学方程的联合系统，该系统在 [5], 中引入；并构造该联合系统模 p^s 的多项式解，作为相应的带指数项的超几何积分的类似物。为此，需要用 t 中的一个多项式表示带整数参数 λ 的指数函数 $\mathrm{e}^{\lambda t}$，模 p^s。将 λ 替换为 $p\lambda$ 后即可做到这一点。

一个有趣的问题是研究所构造的模 p^s 多项式解在 $s\to\infty$ 时的 p-进极限；关于微分 KZ 方程的此类极限示例，见 [22, 23, 24]。

KZ 方程与动力学方程的联合系统有许多版本：微分 KZ 方程与微分动力学方程、微分 KZ 方程与差分动力学方程、差分 KZ 方程与微分动力学方程，以及差分 KZ 方程与差分动力学方程，例如见 [4, 9, 11, 18]。本文仅针对原始的微分 KZ 方程与微分动力学方程联合系统构造模 p^s 多项式解，不过其他情形下也有模 p^s 多项式解的示例，见 [10, 12, 22]，另见附录A。

在引言的其余部分，我们将讨论一个例子。

1.1 在 $\mathbb{C}$上的解

考虑复主函数

$$\Phi(t,z,\lambda)=\mathrm{e}^{\lambda t}\prod_{i=1}^{2g+1}(t-z_i)^{-1/2}$$

以及积分组

$$I(z,\lambda)=(I_1(z,\lambda),\dots,I_{2g+1}(z,\lambda))=\int_\delta \Phi(t,z,\lambda)\left(\frac{1}{t-z_1},\dots,\frac{1}{t-z_{2g+1}}\right)\mathrm{d}t, \tag{1.1}$$

其中 δ 是一个1-循环。

定理 1.1. 元组 $I(z,\lambda)$ 满足 *KZ* 方程与动力学方程的联合系统 s

$$\frac{\partial I_j}{\partial z_i}=\frac{1}{2}\frac{I_i-I_j}{z_i-z_j},\qquad i\neq j, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial I_i}{\partial z_i}=\lambda I_i-\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\frac{I_i-I_j}{z_i-z_j}, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial I_i}{\partial \lambda}=z_iI_i+\frac{1}{2\lambda}\sum_{j=1}^{n}I_j. \tag{1.4}$$

方程组 (1.2) 和 (1.3) 称为本例的 KZ 方程，方程组 (1.4) 称为动力学方程。解 $I(z,\lambda)$ 称为超几何解。

证明。 证明用到以下恒等式：

$$\frac{1}{(t-z_i)(t-z_j)}=\frac{1}{z_i-z_j}\left(\frac{1}{t-z_i}-\frac{1}{t-z_j}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,z,\lambda)=\lambda\Phi(t,z,\lambda)-\frac{1}{2}\Phi(t,z,\lambda)\sum_{j=1}^{2g+1}\frac{1}{t-z_j},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\Phi(t,z,\lambda)}{t-z_i}=\Phi(t,z,\lambda)\left(\frac{\lambda}{t-z_i}-\frac{3}{2}\frac{1}{(t-z_i)^2}-\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\frac{1}{(t-z_i)(t-z_j)}\right).$$

对于 $j\neq i$，我们有

$$\frac{\partial I_j}{\partial z_i}=\int\Phi(t,z,\lambda)\frac{1/2}{(t-z_i)(t-z_j)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(I_i-I_j).$$

这证明了第一个方程。接下来

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_i}{\partial z_i} &= \int \Phi(t,z,\lambda)\frac{3/2}{(t-z_i)^2}\mathrm{d}t \\ &= -\int \frac{\partial}{\partial t}\frac{\Phi(t,z,\lambda)}{t-z_i}\mathrm{d}t + \int \Phi(t,z,\lambda)\left(\frac{\lambda}{t-z_i} - \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\frac{1}{(t-z_i)(t-z_j)}\right)\mathrm{d}t \\ &= \lambda I_i - \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\frac{I_i - I_j}{z_i - z_J}\end{aligned}$$

得到第二个方程。我们还有

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_i}{\partial \lambda} &= \int \Phi(t,z,\lambda)\frac{t-z_i+z_i}{t-z_i}\mathrm{d}t = \int \Phi(t,z,\lambda)\mathrm{d}t + z_i\int \Phi(t,z,\lambda)\frac{1}{t-z_i}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\lambda}\int \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,z,\lambda)\mathrm{d}t + \frac{1}{2\lambda}\int \Phi(t,z,\lambda)\sum_{j=1}^{2g+1}\frac{1}{t-z_j}\mathrm{d}t + z_i\int \Phi(t,z,\lambda)\frac{1}{t-z_i}\mathrm{d}t \\ &= z_i I_i + \frac{1}{2\lambda}\sum_{j=1}^{2g+1} I_j.\end{aligned}$$

■

KZ 方程与动力学方程（1.2）–（1.4）的（多值）解构成的复向量空间是$2g+1$维的。联合系统的每个解都具有积分表示（1.1），其中圈 δ需满足适当条件，参见 [8, 定理 6。1] 以及 [8, 引言]中的一个例子。

1.2 指数函数

我们有

$$\mathrm{e}^{\lambda t} = \sum_{m=0}^{\infty}\lambda^{(m)}t^m, \qquad \lambda^{(m)} = \frac{\lambda^m}{m!}, \qquad \binom{m+n}{m}\lambda^{(m+n)} = \lambda^{(m)}\lambda^{(m)}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\lambda^{(m)} = \lambda^{(m-1)}.$$

按惯例，我们对 $m<0$ 令 $\lambda^{(m)}=0$。

令 $f(t,\ z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(z)t^m$，$b_m(z) \in \mathbb{Z}_p[z]$，其中 $\mathbb{Z}_p$是 p-进整数环，而$z=(z_1,\ldots,z_{2g+1})$ 是参数。考虑如下分解

$$\mathrm{e}^{\lambda t}f(t,z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z,\lambda)t^k,$$

其中每个 $c_k(\lambda,\ z)$ 都是关于有限多个符号 $\lambda^{(m)}$，$m=0,\ 1,\ \ldots$ 的线性函数，其系数属于 $\mathbb{Z}_p[z]$。

引理 1.2。设 s,ℓ 为正整数。那么，级数 $\mathrm{d}\,\mathrm{d}t\big(\mathrm{e}^{\lambda t}f(t,z)\big)$中 $t^{\ell p^s-1}$ 的系数可被 p^s整除。也就是说，相应的关于符号 $\lambda^{(m)}$,$m\geq 0$ 的线性函数的所有系数都可被 p^s整除。

证明。只需证明引理对 $f(t)=t^a$ 成立。于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\lambda t}t^a &= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\lambda\cdot\lambda^{(m)}t^{m+a} + a\lambda^{(m)}t^{m+a-1}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\left((m+1)\lambda^{(m+1)}t^{m+a} + a\lambda^{(m)}t^{m+a-1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left((k-a+1)\lambda^{(k-a+1)}t^k + a\lambda^{(k-a+1)}t^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\lambda^{(k-a+1)}t^k.\end{aligned}$$

■

引理 1.3。如果 $\lambda\in\mathbb{Z}_p$，那么对于所有 $k\geq 0$，$p^k\lambda^{(k)}\in\mathbb{Z}_p$。如果 s 是正整数且 $k>s\frac{p-1}{p-2}$，那么 $p^k\lambda^{(k)}\in p^s\mathbb{Z}_p$。

证明。能整除 k 的 p 的最大幂等于 $\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k}{p^2}\right]+\left[\frac{k}{p^3}\right]+\cdots$，其不大于 $\frac{k}{p}+\frac{k}{p^2}+\frac{k}{p^3}+\cdots=\frac{k}{p-1}$。因此，能整除 $\frac{p^k}{k}!$ 的 p 的幂不小于 $k-\frac{k}{p-1}=k\frac{p-2}{p-1}>0$。因此 $p^k\lambda^{(k)}\in\mathbb{Z}_p$。当 $k\geq s\frac{p-1}{p-2}$ 时，我们有 $k\frac{p-2}{p-1}\geq s$。■

记

$$d(s)=\left[s\frac{p-1}{p-2}\right]+1,\qquad E_s(t)=\sum_{k=0}^{d(s)}\frac{t^k}{k!}.$$

推论 1.4。如果 $\lambda\in\mathbb{Z}_p$，那么 $\mathrm{e}^{p\lambda t}\in\mathbb{Z}_p[[t]]$，$E_s(p\lambda t)\in\mathbb{Z}_p[t]$ 以及

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{p\lambda t}\equiv E_s(p\lambda t)\pmod{p^s},\\
&\frac{\partial}{\partial t}E_s(p\lambda t)\equiv p\lambda E_s(p\lambda t),\qquad \frac{\partial}{\partial\lambda}E_s(p\lambda t)\equiv ptE_s(p\lambda t)\pmod{p^s},\\
&E_s(p\lambda(u+v))\equiv E_s(p\lambda u)E_s(p\lambda v)\pmod{p^s}.
\end{aligned}$$

1.3 关于 p^r的注记

令 $v_p(a)$ 表示 a 的 p-进赋值。

设 r_1, r_2 为互素正整数。记 $r=r_1/r_2$。假设 $r>1/(p-1)$。那么对于正整数 k，有

$$v_p\big(p^{kr}/k!\big)=\left(kr-\left(\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k}{p^2}\right]+\cdots\right)\right)>k\left(r-\frac{1}{p-1}\right)>0.$$

因此，若 $\lambda\in\mathbb{Z}_p\big[p^{1/r_2}\big]$，则 $p^{kr}\lambda^{(k)}\in\mathbb{Z}_p\big[p^{1/r_2}\big]$。此外，若 s 是正整数且$k>s_r{}^{p-1}{}_{(p-1)-1}$，则 $p^{kr}\lambda^{(k)}\in p^s\mathbb{Z}_p\big[p^{1/r_2}\big]$。

记

$$d(r,s)=\left[s\frac{p-1}{r(p-1)-1}\right]+1,\qquad E_{r,s}(t)=\sum_{k=0}^{d(r,s)}\frac{t^k}{k!}.$$

若 $\lambda\in\mathbb{Z}_p\big[p^{1/r_2}\big]$，则 $\mathrm{e}^{p^r\lambda t}\in\mathbb{Z}_p\big[p^{1/r_2}\big][[t]]$，$E_{r,s}(p^r\lambda t)\in\mathbb{Z}_p\big[p^{1/r_2}\big][t]$ 以及

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{p^r\lambda t}\equiv E_{r,s}(p^r\lambda t)\pmod{p^s},\\
&\frac{\partial}{\partial t}E_{r,s}(p^r\lambda t)\equiv p^r\lambda E_{r,s}(p^r\lambda t),\\
&\frac{\partial}{\partial\lambda}E_{r,s}(p^r\lambda t)\equiv p^rtE_{r,s}(p^r\lambda t)\pmod{p^s},\\
&E_{r,s}(p^r\lambda(u+v))\equiv E_{r,s}(p^r\lambda u)E_{r,s}(p^r\lambda v)\pmod{p^s}.
\end{aligned}$$

如果 $r=1/(p-1)$，那么

$$v_p\big(p^{k/(p-1)}/k!\big)=\left(\frac{k}{p-1}-\left(\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k}{p^2}\right]+\cdots\right)\right)>0$$

并且 $\mathrm{e}^{p^{1/(p-1)}t}\in\mathbb{Z}_p\big[p^{1/(p-1)}\big][[t]]$ 但 $v_p\big(p^{k/(p-1)}/k!\big)$ 并未像 $k\to\infty$ 那样增长，因此我们得到的是无穷级数，而不是多项式。

1.4 方程的重新表述

作变量替换 $\lambda \mapsto p\lambda$。于是 KZ 方程与动力学方程具有如下形式

$$\frac{\partial I_j}{\partial z_i} = \frac{1}{2}\frac{I_i - I_j}{z_i - z_j}, \qquad i \neq j, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial I_i}{\partial z_i} = p\lambda I_i - \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\frac{I_i - I_j}{z_i - z_j}, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial I_i}{\partial \lambda} = pz_i I_i + \frac{1}{2\lambda}\sum_{j=1}^{2g+1} I_j. \tag{1.7}$$

对于任意正整数 s，我们在下文构造一些多项式向量

$$I(z,\lambda) = (I_1(z,\lambda), \ldots, I_{2g+1}(z,\lambda))$$

其系数属于 $\mathbb{Z}_p$，并且当 $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ 时满足模 p^s 意义下的 KZ 方程（1.5）、（1.6）；而当 $\lambda \in \mathbb{Z}_p^\times$ 时满足模 p^s 意义下的动力学方程（1.7）。

1.5 模 p^s 解

对于正整数 s，定义

$$\Phi_s^o(t,z) = \prod_{i=1}^{2g+1}(t - z_i)^{(p^s-1)/2}, \qquad \Phi_s(t,z,\lambda) = E_s(p\lambda t)\Phi_s^o(t,z),$$

$$\Psi_s^o(t,z) = \Phi_s^o(t,z)\left(\frac{1}{t-z_1}, \ldots, \frac{1}{t-z_{2g+1}}\right), \qquad \Psi_s(t,z,\lambda) = E_s(p\lambda t)\Psi_s^o(t,z).$$

考虑泰勒展开

$$\Psi_s^o(t,z) = \sum_{m=0}^{(2g+1)(p^s-1)/2-1} c_m^o(z)t^m, \qquad \Psi_s(t,z,\lambda) = \sum_{d=0}^{(2g+1)(p^s-1)/2-1+d(s)} c_d(z,\lambda)t^d,$$

其中每个 $c_m^o(z)$都是一个具有整数系数的 z 多项式向量，并且

$$c_d(z,\lambda) = \sum_{m=0}^{d} p^{d-m}\lambda^{(d-m)}c_m^o(z).$$

对于任意正整数 ℓ，记

$$I^\ell(z,\lambda) = c_{\ell p^s-1}(z,\lambda).$$

该向量的所有坐标都是 z，λ 上的多项式，其系数属于 $\mathbb{Z}_p$。

定理 1.5。设 ℓ 为正整数。若 $\lambda \in \mathbb{Z}_p$，则 $I^\ell(z,\lambda)$ 是模 p^s 的 *KZ* 方程 (1.5)、(1.6)的解。若 $\lambda \in \mathbb{Z}_p^\times$，则 $I^\ell(z,\lambda)$ 是模 p^s 的动力学方程 (1.7)的解。

我们称这类解为 KZ 方程与动力学方程联合系统的 p^s-超几何解 。

证明。证明使用以下恒等式：

$$\frac{1}{(t-z_i)(t-z_j)}=\frac{1}{z_i-z_j}\left(\frac{1}{t-z_i}-\frac{1}{t-zj}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_s(t,z,\lambda)\equiv p\lambda\Phi_s(t,z,\lambda)+\frac{p^s-1}{2}\Phi_s(t,z,\lambda)\sum_{j=1}^{2g+1}\frac{1}{t-z_j}\pmod{p^s},$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\Phi_s(t,z,\lambda)}{t-z_i}\equiv\Phi_s(t,z,\lambda)\left(\frac{p\lambda}{t-z_i}+\frac{p^s-3}{2}\frac{1}{(t-z_i)^2}+\frac{p^s-1}{2}\sum_{j\neq i}\frac{1}{(t-z_i)(t-z_j)}\right)$$

模 p^s。对于 $j\neq i$，我们有

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\Phi_s(t,z,\lambda)\frac{1}{t-z_j}=\Phi(t,z,\lambda)\frac{1-p^s}{2}\frac{1}{(t-z_i)(t-z_j)}$$
$$=\frac{1-p^s}{2}\Phi_s(t,z,\lambda)\left(\frac{1}{t-z_i}-\frac{1}{t-z_j}\right).$$

取系数 ，在等式两边的 $t^{\ell p^s-1}$ 的系数。由此可得模 p^s ，

$$\frac{\partial I_j^\ell}{\partial z_i}(z,\lambda)\equiv\frac{1}{2}\frac{I_i^\ell(z,\lambda)-I_j^\ell(z,\lambda)}{z_i-z_j},\qquad i\neq j.$$

我们有

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\Phi_s(t,z,\lambda)\frac{1}{t-z_i}=\Phi_s(t,z,\lambda)\frac{3-p^s}{2}\frac{1}{(t-z_i)^2}$$
$$\equiv-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\Phi_s(t,z,\lambda)}{t-z_i}+\Phi_s(t,z,\lambda)\left(\frac{p\lambda}{t-z_i}+\frac{p^s-1}{2}\sum_{j\neq i}\frac{1}{(t-z_i)(t-z_j)}\right).$$

取等式两边 $t^{\ell p^s-1}$ 的系数。由此可得模 p^s，

$$\frac{\partial I_i^\ell}{\partial z_i}(z,\lambda)\equiv p\lambda I_i^\ell(z,\lambda)-\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\frac{I_i^\ell(z,\lambda)-I_j^\ell(z,\lambda)}{z_i-z_J}.$$

注意到 $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\Phi_s(t,\ z,\ \lambda)}{t-z_i}$ 根据引理 1.2，对该结果没有贡献。我们还有
模 p^s，

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Phi_s(t,z,\lambda)\frac{1}{t-z_i}\equiv p\Phi_s(t,z,\lambda)\frac{t-z_i+z_i}{t-z_i}=p\Phi_s(t,z,\lambda)+pz_i\Phi_s(t,z,\lambda)\frac{1}{t-z_i}$$
$$\equiv\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_s(t,z,\lambda)+\frac{1}{\lambda}\frac{1-p^s}{2}\Phi_s(t,z,\lambda)\sum_{j=1}^{2g+1}\frac{1}{t-z_j}+pz_i\Phi_s(t,z,\lambda)\frac{1}{t-z_i}.$$

取等式两边 $t^{\ell p^s-1}$ 的系数。因此，我们得到模 p^s，

$$\frac{\partial I_i^\ell}{\partial\lambda}(z,\lambda)\equiv pz_iI_i^\ell(z,\lambda)+\frac{1}{2\lambda}\sum_{j=1}^{2g+1}I_j^\ell(z,\lambda).$$

注意到，由于根据假设 λ 是 $\mathbb{Z}_p$ 中的单位元， t^{p^s-1} 在 $\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_s(t,\ z,\ \lambda)$ 中的系数模 p^s 为零。定理得证。■

1.6 ps- p^s 超几何解的性质

引理 1.6。 假设 $\lambda \in \mathbb{Z}_p^\times$ 和

$$p^s + 2g - 1 > s\frac{2p-2}{p-2}. \tag{1.8}$$

那么，除非 $\ell = 1, \dots, g$，ps- p^s 超几何解 $I^\ell(z,\mu)$ 为零。

证明。 多项式 $\Psi_s^o(t,z)$ 关于 t 的次数等于

$$(2g+1)\frac{p^s-1}{2} - 1 = (g+1)p^s - 1 - \frac{p^s+2g+1}{2}.$$

多项式 $E_s(p\lambda t)$ 关于 t 的次数不大于 $d(s) \le s\frac{p-1}{p-2} + 1$。因此， $\Psi_s(t,z,\mu)$ 的次数不大于

$$(g+1)p^s - 1 - \frac{p^s+2g+1}{2} + s\frac{p-1}{p-2} + 1 = (g+1)p^s - 1 - \frac{1}{2}\left(p^s + 2g - 1 - s\frac{2p-2}{p-2}\right).$$

若不等式 (1.8) 成立，则多项式 $\Psi_s(t,z,\lambda)$ 不含次数为 $\ell p^s - 1$的单项式，其中 $\ell > g$。 ■

对于任意 p^s-超几何解 $I^\ell(z,\lambda)$，考虑其 λ-独立项 $I^\ell(z,0) = (I_1^\ell(z,0)\dots, I_{2g+1}^\ell(z,0))$。这是一个由 z 中的整系数多项式组成的向量。它是模 p^s 下的 KZ 方程 (1.5) 和 (1.6) 的解，其中 $\lambda = 0$。我们有

$$\sum_{j=1}^{2g+1} I_j^\ell(z,0) \equiv 0 \pmod{p^s}$$

因为这个和是 $t^{\ell p^s - 1}$ 在.....中的系数

$$\sum_{j=1}^{2g+1} \frac{\Phi_s^o(t,z)}{t - z_j} = \frac{2}{p^s - 1}\frac{\partial \Phi_s^o}{\partial t}(t,z).$$

解 $I^\ell(z,\lambda)$ 是向量 $I^\ell(z,0)$ 的 λ-形变。

定理 *1.7*（[22, 引理 7.3]）。假设 $p^s > 2g+1$。考虑 p^s-超几何解 $I^1(z,\lambda)\dots, I^g(z,\lambda)$ 的 λ-独立项 $I^1(z,0)\dots, I^g(z,0)$。将它们投影到 $\mathbb{F}_p[z]^{2g+1}$。那么这些投影在整数环 $\mathbb{F}_p[z]$ 上线性无关。

1.7 推广

令 r_1, r_2 为互素正整数。记 $r = r_1/r_2$。假设 $r > 1/(p-1)$。在 KZ 方程与动力学方程（1.2）、（1.3）、（1.4）中作变量替换 $\lambda \to p^r\lambda$

$$\frac{\partial I_j}{\partial z_i} = \frac{1}{2}\frac{I_i - I_j}{z_i - z_j}, \qquad i \ne j, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial I_i}{\partial z_i} = p^r\lambda I_i - \frac{1}{2}\sum_{j\ne i}\frac{I_i - I_j}{z_i - z_j}, \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial I_i}{\partial \lambda} = p^r z_i I_i + \frac{1}{2\lambda}\sum_{j=1}^{2g+1} I_j. \tag{1.11}$$

对于正整数 s，定义

$$\Psi_{r,s}(t,z,\lambda)=E_{r,s}(p^r\lambda t)\prod_{i=1}^{2g+1}(t-z_i)^{(p^s-1)/2}\left(\frac{1}{t-z_1},\dots,\frac{1}{t-z_{2g+1}}\right).$$

考虑泰勒展开 $\Psi_{r,s}(t,z,\lambda)=\sum_d c_d(z,\lambda)t^d$。对于任意正整数 ℓ，记 $I^\ell(z,\lambda)=c_{\ell p^s-1}(z,\lambda)$。该向量的所有坐标都是关于 z，λ 且系数属于 $\mathbb{Z}_p\big[p^{1/r_2}\big]$ 的多项式。

定理 1.8。设 ℓ 为正整数。若 $\lambda\in\mathbb{Z}_p\big[p^{1/r_2}\big]$，则 $I^\ell(z,\lambda)$ 是模 p^s 的 *KZ* 方程 (1.9)，(1.10) 的一个解。若 $\lambda\in\big(\mathbb{Z}_p\big[p^{1/r_2}\big]\big)^\times$，则 $I^\ell(z,\lambda)$ 是模 p^s 的动力学方程 (1.11) 的一个解。

证明与定理 1.5 的证明相同。定理 1.5 是定理 1.8 在 $r=1$ 下的特例。

注意到，由于次数方面的原因，定理 1.8 对每个 s 只给出有限多个解 $I^\ell(z,\lambda)$。

如果 $r=1/(p-1)$ 且 s 是正整数，我们可以定义

$$\Psi_{1/(p-1),s}(t,z,\lambda)=\mathrm{e}^{p^{1/(p-1)}\lambda t}\prod_{i=1}^{2g+1}(t-z_i)^{(p^s-1)/2}\left(\frac{1}{t-z_1},\dots,\frac{1}{t-z_{2g+1}}\right)$$

然后将该向量展开为关于 t 的幂级数：$\Psi_{1/(p-1),s}(t,z,\lambda)=\sum_d c_d(z,\lambda)t^d$。对于任意正整数 ℓ，记 $I^\ell(z,\lambda)=c_{\ell p^s-1}(z,\lambda)$。该向量的所有坐标都是关于 z、λ 的多项式，其系数属于 $\mathbb{Z}_p\big[p^{1/(p-1)}\big]$。

定理 1.9。设 ℓ 为正整数。若 $\lambda\in\mathbb{Z}_p\big[p^{1/(p-1)}\big]$，则 $I^\ell(z,\lambda)$ 是 *KZ* 方程 *(1.9)*、*(1.10)* 模 p^s 的一个解，其中 $r=1/(p-1)$。若 $\lambda\in\big(\mathbb{Z}_p\big[p^{1/(p-1)}\big]\big)^\times$，则 $I^\ell(z,\lambda)$ 是动力学方程 *(1.11)* 模 p^s 的一个解，其中 $r=1/(p-1)$。

注意，该定理给出了无穷多个解 $I^\ell(z,\lambda)$。

注 1.10。扩展多项式解构造的另一种可能方式，是将环 $\mathbb{Z}_p[p^r]$ 替换为另一个 p-进环，例如 $\mathbb{Z}_p[\zeta]$，其中 ζ 是 1 的 p^m次方根。

1.8 材料概述

在第 2 节中，我们描述与 $\mathfrak{sl}_2$ 相关的微分 KZ 方程与动力学方程联合系统的超几何解，并说明如何将其约化为模 p^s 的多项式解。在第 2.6 节中，我们简要说明如何将第 2 节的结果推广到与任意单李代数相关的微分 KZ 方程与动力学方程联合系统。在附录 A 中，我们通过一个例子说明如何构造模 p^s 的 qKZ 差分方程多项式解。

2 $\mathfrak{sl}_2$ 微分 KZ 方程与动力学方程

2.1 方程

设 e、f、h 是复李代数 $\mathfrak{sl}_2$ 的标准基，其关系为 $[e,f]=h$、$[h,e]=2e$、$[h,f]=-2f$。记

$$\Omega=e\otimes f+f\otimes e+\frac{1}{2}h\otimes h\in\mathfrak{sl}_2\otimes\mathfrak{sl}_2,$$

卡西米尔元。

给定 n，对于任意 $x \in \mathfrak{sl}_2$，令 $x^{(i)} \in U(\mathfrak{sl}_2)^{\otimes n}$ 表示一个元素，它在第 i 个因子中等于 x，在其他因子中等于 1。类似地，对于 $1 \le i < j \le n$，令 $\Omega^{(i,j)} \in U(\mathfrak{sl}_2)^{\otimes n}$ 表示一个元素，它在第 i 个和第 j 个因子中等于 Ω，在其他因子中等于 1。

设 $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ 互不相同，且 $\lambda \in \mathbb{C}^\times$。对于 $i = 1, \ldots, n$，由下列公式引入 Gaudin 哈密顿量和动力学哈密顿量

$$H_i(z_1, \ldots, z_n, \lambda) = \frac{\lambda}{2} h^{(i)} + \sum_{j \neq i} \frac{\Omega^{(i,j)}}{z_i - z_j} \in (U(\mathfrak{sl}_2))^{\otimes n},$$

$$D(z_1, \ldots, z_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i}{2} h^{(i)} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{f^{(i)} \mathrm{e}^{(j)}}{\lambda}.$$

设 $\otimes_{i=1}^n V_i$ 是 $\mathfrak{sl}_2$-模的张量积，且 $\kappa \in \mathbb{C}^\times$。定义在 $\otimes_{i=1}^n V_i$ 值函数 $I(z_1, \ldots, z_n, \lambda)$ 上的微分方程组，

$$\frac{\partial I}{\partial z_i} = \frac{1}{\kappa} H_i(z_1, \ldots, z_n, \lambda) I, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \frac{1}{\kappa} D(z_1, \ldots, z_n, \lambda) I, \tag{2.2}$$

称为方程组 KZ 方程与动力学方程。该方程组依赖于参数 κ .

2.2 $\mathfrak{sl}_2$-模

对于非负整数 i，记 L_i 为一个 $(i+1)$ 维模，其一组基为 $v_i, fv_i, \ldots, f^i v_i$，作用为

$$\begin{aligned}
&f \cdot f^k v_i = f^{k+1} v_i \qquad \text{for} \quad k = 0, \ldots, i-1, \\
&h \cdot f^k v_i = (i - 2k) f^k v_i \qquad \text{for} \quad k = 0, \ldots, i, \\
&e \cdot f^k v_i = k(i - k + 1) f^{k-1} v_i \qquad \text{for} \quad k = 1, \ldots, i,
\end{aligned}$$

$f \cdot f^i v_i = 0$, $e \cdot v_i = 0$。

对于 $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^n$，记 $|\vec{m}| = m_1 + \cdots + m_n$ 和 $L^{\otimes \vec{m}} = L_{m_1} \otimes \cdots \otimes L_{m_n}$。对于 $J = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^n$，其中 $j_s \le m_s$ 对于 $s = 1, \ldots, n$，这些向量

$$f_J v := f^{j_1} v_{m_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_n} v_{m_n}$$

构成 $L^{\otimes \vec{m}}$ 的一组基。我们有

$$f \cdot f_J v = \sum_{s=1}^{n} f_{J + 1_s} v, \qquad h \cdot f_J v = (|m| - 2|J|) f_J v,$$

$$e \cdot f_J v = \sum_{s=1}^{n} j_s (m_s - j_s + 1) f_{J - 1_s} v,$$

其中 $1_s = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$，其中 1 位于第 s 个位置。

对于 $w \in \mathbb{Z}$，引入权子空间 $L^{\otimes \vec{m}}[w] = \{v \in L^{\otimes \vec{m}} \mid h.v = wv\}$。我们有权分解 $L^{\otimes \vec{m}} = \oplus_{k=0}^{|m|} L^{\otimes \vec{m}}[|\vec{m}| - 2k]$。记

$$\mathcal{I}_k = \{J \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^n \mid |J| = k,\ j_s \le m_s,\ s = 1, \ldots, n\}.$$

向量 $(f_J v)_{J \in \mathcal{I}_k}$ 构成 $L^{\otimes \vec{m}}[|\vec{m}| - 2k]$ 的一组基。

2.3 关于 $\mathbb{C}$的解

给定 k, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\vec{m} = (m_1, \ldots\ldots, m_n) \in \mathbb{Z}_{>0}^n$, $\kappa \in \mathbb{C}^\times$, 记为 $t = (t_1, \ldots\ldots, t_k)$、$z = (z_1, \ldots\ldots, z_n)$。定义主函数

$$\Phi(t,z,\lambda) := \Phi(t_1,\ldots,t_k,z_1,\ldots,z_n,\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda\sum_{l=1}^n z_l/2\kappa - \lambda\sum_{i=1}^k t_i/\kappa}$$
$$\times \prod_{i<j}(z_i-z_j)^{m_i m_j/2\kappa} \prod_{1\le i\le j\le k}(t_i-t_j)^{2/\kappa} \prod_{l=1}^n\prod_{i=1}^k (t_i-z_l)^{-m_l/\kappa}.$$

对于任意函数或微分形式 $F(t_1, \ldots\ldots, t_k)$, 记作

$$\mathrm{Sym}_t[F(t_1,\ldots,t_k)] = \sum_{\sigma\in S_k} F(t_{\sigma_1},\ldots,t_{\sigma_k}),$$
$$\mathrm{Alt}_t[F(t_1,\ldots,t_k)] = \sum_{\sigma\in S_k} (-1)^{|\sigma|} F(t_{\sigma_1},\ldots,t_{\sigma_k}).$$

对于 $J = (j_1, \ldots\ldots, j_n) \in \mathcal{I}_k$, 定义权函数

$$W_J(t,z) = \frac{1}{j_1!\ldots j_n!}\mathrm{Sym}_t\left[\prod_{s=1}^n\prod_{i=1}^{j_s}\frac{1}{t_{j_1+\cdots+j_{s-1}+i}-z_s}\right].$$

例如,

$$W_{(1,0,\ldots,0)} = \frac{1}{t_1-z_1}, \qquad W_{(2,0,\ldots,0)} = \frac{1}{t_1-z_1}\frac{1}{t_2-z_1},$$
$$W_{(1,1,0,\ldots,0)} = \frac{1}{t_1-z_1}\frac{1}{t_2-z_2} + \frac{1}{t_2-z_1}\frac{1}{t_1-z_2}.$$

函数

$$W(t,z) = \sum_{J\in\mathcal{I}_k} W_J(t,z) f_J v$$

是 $L^{\otimes\vec{m}}[|\vec{m}|-2k]$值的向量权函数。

考虑 $L^{\otimes\vec{m}}[|\vec{m}|-2k]$ 值函数

$$I^{(\delta)}(z_1,\ldots,z_n,\lambda) = \int_{\delta(z,\lambda)} \Phi(t,z,\lambda) W(t,z)\mathrm{d}t_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_k, \tag{2.3}$$

其中 $\delta(z, \lambda)$ 属于 $\{(z, \lambda)\}\times\mathbb{C}_t^k$, 是由多值函数 k定义的扭曲同调中的 $\Phi(t, z, \lambda)$ 维圈的水平族, 参见例如 [20, 21]。圈 $\delta(z, \lambda)$ 是庞加莱双重回路的多维类比。

定理2.1 ([5, 14]). 函数 $I^{(\delta)}(z, \lambda)$ 是 *KZ* 方程和动力学方程的一个解(2.1)和(2.2)。

(2.3) 中的解称为超几何解。

引言中的方程 (1.2)、(1.3)、(1.4) 及其解(1.1) 与权子空间 对应的方程 (2.1)、(2.2) 及其超几何解(2.3) 在规范变换下等同。

在第2.4节中, 我们按照 [5, 14]勾勒定理2.1 的证明。证明中的中间结论将在稍后构造 KZ 方程与动力学方程模 p^s 的解时用到。证明基于以下上同调关系。

2.4 微分形式的恒等式

重新表述超几何积分（2.3）的定义较为方便。给定k，$n\in\mathbb{Z}_{>0}$以及一个多重指标 $J=(j_1,\ldots\ldots,j_n)$，其中 $|J|\le k$，记

$$a_J=a_{J,1}\wedge a_{J,2}\wedge\cdots\wedge a_{J,|J|}:=\frac{\mathrm{d}(t_1-z_1)}{t_1-z_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\mathrm{d}(t_{j_1}-z_1)}{t_{j_1}-z_1}\wedge\frac{\mathrm{d}(t_{j_1+1}-z_2)}{t_{j_1+1}-z_2}\wedge\cdots\\ \wedge\frac{\mathrm{d}(t_{j_1+\cdots+j_{n-1}+1}-z_n)}{t_{j_1+\cdots+j_{n-1}+1}-z_n}\wedge\cdots\wedge\frac{\mathrm{d}(t_{j_1+\cdots+j_n}-z_n)}{t_{j_1+\cdots+j_n}-z_n}.$$

这里，$a_{J,\ell}$ 是右侧乘积中的第 ℓ 个因子。

记作

$$b_J=b_{J,1}\wedge b_{J,2}\wedge\cdots\wedge b_{J,|J|}:=\frac{\mathrm{d}t_1}{t_1-z_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\mathrm{d}t_{j_1}}{t_{j_1}-z_1}\wedge\frac{\mathrm{d}t_{j_1+1}}{t_{j_1+1}-z_2}\wedge\cdots\\ \wedge\frac{\mathrm{d}t_{j_1+\cdots+j_{n-1}+1}}{t_{j_1+\cdots+j_{n-1}+1}-z_n}\wedge\cdots\wedge\frac{\mathrm{d}t_{j_1+\cdots+j_n}}{t_{j_1+\cdots+j_n}-z_n},$$

$$c_J=\sum_{l=1}^{|J|}(-1)^{l+1}b_{J,1}\wedge b_{J,2}\wedge\cdots\wedge\widehat{b_{J,l}}\wedge\cdots\wedge b_{J,k}.$$

定义

$$\alpha_J=\frac{1}{j_1!\cdots j_n!}\mathrm{Alt}_{t_1,\ldots,t_k}[a_J],\qquad\beta_J=\frac{1}{j_1!\cdots j_n!}\mathrm{Alt}_{t_1,\ldots,t_k}[c_J].$$

注 2.2。回顾一下，我们有 k 个变量 $t_1,t_2,\ldots,t_k$。微分形式 a_J 的次数为 $|J|=j_1+\cdots+j_n\le k$，且仅依赖于变量 $t_1,t_2,\ldots,t_{j_1+\cdots+j_n}$。而微分形式 α_J 的次数为 $j_1+\cdots+j_n$，并依赖于所有变量 $t_1,t_2,\ldots,t_k$。

若 $|J|=k$，则对于任意固定的 $z\in\mathbb{C}^n$，我们有恒等式

$$\alpha_J=W_J(t,z)\mathrm{d}t_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}t_k$$

在 $\{z\}\times\mathbb{C}^k$ 上。定义

$$\alpha=\sum_{|J|=k}\alpha_J f_J v,\qquad\beta=\sum_{|J|=k}\beta_a J f_J v.$$

例 2.3。对于 $k=n=2$，我们有

$$\alpha_{(2,0)}=\frac{\mathrm{d}(t_1-z_1)}{t_1-z_1}\wedge\frac{\mathrm{d}(t_2-z_1)}{t_2-z_1},\qquad\beta_{(2,0)}=\frac{\mathrm{d}t_2}{t_2-z_1}-\frac{\mathrm{d}t_1}{t_1-z_1}.$$

超几何积分（2.3）可以用微分形式 α_J来定义：

$$I^{(\delta)}(z_1,\ldots,z_n,\lambda)=\int_{\delta(z,\lambda)}\Phi\alpha=\sum_{J\in\mathcal{I}_k}\left(\int_{\delta(z,\lambda)}\Phi\alpha_J\right)f_J v.$$

定理 2.4 ([5, 15])。

(i) 对于依赖于参数 λ 的微分形式 t, z，我们有以下代数恒等式：

$$\kappa\mathrm{d}_{t,z}\big(\Phi(t,z,\lambda)\alpha\big)=\sum_{l=1}^{n}H_i(z,\lambda)\mathrm{d}z_i\wedge\Phi(t,z,\lambda)\alpha,\tag{2.4}$$

其中 $\mathrm{d}_{t,\ z}$ 表示关于变量 t、z 的微分。

（ii）对于任意固定的 z、 λ，我们有关于 t 的微分形式、且取决于参数 z、 λ 的以下代数恒等式：

$$\kappa\frac{\partial}{\partial\lambda}\big(\Phi(t,z,\lambda)\alpha\big)=D(t,z,\lambda)\Phi(t,z,\lambda)\alpha+\frac{1}{\lambda}\mathrm{d}_t\big(\Phi(t,z,\lambda)\beta\big),\tag{2.5}$$

其中 d_t 表示关于变量 t 的微分。

第（ii）部分中的假设意味着，必须将 z_1、.....、$\mathrm{d}z_n$ 中出现的所有微分置为零，才能得到恒等式 α（2.5）。

证明。恒等式（2.4）由 [15, 定理 7.52″] 和 [5, 定理 31]推出。恒等式由 [5,定理 32]推出。(2.5)

将恒等式（2.4）和（2.5）在圈 $\delta(z,\lambda)$ 上两边积分，我们得到积分 $\int_{\delta(z,\lambda)}\Phi(t,z,\lambda)\alpha$ 满足 KZ 方程与动力学方程。

2.5 模 p^s 解

设 k、 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$、 $\vec{m}=(m_1,\ldots\ldots,m_n)\in\mathbb{Z}_{>0}^n$， $\kappa\in\mathbb{Q}^\times$，令 $p>2$ 为一个素数，且 p不整除 κ 的分子。将 KZ 方程与动力学方程（2.1）、（2.2）中的变量 $\lambda\to p\lambda$ 作变量代换。于是方程变为

$$\frac{\partial I}{\partial z_i}=\frac{1}{\kappa}\left(p\frac{\lambda}{2}h^{(i)}+\sum_{j\neq i}\frac{\Omega^{(i,j)}}{z_i-z_j}\right)I,\qquad i=1,\ldots,n,\tag{2.6}$$

$$\frac{\partial I}{\partial\lambda}=\frac{1}{\kappa}\left(p\sum_{i=1}^n\frac{z_i}{2}h^{(i)}+\sum_{i,j=1}^n\frac{f^{(i)}\mathrm{e}^{(j)}}{\lambda}\right)I.\tag{2.7}$$

取 正整数 M_l，使得 $l=1,\ldots\ldots,n$， $M_{i,j}$满足 $1\le i<j\le n$，且 M^0，使得 t

$$M_s\equiv-\frac{m_s}{\kappa},\qquad M_{i,j}\equiv\frac{m_im_j}{2\kappa},\qquad M^0\equiv\frac{2}{\kappa}\qquad(\mathrm{mod}\ p^s).$$

定义 主多项式

$$\Phi_s(t,z,\lambda)=\prod_{l=1}^nE_s\left(p\frac{z_l\lambda}{2\kappa}\right)\prod_{i=1}^nE_s\left(-p\frac{t_i\lambda}{\kappa}\right)\times$$
$$\times\prod_{1\le i<j\le n}(z_i-z_j)^{M_{i,j}}\prod_{1\le i\le j\le k}(t_i-t_j)^{M^0}\prod_{s=1}^n\prod_{i=1}^k(t_i-z_s)^{M_s}.$$

考虑 $L^{\otimes\vec{m}}[|\vec{m}|-2k]$ 值函数

$$\Psi_s(t,z,\lambda)=\sum_{J\in\mathcal{I}_k}\Phi_s(t,z,\lambda)W_J(t,z)f_Jv.$$

这是一个关于 t、 z、 λ 的多项式，其系数属于 $\mathbb{Z}_p$。考虑泰勒展开

$$\Psi_s(t,z,\lambda)=\sum_{\mathrm{d}_1,\ldots,\mathrm{d}_k}c_{\mathrm{d}_1,\ldots,\mathrm{d}_k}(z,\lambda)t_1^{\mathrm{d}_1}\ldots t_k^{\mathrm{d}_k}.$$

对于任意坐标为正整数的向量 $\ell=(\ell_1,\ldots,\ell_k)$，记

$$I^\ell(z,\lambda)=c_{\ell_1p^s-1,\ldots,\ell_kp^s-1}(z,\lambda).$$

该向量的所有坐标都是以 $\mathbb{Z}_p$ 中的元素为系数、关于 z,λ 的多项式。

定理 2.5。 设 $\ell=(\ell_1,\dots,\ell_k)$ 是一个具有正整数坐标的向量。若 $\lambda\in\mathbb{Z}_p$，则 $I^\ell(z,\lambda)$ 是模 p^s 的 *KZ* 方程 (2.6)的一个解。若 $\lambda\in\mathbb{Z}_p^\times$，则 $I^\ell(z,\lambda)$ 是模 p^s 的动力学方程 (2.7)的一个解。

我们称这类解为 KZ 方程与动力学方程联合系统的 p^s-超几何解 。

证明。 多项式 $\Psi_s(t,\ z,\ \lambda)$ 模 2.4）和（2.5）满足恒等式 p^s。取这些恒等式中 $t_1^{\ell_1 p^s-1}\dots t_k^{\ell_k p^s-1}$ 的系数，根据引理 t，关于 1.2的微分项便消失。这就证明了定理。 ■

注 2.6。 我们在第 1.7 节指出，定理 1.5 可通过将 p 替换为 p^r，推广为定理1.8。定理 2.5 也可用同样的方法推广。这个练习留给读者完成。

2.6 其他李代数的方程

KZ 方程与动力学方程针对任意单李代数 $\mathfrak{g}$ 都有定义；更一般地，对任意 Kac–Moody 代数也有定义，参见例如 [5, 14]。与第 2.5 节中的做法类似，我们可以构造这些 KZ 方程与动力学方程模 p^s 的多项式解。

模 p^s 情形下多项式解的构造 $\mathfrak{sl}_2$ 基于微分形式的代数恒等式（2.4）、（2.5）。对于任意 Kac–Moody 代数，这些代数恒等式已在 [5, 14]中得到发展。

qKZ 方程模 p^s 的解

在第1节和2节中，我们通过先对超几何解的被积函数作 p^s 近似，然后取近似后被积函数的泰勒展开中单项式 p^s的系数，构造了微分 KZ 方程和动力学方程模 $t^{\ell p^s-1}$ 的解。本附录将说明，同样的思路也可用于 qKZ 差分方程；不过，我们不是先考虑近似后被积函数的泰勒展开，再取单项式 $t^{\ell p^s-1}$ 的系数，而是先将p^s近似后的被积函数展开为 Pochhammer 多项式之和 $[t]_m$，然后取指标为 $m=\ell p^s-1$的 Pochhammer 多项式的系数。对于不含指数项的 qKZ 方程， [10]中介绍了这种方法。关于 qKZ 差分方程的超几何解，参见例如 [17, 19]。

本文仅考虑 qKZ 方程的一个简单示例，以说明这些构造。

A.1 BabyqKZ 方程

设 $f(t)$ 是一个亚纯函数，且 $a\in\mathbb{C}$。其和

$$\int_{(a)} f(t)\mathrm{d}_1 t:=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Res}_{t=a+n}f(t),$$

若有定义，则称为 Jackson 积分。若 $f(t)=g(t+1)-g(t)$ 是一个离散微分，则 Jackson 积分等于零。

考虑主函数

$$\Phi(t,z,\lambda)=\mathrm{e}^{\lambda t}\frac{\Gamma(t-z)^2}{\Gamma\left(t-z+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(t-z-\frac{1}{2}\right)} \tag{A.1}$$

和 Jackson 积分

$$I(z,\lambda)=\int_{(z)}\Phi(t,z,\lambda)\mathrm{d}t.$$

引理 A.1. 函数 $I(z,\lambda)$ 满足差分方程

$$\mathrm{e}^{\lambda}I(z-1,\lambda)=I(z,\lambda). \tag{A.2}$$

方程 (A.2) 是我们的基础 qKZ 方程，而函数 $I(z,\lambda)$ 是它的超几何解。更一般的 qKZ 方程及其超几何解可见于例如 [3, 6, 17, 19]。

证明。我们有

$$\Phi(t+1,z,\lambda)=\frac{\mathrm{e}^{\lambda}(t-z)^2}{\left(t-z+\frac{1}{2}\right)\left(t-z-\frac{1}{2}\right)}\Phi(t,z,\lambda),$$
$$\Phi(t,z-1,\lambda)=\frac{(t-z)^2}{\left(t-z+\frac{1}{2}\right)\left(t-z-\frac{1}{2}\right)}\Phi(t,z,\lambda),$$
$$\int_{(z)}\Phi(t+1,z,\lambda)d_1t=\int_{(z)}\Phi(t,z,\lambda)d_1t.$$

这些关系推出 (A.2)。 ■

A.2 Pochhammer 多项式

设 m 是一个正整数。定义 Pochhammer 多项式

$$(t)_m=\prod_{i=1}^{m}(t-i+1).$$

我们有

$$(t+1)_m=(t)_m\frac{t+1}{t-m+1},\qquad (t+1)_m-(t)_m=m(t)_{m-1}. \tag{A.3}$$

A.3 多项式 p^s-逼近

设 p 为奇素数。设 r_1, r_2 为互素正整数。记 $r=r_1/r_2$。假设 $r>1/(p-1)$。作变量代换 $\lambda\mapsto p^r\lambda$。则方程（A.2）化为：

$$\mathrm{e}^{p^r\lambda}I(z-1,\lambda)=I(z,\lambda). \tag{A.4}$$

对于任意正整数 s，定义主多项式

$$\Phi_{r,s}(t,z,\lambda)=E_{r,s}(p^r\lambda t)(t-z-1)_{\frac{p^s-1}{2}}(t-z-1)_{\frac{p^s+1}{2}}. \tag{A.5}$$

这是一个关于 t、z、λ 的多项式，其系数属于 $\mathbb{Z}_p\left[p^{1/r_2}\right]$。将其展开为变量 t 的 Pochhammer 多项式之和，

$$\Phi_{r,s}(t,z,\lambda)=\sum_d c_d(z,\lambda)(t)_d.$$

记作 $I_{r,\,s}(z,\ \lambda)=c_{p^s-1}(z,\ \lambda)$。

定理 A.2. 多项式 $I_{r,s}(z,\lambda)$ 是 p^s 模意义下的 *qKZ* 差分方程 (A.4)的一个解。

证明。 设 $F(t)=\sum_d a_d(t)_d$是一个多项式。记 $\mathrm{Coef}(F)=a_{p^s-1}$。我们有

$$\Phi_{r,s}(t+1,z,\lambda)=\frac{E_{r,s}(p^r\lambda)(t-z)^2}{\left(t-z-\frac{p^s-1}{2}\right)\left(t-z-\frac{p^s+1}{2}\right)}\Phi_{r,s}(t,z,\lambda),$$
$$\Phi_{r,s}(t,z-1,\lambda)=\frac{(t-z)^2}{\left(t-z-\frac{p^s-1}{2}\right)\left(t-z-\frac{p^s+1}{2}\right)}\Phi_{r,s}(t,z,\lambda),$$
$$\mathrm{Coef}(\Phi_{r,s}(t,z,\lambda))\equiv\mathrm{Coef}(\Phi_{r,s}(t+1,z,\lambda))\pmod{p^s},\tag{A.6}$$

其中同余式（A.6）由（A.3）可得。因此

$$E_{r,s}(p^r\lambda)I_{r,s}(z-1,\lambda)\equiv I_{r,s}(z,\lambda)\pmod{p^s},$$

且 $I_{r,s}(z,\lambda)$ 是 qKZ 方程（p^s）模 A.4 的一个解。 ■

更一般的 qKZ 方程可由多重 Jackson 积分给出，其被积函数是指数因子与伽马函数比值的乘积，如（A.1）所示。为构造 qKZ 方程模 p^s 多项式解，我们将被积函数中的指数因子替换为相应函数的乘积$E_{r,s}(t)$，将伽马函数比值替换为相应的 Pochhammer 多项式，如（A.5）所示；将结果展开为 Pochhammer 多项式，并取该展开中的适当系数，如定理 A.2 所示。

致谢

Pavel Etingof 部分获得了美国国家科学基金会 DMS-1916120 号资助，Alexander VARCHENKO 部分获得了美国国家科学基金会 DMS-1954266 号资助。

参考文献

[1] Christe P., Flume R., 《二维共形不变场论中有限算子代数的识别》, *Phys. Lett. B* **188** (1987), 219–225.[2] Date E., Jimbo M., Matsuo A., Miwa T., 《超几何型积分与 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ Knizhnik–Zamolodchikov 方程》, *Internat. J. Modern Phys. B* **4** (1990), 1049–105.[3] Etingof P., Frenkel I.B., Kirillov Jr. A.A., 《表示论与 Knizhnik–Zamolodchikov 方程讲义》, *Math. Surveys Monogr.*, 第58卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯, 1998.[4] Etingof P., Varchenko A., 《动力学 Weyl 群及其应用》, *Adv. Math.* **167**(2002), 74–127, arXiv:math.QA/0011001.[5] Felder G., Markov Y., Tarasov V., Varchenko A., 《与 KZ 方程相容的微分方程》, *Math. Phys. Anal. Geom.* **3** (2000), 139–177, arXiv:math.QA/0001184.[6] Frenkel I.B., Reshetikhin N.Yu., 《量子仿射代数与全纯差分方程》, *Comm. Math.Phys.* **146** (1992), 1–60.[7] Knizhnik V.G., Zamolodchikov A.B., 《二维流代数与 Wess–Zumino 模型》, *NuclearPhys. B* **247**(1984), 83–103.[8] Markov Y., Tarasov V., Varchenko A., 《超几何周期矩阵的行列式》, *Houston J. Math.*24 (1998), 197–220, arXiv:alg-geom/9709017.[9] Maulik D., Okounkov A., 《量子群与量子上同调》, *Astérisque* **408** (2019), ix +209页, arXiv:1211.1287.[10] Mukhin E., Varchenko A., 《模整数的 $\mathfrak{sl}_2$ qKZ 方程的解》, arXiv:2208.09721.

[11] Okounkov A., Smirnov A., 《中岛簇的量子差分方程》, *Invent. Math.* **229** (2022), 1203–1299, arXiv:1602.09007.[12] Rim´anyi R., Varchenko A., 《 $\mathbb{F}_p$-型塞尔贝格积分》, A_n, *Lett. Math. Phys.* **111** (2021), 71, 24页, arXiv:2012.01391.[13] Schechtman V., Varchenko A., 《WZW模型中 N点共形关联函数的积分表示》, 预印本 MPI/89-51, 马克斯·普朗克研究所, 波恩, 1989.[14] Schechtman V., Varchenko A., 《超平面配置与李代数同调》, *Invent. Math.* **106** (1991), 139–194.[15] Schechtman V., Varchenko A., 《模 p的 KZ 微分方程的解》, *Ramanujan J.* **48** (2019), 655–683, arXiv:1707.02615.[16] Smirnov A., Varchenko A., 《通过 $3D$-镜像对称的 p-进顶点函数近似》, arXiv:2302.03092.[17] Tarasov V., Varchenko A., 《 q-超几何函数的几何: 连接杨量子群与量子仿射代数的桥梁》, *Invent. Math.* **128** (1997), 501–588, arXiv:q-alg/9604011.[18] Tarasov V., Varchenko A., 《Knizhnik–Zamolodchikov 方程与动力学方程的对偶》, *Acta Appl. Math.* ( ), – **73** 2002 141 154, 0112005 arXiv:math.QA/ .[19] Tarasov V., Varchenko A., 《部分旗簇的朗道–金兹堡镜像、量子微分方程与 qKZ 差分方程》, *J. Geom. Phys.* **184** (2023), 104711, 58页, arXiv:2203.03039.[20] Varchenko A., 《多维超几何函数与李代数及量子群的表示论》, *Adv. Ser. Math. Phys.*, 第21卷, 世界科学出版公司, 新泽西州里弗埃奇, 1995.[21] Varchenko A., 《特殊函数、KZ 型方程与表示论》, *CBMS Reg. Conf. Ser.* , 美 *Math.* 98, 2003 国数学会卷, 罗得岛州普罗维登斯, .[22] Varchenko A., 《模 p^s的动力学方程与qKZ方程: 一个例子》, *Math. Notes* **112** (2022), 1003–1016, arXiv:2205.03980.[23] Varchenko A., 《模 p^s 的 KZ 方程的解札记与 p-进极限 $s \to \infty$ 》（附录由 Steven Sperber 和 Varchenko 撰写）, 载于《超几何、可积性与李理论》, *Contemp. Math.*, 第780卷, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2022, 309–347, arXiv:2103.01725.[24] Varchenko A., Zudilin W., 《Hasse–Witt矩阵的同余与 p-进 KZ 方程的解》, arXiv:2108.12679.