arXiv:2304.07868v1 [math.CO] 16 Apr 2023

格拉姆伴矩阵、奇异值的符号变换与同构*

Sooyeong Kim*, Steve Kirkland

Department of Mathematics, University of Manitoba, Winnipeg MB, R3T 2N2, Canada

摘要

我们研究不同的 (0, 1) 矩阵 A 和 B，称为格拉姆伴矩阵，满足$AA^T = BB^T$ 和 $A^TA = B^TB$。我们刻画了这样一类格拉姆伴矩阵：其中一个可以通过改变若干正奇异值的符号从另一个得到。我们对差的秩至多为 2 的格拉姆伴矩阵进行了分类。在这类格拉姆伴矩阵中，我们进一步给出了等价条件，以判定其中一个是否能通过改变至多 2 个正奇异值的符号从另一个得到。此外，我们还提供了一些工具，用于构造差的秩大于 2 的格拉姆伴矩阵。最后，我们刻画了差的秩为 1 且满足某些附加条件的非同构格拉姆伴矩阵。

关键词：零一矩阵、格拉姆伴矩阵、奇异值、奇异向量、同构

2010年 MSC：91D30,15A18

1. 引言

社会网络的定量分析是一门蓬勃发展的学科。社会网络中的二模网络描述行动者与事件之间的关系。(0, 1) 矩阵 A 可以表示二模网络，其中 A 的行和列分别代表行动者和事件；如果某个行动者参加了某个事件，则矩阵中对应位置为 1，否则为 0（关于二模网络的入门资料，见 [6] ）。研究二模网络的一种基本方法是所谓的转换方法 [1], ，即通过考察相关的（单模）矩阵 AA^T 和 A^TA来分析 A 的特征。然而，我们如何确保转换方法保留了 A的信息？换言之，是否存在

*资助：本研究得到曼尼托巴大学研究生奖学金以及加拿大自然科学与工程研究委员会探索研究基金的资助，基金编号为 RGPIN–2019–05408。

*通讯作者*Email addresses:* kims3428@myumanitoba.ca (Sooyeong Kim),Stephen.Kirkland@umanitoba.ca (Steve Kirkland)

另一个 (0, 1) 矩阵 B，使得 $AA^T = BB^T$和 $A^TA = B^TB$；此外，这样的 B 是否可能无法通过对 A 的行和列进行置换而得到?

本文研究了称为 Gram 同伴的 (0, 1) 矩阵对 A and B，满足 $AA^T = BB^T$、 $A^TA = B^TB$和 $A \neq B$。这项研究源于 [4] 中的一个问题，即转换方法是否会丢失二模网络的结构特征，并在数学上由 [8]确立。在[4], 中，研究展示了如何在特定情况下从 AA^T和 A^TA重构 (0, 1) 矩阵 A，以及非同构的 Gram 同伴 A 和 B 如何导致“ A信息的数据丢失”。为明确说明本文的工作，我们简要介绍从 AA^T 和 A^TA重构 A 的方法，以及 [4]中的推测。对于从 AA^T和 A^TA重构 A，使用奇异值分解如下：假设 A 具有互不相同的正奇异值，对于固定的 A 的奇异向量（其除符号外唯一确定），我们改变部分奇异值的符号，直到通过奇异值分解得到一个 (0, 1) 矩阵，或者直到无法得到 (0, 1) 矩阵为止。 [4] 推测，通过这种重构得到的矩阵具有极高概率是同构的。

Kirkland [8] 提出了系统研究一对格拉姆伴矩阵的技术。其中一种技术是考虑一个 (0, 1, -1) 矩阵 E，并研究格拉姆伴矩阵 A和 $A+E$。我们运用这一技术来理解 (0, 1) 矩阵 A 和 B之间的关系，其中 B 是通过改变A 的某些正奇异值的符号得到的。此外，针对这一猜想，我们给出了具有这一性质的无穷多个非同构格拉姆伴矩阵对。

除了受 [4], 启发的研究之外，我们还研究了格拉姆伴矩阵对的若干族。Kirkland [8] 的一个结果表明，随机给定两个尺寸相同且足够大的 (0, 1) 矩阵，它们互为格拉姆伴矩阵的概率“非常”小。因此，我们根据矩阵之差的秩给出了无穷多个格拉姆伴矩阵对。此外，我们还利用这些矩阵族提供了构造其他矩阵族的方法。

本文将在各节讨论以下内容。第3节中，我们刻画重构得到的矩阵，无论它们是否具有互不相同的正奇异值（定理3.9和推论 3.10）。第4节确定了所有满足 $A-B$ 的秩至多为 2 的格拉姆伴矩阵 A 和 B （定理4.7、4.15和4.22）。此外，我们给出了等价条件，用以判定 A 是否可由 B 通过改变 A 至多两个正奇异值的符号得到（定理4.7、4.19和4.36）。第5节中，我们提供了若干工具，用于获得满足 $A - B$ 的秩大于 2 的格拉姆伴矩阵 A 和 B。第6节展示了若干对非同构格拉姆伴矩阵 A和 B，它们满足一些附加条件，且 $A - B$ 的秩为 1（命题6.5和定理6.10）。

2. 预备知识

定义 2.1。设 A 和 B 为(0, 1) 矩阵。若 A 、 B 和 A、 B 满足 $AA^T = BB^T$、$A^TA = B^TB$和 $A \neq B$, 则称 A 和 B 为格拉姆伴矩阵，并称 A 为 B 的格拉姆同伴。

定义 2.2. 设 A 和 B 是 (0, 1) 矩阵。如果存在置换矩阵 P 和 Q 使得 $B = PAQ$, 则称矩阵 A 和 B 同构。

容易验证， A 和 B 是 Gram 同伴，当且仅当对于适当尺寸的任意置换矩阵 P 和 Q， PAQ 和 PBQ 是 Gram 同伴； A 和 B 是 Gram 同伴，当且仅当 A^T 和 B^T 是 Gram 同伴。因此，当我们需要根据 Gram 同伴来简化某个命题的部分假设，以便在不损失该命题一般性的情况下聚焦于特定情形时，就会使用这些陈述。

我们有一个基本观察 [8] ： Gram 同伴 A 和 B 必须具有相同的行和向量及相同的列和向量。因此， $A-B$ 和 $B-A$ 都是 (0, 1, -1) 矩阵，其行和向量及列和向量均为 0。

定义 2.3. 设 E 是一个 (0, 1, -1) 矩阵，满足 $E\mathbf{1} = 0$ 和 $\mathbf{1}^TE = 0^T$。如果存在一对 Gram 同伴 A 和 $A+E$, 则称矩阵 E 是可实现的（关于 Gram 同伴）。如果 A 和 B 是 Gram 同伴，且 $A-B=E$ 或 $B-A=E$, 则称 A 和 B 通过 E 成为 Gram 同伴。

显然，零矩阵不可实现。容易看出， E 可实现，当且仅当对于任意适当尺寸的置换矩阵 P和 Q， PEQ 均可实现； E 可实现，当且仅当 E^T 可实现。

我们将介绍一些矩阵理论中的记号。设 A 是一个 $m \times n$矩阵。令 $\alpha \subset \{1, \ldots, m\}$和 $\beta \subset \{1, \ldots, n\}$。我们用 $A[\alpha, \beta]$ 表示 A 的子矩阵，其行和列分别由 α 和 β索引。令 α^c 表示 α的补集。我们用 $\mathbf{1}_n$ 表示尺寸为 n的全 1 列向量，用 I_n 表示尺寸为 $n \times n$ 的单位矩阵，并用 $J_{n,m}$ 表示尺寸为 $n \times m$ 的全 1 矩阵。如果 $k = n = m$, 则用 J_k表示 $J_{n,m}$。若从上下文中可以明确其尺寸，则省略 $\mathbf{1}_n$,I_n, $J_{n,m}$ 和 J_k 的下标。我们还用$\mathbf{0}_n$ 表示尺寸为 n的全零列向量。从上下文中含义明确时，我们将 $\mathbf{0}_n$ 记作 0。主对角块为方阵 A_1、……、A_k 的分块对角矩阵记作 diag(A_1、……、 A_k)。特别地，如果所有主对角块都是标量，则该矩阵为对角矩阵。对于 $\mathbb{R}^n$中的子集 X ，我们将由 X 张成的子空间记作 span(X)。我们用 Row(A) 和 Col(A)分别表示 A 的行空间和A的列空间。 A 的秩记作 rank(A)。

以下内容将在第3节中使用。

命题 2.4. *[7]*设 $\ell \geq 1$, 且令 D =diag($d_1I_{k_1}, \ldots, d_\ell I_{k_\ell}$), 其中$d_1$、……、 d_ℓ 互不相同，并且对于 $i = 1$、……、ℓ有 $k_i \geq 1$。假设 A与 D可交换，且 A 是正交的。那么， A 是一个与 D 的划分相容的分块对角矩阵，使得 A 的每个主对角块都是正交的。

命题 2.5. *[11]* 设 A 和 B 是尺寸相容的矩阵，以便定义 AB 。那么，

$$\mathrm{Col}(AA^T) = \mathrm{Row}(AA^T) = \mathrm{Col}(A),\ \mathrm{Col}(A^TA) = \mathrm{Row}(A^TA) = \mathrm{Row}(A),$$
$$\mathrm{Col}(AB) \subseteq \mathrm{Col}(A).$$

此外，如果 AB的秩为 k，那么 A中存在 k列 a_1、...、a_k，它们构成 Col(AB) 的一组基。

我们简要介绍奇异值分解（SVD）[7]，它是实矩阵（或复矩阵）的一种因式分解。我们还陈述一个关于若干正奇异值符号改变的基本观察。我们关注的是零一矩阵，因此假设矩阵为实矩阵。给定一个 $m\times n$矩阵A，存在 $m\times m$和 $n\times n$ 正交矩阵 U 和 V，分别满足 $A = U\Sigma V^T$，其中 $m\times n$ 为某个对角矩阵，其主对角线上的元素按非递增顺序排列且均为非负数。 Σ 的对角元素称为 A的奇异值。 U 的列和 V的列分别称为 A的左奇异向量和右奇异向量。注意，A 的正奇异值个数等于 rank(A)。

假设 B 是由 A 将若干正奇异值的符号改变后得到的。那么， B可写为 $B = US\Sigma V^T$，其中 S是一个对角矩阵，其主对角线上的元素由 r −1个「−1」和 $m-r$ 个 1 组成，$\widetilde{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$，其中 r 为某个数。令 $U = US$。显然，U是正交矩阵，因此$\widetilde{U}\Sigma V^T$是 B的奇异值分解。由于 $S\Sigma\Sigma^TS^T = \Sigma\Sigma^T$和 $\Sigma^TS^TS\Sigma = \Sigma^T\Sigma$，我们有 $AA^T = BB^T$和 $A^TA = B^TB$。此外，由于$A - B = U($ $\Sigma - S\Sigma)V^T$且 $\Sigma - S\Sigma \neq 0$，我们有 $A - B \neq 0$。

注 2.6. 继续讨论上文的 A 和 $B = US\Sigma V^T$， S 对 A 与 B之间的关系给出了不同的解释。例如，若 S 由 $S =$ diag($-1,-1,1,\ldots,1$) 给出，那么我们可以说，A 是通过改变前两个奇异值的符号从 B 得到的；也可以说，是通过改变前两个左奇异向量或右奇异向量的符号得到的；或者是通过改变第一个左奇异向量和第二个右奇异向量（反之亦然）的符号得到的。为避免因选择哪些奇异向量来改变符号而产生混淆，我们采用“改变奇异值的符号”这一解释，尽管 A 和 B 具有相同的奇异值。

引理 2.7. 设 A 是一个 $m\times n$ (0, 1) 矩阵。若 B 是通过改变 A 的某些正奇异值的符号从 A 得到的，则 $AA^T = BB^T$、 $A^TA = B^TB$ 和 $A \neq B$。

注 2.8. 对于引理 2.7 的结果，若 B 不是 0-1 矩阵，则 A 和 B 不是格拉姆伴矩阵。

3. 格拉姆伴矩阵与奇异值分解

命题 3.1. 设 A和 B是 $m\times n$实矩阵，且 $\sigma_1,\ldots,\sigma_\ell$是 A 的互异奇异值（不一定按非递增顺序排列），其中

$\ell \geq 1$。那么，$AA^T = BB^T$和 $A^TA = B^TB$成立当且仅当存在正交矩阵 U_1, U_2 以及某个正交 V，使得 $A = U_1\Sigma V^T$, $B = U_2\Sigma V^T$,$U_1 = U_2$diag$(W_1, \ldots, W_\ell)$，其中对于 $i = 1, \ldots, \ell$，W_i是一个 $m_i \times m_i$正交矩阵，而 m_i 是 σ_i 作为奇异值时的重数。（这里，0 作为奇异值的重数与 0 作为 AA^T的特征值的重数相同。）

证明。由奇异值分解可从 $A^TA = B^TB$ 得出，存在一个 $n \times n$ 正交矩阵 V，使得 $A = U_1\Sigma V^T$ 且 $B = U_2\Sigma V^T$，其中 $m \times n$ 是某个矩形对角矩阵，Σ，而 $m \times m$ 和 U_1 是正交矩阵。由于 $AA^T = BB^T$，我们有 $U_2^TU_1\Sigma\Sigma^T = \Sigma\Sigma^TU_2^TU_1$。由命题 2.4 可得所需结论。

逆命题的证明很简单 . □

注记 3.2。在命题 3.1 的证明中，先考虑 $AA^T = BB^T$ 而非 $A^TA = B^TB$，我们可以为 A 和 B 固定相同的左奇异向量。因此可以推得，存在正交矩阵 V_1、V_2 以及某个正交的 U，使得 $A = U\Sigma V_1^T$、$B = U\Sigma V_2^T$、$V_1 = V_2$diag$(W_1, \ldots, W_\ell)$，其中 ℓ 是互异奇异值的个数，W_i 是一个 $m_i \times m_i$ 正交矩阵，而 m_i 是 σ_i 作为 $i = 1$、...、ℓ 的奇异值时的重数。（这里，0 作为奇异值的重数与 0 作为 A^TA 的特征值的重数相同。）

命题 3.3。设 E 是一个可实现矩阵，且 $(A, A + E)$ 是一对格拉姆伴矩阵。对于 $\mathbf{x} \in$ Row(E)，有 $A\mathbf{x} \in$ Col(E)；对于 $\mathbf{y} \in$ Col(E)，有 $A^T\mathbf{y} \in$ Row(E)。

证明。由于 $AA^T = (A + E)(A + E)^T$，我们有 $AE^T = -E(A^T + E^T)$。因此，对于任意 i^{th} 行向量 $\mathbf{x}_i^T$of E，有 $A\mathbf{x}_i \in$ Col(E)。类似地，$A^TE = -E^T(A + E)$ 意味着，对于任意 i^{th} 列向量 $\mathbf{y}_i$ of E，有 $A^T\mathbf{y}_i \in$ Row(E)。因此，我们得到了所需的结论。 □

引理 3.4。设 E 是一个秩为 k 的可实现矩阵，且 $(A, A + E)$ 是一对格拉姆伴矩阵。那么，存在 k 个 A 的正奇异值，使得其对应的右（分别为左）奇异向量集合是 Row(E)（分别为 Col(E)）的基。

证明。根据命题 3.1，存在正交矩阵 U_1、U_2 和 V，使得 $A = U_1\Sigma V^T$ 和 $A + E = U_2\Sigma V^T$，其中 Σ 是某个矩形对角矩阵。于是，$EV = (U_2 - U_1)\Sigma$。由于 $A^TA = (A + E)^T(A + E)$，我们得到 $E^TE = -A^TE - E^TA$。在 $-A^TE - E^TA$ 中分别用 $V\Sigma^TU_1^T$ 和 $V\Sigma^T(U_2 - U_1)^T$ 替换 A^T 和 E^T，得到

$$E^TE = V(-\Sigma^TU_1^TE - \Sigma^T(U_2 - U_1)^TA).$$

根据引理 2.5，Col(E^TE) = Row(E)。由于 rank(E) = k，rank(E^TE) = k。再次根据引理 2.5，$V(-\Sigma^TU_1^TE - \Sigma^T(U_2 - U_1)^TA)$ 的列空间由 k 列 $\mathbf{v}_1$、...、$\mathbf{v}_k$ of V 张成；因此，向量 $\mathbf{v}_1$、...、$\mathbf{v}_k$ 构成 Row(E) 的一个基。此外，对于任意属于 Row(E) 的右奇异向量 $\mathbf{v} \notin$，$\mathbf{v}$ 是

与 Row(E) 正交的。因此，$E\mathbf{v} = 0$。EV 的秩为 k，所以对于$i = 1$、...、k，$E\mathbf{v}_i \neq 0$。考虑 $EV = (U_2 - U_1)\Sigma$，对于 $i = 1$、...、k，与 $\mathbf{v}_i$ 对应的奇异值必须为正。

根据命题 3.3，$A\mathbf{v}_i \in$ Col(E)，其中 $i = 1, \ldots\ldots, k$。注意 $AV = U_1\Sigma$。由于 $A\mathbf{v}_1, \ldots\ldots, A\mathbf{v}_k$ 线性无关，且秩(E) $= k$，因此集合 $A\mathbf{v}_1, \ldots\ldots, A\mathbf{v}_k$ 是 Col(E) 的一组基。由此可得我们所需的结论。 □

给定一个 (0, 1) 矩阵 A，设 B 是由 A 改变若干个正奇异值的符号得到的 (0, 1) 矩阵。由于 A 和 B 都是 (0, 1) 矩阵，根据引理 2.7 A ， B 是格拉姆伴矩阵。假设 $\mathbf{v}$ 是对应于其中一个奇异值的右奇异向量。那么，$A\mathbf{v} = -B\mathbf{v}$，因此 $(A + B)\mathbf{v} = 0$。根据引理 3.4，$\mathbf{v}$ 或者属于 Row($A - B$)，或者属于 Row($A - B$)。我们将考察 $\mathbf{v}$ 与 Row($A - B$) 之间的关系。

注 3.5. 假设 B 是通过改变某个 $k \geq 1$ 的 A 的正奇异值 σ_1、.....、σ_k 的符号得到的。根据注 2.6 可知，在从 A 得到 B 的过程中，将 σ_1、.....、σ_k 的符号取反，等价于改变 $i = 1$、.....、k 对应的 A 的左奇异向量或右奇异向量之一的符号。

命题 3.6. 设 E 是一个秩为 k 的 $m \times n$ 可实现矩阵，且 A 是一个 (0, 1) 矩阵，使得 $A + E$ 是一个 (0, 1) 矩阵。那么，以下条件等价:

(a) ($A, A + E$) 是一对格拉姆伴矩阵，且 $(2A + E)E^T = 0$,

(b) $A + E$ 是通过改变某些正奇异值的符号从 A 得到的。

此外，若 (a) 和 (b) 中有一个成立，则满足以下条件:

(i) 符号发生改变的正奇异值的数量等于 rank(E),

(ii) A 中符号发生改变的正奇异值与 $-\frac{1}{2}E$ 的 k 正奇异值相同，并且

(iii) A 对应的左（分别为右）奇异向量可以由 $-\frac{1}{2}E$ 对应的左（分别为右）奇异向量得到。这意味着，A 对应的左（分别为右）奇异向量构成 Col(E)（分别为 Row(E)）的一组基。

证明。设 ($A, A + E$) 是一对格拉姆伴矩阵，且 $(2A + E)E^T = 0$。根据命题 3.1，存在正交矩阵 U_1、U_2 和 V，使得$A = U_1\Sigma V^T$ 且 $A + E = U_2\Sigma V^T$，其中 Σ是某个矩形对角矩阵。令 $k =$ rank(E)。根据引理 3.4，存在矩阵 A 的右奇异向量 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$，它们对应正奇异值 $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$，并构成 Row($E$) 的一组基。由于 ($2A + E)E^T = 0$，对于 $i = 1, \ldots, k$，有 $(2A + E)\mathbf{v}_i = 0$。于是，我们有 $E\mathbf{v}_i = -2A\mathbf{v}_i = -2\sigma_i\mathbf{u}_i$，其中 $\mathbf{u}_i$ 是 A 的一个左奇异向量

对应于 σ_i。此外，对于 Row(E) 中的任意右奇异向量 v $\notin$ ，Ev $=0$。于是，不失一般性，我们有

$$EV = -2\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_k & 0\end{bmatrix}\Sigma.$$

由于 $E=(U_2-U_1)\Sigma V^T$，我们有 $(U_2-U_1)\Sigma = -2\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \cdots \mathbf{u}_k & 0\end{bmatrix}\Sigma$。如果 AA^T 是奇异的，那么我们可以为 A 和 $A+E$ 选取对应于奇异值 0 的相同左奇异向量。因此，$U_2 - U_1 = -2\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \cdots \mathbf{u}_k & 0\end{bmatrix}$。由注 3.5 可知，$A+E$可由 A 改变 σ_1、.....、σ_k 的符号得到。此外，对 Row(E) 的正交补的一组基应用格拉姆–施密特正交化过程，可得到一组标准正交基，记为 $\{\tilde{\mathbf{u}}_{k+1}$、.....、 $\tilde{\mathbf{u}}_m\}$。于是，

$$-E = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_k & \tilde{\mathbf{u}}_{k+1} & \cdots & \tilde{\mathbf{u}}_m\end{bmatrix}(2\widetilde{\Sigma})V^T$$

~ ~其中 $\Sigma =$ diag(σ_1, ..., σ_k, 0, ..., 0)。将 Σ 的对角元素按非递减顺序重新排列，可得到 $-E$ 的一个奇异值分解。因此，$2\sigma_1$、.....、$2\sigma_k$ 是 $-E$ 的正奇异值。

假设通过改变某个 $\ell > 0$ 的 ℓ 个正奇异值的符号，得到 $A+E$。根据引理 2.7，A 和 $A+E$ 是格拉姆伴矩阵。根据注记 3 5, U U V $A =$，存在正交矩阵 、 和 ，使得 ，并且对于某个矩形对角矩阵 ，有 ，其中该矩阵是通过改变 U 中的符号得到的。不失一般性，改变 U 的前 ℓ 列 u1, . . . , u$_\ell$ 的符号。令 $\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell$ 为相应的正奇异值。那么，$E = (\widetilde{U} - U)\Sigma V^T = -2\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \cdots \mathbf{u}_\ell & 0\end{bmatrix}\Sigma V^T$。因此，$E$ 的每一行都是 V^T 的前 ℓ 行 v$_1^T, \ldots,$ v$_\ell^T$ 的线性组合。因此，Row(E) $=$span{v1 . . . , v$_\ell$}，这意味着 $\ell = k =$rank(E)。此外，$EV = (U-U)\Sigma$，因此我们有 Ev$_i = -2\sigma_i$u $_i = -2A$v$_i$，其中 $i = 1, \ldots, k$。所以，对于 $i = 1, \ldots, k$，$(2A+E)$v$_i = 0$。因此，($2A+E)E^T = 0$。此外，对 $-E$ 求奇异值分解时应用上述相同论证，可知 (ii) 和 (iii) 成立。 □

注 3.7. 通过与命题 3.6 证明中类似的论证，可以证明：(A)、($A+E$) 是一对格拉姆伴矩阵，$E^T(2A+E) = 0$，且$k =$ 秩(E) 当且仅当对于一个 (0, 1) 矩阵 A, (0, 1) 矩阵 $A+E$ 可由 A改变 k个正奇异值的符号得到。对于逆向的证明，可以从 ~$A = U\Sigma V^T$ $A+E = U\Sigma\widetilde{V}^T$ 开始，并取某些正交矩阵 U、 V 和 V，其中 V 可由 V改变对应于 k 个正奇异值的 k 列的符号得到。

注 3.8. 设 E 是秩为 k 的可实现矩阵，且 ($A, A+E$) 是一对格拉姆伴矩阵。假设 ($2A+E)E^T = 0$。那么，rank($2A+E$) $\leq n-k$。A 的右奇异向量中，有 k 个对应于正奇异值，并构成 Row(E) 的一组基。因此，对于任意属于 Row(E) 的右奇异向量 v $\notin$ ，都有 Ev $= 0$。由此可得，对于 x $\notin$ Row(E)，有 Ex $= 0$。因此，A^TA 是奇异的，当且仅当 rank($2A+E$) $< n-k$。此外，rank($2A+E$) $= n-k-l$，其中 l 是 A^TA 的零度。

定理3.9. 设 E 是秩为 k 的可实现矩阵，并设 A 是一个 (0, 1) 矩阵，使得 $A+E$ 是一个 (0, 1) 矩阵。那么，以下条件等价:

(i) $(A, A+E)$ 是一对格拉姆伴矩阵，且 $(2A+E)E^T = 0$。

(ii) $(A, A+E)$ 是一对格拉姆伴矩阵，且 $E^T(2A+E) = 0$。

(iii) $A+E$ 是通过改变 A 的 k 个正奇异值的符号得到的。（这里的 k 个正奇异值与 $-\frac{1}{2}E$ 的相同。）

(iv) 存在 A 的 k 个对应于正奇异值的右奇异向量 $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_k$，使得向量 $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_k$ 构成 Row(E) 的一组基，且对于 $i = 1, \ldots, k$，v_i 是 $2A+E$ 的零向量。（这里的 $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_k$ 可以由 $-\frac{1}{2}E$ 的正奇异值所对应的右奇异向量得到。）

(v) 存在 A 的 k 个对应于正奇异值的左奇异向量 $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_k$，使得向量 $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_k$ 构成 Col(E) 的一组基，且对于 $i = 1, \ldots, k$，u_i 是 $(2A+E)^T$ 的零向量。（这里的 $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_k$ 可以由 $-\frac{1}{2}E$ 的正奇异值所对应的左奇异向量得到。）

(vi) $(A, A+E)$ 是一对格拉姆伴矩阵，且 AE^T 是对称的。

(vii) $(A, A+E)$ 是一对格拉姆伴矩阵，且 A^TE 是对称的。

证明。(i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)：由命题 3.6 和注 3.7 可知。

(i) $\Leftrightarrow$ (iv) 和 (ii) $\Leftrightarrow$ (v)：利用引理 3.4 和命题 3.6，证明显而易见。

(i) $\Leftrightarrow$ (vi) 和 (ii) $\Leftrightarrow$ (vii)：由于 $AA^T = (A+E)(A+E)^T$，因此有 $AE^T + EA^T + EE^T = 0$。于是，$(2A+E)E^T = 0$ 意味着 $EA^T = AE^T$，反之亦然。同样，由 $A^TA = (A+E)^T(A+E)$，我们可得 (ii) $\Leftrightarrow$ (vii)。 □

定理3.9 可以针对格拉姆伴矩阵 A 和 B重新表述。

推论 3.10. 设 A 和 B 是具有 $A \neq B$的 (0, 1) 矩阵，且 k =秩$(A-B)$。那么，以下条件等价:

(i) (A, B) 是一对格拉姆伴矩阵，且 $(A+B)(A-B)^T = 0$。

(ii) (A, B) 是一对格拉姆伴矩阵，且 $(A-B)^T(A+B) = 0$。

(iii) 通过改变 A的 k 个正奇异值的符号可得到 B。（这里的 k 个正奇异值与$_1$ $_2(A-B)$ 的正奇异值相同。）

(iv) 存在 k A 的右奇异向量 $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_k$，它们对应于正奇异值，且向量 $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_k$ 构成 Row($A-B$) 的一组基，而 v_i 对于 $i = 1, \ldots, k$ 是 $A+B$ 的零向量。（这里，$\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_k$ 是由与 $_1$ $_2(A-B)$ 的正奇异值相对应的右奇异向量得到的。）

(v) 存在 k A 的左奇异向量 $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_k$，它们对应于正奇异值，且向量 $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_k$ 构成 Col$(A-B)$ 的一组基，而 u_i 对于 $i = 1, \ldots, k$ 是 $(A+B)^T$ 的零向量。（这里，$\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_k$ 是由与 $_1{}_2(A-B)$ 的正奇异值相对应的左奇异向量得到的。）_

(vi) (A, B) 是一对格拉姆伴矩阵，并且 $A(A-B)^T$ 是对称的。

(vii) (A, B) 是一对格拉姆伴矩阵，并且 $A^T(A-B)$ 是对称的。

定义 3.11. 设 A 是一个矩形（0, 1）矩阵。如果存在一个（0, 1）矩阵 B，它是通过对某个 $k \geq 1$ 的 k 个正奇异值（可能重复）改变符号而从 A 得到的，则称矩阵 A 可转换为 B。这样的 A 和 B 称为可转换 Gram 同伴。设 v_1、. . .、v_k 是 A 的右奇异向量，对应于符号发生改变的 k 个奇异值。我们称这 k 个正奇异值为格拉姆伴矩阵 A 和 B 的 Gram 奇异值（分别对应于 v_1、. . .、v_k）。如果 A 可转换，则称矩阵 A 具有 Gram 奇异值。

注 3.12. 为了阐明定义 3.11，考虑一个可转换为 B 的（0, 1）矩阵 A。尽管为了得到 B，改变了 A 的某个 $k \geq 1$ 个正奇异值的符号，但根据注 3.5 A， B 具有相同的奇异值。通过改变 B 的 k 个奇异值的符号，我们可以从 B 得到 A。因此， B 可转换为 A。所以，我们可以使用“可转换 Gram 同伴”这一术语。

设 $A = U\Sigma V^T$，其中 U 和 V 是正交矩阵， Σ 是矩形对角矩阵。假设存在两种方法，通过改变 Σ 中 k 个正对角元素的符号，从 A 得到 B，分别记为 $B = U\Sigma_1 V^T$ 和 $B = U\Sigma_2 V^T$。显然， $\Sigma_1 = \Sigma_2$。因此，如果 A 可转换为 B，那么 A 中符号发生改变的 k 个正奇异值及其对应的奇异向量是唯一确定的。因此，我们可以使用“ A 和 B 的 Gram 奇异值”这一术语。此外，如果 Gram 奇异值中有重复值，那么我们需要指出 Σ 主对角线上与重复值对应的位置中，哪些位置的符号发生改变。因此，如果 Gram 奇异值不互异，就需要指定相应的右奇异向量（或左奇异向量）。

注 3.13. 设 A 和 B 是满足 $A \neq B$ 的 (0, 1) 矩阵。如果推论 3.10 中的某个条件成立，那么 A 和 B 是可转换 Gram 同伴；此外， A 中与 A 和 B 的 Gram 奇异值对应的所有奇异向量，都可以由 $_1{}_2(A-B)$ 的所有正奇异值所对应的奇异向量得到。利用定理3.9，通过可实现矩阵 E，可以对格拉姆伴矩阵 A 和 $A+E$ 得到类似结果。

例 3.14. 假设 (0, 1) 矩阵 Q 是单位矩阵 I 的格拉姆伴矩阵。显然， $Q \neq I$ 和 Q 是置换矩阵。根据推论 3.10 的 (vi)， Q 可转换为 I 当且仅当 $I(I-Q)^T$ 是对称的，即 Q 是对称的。因此， I 的任何不可转换格拉姆伴矩阵都是非对称置换矩阵。

例 3.15. 设 $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix}$ 是一个 (0, 1) 矩阵，其中 A_1 和 A_2 尺寸相同，且 $A_1 \neq A_2$。可以验证，$B = \begin{bmatrix} A_2 & A_1 \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix}$ 是 A 的格拉姆伴矩阵。此外，可以验证 $(A + B)(A - B)^T = 0$。由于推论 3.10 的条件 (i) 成立，A 和 B 是可转换的格拉姆伴矩阵。此外，由 $A-B$ 的结构可知，A 和 B 的格拉姆奇异值可由 $A_1 - A_2$ 的 k 个正奇异值获得，其中$k =$ 秩$(A_1 - A_2)$。

4. 通过秩为 1 和 2 的可实现矩阵构造格拉姆伴矩阵

本节将完整刻画 A 和 B，其中 $A - B$ 的秩为 1 或 2。我们还将研究可转换的格拉姆伴矩阵 A 和B、它们的格拉姆奇异值以及相应的奇异向量。

回忆一下，给定一个可实现矩阵 E 以及一对格拉姆伴矩阵（$A, A+E$），对于任意尺寸适当的置换矩阵 P和 Q，PAQ和 P（$A+E$）Q都是格拉姆伴矩阵。因此，我们可以考虑一个 (0, 1, −1) 矩阵 $E = \begin{bmatrix} \widetilde{E} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，使得 $E\mathbf{1} = 0$和 $\mathbf{1}^T E = 0^T$。

命题 4.1（[8, 引理 2.1]）。设 $E = \begin{bmatrix} \widetilde{E} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是可实现的，且$A = \begin{bmatrix} \widetilde{A} & X_1 \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix}$ 与 E的划分相容。那么，A 和 $A + E$ 是格拉姆伴矩阵，当且仅当（$\widetilde{A}, \widetilde{A} + \widetilde{E}$）是一对格拉姆伴矩阵，$\widetilde{E}X_2^T = 0$ 和$\widetilde{E}^T X_1 = 0$。

注 4.2。注意，$X_1^T \widetilde{E} = 0$ 当且仅当 $\widetilde{E}X_2^T = 0$ 时，X_1~ ~
的列是 E的 (0,1) 左零向量，而 X_2 的行是 E的 (0,1) 右零向量。

命题 4.3。设 $E = \begin{bmatrix} \widetilde{E} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是一个 (0,1, −1) 矩阵，且 $E\mathbf{1} = 0$和 $\mathbf{1}^T E = 0^T$。那么，E可实现，当且仅当 $\widetilde{E}$可实现。

~证明。由命题 4.1可知，若 E 可实现，则 E也可实现。反之，
~ ~ ~ ~假设 E 可实现。设 $(A, A + E)$ 是一对格拉姆伴矩阵。那么，$\begin{bmatrix} \widetilde{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} \widetilde{A} + \widetilde{E} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 与 E 的划分相容，它们是格拉姆伴矩阵。因此，E 可实现。□

命题 4.4. 设 $E = \begin{bmatrix} \widetilde{E} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 可实现，且 $A = \begin{bmatrix} \widetilde{A} & X_1 \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix}$ 与 E 的划分相容。

假设 A 和 $A + E$ 是格拉姆伴矩阵。那么，$AE^T = EA^T$ 当且仅当 $\widetilde{A}\widetilde{E}^T = \widetilde{E}\widetilde{A}^T$。这意味着，如果 A 可转换为 $A + E$，那么 A 也可转换为 $A + E$，反之亦然。

证明. 根据命题 4.1，我们有 $\widetilde{E}X_2^T = 0$。通过计算可以直接验证，$AE^T = EA^T$ 当且仅当 $\widetilde{A}\widetilde{E}^T = \widetilde{E}\widetilde{A}^T$。由注 3.13，所需结论得证。□

命题 4.5. 设 $E = \begin{bmatrix} \widetilde{E} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 可实现，且 $A = \begin{bmatrix} \widetilde{A} & X_1 \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix}$ 与 E的划分相容。假设 A 和 $A+E$是格拉姆伴矩阵。根据引理 3.4，我们不妨设向量 $\tilde{\mathrm{v}}_1$、……、 $\tilde{\mathrm{v}}_k$构成 Row(E) 的一组基，其中 $\tilde{\mathrm{v}}_i$ 是 A 在 $i = 1$、……、k所对应的一个正奇异值的右奇异向量。此外，假设对于 $i = 1$、……、k， $\tilde{\mathrm{u}}_i$是相应的左奇异向量。那么，$\begin{bmatrix} \tilde{\mathrm{v}}_i \\ 0 \end{bmatrix}$（分别为 $\begin{bmatrix} \tilde{\mathrm{u}}_i \\ 0 \end{bmatrix}$）是 A在 $i = 1$、……、k所对应的 σ_i 的右（分别为左）奇异向量。

证明。根据命题 4.1，我们有 $\widetilde{E}X_2^T = 0$和 $\widetilde{E}^T X_1 = 0$，即 Row($\widetilde{E}$)和 Col(E)分别与 Row(X_2) 和 Col(X_1) 正交。设 $\tilde{\mathrm{v}}$是右奇异向量，对应于 A的一个正奇异值 σ，且满足 $\tilde{\mathrm{v}} \in$Row($\widetilde{E}$)。由于 $\widetilde{E}X_2^T = 0$，我们有 $X_2\tilde{\mathrm{v}} = 0$。对于 $\sigma\tilde{\mathrm{u}} = \widetilde{A}\tilde{\mathrm{v}}$，其中 $\tilde{\mathrm{u}}$是 $\widetilde{A}$对应的左奇异向量，我们有 $A\begin{bmatrix} \mathrm{v} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{A}\tilde{\mathrm{v}} \\ X_2\tilde{\mathrm{v}} \end{bmatrix} = \sigma\begin{bmatrix} \tilde{\mathrm{u}} \\ 0 \end{bmatrix}$。由于 $\tilde{\mathrm{v}} \in$ Row(E)，根据命题 3.3，我们得到 $\sigma\tilde{\mathrm{u}} = A\tilde{\mathrm{v}} \in$ Col(E)。由 $\widetilde{E}^T X_1 = 0$可知，$X_1^T(\sigma\tilde{\mathrm{u}}) = X_1^T\widetilde{A}\tilde{\mathrm{v}} = 0$。注意，$\widetilde{A}^T\tilde{\mathrm{u}} = \sigma\tilde{\mathrm{v}}$。因此，$A^T\begin{bmatrix} \tilde{\mathrm{u}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{A}^T\tilde{\mathrm{u}} \\ X_1^T\tilde{\mathrm{u}} \end{bmatrix} = \sigma\begin{bmatrix} \tilde{\mathrm{v}} \\ 0 \end{bmatrix}$。由此得到所需结论。□

推论 4.6。设 $E = \begin{bmatrix} \widetilde{E} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 可实现，且 $A = \begin{bmatrix} \widetilde{A} & X_1 \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix}$ 与 E A $A+E$ A的划分相容。假设 和 是 Gram 同伴。如果 可转换为 $A+E$，那么 A可转换为 $A+E$； A 和 $A+E$ 的 Gram 奇异值 与 A 和 $A+E$的相同；并且， A 对应的奇异向量可由 A的奇异向量添加一列零得到。

证明。结合命题 4.4 和命题 4.5，结论显而易见。□

总结命题 4.1–4.5 和推论 4.6：给定一个可实现的矩阵 $E = \begin{bmatrix} \widetilde{E} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，通过 $\widetilde{E}$ 刻画 $\widetilde{E}$ 的可实现性、通过 E 刻画可逆的格拉姆伴矩阵，以及它们的格拉姆奇异值和对应的奇异向量，同样赋予 E 这些性质；不过，要通过 E 找到格拉姆伴矩阵，还需要满足命题 4.1 中的额外条件。

4.1. 通过秩为 1 的矩阵构造格拉姆伴矩阵

设可实现矩阵 E 的秩为 1。不失一般性，

$$E=\begin{bmatrix} J_{k_1,k_2} & -J_{k_1,k_2} & 0 \\ -J_{k_1,k_2} & J_{k_1,k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对于某些 k_1、$k_2>0$。显然，$\widetilde{E}=\begin{bmatrix} J_{k_1}{}_{、k_2} & -J_{k_1}{}_{、} & -J_{k_1\ k_2} & J_{k_1}{}^{k_2}{}_{、、} \\ & & & \\ {}_{k_2} \end{bmatrix}$是通过 E得到的唯一一对格拉姆伴矩阵。因此，$\widetilde{E}$是可实现的。此外，

$\widetilde{A}\widetilde{E}^T=\widetilde{E}\widetilde{A}^T$。这意味着 $\widetilde{A}$可转换为 $\widetilde{A}+\widetilde{E}$。由于 rank($\widetilde{E}$) $=1$，$-\frac{1}{2}\widetilde{E}$只有一个正奇异值，$\widetilde{\quad}\quad\widetilde{\quad}\quad\widetilde{\quad}$即为 A和 $A+E$的 Gram 奇异值。可以发现，$-\frac{1}{2}\widetilde{E}$的正奇异值为 $\sqrt{k_1k_2}$，相应的左奇异向量和右奇异向量分别为 $\frac{1}{\sqrt{2k_1}}\begin{bmatrix}-\mathbf{1}_{k_1}\\ \mathbf{1}_{k_1}\end{bmatrix}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2k_2}}\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{k_2}\\ -\mathbf{1}_{k_2}\end{bmatrix}$（相差一个符号）。定理 4.7。设 E 是一个秩为 1 的可实现矩阵：

$$E=\begin{bmatrix} J_{k_1,k_2} & -J_{k_1,k_2} & 0 \\ -J_{k_1,k_2} & J_{k_1,k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对于某些 k_1、$k_2>0$。令 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & J_{k_1} & 0 & 0 \\ & & , & {}_{k_2} & X_1 \\ & & J_{k_1\ k_2} & 0 & X_2 \\ & & X_3 & X_4 & Y \end{bmatrix}$，为一个与 E 的划分相容的 (0, 1) 矩阵。于是，我们有以下结论：

(i) A 和 $A+E$ 是 Gram 同伴，当且仅当 $\mathbf{1}^TX_1=\mathbf{1}^TX_2$ 和 $X_3\mathbf{1}=X_4\mathbf{1}$。

(ii) E 是可实现的。

(iii) 对于任意通过 E 得到的 Gram 同伴，它们彼此可转换。

(iv) 对于任意通过 E 得到的 Gram 同伴，其 Gram 奇异值为 $\sqrt{k_1k_2}$，相应的左、右奇异向量（至多相差一个符号）为 $\frac{1}{\sqrt{2k_1}}\begin{bmatrix}-\mathbf{1}_{k_1}\\ \mathbf{1}_{k_1}\\ 0\end{bmatrix}$

$$and\ \frac{1}{\sqrt{2k_2}}\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{k_2}\\ -\mathbf{1}_{k_2}\\ 0\end{bmatrix},\ respectively.$$

证明。应用命题 4.1，我们得到

$$\begin{bmatrix} J_{k_2,k_1} & -J_{k_2,k_1} \\ -J_{k_2,k_1} & J_{k_2,k_1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix}=0,\ \begin{bmatrix}X_3 & X_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_{k_2,k_1} & -J_{k_2,k_1} \\ -J_{k_2,k_1} & J_{k_2,k_1} \end{bmatrix}=0.$$

由于 $J_{k_1,\ k_2}$ 是一个全 1 矩阵，因此我们有 $\mathbf{1}^TX_1=\mathbf{1}^TX_2$ 和 $X_3\mathbf{1}=X_4\mathbf{1}$。将命题 4.3–4.5 和推论 4.6 应用于本定理前紧接着的论证，即可得出所需结论。□

注记 4.8。考虑定理 4.7 中的 A 和 $A+E$。令 $B=A+E$ 和$k=k_1=k_2$。可以验证，当且仅当 A 和 B 是格拉姆伴矩阵时，$AB=BA$ 成立。设 A 和 B 可对角化。已知（见 [7]），A 和 B 同时可对角化。由于 $\mathrm{rank}(A-B)=1$，我们有$|\sigma(A)-\sigma(B)|=1$，其中 $\sigma(A)$ 和 $\sigma(B)$ 分别是 A 和B的特征值多重集。由此可得 $\sigma(A)-\sigma(B)=\{-k\}$ 以及 $\sigma(B)-\sigma(A)=\{k\}$。

例 4.9. 设

$$A=\left[\begin{array}{cc|cc|ccc} 0&0&1&1&1&1&0\\ 0&0&1&1&0&0&1\\ \hline 1&1&0&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&0&0&0\\ \hline 1&0&1&0&1&1&1\\ 1&0&1&0&1&1&1\\ 0&1&1&0&1&1&1 \end{array}\right],\ E=\left[\begin{array}{cc|cc|ccc} 1&1&-1&-1&0&0&0\\ 1&1&-1&-1&0&0&0\\ \hline -1&-1&1&1&0&0&0\\ -1&-1&1&1&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{array}\right].$$

显然，E的秩为 1。根据定理 4.7，A和 $A+E$互为 Gram 同伴，且 Gram 奇异值为 2。此外，$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\mathbf{1}_2\\ -\mathbf{1}_2\\ \mathbf{0}_3\end{bmatrix}$ 是相应的右奇异向量。

4.2. 通过秩为 2 的矩阵构造 Gram 同伴

我们首先证明，给定一个秩为 2 的 $(0,1,-1)$ 矩阵 $E=\begin{bmatrix}\widetilde{E}&0\\0&0\end{bmatrix}$，其中 $E\mathbf{1}=0$和 $\mathbf{1}^TE=0^T$，则 $\widetilde{E}$属于 (M1)–(M5) 这几种形式之一。与第~4.1 小节中的做法相同，我们通过 E 考察类型 (M4) 和 (M5) 中与 Gram 同伴相关的性质。我们还证明，类型 (M1)–(M3) 继承了类型 (M4) 的相同性质。为便于说明，我们仅从零空间的角度进行解释，以便通过 E 寻找 Gram 同伴，并利用命题 4.1，通过 E 寻找~Gram 同伴。

除非另有说明，我们假设 $(0,1,-1)$ 矩阵 E 既没有零行，也没有零列。设具有 -1的 $(0,1,E)$ 矩阵 $E\mathbf{1}=0$和 $\mathbf{1}^TE=0^T$的秩为 2。那么，-1的两个 $(0,1,\frac{T}{1})$ 行 $\mathbf{x}_2^T$ 和 $\mathbf{x}$ E 构成 Row(E) 的一个基。不失一般性，

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1^T&=\left[\begin{array}{cccc|cccc}\mathbf{1}_{\alpha_1}^T&\mathbf{1}_{\alpha_2}^T&-\mathbf{1}_{\alpha_3}^T&-\mathbf{1}_{\alpha_4}^T&\mathbf{1}_{\beta_1}^T&-\mathbf{1}_{\beta_2}^T&\mathbf{0}_{\beta_3}^T&\mathbf{0}_{\beta_4}^T\end{array}\right],\\ \mathbf{x}_2^T&=\left[\begin{array}{cccc|cccc}\mathbf{1}_{\alpha_1}^T&-\mathbf{1}_{\alpha_2}^T&\mathbf{1}_{\alpha_3}^T&-\mathbf{1}_{\alpha_4}^T&\mathbf{0}_{\beta_1}^T&\mathbf{0}_{\beta_2}^T&\mathbf{1}_{\beta_3}^T&-\mathbf{1}_{\beta_4}^T\end{array}\right]\end{aligned}$$

其中 $\alpha_1+\alpha_2+\beta_1=\alpha_3+\alpha_4+\beta_2>0$、$\alpha_1+\alpha_3+\beta_3=\alpha_2+\alpha_4+\beta_4>0$、$\alpha_i$、$\beta_i\geq 0$分别对应 $i=1$、2、3、4。

进一步考虑指标和数对（α，β）需满足的条件，使得 $\alpha\mathbf{x}_1+\beta\mathbf{x}_2$ 在以下三种情形下是一个 $(0,1,-1)$ 向量：(i) $\beta_1+\beta_2>0$ 和 $\beta_3+\beta_4>0$；(ii) $\beta_1+\beta_2=0$ 或 $\beta_3+\beta_4=0$；(iii) 对于 $i=1$，$\beta_i=0$，.....，4。

• 假设 $\beta_1+\beta_2>0$ 和 $\beta_3+\beta_4>0$。显然，$\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 线性无关。由于 $\alpha\mathbf{x}_1+\beta\mathbf{x}_2$ 是一个 $(0,1,-1)$ 向量，因此有 α，$\beta\in\{0,1,-1\}$。考察 $\mathbf{x}_1^T\mathbf{1}=\mathbf{x}_2^T\mathbf{1}=0$ 以及 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 的可能的 $(0,1,-1)$ 线性组合，可得三个子情形：

(C1) 假设 $\alpha_1+\alpha_4>0$ 和 $\alpha_2+\alpha_3>0$。若 $\alpha,\beta\in\{1,-1\}$，则 $\alpha\mathbf{x}_1+\beta\mathbf{x}_2$ 不是一个 $(0,1,-1)$ 向量。因此，$(\alpha,\beta)\in\{(\pm1,0),(0,\pm1)\}$。此外，我们有 $\alpha_1+\alpha_2+\beta_1=\alpha_3+\alpha_4+\beta_2$，$\alpha_1+\alpha_3+\beta_3=\alpha_2+\alpha_4+\beta_4$。(C2) 不失一般性，若 $\alpha_1+\alpha_4>0$ 和 $\alpha_2+\alpha_3=0$，则 $\alpha_2=\alpha_3=0$，$\alpha_1+\beta_1=\alpha_4+\beta_2$，$\alpha_1+\beta_3=\alpha_4+\beta_4$ 以及 $(\alpha,\beta)\in\{(\pm1,0),(0,\pm1),(\pm1,\mp1)\}$。(C3) 若 $\alpha_1+\alpha_4=0$ 和 $\alpha_2+\alpha_3=0$，则对于 $i=1,\ldots,4$，有 $\alpha_i=0$，$\beta_1=\beta_2$，$\beta_3=\beta_4$，且 $(\alpha,\beta)\in\{(\pm1,0),(0,\pm1),(\pm1,\pm1),(\pm1,\mp1)\}$。

• 假设 $\beta_1+\beta_2=0$ 或 $\beta_3+\beta_4=0$。不失一般性，$\beta_1+\beta_2>0$ 且 $\beta_3+\beta_4=0$。要使 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 线性无关，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4>0$。考虑 $\mathbf{x}_1^T\mathbf{1}=\mathbf{x}_2^T\mathbf{1}=0$ 以及 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$的可能的 $(0,1,-1)$ 线性组合，可分为以下两种情况：

(C4) 设 $\alpha_1+\alpha_4>0$ 且 $\alpha_2+\alpha_3>0$。按照 (C1) 中类似的论证，$(\alpha,\beta)\in\{(\pm1,0),(0,\pm1)\}$。此外，$\alpha_1+\alpha_2+\beta_1=\alpha_3+\alpha_4+\beta_2$，$\alpha_1+\alpha_3=\alpha_2+\alpha_4$。

(C5) 若不失一般性地设 $\alpha_1+\alpha_4>0$ 且 $\alpha_2+\alpha_3=0$，则 $\alpha_2=\alpha_3=0$，$\alpha_1=\alpha_4$，$\beta_1=\beta_2$ 且 $(\alpha,\beta)\in\{(\pm1,0),(0,\pm1),(\pm1,\mp1)\}$。

• 假设对于 $\beta_i=0$ $i=1,\ldots,4$。于是，我们有一个子情形：

(C6) 显然，$\alpha_1=\alpha_4$ 和 $\alpha_2=\alpha_3$。由于 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 线性无关，$\alpha_i>0$ 对于 $i=1,\ldots,4$。此外，

$$(\alpha,\beta)\in\left\{(\pm1,0),(0,\pm1),\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right),\left(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

总结六个子情形中指标及数对（α,β）的条件，可将其改写为：

(C1) $\alpha_1+\alpha_4>0$, $\alpha_2+\alpha_3>0$, $\beta_1+\beta_2>0$, $\beta_3+\beta_4>0$, $\alpha_1+\alpha_2+\beta_1=\alpha_3+\alpha_4+\beta_2$, $\alpha_1+\alpha_3+\beta_3=\alpha_2+\alpha_4+\beta_4$ 和 $(\alpha,\beta)\in\{(\pm1,0),(0,\pm1)\}$; (C2) $\alpha_1+\alpha_4>0$, $\alpha_2=\alpha_3=0$, $\beta_1+\beta_2>0$, $\beta_3+\beta_4>0$, $\alpha_1+\beta_1=\alpha_4+\beta_2$, $\alpha_1+\beta_3=\alpha_4+\beta_4$, 和 $(\alpha,\beta)\in\{(\pm1,0),(0,\pm1),(\pm1,\mp1)\}$; (C3) $\alpha_i=0$ 对于 $i=1,\ldots,4$, $\beta_1=\beta_2>0$, $\beta_3=\beta_4>0$, 和 $(\alpha,\beta)\in\{(\pm1,0),(0,\pm1),(\pm1,\pm1),(\pm1,\mp1)\}$; (C4) $\alpha_1+\alpha_4>0$, $\alpha_2+\alpha_3>0$, $\beta_1+\beta_2>0$, $\beta_3=\beta_4=0$, $\alpha_1+\alpha_2+\beta_1=\alpha_3+\alpha_4+\beta_2$, $\alpha_1+\alpha_3=\alpha_2+\alpha_4$, 和 $(\alpha,\beta)\in\{(\pm1,0),(0,\pm1)\}$; (C5) $\alpha_1=\alpha_4>0$, $\alpha_2=\alpha_3=0$, $\beta_1=\beta_2>0$, $\beta_3=\beta_4=0$, 和 $(\alpha,\beta)\in\{(\pm1,0),(0,\pm1),(\pm1,\mp1)\}$;

(C6) $\alpha_1 = \alpha_4 > 0$, $\alpha_2 = \alpha_3 > 0$, $\beta_i = 0$ 对于 $i = 1, .., 4$, 和 $(\alpha, \beta) \in \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}), (\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2})\}$。

现在我们将看到，任意满足条件 (C1)–(C6) 的 $(0,1,-1)$ 矩阵 E，在转置以及行列置换意义下，均对应于以下类型 (M1)–(M5) 之一。除非另有说明，我们假设类型 (M1)–(M5) 的矩阵中每个块的所有指标均为非负数，且其行和与列和向量均为零。

(M1) $\begin{bmatrix} J_{k,a} & J_{k,b} & -J_{k,b} & -J_{k,a} \\ -J_{k,a} & -J_{k,b} & J_{k,b} & J_{k,a} \\ J_{l,a} & -J_{l,b} & J_{l,b} & -J_{l,a} \\ -J_{l,a} & J_{l,b} & -J_{l,b} & J_{l,a} \end{bmatrix}$ 其中每个块的所有指标均为正的。

(M2) $\begin{bmatrix} J_k & & & & & & & \\ & \ddots & -J_{k\,f} & 0 & 0 & \cdots & f & 0 & 0 & \ddots \\ & -J_{k\,e} & J_k & & & & 0 & 0 & J_{l\,g} & -J_l \\ & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & -J_{l\,g} & J_l & & & h & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & h & & & & \end{bmatrix}$ 其中每个块的所有指标均为正的。

(M3) $\begin{bmatrix} J_{k,a} & J_{k,b} & -J_{k,c} & -J_{k,d} & J_{k,e} & -J_{k,f} \\ -J_{k,a} & -J_{k,b} & J_{k,c} & J_{k,d} & -J_{k,e} & J_{k,f} \\ J_{l,a} & -J_{l,b} & J_{l,c} & -J_{l,d} & 0 & 0 \\ -J_{l,a} & J_{l,b} & -J_{l,c} & J_{l,d} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ where $k, l > 0$, $e + f > 0$ and $a + b + c + d > 0$.

(M4) $\begin{bmatrix} J_{k,a} & J_{k,b} & -J_{k,c} & -J_{k,d} & J_{k,e} & -J_{k,f} & 0 & 0 \\ -J_{k,a} & -J_{k,b} & J_{k,c} & J_{k,d} & -J_{k,e} & J_{k,f} & 0 & 0 \\ J_{l,a} & -J_{l,b} & J_{l,c} & -J_{l,d} & 0 & 0 & J_{l,g} & -J_{l,h} \\ -J_{l,a} & J_{l,b} & -J_{l,c} & J_{l,d} & 0 & 0 & -J_{l,g} & J_{l,h} \end{bmatrix}$ where $k, l > 0$, $a + b + c + d > 0$, $e + f > 0$, and $g + h > 0$.

(M5) $\begin{bmatrix} J_{k,a} & -J_{k,b} & J_{k,c} & -J_{k,d} & 0 & 0 \\ -J_{l,a} & J_{l,b} & -J_{l,c} & J_{l,d} & 0 & 0 \\ J_{p,a} & -J_{p,b} & 0 & 0 & J_{p,e} & -J_{p,f} \\ -J_{q,a} & J_{q,b} & 0 & 0 & -J_{q,e} & J_{q,f} \\ 0 & 0 & J_{r,c} & -J_{r,d} & -J_{r,e} & J_{r,f} \\ 0 & 0 & -J_{s,c} & J_{s,d} & J_{s,e} & -J_{s,f} \end{bmatrix}$ where $a + b$, $c + d$, $e + f$, $k + l$, $p + q$ and $r + s$ are positive.

考虑满足条件 (C6) 的 $\mathbf{x}_1^T$ 和 $\mathbf{x}_2^T$。假设 $\alpha\mathbf{x}_1^T + \beta\mathbf{x}_2^T$ 是某个 α 和 β 的 $(0, 1, -1)$ 向量。由于

$$(\alpha, \beta) \in \left\{(\pm 1, 0), (0, \pm 1), \left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right), \left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right)\right\},$$

我们有以下四个相差一个符号的不同 (0, 1, −1) 行:

$$\mathbf{x}_1^T = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{\alpha_1}^T & \mathbf{1}_{\alpha_2}^T & -\mathbf{1}_{\alpha_2}^T & -\mathbf{1}_{\alpha_1}^T \end{bmatrix}, \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)^T = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{\alpha_1}^T & \mathbf{0}_{\alpha_2}^T & \mathbf{0}_{\alpha_2}^T & -\mathbf{1}_{\alpha_1}^T \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{x}_2^T = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{\alpha_1}^T & -\mathbf{1}_{\alpha_2}^T & \mathbf{1}_{\alpha_2}^T & -\mathbf{1}_{\alpha_1}^T \end{bmatrix}, \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\alpha_1}^T & \mathbf{1}_{\alpha_2}^T & -\mathbf{1}_{\alpha_2}^T & \mathbf{0}_{\alpha_1}^T \end{bmatrix}.$$

考虑张成一个 (0, 1, −1) 矩阵行空间的四个行向量的所有可能组合 E，使得 rank(E) $= 2$, $E\mathbf{1} = 0$ 且 $\mathbf{1}^T E = 0^T$。假设在 E 中，除符号相反外，$\mathbf{x}_1^T$和$\frac{1}{2}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)^T$是仅有的不同的行。那么，我们通过对行进行置换，从 E 生成 E'，如下所示:

$$E' = \begin{bmatrix} J_{\gamma_1,\alpha_1} & J_{\gamma_1,\alpha_2} & -J_{\gamma_1,\alpha_2} & -J_{\gamma_1,\alpha_1} \\ -J_{\gamma_2,\alpha_1} & -J_{\gamma_2,\alpha_2} & J_{\gamma_2,\alpha_2} & J_{\gamma_2,\alpha_1} \\ J_{\gamma_3,\alpha_1} & 0 & 0 & -J_{\gamma_3,\alpha_1} \\ -J_{\gamma_4,\alpha_1} & 0 & 0 & J_{\gamma_4,\alpha_1} \end{bmatrix}$$

对于某个 $\gamma_i \geq 0$，其中 $i = 1$为 1，...，4。由于 $\mathbf{1}^T E' = 0^T$，我们有 $\gamma_1 = \gamma_2$和$\gamma_3 = \gamma_4$。由 rank(E') $= 2$，对于 $i = 1$为 1，...，4，有 $\gamma_i > 0$。对 E'取转置，并对 $(E')^T$ 的行进行置换，得到的矩阵属于类型 (M3)。类似地，可以验证，对于四行中的其他选择，E 必定属于 (M1)–(M4) 中的一种（相差转置以及行和列的置换）。

给定满足(C2)的$\mathbf{x}_1^T$和$\mathbf{x}_2^T$，我们有$(\alpha, \beta) \in \{(\pm 1, 0)、(0, \pm 1)、(\pm 1, \mp 1)\}$，因此，除符号差异外，共有三种不同的行:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{\alpha_1}^T & -\mathbf{1}_{\alpha_4}^T & \mathbf{1}_{\beta_1}^T & -\mathbf{1}_{\beta_2}^T & \mathbf{0}_{\beta_3}^T & \mathbf{0}_{\beta_4}^T \end{bmatrix}, \\ \mathbf{x}_2^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{\alpha_1}^T & -\mathbf{1}_{\alpha_4}^T & \mathbf{0}_{\beta_1}^T & \mathbf{0}_{\beta_2}^T & \mathbf{1}_{\beta_3}^T & -\mathbf{1}_{\beta_4}^T \end{bmatrix}, \\ (\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\alpha_1}^T & \mathbf{0}_{\alpha_4}^T & \mathbf{1}_{\beta_1}^T & -\mathbf{1}_{\beta_2}^T & -\mathbf{1}_{\beta_3}^T & \mathbf{1}_{\beta_4}^T \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

那么，如果 E 的行由 $\pm\mathbf{x}_1^T$和 $\pm\mathbf{x}_2^T$组成，则 E 为形式(M4)；如果 E 的行由 $\pm\mathbf{x}_1^T$、 $\pm\mathbf{x}_2^T$以及 $\pm(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)^T$组成，则 E 为形式(M5)。

照此可以验证，任意一个(0,1,−1)矩阵 E，若其行空间或列空间由满足(C1)的$\mathbf{x}_1$ 和$\mathbf{x}_2$ 张成，则属于类型(M4)；满足(C3)的 E 属于类型(M1)–(M4)之一；满足(C4)的 E 属于类型(M3)；而满足(C5)的 E 属于类型(M2)–(M4)之一。

下面给出一个有用的引理，用于通过秩为 2 的 E 刻画格拉姆伴矩阵。

引理 4.10. 设 X_1、 X_2、 Y_1 和 Y_2 分别为尺寸为 $k \times a$、 $k \times b$、 $l \times c$和 $l \times d$ 的矩阵。那么，$J_{k,c}Y_1^T + J_{k,d}Y_2^T + X_1 J_{a,l} + X_2 J_{b,l} = \alpha J_{k,l}$ 当且仅当 $X_1\mathbf{1}_a + X_2\mathbf{1}_b = x\mathbf{1}_k$ 和 $Y_1\mathbf{1}_c + Y_2\mathbf{1}_d = y\mathbf{1}_l$，其中 $x + y = \alpha$。

证明。考察这些陈述的充分性。设 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1$ 和 $\mathbf{y}_2$ 分别是 X_1、 X_2、 Y_1 和 Y_2 的行和向量。那么，我们有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^T + \mathbf{y}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{y}_1^T + \mathbf{y}_2^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \alpha J. \text{ Let } (\mathbf{x})_i \text{ be the } i^{\text{th}} \text{ component of}$$

$\mathbf{x}_\circ$ 考察两边的 j^{th} 列，得 $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)_j\mathbf{1} = \alpha\mathbf{1}_\circ$ 于是，对于某个 x，有 $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = x\mathbf{1}$。类似地，由两边的行可推得，对于某个 y，有 $\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 = y\mathbf{1}$。因此，方程 $J_{k,}{}_cY_1^T + J_{k,d}Y_2^T + X_1J_{a,l} + X_2J_{b,l} = \alpha J_{k,l}$ 可改写为 $yJ + xJ = \alpha J$，故 $x + y = \alpha_\circ$

反之显然。 □

4.2.1. 形式为(M1)–(M4)的可实现矩阵

本小节首先关注通过形式为(M4)的矩阵得到的格拉姆伴矩阵。我们将证明，(M1)–(M3)的情形都是(M4)的特例。

引理 4.11. 设 A 和 B 为 $m \times n$ (0, 1) 矩阵，使得 $A + B = J_\circ$ 那么，$AA^T = BB^T$ 当且仅当 n 为偶数，且$A\mathbf{1} = B\mathbf{1} = \frac{n}{2}\mathbf{1}_\circ$ 类似地，$A^TA = B^TB$ 当且仅当 m 为偶数，且 $\mathbf{1}^TA = \mathbf{1}^TB = \frac{m}{2}\mathbf{1}m^T_\circ$

证明。假设 $AA^T = BB^T$ 和 $A + B = J_\circ$ 由于(0, 1) 矩阵 A 和B 具有相同的行和向量，n 为偶数，且$A\mathbf{1} = B\mathbf{1} = \frac{n}{2}\mathbf{1}_\circ$ 反过来，假设 n 为偶数，且 $A\mathbf{1} = B\mathbf{1} = \frac{n}{2}_\circ$ 那么，

$$\begin{aligned} AA^T &= (J - B)(J - B)^T \\ &= JJ^T - BJ^T - JB^T + BB^T = nJ - \frac{n}{2}J - \frac{n}{2}J + BB^T = BB^T. \end{aligned}$$

同理，可以推出其余结论。 □

注 4.12. 假设 E 具有形式 (M1)。由引理 4.11，$(A, B) = (\frac{1}{2}(J + E), {}_{1\,2}(J - E))$ 是一对格拉姆伴矩阵。此外，它是经由 E 得到的唯一一对格拉姆伴矩阵。

引理 4.13. 设 $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & X \\ A_3 & Y & A_4 \end{bmatrix}$ 和 $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & X \\ B_3 & Y & B_4 \end{bmatrix}$ 为 (0, 1) 矩阵。假设 $(A - B)\mathbf{1} = 0$，且对于$i = 1,\ \mathbf{1}^TA_i = \mathbf{1}^TB_i,\ A_i + B_i = J,\ \ldots 4_\circ$ 那么，A和 B互为格拉姆伴矩阵，当且仅当

$$(B_2 - A_2)Y^T + X(B_4^T - A_4^T) = A_1J^T + JA_3^T - JJ^T \tag{1}$$
$$(B_1^T - A_1^T)X = 0, \tag{2}$$
$$(B_3^T - A_3^T)Y = 0, \tag{3}$$
$$(B_2^T - A_2^T)X + Y^T(B_4 - A_4) = 0. \tag{4}$$

证明。由于 $(A - B)\mathbf{1} = 0$，我们有

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix}\mathbf{1} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}\mathbf{1} \text{ and } \begin{bmatrix} A_3 & A_4 \end{bmatrix}\mathbf{1} = \begin{bmatrix} B_3 & B_4 \end{bmatrix}\mathbf{1}.$$

将引理 4.11 应用于数对 $(\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix})$ 和 $(\begin{bmatrix} A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_3 & B_4 \end{bmatrix})$，得到 $A_1A_1^T + A_2A_2^T = B_1B_1^T + B_2B_2^T$和 $A_3A_3^T + A_4A_4^T = B_3B_3^T + B_4B_4^T_\circ$ 设 A_1 和 A_3 的行数分别为 k 和 $l_\circ$ 由于对于 $i = 1, \ldots 4$，有 $\mathbf{1}^TA_i = \mathbf{1}^TB_i$和 $A_i + B_i = J$，因此数 k和 l均为偶数，$\mathbf{1}^TA_1 =$

$\mathbf{1}^T A_2 = \frac{k}{2}\mathbf{1}^T$和 $\mathbf{1}^T A_3 = \mathbf{1}^T A_4 = \frac{l}{2}\mathbf{1}^T$。由对于 $i = 1, \ldots 4$ 的 $B_i = J - A_i$，我们有

$$B_1 B_3^T - A_1 A_3^T = (J - A_1)(J - A_3)^T - A_1 A_3^T = JJ^T - A_1 J^T - J A_3^T, \quad (5)$$
$$B_1^T B_2 - A_1^T A_2 = (J - A_1)^T (J - A_2) - A_1^T A_2 = J^T J - A_1^T J - J^T A_2 = 0, \quad (6)$$
$$B_3^T B_4 - A_3^T A_4 = (J - A_3)^T (J - A_4) - A_3^T A_4 = J^T J - A_3^T J - J^T A_4 = 0. \quad (7)$$

此外，对 $\ldots, 4$ 中的每一对 (A_i, B_i)，应用引理 4.11 于 $i = 1$，可得$A_i^T A_i = B_i^T B_i$。

可以验证，当且仅当 $AA^T = BB^T$

$$A_1 A_1^T + A_2 A_2^T + XX^T = B_1 B_1^T + B_2 B_2^T + XX^T,$$
$$A_1 A_3^T + A_2 Y^T + X A_4^T = B_1 B_3^T + B_2 Y^T + X B_4^T,$$
$$A_3 A_3^T + A_4 A_4^T + YY^T = B_3 B_3^T + B_4 B_4^T + YY^T.$$

利用 (5)、 $A_1 A_1^T + A_2 A_2^T = B_1 B_1^T + B_2 B_2^T$ 和 $A_3 A_3^T + A_4 A_4^T = B_3 B_3^T + B_4 B_4^T$，我们得到： $AA^T = BB^T$ 当且仅当 $(B_2 - A_2)Y^T + X(B_4^T - A_4^T) = A_1 J^T + JA_3^T - JJ^T$。

可以验证，当且仅当 $A^T A = B^T B$

$$A_1^T A_1 + A_3^T A_3 = B_1^T B_1 + B_3^T B_3,\ A_2^T A_2 + Y^T Y = B_2^T B_2 + Y^T Y,$$
$$A_4^T A_4 + X^T X = B_4^T B_4 + X^T X,\ A_1^T A_2 + A_3^T Y = B_1^T B_2 + B_3^T Y,$$
$$A_1^T X + A_3^T A_4 = B_1^T X + B_3^T B_4,\ A_2^T X + Y^T A_4 = B_2^T X + Y^T B_4.$$

由 (6)、(7) 以及对 $\ldots, 4$ 中的 $i = 1$， $A_i^T A_i = B_i^T B_i$ 这一事实，可得所需结论。 □

注 4.14。设 C 和 D 是格拉姆伴矩阵，并设 α 和 β 分别是某些行指标集和列指标集。那么， $C[\alpha, \beta]$ 和 $D[\alpha, \beta]$ 不一定是格拉姆伴矩阵。也就是说，子矩阵不一定从 C 和 D继承格拉姆伴矩阵的性质。然而，满足引理 4.13 中假设的矩阵可在这些矩阵中导出具有继承性质的以下子矩阵。

设 $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & Y \end{bmatrix}$ 和 $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & Y \end{bmatrix}$。假设 $(A - B)\mathbf{1} = 0$，且 $\mathbf{1}^T A_i = \mathbf{1}^T B_i$, $A_i + B_i = J$对 $i = 1$、2、3 均成立。由定义 2.1 可知， A和 B 是格拉姆伴矩阵，当且仅当 $(B_2 - A_2)Y^T = A_1 J^T + JA_3^T - JJ^T$且 $(B_3^T - A_3^T)Y = 0$。因此，格拉姆伴矩阵 A 和B 的等价条件与从引理 4.13 中的条件 (1)–(4) 去除含有 A_4、 B_4 或 X的项后得到的条件相同。

同样，给定 $A = \begin{bmatrix} A_2 & X \\ Y & A_4 \end{bmatrix}$ 和 $B = \begin{bmatrix} B_2 & X \\ Y & B_4 \end{bmatrix}$，其中 $A_i\mathbf{1} = B_i\mathbf{1}$、$\mathbf{1}^T A_i = \mathbf{1}^T B_i$和 $A_i + B_i = J$对 $i = 2$、4 成立，我们可以根据定义 2.1 得出

A 和 B 是格拉姆伴矩阵，当且仅当 $(B_2 - A_2)Y^T + X(B_4^T - A_4^T) = 0$ 且 $(B_2^T - A_2^T)X + Y^T(B_4 - A_4) = 0$。然后，通过在引理 4.13 的条件 (1)–(4) 中消去含有 A_1、A_3、B_1 或 B_3 的项，也可以得到格拉姆伴矩阵 A 和 B 的等价条件。

因此，可以根据形式(M4)的矩阵所满足的格拉姆伴矩阵等价条件，推导出形式(M2)和(M3)的矩阵所满足的格拉姆伴矩阵等价条件。

定理 4.15。设

$$E = \begin{bmatrix} J_{k,a} & J_{k,b} & -J_{k,c} & -J_{k,d} & J_{k,e} & -J_{k,f} & 0 & 0 \\ -J_{k,a} & -J_{k,b} & J_{k,c} & J_{k,d} & -J_{k,e} & J_{k,f} & 0 & 0 \\ J_{l,a} & -J_{l,b} & J_{l,c} & -J_{l,d} & 0 & 0 & J_{l,g} & -J_{l,h} \\ -J_{l,a} & J_{l,b} & -J_{l,c} & J_{l,d} & 0 & 0 & -J_{l,g} & J_{l,h} \end{bmatrix}$$

其中，每个块中的任意列索引都是非负整数，并且 $k, l > 0, a + b + c + d > 0$, $e + f > 0$, $g + h > 0$, $E\mathbf{1} = 0$ 和 $\mathbf{1}^T E = 0^T$。设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & J_{k,c} & J_{k,d} & 0 & J_{k,f} & X_{11} & X_{12} \\ J_{k,a} & J_{k,b} & 0 & 0 & J_{k,e} & 0 & X_{21} & X_{22} \\ 0 & J_{l,b} & 0 & J_{l,d} & Y_{11} & Y_{12} & 0 & J_{l,h} \\ J_{l,a} & 0 & J_{l,c} & 0 & Y_{21} & Y_{22} & J_{l,g} & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

其中 A 的每个块都是一个 $(0, 1)$ 矩阵。那么，A 和 $A + E$ 是格拉姆伴矩阵，当且仅当满足以下条件：

(i) $\mathbf{1}^T X_{1i} = \mathbf{1}^T X_{2i}$ *and* $\mathbf{1}^T Y_{1i} = \mathbf{1}^T Y_{2i}$ *for* $i = 1, 2$;

(ii) $\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} = \frac{g-h}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$ *and* $\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} = \frac{e-f}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$ *where* $g - h$ *and* $e - f$ *are even.*

Proof. Let $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & J_{k,c} & J_{k,d} \\ J_{k,a} & J_{k,b} & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & J_{l,b} & 0 & J_{l,d} \\ J_{l,a} & 0 & J_{l,c} & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & J_{k,f} \\ J_{k,e} & 0 \end{bmatrix}$ and $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & J_{l,h} \\ J_{l,g} & 0 \end{bmatrix}$. Set $X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$ and $B_i = J - A_i$ for $i = 1, \ldots, 4$.

将引理 4.13 应用于我们的设定，只需证明我们的目标条件 (i) 和 (ii) 可由条件 (1)–(4) 推出。由条件 (2)，即 $(B_1^T - A_1^T)X = 0$，我们得到

$$\begin{bmatrix} J_{k,a} & J_{k,b} & -J_{k,c} & -J_{k,a} \\ -J_{k,a} & -J_{k,b} & J_{k,c} & J_{k,d} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = 0.$$

由于 $a+b+c+d > 0$，$B_1^T - A_1^T$ 中至少有一行是 $\begin{bmatrix} \mathbf{1}^T & -\mathbf{1}^T \end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} -\mathbf{1}^T & \mathbf{1}^T \end{bmatrix}$。因此，对于 $i = 1, 2$，$\mathbf{1}^T X_{1i} = \mathbf{1}^T X_{2i}$。反过来，对于 $i = 1, 2$，$\mathbf{1}^T X_{1i} = \mathbf{1}^T X_{2i}$ 蕴含 $(B_1^T - A_1^T)X = 0$。类似地，我们可以发现，条件 (3) 等价于对于 $i = 1, 2$，$\mathbf{1}^T Y_{1i} = \mathbf{1}^T Y_{2i}$。由于 $k, l > 0$，$B_2^T - A_2^T$ 和 $B_4^T - A_4^T$ 各自都由 $\pm \begin{bmatrix} \mathbf{1}^T & -\mathbf{1}^T \end{bmatrix}$ 的行组成。因此，$\mathbf{1}^T X_{1i} = \mathbf{1}^T X_{2i}$ 以及对于 $i = 1, 2$，$\mathbf{1}^T Y_{1i} = \mathbf{1}^T Y_{2i}$ 蕴含 (4)。

考虑条件(1)。那么，可以验证(1)等价于

$$\begin{bmatrix} J_{k,e} & -J_{k,f} \\ -J_{k,e} & J_{k,f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{11}^T & Y_{21}^T \\ Y_{12}^T & Y_{22}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{g,l} & -J_{g,l} \\ -J_{h,l} & J_{h,l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (d-a)J_{k,l} & (c-b)J_{k,l} \\ (b-c)J_{k,l} & (a-d)J_{k,l} \end{bmatrix}.$$

由引理 4.10 可知，条件 (1) 等价于 $Y_{11}\mathbf{1}_e - Y_{12}\mathbf{1}_f = y_1\mathbf{1}_l$、$X_{11}\mathbf{1}_g - X_{12}\mathbf{1}_h = x_1\mathbf{1}_k$ 和 $Y_{21}\mathbf{1}_e - Y_{22}\mathbf{1}_f = y_2\mathbf{1}_l$、$X_{21}\mathbf{1}_g - X_{22}\mathbf{1}_h = x_2\mathbf{1}_k$，其中 $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = d - a$ 且 $y_2 - x_1 = y_1 - x_2 = c - b$。此外，分别将 $Y_{11}\mathbf{1}_e - Y_{12}\mathbf{1}_f = y_1\mathbf{1}_l$ 和 $Y_{21}\mathbf{1}_e - Y_{22}\mathbf{1}_f = y_2\mathbf{1}_l$ 的两边左乘 $\mathbf{1}_l^T$，可得

$$\mathbf{1}_l^T Y_{11}\mathbf{1}_e - \mathbf{1}_l^T Y_{12}\mathbf{1}_f = y_1\mathbf{1}_l^T\mathbf{1}_l = y_1 l \text{ and } \mathbf{1}_l^T Y_{21}\mathbf{1}_e - \mathbf{1}_l^T Y_{22}\mathbf{1}_f = y_2\mathbf{1}_l^T\mathbf{1}_l = y_2 l.$$

由于 $\mathbf{1}_l^T Y_{1i} = \mathbf{1}_l^T Y_{2i}$ 对于 $i = 1, 2$，由两个方程相减可得$(y_1 - y_2)l = 0$，因此 $y_1 = y_2$。类似地，利用 $X_{11}\mathbf{1}_g - X_{12}\mathbf{1}_h = x_1\mathbf{1}_k$和 $X_{21}\mathbf{1}_g - X_{22}\mathbf{1}_h = x_2\mathbf{1}_k$，可以验证 $x_1 = x_2$。由$E\mathbf{1} = 0$ 可知，$x_1 = \frac{-a+b-c+d}{2} = \frac{g-h}{2}$ 和 $y_1 = \frac{-a-b+c+d}{2} = \frac{e-f}{2}$。此外，由于 x_1 和 y_1 是整数，$g - h$ 和 $e - f$ 必为偶数。

□

推论 4.16. 设 E 是一个形式(M4)的(0, 1, −1)矩阵。那么，当且仅当 $g - h$ 和 $e - f$ 为偶数时，E 可实现。

证明。假设 E 可实现。根据定理 4.15，结论显然成立。反之，设 $g - h$ 和 $e - f$ 均为偶数。我们只需证明存在满足定理 4.15 中 (i) 和 (ii) 的 $X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$ 和 $Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$。若 $g - h = 0$，则选择 $X = 0$即可得到所需的矩阵。若 $g - h > 0$，选择$X_{11} = X_{21} = \begin{bmatrix} J_{k,\ \frac{g-h}{2}} & 0 \end{bmatrix}$ 和 $X_{12} = X_{22} = 0$；若 $g - h < 0$，选择$X_{11} = X_{21} = 0$ 和 $X_{12} = X_{22} = \begin{bmatrix} J_{k,\ \frac{h-g}{2}} & 0 \end{bmatrix}$，也可得到满足 (i) 和 (ii) 的 X。用这种方式，我们还可以构造满足 (i) 和 (ii) 的 Y。

□

注 4.17。考虑一个形式(M3)的 (0, 1, −1) 矩阵 E。那么，$E\mathbf{1} = 0$ 推出 $c - b = d - a = \frac{e-f}{2}$。令 $g = 0$ 和 $h = 0$，矩阵 E 可视为一个形式(M4)的矩阵。根据注 4.14，可由通过形式(M4)的矩阵得到的格拉姆伴矩阵等价条件，推出通过 E 得到的格拉姆伴矩阵的等价条件，从而消去定理 4.15 的 (i) 和 (ii) 中与 X 相关的条件。因此，A 和 $A + E$ 是格拉姆伴矩阵，其中 A 为形式(8)，且 $g = h = 0$，当且仅当 $\mathbf{1}^T Y_{1i} = \mathbf{1}^T Y_{2i}$ 适用于 $i = 1$、2 和 $\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} = \frac{e-f}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$，其中$e - f$ 为偶数。此外，E 可实现，当且仅当 $e - f$ 为偶数。

设 E 是一个形式为 (M2) 的 (0, 1, −1) 矩阵。则，$E\mathbf{1} = 0$ 蕴含 $e = f > 0$ 和 $g = h > 0$。通过类似于注 4.14 的论证，我们可以发现，A 和 $A + E$ 是格拉姆伴矩阵，其中 A 具有形式(8)，且 $a = b = c = d = 0$ 当且仅当 $\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} = 0$、$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} = 0$、$\mathbf{1}^T X_{1i} = \mathbf{1}^T X_{2i}$ 和

$\mathbf{1}^T Y_{1i} = \mathbf{1}^T Y_{2i}$ 对于 $i = 1$, 2。由于 $e - f = g - h = 0$, E 对任意 e、f、g、$h > 0$ 都是可实现的。

最后，根据注 4.12，通过 E 的形式(M1)的格拉姆伴矩阵对只有一对，因此 E 是可实现的。于是，通过设定 $e = f = g = h = 0$，可以将 E 视为形式(M4)的矩阵。

注 4.18。设 $E = \begin{bmatrix} \widetilde{E} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是一个可实现矩阵，其中 $\widetilde{E}$ 属于类型 (M1)–(M4) 中的一种~，并设 A 和 E 是格拉姆伴矩阵。假设 $A = \begin{bmatrix} A & X_1 \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix}$ 是一个与 E的划分相容的 (0, 1) 矩阵。根据命题 4.1 和注 4.2，通过 E 完全确定格拉姆伴矩阵，等价于~找出 E 关于 X_1 和 X_2的所有左、右 (0, 1) 零向量。

设 E是形式(M4)的矩阵。假设 A和 $A+E$是格拉姆伴矩阵，其中 A 具有形式(8)。那么，

$$2A + E = \begin{bmatrix} J_{k,a} & J_{k,b} & J_{k,c} & J_{k,d} & J_{k,e} & J_{k,f} & 2X_{11} & 2X_{12} \\ J_{k,a} & J_{k,b} & J_{k,c} & J_{k,d} & J_{k,e} & J_{k,f} & 2X_{21} & 2X_{22} \\ J_{l,a} & J_{l,b} & J_{l,c} & J_{l,d} & 2Y_{11} & 2Y_{12} & J_{l,g} & J_{l,h} \\ J_{l,a} & J_{l,b} & J_{l,c} & J_{l,d} & 2Y_{21} & 2Y_{22} & J_{l,g} & J_{l,h} \end{bmatrix} \tag{9}$$

其中 $e + f$和 $g + h$是正偶数， k、$l > 0$和 $a + b + c + d > 0$。考虑两个向量 $\mathbf{x}_1^T$ 和 $\mathbf{x}_2^T$，它们构成 Row(E) 的一组基:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_a^T & \mathbf{1}_b^T & -\mathbf{1}_c^T & -\mathbf{1}_d^T & \mathbf{1}_e^T & -\mathbf{1}_f^T & \mathbf{0}_g^T & \mathbf{0}_h^T \end{bmatrix}, \\ \mathbf{x}_2^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_a^T & -\mathbf{1}_b^T & \mathbf{1}_c^T & -\mathbf{1}_d^T & \mathbf{0}_e^T & \mathbf{0}_f^T & \mathbf{1}_g^T & -\mathbf{1}_h^T \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{10}$$

由 $E\mathbf{1} = 0$，可得 $a + b + e = c + d + f$和 $a + c + g = b + d + h$。根据定理 4.15，对于$i = 1$，2，有 2($X_{i1}\mathbf{1}_g - X_{i2}\mathbf{1}_h$) $= g - h$ 和 2($Y_{i1}\mathbf{1}_e - Y_{i2}\mathbf{1}_f$) $= e - f$。通过计算可得，对于 $j = 1$，2，有 $(2A + E)\mathbf{x}_j = 0$。由于 Row(E) $=$张成空间{$\mathbf{x}_1$,$\mathbf{x}_2$}，我们得到 $(2A + E)E^T = 0$。根据定理3.9， $A + E$可由 A 通过改变 2 个正奇异值的符号得到。因此，A 可转换为 $A + E$。此外，对于类型(M1)、(M2)和(M3)中的 E'，我们可以分别在(9)和(10)中考虑 $e = f = g = h = 0$、 $a = b = c = d = 0$ 和$g = h = 0$。容易验证，每种情况下都有 $(2A' + E')(E')^T = 0$，其中 A'是 $A' + E'$的格拉姆伴矩阵。因此，对于任何通过任意一种形式(M1)–(M4)中的 E得到的格拉姆伴矩阵对 A和 $A + E$， A和 $A + E$都是可转换的格拉姆伴矩阵。

现在考虑分别对应于 A 和 $A + E$ 的 Gram 奇异值的右奇异向量 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 。由于 Row(E) $=$张成空间{$\mathbf{x}_1$,$\mathbf{x}_2$}，因此有 span{$\mathbf{x}_1$,$\mathbf{x}_2$} = span{$\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$}。利用 $a+b-c-d+e-f = 0$、 $a-b+c-d+g-h = 0$ 以及定理 4.15 中的条件 (i) 和 (ii)，可以通过计算验证

得出

$$A^TA\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} (k(a+b+e)+\frac{1}{2}l(a-b-c+d))\mathbf{1}_a \\ (k(a+b+e)-\frac{1}{2}l(a-b-c+d))\mathbf{1}_b \\ (-k(a+b+e)+\frac{1}{2}l(a-b-c+d))\mathbf{1}_c \\ (-k(a+b+e)-\frac{1}{2}l(a-b-c+d))\mathbf{1}_d \\ k(a+b+e)\mathbf{1}_e \\ -k(a+b+e)\mathbf{1}_f \\ \frac{1}{2}l(a-b-c+d)\mathbf{1}_g \\ -\frac{1}{2}l(a-b-c+d)\mathbf{1}_h \end{bmatrix},$$

$$A^TA\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} (\frac{1}{2}k(a-b-c+d)+l(a+c+g))\mathbf{1}_a \\ (\frac{1}{2}k(a-b-c+d)-l(a+c+g))\mathbf{1}_b \\ (-\frac{1}{2}k(a-b-c+d)+l(a+c+g))\mathbf{1}_c \\ (-\frac{1}{2}k(a-b-c+d)-l(a+c+g))\mathbf{1}_d \\ \frac{1}{2}k(a-b-c+d)\mathbf{1}_e \\ -\frac{1}{2}k(a-b-c+d)\mathbf{1}_f \\ l(a+c+g)\mathbf{1}_g \\ -l(a+c+g)\mathbf{1}_h \end{bmatrix}.$$

考虑方程 $A^TA(\zeta_1\mathbf{x}_1+\zeta_2\mathbf{x}_2) = \lambda(\zeta_1\mathbf{x}_1+\zeta_2\mathbf{x}_2)$，其中 ζ_1、ζ_2 和 λ为实数。令 $a_1 = k(a+b+e)$，$a_2 = k(a-b-c+d)$，$a_3 = l(a+c+g)$ 和 $a_4 = l(a-b-c+d)$。那么，

$$A^TA(\zeta_1\mathbf{x}_1+\zeta_2\mathbf{x}_2) = \begin{bmatrix} (\zeta_1(a_1+\frac{1}{2}a_4)+\zeta_2(\frac{1}{2}a_2+a_3))\mathbf{1}_a \\ (\zeta_1(a_1-\frac{1}{2}a_4)+\zeta_2(\frac{1}{2}a_2-a_3))\mathbf{1}_b \\ (\zeta_1(-a_1+\frac{1}{2}a_4)+\zeta_2(-\frac{1}{2}a_2+a_3))\mathbf{1}_b \\ (\zeta_1(-a_1-\frac{1}{2}a_4)+\zeta_2(-\frac{1}{2}a_2-a_3))\mathbf{1}_d \\ (\zeta_1a_1+\frac{1}{2}\zeta_2a_2)\mathbf{1}_e \\ (-\zeta_1a_1-\frac{1}{2}\zeta_2a_2)\mathbf{1}_f \\ (\frac{1}{2}\zeta_1a_4+\zeta_2a_3)\mathbf{1}_g \\ (-\frac{1}{2}\zeta_1a_4-\zeta_2a_3)\mathbf{1}_h \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} (\zeta_1+\zeta_2)\mathbf{1}_a \\ (\zeta_1-\zeta_2)\mathbf{1}_b \\ (-\zeta_1+\zeta_2)\mathbf{1}_b \\ (-\zeta_1-\zeta_2)\mathbf{1}_d \\ \zeta_1\mathbf{1}_e \\ -\zeta_1\mathbf{1}_f \\ \zeta_2\mathbf{1}_g \\ -\zeta_2\mathbf{1}_h \end{bmatrix}.$$

这意味着，当且仅当 (ζ_1,ζ_2) 是方程组$a_1\zeta_1+\frac{1}{2}a_2\zeta_2 = \lambda\zeta_1$和 $\frac{1}{2}a_4\zeta_1+a_3\zeta_2 = \lambda\zeta_2$ 的解时，$\zeta_1\mathbf{x}_1+\zeta_2\mathbf{x}_2$ 是 A^TA 对应于特征值 λ 的特征向量。因此，对于矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & \frac{1}{2}a_2 \\ \frac{1}{2}a_4 & a_3 \end{bmatrix}$的特征值 λ所对应的特征向量 (ζ_1,ζ_2)，$\zeta_1\mathbf{x}_1+\zeta_2\mathbf{x}_2$ 的一个归一化向量是 A的 Gram 奇异值 $\sqrt{\lambda}$对应的右奇异向量。此外，对于 (M1)、(M2) 和 (M3) 中的每一类 E'，分别考虑额外条件 $e=f=g=h=0$、$a=b=c=d=0$ 和 $g=h=0$，可以发现，通过 E'，针对格拉姆伴矩阵的格拉姆奇异值所对应的右奇异向量，也可得到类似结果。因此，我们有以下结果。

定理 4.19. 设 E 是秩为 2 的可实现矩阵，对应于 (M1)–(M4) 中的一种形式。令

$$M = \begin{bmatrix} k(a+b+e) & \frac{1}{2}k(a-b-c+d) \\ \frac{1}{2}l(a-b-c+d) & l(a+c+g) \end{bmatrix}$$

其中， M 中的各项对应于 (M1)–(M4) 中的子指标。假设 A 和 $A+E$ 通过 E 互为格拉姆伴矩阵。那么， A 和 $A+E$ 是可转换的，其格拉姆奇异值是M的特征值 λ 的平方根。此外，对应于$\sqrt{\lambda}$ 的右奇异向量是 $\zeta_1\mathbf{x}_1+\zeta_2\mathbf{x}_2$，的归一化向量，其中 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 是式 (10) 中的向量，而 (ζ_1,ζ_2) 是与 λ相关联的 M 的特征向量。

4.2.2. (M5) 形式的可实现矩阵

现在，我们通过 (M5) 形式的矩阵来研究格拉姆伴矩阵。此外，我们将证明，存在通过 (M5) 形式的矩阵得到的不可转换的格拉姆伴矩阵，而通过 (M1)–(M4) 中任意一种形式的矩阵得到的任何格拉姆伴矩阵都具有格拉姆奇异值。

引理 4.20. 设

$$A=\begin{bmatrix}A_1 & A_2 & X\\ A_3 & Y & A_4\\ Z & A_5 & A_6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}B_1 & B_2 & X\\ B_3 & Y & B_4\\ Z & B_5 & B_6\end{bmatrix}$$

为 (0, 1) 矩阵，使得 $(A-B)\mathbf{1}=0$, $\mathbf{1}^T(A-B)=0^T$，且 $A_i+B_i=J$ 对于 $i=1,\ldots6$ 均成立。那么， $AA^T=BB^T$ 当且仅当

$$\begin{aligned}(B_2-A_2)Y^T+X(B_4^T-A_4^T)&=A_1A_3^T-B_1B_3^T,\\ (B_1-A_1)Z^T+X(B_6^T-A_6^T)&=A_2A_5^T-B_2B_5^T,\\ (B_3-A_3)Z^T+Y(B_5^T-A_5^T)&=A_4A_6^T-B_4B_6^T.\end{aligned}$$

此外， $A^TA=B^TB$ 当且仅当

$$\begin{aligned}(B_2^T-A_2^T)X+Y^T(B_4-A_4)&=A_5^TA_6-B_5^TB_6,\\ (B_1^T-A_1^T)X+Z^T(B_6-A_6)&=A_3^TA_4-B_3^TB_4,\\ (B_3^T-A_3^T)Y+Z^T(B_5-A_5)&=A_1^TA_2-B_1^TB_2.\end{aligned}$$

证明。由 $(A-B)\mathbf{1}=0$，可得 $\begin{bmatrix}A_1 & A_2\end{bmatrix}\mathbf{1}=\begin{bmatrix}B_1 & B_2\end{bmatrix}\mathbf{1}$, $\begin{bmatrix}A_3 & A_4\end{bmatrix}\mathbf{1}=\begin{bmatrix}B_3 & B_4\end{bmatrix}\mathbf{1}$ $\begin{bmatrix}A_5 & A_6\end{bmatrix}\mathbf{1}=\begin{bmatrix}B_5 & B_6\end{bmatrix}\mathbf{1}$ $A_i+B_i=J$ $i=$，且。此外，$1\ldots6$ $4\ 11$ 对于，有。根据引理.，$A_1A_1^T+A_2A_2^T=B_1B_1^T+B_2B_2^T$, $A_3A_3^T+A_4A_4^T=B_3B_3^T+B_4B_4^T$ 且 $A_5A_5^T+A_6A_6^T=B_5B_5^T+B_6B_6^T$。同理，可由 $\mathbf{1}^T(A-B)=0^T$ 推得 $A_1^TA_1+A_3^TA_3=B_1^TB_1+B_3^TB_3$, $A_2^TA_2+A_5^TA_5T=B_2^TB_2+B_5^TB_5$ 且 $A_4^TA_4+A_6^TA_6=B_4^TB_4+B_6^TB_6$。结合 $AA^T=BB^T$ 和 $A^TA=B^TB$，所需结论显然成立。□

注 4.21. 延续引理 4.20 中的记号和假设，考虑 A，它是一个 3×3 分块矩阵。令 n_i 为 A 在 $i=1$、2、3 对应的 i^{th} 列分块中的列数。那么，$(A-B)\mathbf{1}=0$ 和 $A_i+B_i=J$ 推出 n_1+n_2、n_1+n_3 和 n_2+n_3 均为偶数。因此，对于 $i=1$、2、3， n_i均为偶数；或者对于 $i=1$、2、3， n_i均为奇数。同理， A 每个行分块中的行数具有相同的奇偶性。

定理 4.22. 令

$$E=\begin{bmatrix} J_{k,a} & -J_{k,b} & J_{k,c} & -J_{k,d} & 0 & 0 \\ -J_{l,a} & J_{l,b} & -J_{l,c} & J_{l,d} & 0 & 0 \\ J_{p,a} & -J_{p,b} & 0 & 0 & J_{p,e} & -J_{p,f} \\ -J_{q,a} & J_{q,b} & 0 & 0 & -J_{q,e} & J_{q,f} \\ 0 & 0 & J_{r,c} & -J_{r,d} & -J_{r,e} & J_{r,f} \\ 0 & 0 & -J_{s,c} & J_{s,d} & J_{s,e} & -J_{s,f} \end{bmatrix}$$

其中 $E\mathbf{1}=0$、 $\mathbf{1}^TE=0^T$ 和 $a+b$、 $c+d$、 $e+f$、 $k+l$、 $p+q$ 和 $r+s$ 均为正数。令

$$A=\begin{bmatrix} 0 & J_{k,b} & 0 & J_{k,d} & X_{11} & X_{12} \\ J_{l,a} & 0 & J_{l,c} & 0 & X_{21} & X_{22} \\ 0 & J_{p,b} & Y_{11} & Y_{12} & 0 & J_{p,f} \\ J_{q,a} & 0 & Y_{21} & Y_{22} & J_{q,e} & 0 \\ Z_{11} & Z_{12} & 0 & J_{r,d} & J_{r,e} & 0 \\ Z_{21} & Z_{22} & J_{s,c} & 0 & 0 & J_{s,f} \end{bmatrix} \tag{11}$$

为一个按 E 共形分块的 (0, 1) 矩阵。假设 $X=\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$、$Y=\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$ 和 $Z=\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$。那么， A 和 $A+E$ 是格拉姆伴矩阵，当且仅当 X、Y 和 Z 满足以下条件:

(i) there are integers x_1, x_2, y_1, y_2, z_1 *and* z_2 *such that* $X\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\-\mathbf{1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\mathbf{1}\\x_2\mathbf{1}\end{bmatrix}$, $Y\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\-\mathbf{1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\mathbf{1}\\y_2\mathbf{1}\end{bmatrix}$, $Z\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\-\mathbf{1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z_1\mathbf{1}\\z_2\mathbf{1}\end{bmatrix}$ *and* $x_1=y_2=-z_2$, $x_2=y_1=-z_1$, $x_1+x_2=y_1+y_2=-(z_1+z_2)=e-f$*; and*

(ii) 存在整数 α_1、 α_2、 β_1、 β_2、 γ_1 和 γ_2，使得 $X^T\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\-\mathbf{1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1\mathbf{1}\\\alpha_2\mathbf{1}\end{bmatrix}$、$Y^T\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\-\mathbf{1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_1\mathbf{1}\\\beta_2\mathbf{1}\end{bmatrix}$、 $Z^T\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\-\mathbf{1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma_1\mathbf{1}\\\gamma_2\mathbf{1}\end{bmatrix}$ 和 $\gamma_1=\beta_2=-\alpha_2$、 $\gamma_2=\beta_1=-\alpha_1$、 $\gamma_1+\gamma_2=\beta_1+\beta_2=-\left(\alpha_1+\alpha_2\right)=l-k$。

特别地，(i) 和 (ii) 蕴含 (a) $e\alpha_1-f\alpha_2=kx_1-lx_2$、 $c\beta_1-d\beta_2=py_1-qy_2$ 和 $a\gamma_1-b\gamma_2=rz_1-sz_2$。

Proof. Let $A=\begin{bmatrix}A_1 & A_2 & X\\ A_3 & Y & A_4\\ Z & A_5 & A_6\end{bmatrix}$ and $E=\begin{bmatrix}E_1 & E_2 & 0\\ E_3 & 0 & E_4\\ 0 & E_5 & E_6\end{bmatrix}$. Set $B=A+E$. By

引理 4.20, $AA^T = BB^T$ 当且仅当

$$\begin{bmatrix} J_{k,c} & -J_{k,d} \\ -J_{l,c} & J_{l,d} \end{bmatrix} Y^T + X \begin{bmatrix} J_{p,e} & -J_{p,f} \\ -J_{q,e} & J_{q,f} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} (b-a)J_{k,p} & 0 \\ 0 & (a-b)J_{l,q} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} J_{k,a} & -J_{k,b} \\ -J_{l,a} & J_{l,b} \end{bmatrix} Z^T + X \begin{bmatrix} -J_{r,e} & J_{r,f} \\ J_{s,e} & -J_{s,f} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} (d-c)J_{k,r} & 0 \\ 0 & (c-d)J_{l,s} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} J_{p,a} & -J_{p,b} \\ -J_{q,a} & J_{q,b} \end{bmatrix} Z^T + Y \begin{bmatrix} J_{r,c} & -J_{r,d} \\ -J_{s,c} & J_{s,d} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & (f-e)J_{p,s} \\ (e-f)J_{q,r} & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

由 (12)，我们得到

$$\begin{aligned} &J_{k,c}Y_{11}^T - J_{k,d}Y_{12}^T + X_{11}J_{e,p} - X_{12}J_{f,p} = (b-a)J_{k,p}, \\ &-J_{l,c}Y_{11}^T + J_{l,d}Y_{12}^T + X_{21}J_{e,p} - X_{22}J_{f,p} = 0, \\ &J_{k,c}Y_{21}^T - J_{k,d}Y_{22}^T - X_{11}J_{e,q} + X_{12}J_{f,q} = 0, \\ &-J_{l,c}Y_{21}^T + J_{l,d}Y_{22}^T - X_{21}J_{e,q} + X_{22}J_{f,q} = (a-b)J_{l,q}. \end{aligned}$$

由引理 4.10，(12) 等价于以下条件：$X_{11}\mathbf{1}_e - X_{12}\mathbf{1}_f = x_1\mathbf{1}_k$、$X_{21}\mathbf{1}_e - X_{22}\mathbf{1}_f = x_2\mathbf{1}_l$、$Y_{11}\mathbf{1}_c - Y_{12}\mathbf{1}_d = y_1\mathbf{1}_p$ 和 $Y_{21}\mathbf{1}_c - Y_{22}\mathbf{1}_d = y_2\mathbf{1}_q$，其中 $x_1+y_1 = x_2+y_2 = b-a$ 且 $x_1 - y_2 = x_2 - y_1 = 0$。类似地，将引理 4.10 应用于 (13) 和 (14)，可知 (13) 等价于 $z_1 - x_1 = z_2 - x_2 = d-c$ 且 $z_2+x_1 = z_1+x_2 = 0$，其中 $Z_{11}\mathbf{1}_a - Z_{12}\mathbf{1}_b = z_1\mathbf{1}_r$ 且 $Z_{21}\mathbf{1}_a - Z_{22}\mathbf{1}_b = z_2\mathbf{1}_s$；(14) 等价于 $z_2 - y_1 = z_1 - y_2 = f-e$ 且 $z_1+y_1 = z_2+y_2 = 0$。注意，$x_1 - y_2 = x_2 - y_1 = z_2 + x_1 = z_1 + x_2 = z_1 + y_1 = z_2 + y_2 = 0$ 当且仅当 $x_1 = y_2 = -z_2$ 且 $x_2 = y_1 = -z_1$。由于 $E\mathbf{1} = 0$ 且 $\mathbf{1}^T E = 0^T$，我们有 $a-b = d-c = f-e$。因此，$x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = -(z_1 + z_2) = e - f$。

对引理 4.20 中 $A^TA = B^TB$ 的等价条件作类似推导，可得 $\gamma_1 = \beta_2 = -\alpha_2$, $\gamma_2 = \beta_1 = -\alpha_1$,$\gamma_1 + \gamma_2 = \beta_1 + \beta_2 = -(\alpha_1 + \alpha_2) = l - k$ 其中 $X_{11}^T\mathbf{1}_k - X_{21}^T\mathbf{1}_l = \alpha_1\mathbf{1}_e$,$X_{12}^T\mathbf{1}_k - X_{22}^T\mathbf{1}_l = \alpha_2\mathbf{1}_f$, $Y_{11}^T\mathbf{1}_p - Y_{21}^T\mathbf{1}_q = \beta_1\mathbf{1}_c$, $Y_{12}^T\mathbf{1}_p - Y_{22}^T\mathbf{1}_q = \beta_2\mathbf{1}_d$, $Z_{11}^T\mathbf{1}_r - Z_{21}^T\mathbf{1}_s = \gamma_1\mathbf{1}_a$, 且 $Z_{12}^T\mathbf{1}_r - Z_{22}^T\mathbf{1}_s = \gamma_2\mathbf{1}_b$。

另一方面，从 $\mathbf{1}_k^TX_{11}\mathbf{1}_e - \mathbf{1}_k^TX_{12}\mathbf{1}_f = x_1\mathbf{1}_k^T\mathbf{1}_k$中减去 $\mathbf{1}_l^TX_{21}\mathbf{1}_e - \mathbf{1}_l^TX_{22}\mathbf{1}_f = x_2\mathbf{1}_l^T\mathbf{1}_l$，可得

$$(\mathbf{1}_k^TX_{11} - \mathbf{1}_l^TX_{21})\mathbf{1}_e - (\mathbf{1}_k^TX_{12} - \mathbf{1}_l^TX_{22})\mathbf{1}_f = x_1\mathbf{1}_k^T\mathbf{1}_k - x_2\mathbf{1}_l^T\mathbf{1}_l.$$

因此，$e\alpha_1 - f\alpha_2 = kx_1 - lx_2$。类似地，我们可以由$\mathbf{1}_p^TY_{11}\mathbf{1}_c - \mathbf{1}_p^TY_{12}\mathbf{1}_d = y_1\mathbf{1}_p^T\mathbf{1}_p$ 和 $\mathbf{1}_q^TY_{21}\mathbf{1}_c - \mathbf{1}_q^TY_{22}\mathbf{1}_d = y_2\mathbf{1}_q^T\mathbf{1}_q$得到 $c\beta_1 - d\beta_2 = py_1 - qy_2$；并由 $\mathbf{1}_r^TZ_{11}\mathbf{1}_a - \mathbf{1}_r^TZ_{12}\mathbf{1}_b = z_1\mathbf{1}_r^T\mathbf{1}_r$和 $\mathbf{1}_s^TZ_{21}\mathbf{1}_a - \mathbf{1}_s^TZ_{22}\mathbf{1}_b = z_2\mathbf{1}_s^T\mathbf{1}_s$得到 $a\gamma_1 - b\gamma_2 = rz_1 - sz_2$。同样，通过类似的论证，可以验证 (i) 推出 (a)。 □

注 4.23。沿用定理 4.22 的记号和结论。设 $q = 0$。这等价于 E 的第四行分块被湮灭。由于相应的 A 中的 Y_{21} 和 Y_{22} 被移除，因此在这种情况下，参数 y_2 不会出现。此外，考察定理 4.22 的证明，为了得到 A 和 $A+E$ 为格拉姆伴矩阵的等价条件，我们

只需将条件修改如下： $x_1 = -z_2$、 $x_2 = y_1 = -z_1$ 和 $x_1 + x_2 = -(z_1 + z_2) = e - f$；也就是说，我们可以通过湮灭 (i) 和 (ii) 中涉及 y_2 的约束，得到等价条件。以这种方式可以验证，如果表示 E 中行分块或列分块位置的子指标为零，那么删除 (i) 和 (ii) 中涉及未出现参数的约束，即可得到等价条件；这是因为所得矩阵是从 E 中删除与这些子指标对应的行分块或列分块后得到的。

例 4.24. 保持定理 4.22 中的记号和结论，对于 $n \geq 1$，令 $k = a = s = f = n + 1$, $l = b = r = e = n$, $p = c = 0$ 和 $q = d = 1$。根据注 4.23，我们通过如下修改 (i) 和 (ii)，得到 A 和 $A + E$ 成为格拉姆伴矩阵的等价条件： $x_1 = y_2 = -z_2$, $x_2 = -z_1$,$x_1 + x_2 = -(z_1 + z_2) = -1$, $\gamma_1 = \beta_2 = -\alpha_2$, $\gamma_2 = -\alpha_1$, $\gamma_1 + \gamma_2 = -(\alpha_1 + \alpha_2) = -1$。由于 $p = c = 0$ 和 $q = d = 1$，我们有 $Y = -y_2 = -\beta_2$。为便于表述，置换 4th 和 5th 行分块以及 4th 和 5th 列分块后，我们有

$$E = \left[\begin{array}{cc|c|cc} J_{n+1} & -J_{n+1,n} & -\mathbf{1}_{n+1} & 0 & \\ -J_{n,n+1} & J_n & \mathbf{1}_n & & \\ \hline -\mathbf{1}_{n+1}^T & \mathbf{1}_n^T & 0 & \mathbf{1}_{n+1}^T & -\mathbf{1}_n^T \\ \hline 0 & & \mathbf{1}_{n+1} & -J_{n+1} & J_{n+1,n} \\ & & -\mathbf{1}_n & J_{n,n+1} & -J_n \end{array}\right].$$

那么，可以根据等价条件验证： A 是$A + E$的格拉姆伴矩阵，当且仅当 A 具有如下形式：

$$A = \left[\begin{array}{cc|c|cc} 0 & J_{n+1,n} & \mathbf{1}_{n+1} & M_1 & \\ J_{n,n+1} & 0 & 0 & & \\ \hline \mathbf{1}_{n+1}^T & 0 & m & 0 & \mathbf{1}_n^T \\ \hline M_2 & & 0 & J_{n+1} & 0 \\ & & \mathbf{1}_n & 0 & J_n \end{array}\right]$$

其中，$m \in \{0, 1\}$、M_1 和 M_2 是 $(2n+1) \times (2n+1)$ 矩阵，使得 $M_i \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n+1} \\ -\mathbf{1}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\mathbf{1}_{n+1} \\ 1-m \quad (\,)\mathbf{1}_n \end{bmatrix}$ 且 $M_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n+1} \\ -\mathbf{1}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\mathbf{1}_{n+1} \\ 1-m \quad (\,)\mathbf{1}_n \end{bmatrix}$，对于 $i \in \{1, 2\}$。

注 4.25. 设 $E = \begin{bmatrix} \widetilde{E} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是一个可实现矩阵，其中 $\widetilde{E}$ 属于类型 (M5)。那么，通过 E 得到的格拉姆伴矩阵可按注 4.18 中的方式刻画。

注 4.26. 延续定理 4.22 中的假设和记号，考虑 $e\alpha_1 - f\alpha_2 = kx_1 - lx_2$、$c\beta_1 - d\beta_2 = py_1 - qy_2$ 和 $a\gamma_1 - b\gamma_2 = rz_1 - sz_2$，其中 $x_1 = y_2 = -z_2$、 $x_2 = y_1 = -z_1$、$\gamma_1 = \beta_2 = -\alpha_2$、 $\gamma_2 = \beta_1 = -\alpha_1$、$x_1 + x_2 = e - f$ 和 $\alpha_1 + \alpha_2 = k - l$。那么，

$$\begin{aligned} e\alpha_1 - f\alpha_2 &= kx_1 - lx_2, \\ -c\alpha_1 + d\alpha_2 &= px_2 - qx_1, \\ -a\alpha_2 + b\alpha_1 &= -rx_2 + sx_1. \end{aligned}$$

此外，我们得到一个线性方程组

$$\begin{aligned}(e+f)\alpha_1-(k+l)x_1&=f(k-l)-l(e-f),\\(c+d)\alpha_1-(p+q)x_1&=d(k-l)-p(e-f),\\(a+b)\alpha_1-(r+s)x_1&=a(k-l)-r(e-f).\end{aligned}\tag{15}$$

注意，方程 $(e+f)(p+q)=(k+l)(c+d)$、$(e+f)(r+s)=(k+l)(a+b)$ 和 $(c+d)(r+s)=(p+q)(a+b)$（它们来自 (15) 中每对方程的系数矩阵的行列式）等价于 $\frac{e+f}{k+l}=\frac{c+d}{p+q}=\frac{a+b}{r+s}$，即 X、Y和 Z 的行数与列数之比成比例。在这种情况下，X、Y 和 Z 的尺寸称为成比例。

我们注意到，一对 α_1 和 x_1 完全确定了 (i) 和 (ii) 中的整数。分别利用来自 $E\mathbf{1}=0$和 $\mathbf{1}^TE=0^T$的 $a-b=d-c=f-e$和 $k-l=q-p=s-r$，可以验证 $(\alpha_1,x_1)=(\frac{k-l}{2},\frac{e-f}{2})$ 是线性方程组 (15) 的一个解。于是，$\alpha_1=\alpha_2$ 和 $x_1=x_2$。对于 (0, 1) 矩阵，只要存在形如 (11) 的格拉姆伴矩阵 A 以及满足 $(\alpha_1,x_1)=(\frac{k-l}{2},\frac{e-f}{2})$ 的 $A+E$，$k-l$和 $e-f$就是偶数。

假设 X、Y 和 Z 中有两个矩阵的尺寸不成比例。那么，方程组 (15) 有唯一解 $(\alpha_1,x_1)=(\frac{k-l}{2},\frac{e-f}{2})$。因此，若 $k-l$ 或 $e-f$ 为奇数，则不存在满足 (i) 和 (ii) 的 (0, 1) 矩阵 X、Y 和 Z。换言之，若 E 可实现，则 $k-l$ 和 $e-f$ 都是偶数，即 $k+l$ 和 $e+f$ 都是偶数。

假设 X、Y 和 Z 的尺寸成比例。考虑方程 $(e+f)\alpha_1-(k+l)x_1=f(k-l)-l(b-a)$，其解为 $(\alpha_1,x_1)=(\frac{k-l}{2},\frac{e-f}{2})$。对于任意 t，我们得到 $(\alpha_1,x_1)=t(k+l,e+f)+(\frac{k-l}{2},\frac{e-f}{2})$，作为方程 (15) 的解。令 $t=\frac{1}{2}$。于是，$(\alpha_1,x_1)=(k,e)$。因此，$x_1=y_2=-z_2=e$、$x_2=y_1=-z_1=-f$、$\gamma_1=\beta_2=-\alpha_2=l$ 和 $\gamma_2=\beta_1=-\alpha_1=-k$。这个特解用于证明：在 $k-l$ 或 $e-f$ 为奇数，即 $k+l$ 或 $e+f$ 为奇数的条件下，E 可实现。

沿用定理 4.22 中的假设和记号，由注 4.21 可知，X、Y 和 Z 中每个矩阵的行数（分别为列数）具有相同的奇偶性。设 X 是一个 $m\times n$ (0, 1) 矩阵。我们将分两种情况证明 E 可实现的等价条件（定理 4.35）：m 和 n 均为偶数（引理 4.28），以及 m 或 n 为奇数（引理 4.33）。注意，我们只需证明存在满足定理 4.22 中 (i) 和 (ii) 的 X、Y 和 Z。

引理 4.27. 令 $m_1,m_2,n_1,n_2>0$。令 $X=\begin{bmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{bmatrix}$ 为一个 (0, 1) 矩阵，其中 X_{11} 和 X_{22} 分别是 $m_1\times n_1$ 和 $m_2\times n_2$ 矩阵。假设 $X\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{n_1}\\-\mathbf{1}_{n_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\mathbf{1}_{m_1}\\a_2\mathbf{1}_{m_2}\end{bmatrix}$ 且 $X^T\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{m_1}\\-\mathbf{1}_{m_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\mathbf{1}_{n_1}\\b_2\mathbf{1}_{n_2}\end{bmatrix}$。对于 $X_1=\begin{bmatrix}X_{12}&X_{11}\\X_{22}&X_{21}\end{bmatrix}$，我们有 $X_1\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{n_2}\\-\mathbf{1}_{n_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a_1\mathbf{1}_{m_1}\\-a_2\mathbf{1}_{m_2}\end{bmatrix}$ 和 $X_1^T\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{m_1}\\-\mathbf{1}_{m_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_2\mathbf{1}_{n_2}\\b_1\mathbf{1}_{n_1}\end{bmatrix}$。此外，给定 $X_2=\begin{bmatrix}X_{22}&X_{21}\\X_{12}&X_{11}\end{bmatrix}$，我们有 $X_2\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{n_2}\\-\mathbf{1}_{n_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a_2\mathbf{1}_{m_2}\\-a_1\mathbf{1}_{m_1}\end{bmatrix}$ 和 $X_2^T\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{m_2}\\-\mathbf{1}_{m_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-b_2\mathbf{1}_{n_2}\\-b_1\mathbf{1}_{n_1}\end{bmatrix}$。

引理 4.28. 令 $m_1, m_2, n_1, n_2 > 0$。假设 $m_1 + m_2$ 和 $n_1 + n_2$ 都是偶数。则存在一个 $(m_1+m_2)\times(n_1+n_2)$ (0, 1) 矩阵 $X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$，其中 X_{11} 和 X_{22} 分别是 $m_1 \times n_1$ 和 $m_2 \times n_2$ 矩阵，使得 $X \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n_1} \\ -\mathbf{1}_{n_2} \end{bmatrix} = \frac{n_1-n_2}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{m_1} \\ \mathbf{1}_{m_2} \end{bmatrix}$ 且 $X^T \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{m_1} \\ -\mathbf{1}_{m_2} \end{bmatrix} = \frac{m_1-m_2}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n_1} \\ \mathbf{1}_{n_2} \end{bmatrix}$。

证明。如果 $m_1 = m_2$ 和 $n_1 = n_2$，则 X 可以取为零矩阵。根据引理 4.27，我们只需考虑两种情况：(i) $m_1 > m_2$和 $n_1 = n_2$；(ii) $m_1 > m_2$ 和 $n_1 > n_2$。如果 $m_1 > m_2$ 和 $n_1 = n_2$，那么$X = \begin{bmatrix} J_{\frac{m_1-m_2}{2}, \quad n_1+n_2} \\ 0 \end{bmatrix}$ 就是我们所需的矩阵之一。假设 $m_1 > m_2$ 和$n_1 > n_2$。令 $\alpha = \frac{m_1-m_2}{2}$和 $\beta = \frac{n_1-n_2}{2}$。于是，容易验证，下列矩阵可以作为我们所需的矩阵：

$$X = \left[\begin{array}{ccc|c} J_{\alpha,\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{m_2,\beta} & 0 \\ 0 & J_{\alpha,n_2} & J_{\alpha,\beta} & J_{\alpha,n_2} \\ \hline 0 & 0 & J_{m_2,\beta} & 0 \end{array}\right].$$

□

设 $n > 0$，并令 $\alpha = (\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n)$ 和 $\beta = (\beta_1, \ldots\ldots, \beta_n)$ 为实向量。假设 $\alpha' = (\alpha'_1, \ldots\ldots, \alpha'_n)$ 和 $\beta' = (\beta'_1, \ldots\ldots, \beta'_n)$ 分别由 α 和 β 通过重排得到，使得 $\alpha'_1 \geq \cdots \geq \alpha'_n$ 和 $\beta'_1 \geq \cdots \geq \beta'_n$。若对于所有$1 \leq k \leq n$都有 $\sum_{i=1}^{k} \alpha'_i \geq \sum_{i=1}^{k} \beta'_i$，且 $\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i = \sum_{i=1}^{n} \beta'_i$，则称向量 α 主序于 β，记作 $\alpha \succ \beta$。对于非负整数 $\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n$，定义 $\alpha_i^* = |\{\alpha_j | \alpha_j \geq i, j = 1, \ldots, n\}|$，其中 $i = 1, \ldots\ldots, n$。称向量 $\alpha^* := (\alpha_1^*, \ldots\ldots, \alpha_n^*)$ 与 α共轭。例如，如果 $\alpha =$ (3, 3, 3, 3, 3)，那么$\alpha^* =$ (5, 5, 5, 0, 0)。

令 $\mathcal{U}(R, S)$ 表示所有行和向量为 R 且列和向量为 S 的 (0, 1) 矩阵的集合。令 $R = (r_1, \ldots, r_m)$ 和 $S = (s_1, \ldots, s_n)$ 为非负整数向量。在主序的语境下，若 $m > n$ （分别地，$m < n$），我们可以在 S （分别地，R）后补上零。

定理 4.29. *[10]*（Gale–Ryser 定理）设 $R = (r_1, \ldots, r_m)$ 和 $S = (s_1, \ldots, s_n)$ 为非负整数向量。那么，当且仅当 $S \prec R^*$ 且对于 $i = 1, \ldots, m$，$r_i \leq n$ 时，$\mathcal{U}(R, S)$ 中存在一个 (0, 1) 矩阵。

关于如何构造 $\mathcal{U}(R, S)$ 中的矩阵，请参阅 [10]。由定理 4.29 可立即得到以下两个引理。

引理 4.30. 设 $R = (r, \ldots, r)$ 和 $S = (s, \ldots, s)$ 分别是大小为 $m(\geq s)$ 和 $n(\geq r)$ 的非负整数向量。那么，当且仅当存在一个属于 $\mathcal{U}(R, S)$ 的矩阵时，$rm = sn$。

引理 4.31. 设 $S = (s_1, \ldots, s_n)$ 是一个非负整数向量，其中$\sum_{i=1}^{n} s_i = \ell$。设 m 是一个正整数，使得对于所有 $i = 1, \quad s_i \leq m \ldots n$

并且对于某个 $q \geq 0$ 和 $0 \leq r \leq m-1$, $\ell = qm + r$。假设

$$R = (\underbrace{q+1, \ldots, q+1}_{r \text{ times}}, \underbrace{q, \ldots, q}_{m-r \text{ times}}).$$

那么，存在一个矩阵 $A \in \mathcal{U}(R, S)$。

证明。显然， $l \leq mn$，因此当 $r > 0$ 时， $q+1 \leq n$。由于我们有 $R^* = (m, \ldots, m, r, 0, \ldots, 0)$，其中 m 出现 q 次，因此可见 $S \prec R^*$。由定理 4.29 可得所需结论。 □

给定一个非负整数向量 $R = (r_1, \ldots, r_m)$，其中 $\sum_{i=1}^{m} r_i = \ell$，我们将通过构造一个具体矩阵，为引理 4.31 建立一个类似的结果。令 n 为正整数，使得对于所有 $i = 1, \ldots, m$，都有 $r_i \leq n$。选取 $q \geq 0$，使得对于某个 $0 \leq r \leq n-1$，有 $\ell = qn + r$。令 $r_0 = 0$，并令 A_0 为满足以下条件的 $m \times n(q+1)$ 矩阵：若 $r_i > 0$，则 A_0 的第 i^{th} 行从第 $(1 + \sum_{j=1}^{i} r_{j-1})^{\text{th}}$ 个位置到第 $(\sum_{j=1}^{i} r_j)^{\text{th}}$ 个位置均为 1，其余位置为 0；若 $r_i = 0$，则 A_0 的第 i^{th} 行为零行。于是， A_0 可划分为 $(q+1)$ 个子矩阵 $A_1, \ldots, A_{q+1}$，使得对于 $1 \leq i \leq q+1$， A_i 是 A_0 的一个 $m \times n$ 子矩阵，其列的索引为 $(i-1)n + 1, \ldots, (i-1)n + n$。

设 $A = A_1 + \cdots + A_{q+1}$。显然， A 的行和向量为 R。由于 A_0 的每一行中的 1 都连续出现，且每行至多包含 n 个 1，因此 A 必为一个 (0, 1) 矩阵。此外，对于$i = 1$, ..., q， A_i 的每一列恰好包含一个 1，而 A_{q+1} 的前 r 列中的每一列也恰好包含一个 1。因此， $A \in \mathcal{U}(R, S)$，其中

$$S = (\underbrace{q+1, \ldots, q+1}_{r \text{ times}}, \underbrace{q, \ldots, q}_{n-r \text{ times}}). \tag{16}$$

例 4.32。设 $R = (3, 3, 0, 2, 3)$。考虑上述描述的矩阵 A_0：

$$A_0 = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

如上所述，我们得到

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

继续采用定理 4.22 中的假设和记号，假设E 是一个形式为 (M5) 的 $(0, 1, -1)$ 矩阵，且 A 是一个形式为 (11) 的 (0, 1) 矩阵。回顾注 4.26：已知E 在 -1中的行数或列数

为奇数，若 E 可实现，则 A中的尺寸 X、 Y 和 Z 必然成比例。

现在我们断言逆命题也成立。为证明这一断言，我们将在 X、 Y 和 Z 的尺寸成比例（不考虑其尺寸的奇偶性）的条件下，构造满足定理 4.22 中 (i) 和 (ii) 的 (0, 1) 矩阵 X、 Y 和 Z。由于 X 和 Y 的尺寸成比例，如果 Y 的行数多于 X 的行数，那么 Y 的列数就多于 X 的列数，反之亦然。因此，我们不妨假设 X 的尺寸最小。于是，只需证明 X 的存在蕴含 Y 的存在。根据注 4.26 的最后一段，我们将找出满足 $x_1 = y_2 = e$、 $x_2 = y_1 = -f$、$\beta_2 = -\alpha_2 = l$ 和 $\beta_1 = -\alpha_1 = -k$ 条件的 X 和 Y。那么， X 所需的矩阵之一可构造为 $\begin{bmatrix} J_k & e & 0 \\ 0 & f & J_l \end{bmatrix}$。

若 Y 的尺寸与 X 的相同，则取 $Y = X$。设 $p + q > k + l$ 和 $c + d > e + f$。由于 X 和 Y 的尺寸成比例，$\frac{c+d}{p+q} = \frac{e+f}{k+l}$。由 $E\mathbf{1} = 0$ 和 $\mathbf{1}^T E = 0^T$，可得 $q-p = k-l$ 和 $c-d = e-f$。我们需要构造一个 (0, 1) 矩阵 Y，使得

$$Y \begin{bmatrix} \mathbf{1}_c \\ -\mathbf{1}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f\mathbf{1}_p \\ e\mathbf{1}_q \end{bmatrix} \text{ and } Y^T \begin{bmatrix} \mathbf{1}_p \\ -\mathbf{1}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k\mathbf{1}_c \\ l\mathbf{1}_d \end{bmatrix}.$$

根据引理 4.27，我们可以证明存在一个 (0, 1) 矩阵 Y_1，使得

$$Y_1 \begin{bmatrix} \mathbf{1}_c \\ -\mathbf{1}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e\mathbf{1}_q \\ -f\mathbf{1}_p \end{bmatrix} \text{ and } Y_1^T \begin{bmatrix} \mathbf{1}_q \\ -\mathbf{1}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\mathbf{1}_c \\ -l\mathbf{1}_d \end{bmatrix}.$$

引理 4.33。设 a_1、 a_2、 b_1、 $b_2 > 0$。假设 m_1、 m_2、 n_1 和 n_2 是正整数，且满足 $m_1+m_2 > a_1+a_2$、 $n_1+n_2 > b_1+b_2$、 $m_1-m_2 = a_1-a_2$、$n_1 - n_2 = b_1 - b_2$ 和 $\frac{n_1+n_2}{m_1+m_2} = \frac{b_1+b_2}{a_1+a_2}$。那么，存在一个尺寸为 $(m_1 + m_2) \times (n_1 + n_2)$ 的 (0, 1) 矩阵 Y，使得

$$Y \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n_1} \\ -\mathbf{1}_{n_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1\mathbf{1}_{m_1} \\ -b_2\mathbf{1}_{m_2} \end{bmatrix}, Y^T \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{m_1} \\ -\mathbf{1}_{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1\mathbf{1}_{n_1} \\ -a_2\mathbf{1}_{n_2} \end{bmatrix}.$$

证明。我们将构造一个具有所需性质的 (0, 1) 矩阵 $Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$，其中 Y_{11} 和 Y_{22} 分别是 $m_1 \times n_1$ 和 $m_2 \times n_2$ 矩阵。在此，对于 i，我们分别用 $j \in \{1, 2\}$ 和 Y_{ij} 表示 R_{ij} 的行和向量与列和向量。

利用 $m_1 - m_2 = a_1 - a_2$、 $n_1 - n_2 = b_1 - b_2$，由 $m_1 + m_2 > a_1 + a_2$ 和 $n_1 + n_2 > b_1 + b_2$ 可得 $m_1 > a_1$、 $m_2 > a_2$、 $n_1 > b_1$ 和 $n_2 > b_2$；由 $\frac{n_1+n_2}{m_1+m_2} = \frac{b_1+b_2}{a_1+a_2}$ $m_1b_1 + m_2b_2 = n_1a_1 + n_2a_2$ $m_1b_1 =$ 可知。设。n_1a_1 $m_2b_2 = n_2a_2$ 4 30, $Y_{11} \in \mathcal{U}$ R_{11} S_{11} 于是，。根据引理。存在 (,) 和 $Y_{22} \in \mathcal{U}(R_{22}, S_{22})$，使得 $R_{11} = b_1\mathbf{1}_{m_1}$、 $S_{11} = a_1\mathbf{1}_{n_1}$、$R_{22} = b_2\mathbf{1}_{m_2}$ 和 $S_{22} = a_2\mathbf{1}_{n_2}$。取 $Y_{12} = 0$ 和 $Y_{21} = 0$，即可得到所需的矩阵。

考虑 Y的转置，我们不妨假设 $m_1b_1 > n_1a_1$。令$Y_{12} = 0$。设 $\ell = m_1b_1 - n_1a_1$。我们首先构造 Y_{11}。选择 $q_1 \geq 0$ 使得

对于某个 $0 \le r_1 < n_1$，有 $\ell = n_1 q_1 + r_1$。令 $S = (q_1+1, \dots, q_1+1, q_1, \dots, q_1)$，其中 q_1+1 和 q_1 分别在 S中出现 r_1 次和 $n_1 - r_1$ 次。令 $S_{11} = a_1 \mathbf{1}_{n_1} + S$ 和 $R_{11} = b_1 \mathbf{1}_{m_1}$。由于 $\ell = m_1 b_1 - n_1 a_1$，S_{11} 各项之和与 R_{11}各项之和相同。我们将证明S_{11} 中的每一项都不大于 m_1。由 $n_1 > b_1$，我们得到

$$\begin{aligned} m_1 - (a_1 + q_1) &= m_1 - \frac{n_1 a_1 + \ell - r_1}{n_1} \\ &= m_1 - \frac{m_1 b_1 - r_1}{n_1} = \frac{m_1(n_1 - b_1) + r_1}{n_1} > 0. \end{aligned}$$

因此，$m_1 - (q_1 + 1 + a_1) \ge 0$。此外，$R_{11}^* \succ S_{11}$。根据定理 4.29，存在一个矩阵 $Y_{11} \in \mathcal{U}(R_{11}, S_{11})$。

现在接下来，我们需要证明其列和向量为 S_{21}。由 $m_1 - m_2 = a_1 - a_2$ 和 $n_1 > b_1$，可得

$$\begin{aligned} m_2 - q_1 &= \frac{m_2 n_1 - \ell + r_1}{n_1} \\ &= \frac{m_2 n_1 - m_1 b_1 + n_1 a_1 + r_1}{n_1} = \frac{m_1(n_1 - b_1) + n_1 a_2 + r_1}{n_1} > 0. \end{aligned}$$

因此，$m_2 \ge q_1 + 1$。选择 $q_2 \ge 0$ 使得对于某个 $0 \le r_2 < m_2$，有 $\ell = m_2 q_2 + r_2$。

将引理 4.31 应用于 S，可得存在 $Y_{21} \in \mathcal{U}(R_{21}, S_{21})$，使得 $S_{21} = S$且 $R_{21} = (q_2+1, \dots, q_2+1, q_2, \dots, q_2)$，其中 q_2+1和 q_2分别在 R_{21}中出现 r_2次和 $m_2 - r_2$ 次。

设 $R_{22} = b_2 \mathbf{1}_{m_2} + R_{21}$ 和 $S_{22} = a_2 \mathbf{1}_{n_2}$。那么，$R_{22}$各项之和等于 S_{22}各项之和。利用 $\ell = m_1 b_1 - n_1 a_1$、$m_1 b_1 + m_2 b_2 = n_1 a_1 + n_2 a_2$和 $m_2 > a_2$，我们得到

$$n_2 - (b_2 + q_2) = n_2 - \frac{m_2 b_2 + \ell - r_2}{m_2} = \frac{n_2(m_2 - a_2) + r_2}{m_2} > 0.$$

那么，$n_2 - (q_2 + 1 + b_2) \ge 0$。此外，$S_{22}^* \succ R_{22}$。根据定理 4.29，存在 $Y_{22} \in \mathcal{U}(R_{22}, S_{22})$。因此，结论得证。 □

例 4.34。设 $a_1 = 4$、$a_2 = 6$、$b_1 = 5$、$b_2 = 3$、$m_1 = 9$、$m_2 = 11$、$n_1 = 9$和 $n_2 = 7$。可以验证，这些指标满足引理 4.33 的假设。我们使用引理 4.33 证明中的结果和记号。那么，$m_1 b_1 - n_1 a_1 = 9$，因此 $S = \mathbf{1}_9$。可以发现，我们有 $Y_{11} \in \mathcal{U}(R_{11}, S_{11})$，其中 $R_{11} = 5\mathbf{1}_9$和 $S_{11} = 4\mathbf{1}_9 + \widetilde{S}$；$Y_{21} \in \mathcal{U}(R_{21}, S_{21})$，其中 $R_{21}^T = (\mathbf{1}_9^T, 0, 0)$和 $S_{21} = S$；以及 $Y_{22} \in \mathcal{U}(R_{22}, S_{22})$，其中 $R_{22} = R_{21} + 3\mathbf{1}_{11}$ 和 $S_{22} = 6\mathbf{1}_7$。如例 4.32 所述的构造，我们可以得到 $Y_{21} = \begin{bmatrix} I_9 \\ 0 \end{bmatrix}$。（使用 [10] 中展示的过程，可以得到 Y_{11} 和 Y_{22}。）

应用引理 4.28 和 4.33，可得以下结果。

定理 4.35. 设 E 是一个形如 (M5) 的 $(0, 1, -1)$ 矩阵。那么，E 可实现，当且仅当满足以下条件之一：

(i) $a+b$、 $c+d$、 $e+f$、 $k+l$、 $p+q$ 和 $r+s$ 都是偶数，并且

(ii) $a+b$、 $c+d$ 和 $e+f$ 三个数均为奇数，或者 $k+l$、$p+q$ $r+s$ 为奇数；并且 $\frac{c+f}{k+l}=\frac{c+d}{p+q}=\frac{a+b}{r+s}$。

假设 A 和 $A+E$ 是通过一个形如(M5)的(0, 1, -1)矩阵 E 互为格拉姆伴矩阵。我们使用定理 4.22 中的结果和记号。考虑

$$2A+E=\begin{bmatrix} J_{k,a} & J_{k,b} & J_{k,c} & J_{k,d} & 2X_{11} & 2X_{12} \\ J_{l,a} & J_{l,b} & J_{l,c} & J_{l,d} & 2X_{21} & 2X_{22} \\ J_{p,a} & J_{p,b} & 2Y_{11} & 2Y_{12} & J_{p,e} & J_{p,f} \\ J_{q,a} & J_{q,b} & 2Y_{21} & 2Y_{22} & J_{q,e} & J_{q,f} \\ 2Z_{11} & 2Z_{12} & J_{r,c} & J_{r,d} & J_{r,e} & J_{r,f} \\ 2Z_{21} & 2Z_{22} & J_{s,c} & J_{s,d} & J_{s,e} & J_{s,f} \end{bmatrix}.$$

Let

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_a^T & -\mathbf{1}_b^T & \mathbf{1}_c^T & -\mathbf{1}_d^T & \mathbf{0}_e^T & \mathbf{0}_f^T \end{bmatrix}, \\ \mathbf{x}_2^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_a^T & -\mathbf{1}_b^T & \mathbf{0}_c^T & \mathbf{0}_d^T & \mathbf{1}_e^T & -\mathbf{1}_f^T \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{17}$$

由 $E\mathbf{1}=0$可得 $b-a=c-d=e-f$。因此,

$$(2A+E)\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (f-e+2y_1)\mathbf{1}_p \\ (f-e+2y_2)\mathbf{1}_q \\ (2z_1+e-f)\mathbf{1}_r \\ (2z_2+e-f)\mathbf{1}_s \end{bmatrix},\ (2A+E)\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix} (f-e+2x_1)\mathbf{1}_k \\ (f-e+2x_2)\mathbf{1}_l \\ 0 \\ 0 \\ (2z_1+e-f)\mathbf{1}_r \\ (2z_2+e-f)\mathbf{1}_s \end{bmatrix}.$$

由于 A和 $A+E$互为格拉姆伴矩阵，定理 4.22 中的条件(i)成立，因此有 $x_1=y_2=-z_2$、 $x_2=y_1=-z_1$ 和 $x_1+x_2=y_1+y_2=-(z_1+z_2)=e-f$。注意，$\mathbf{x}_1$ 和$\mathbf{x}_2$ 构成 Row(E) 的一组基。因此，$(2A+E)E^T=0$ 当且仅当 $x_1=\frac{e-f}{2}$。所以，由定理3.9可知， A 和 $A+E$ 可转换当且仅当$x_1=\frac{e-f}{2}$。

假设 $x_1=\frac{e-f}{2}$。由于 (α_1, x_1) 是注 4.26 中方程组 (15) 的一个解，因此我们有 $\alpha_1=\frac{k-l}{2}$。于是，由 $E\mathbf{1}=0$, $\mathbf{1}^TE=0^T$、定理 4.22 的条件 (i) 和 (ii)，对于 $i=1,\ 2$, $x_i=y_i=-z_i=\frac{e-f}{2}=\frac{c-d}{2}=\frac{b-a}{2}$ 和 $\gamma_i=\beta_i=-\alpha_i=\frac{l-k}{2}=\frac{p-q}{2}=\frac{r-s}{2}$。现在我们求出 A 和 $A+E$ 的格拉姆奇异值及相应的右奇异向量。计算可得

$$A^TA\begin{bmatrix} \mathbf{1}_a \\ -\mathbf{1}_b \\ \mathbf{1}_c \\ -\mathbf{1}_d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (l(a+c)+q(a+y_2))\mathbf{1}_a+(z_1-d)Z_{11}^T\mathbf{1}_r+(z_2+c)Z_{21}^T\mathbf{1}_s \\ (k(-b-d)+p(-b+y_1))\mathbf{1}_b+(z_1-d)Z_{12}^T\mathbf{1}_r+(z_2+c)Z_{22}^T\mathbf{1}_s \\ (l(a+c)+s(z_2+c))\mathbf{1}_c+(-b+y_1)Y_{11}^T\mathbf{1}_p+(a+y_2)Y_{21}^T\mathbf{1}_q \\ (k(-b-d)+r(z_1-d))\mathbf{1}_d+(-b+y_1)Y_{12}^T\mathbf{1}_p+(a+y_2)Y_{22}^T\mathbf{1}_q \\ (q(a+y_2)+r(z_1-d))\mathbf{1}_e+(-b-d)X_{11}^T\mathbf{1}_k+(a+c)X_{21}^T\mathbf{1}_l \\ (p(-b+y_1)+s(z_2+c))\mathbf{1}_f+(-b-d)X_{21}^T\mathbf{1}_k+(a+c)X_{22}^T\mathbf{1}_l \end{bmatrix}.$$

将 $\frac{d-c}{2}$ 代入右侧第一项中的 z_1 和 z_2，得到$-\frac{1}{2}(c+d)Z_{11}^T\mathbf{1}_r+\frac{1}{2}(c+d)Z_{21}^T\mathbf{1}_s=-\gamma_1(c+d)\mathbf{1}_a$。因此，由 $y_2=\frac{b-a}{2}$ 可得，第一项中的 $(l(a+c)+\frac{1}{2}q(a+b)+\gamma_1(c+d))\mathbf{1}_a$。对右侧其余各项作类似推导，可得

$$A^TA\begin{bmatrix}\mathbf{1}_a\\-\mathbf{1}_b\\\mathbf{1}_c\\-\mathbf{1}_d\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(l(a+c)+\frac{1}{2}q(a+b)-\frac{1}{2}\gamma_1(c+d))\mathbf{1}_a\\(-k(a+c)-\frac{1}{2}p(a+b)-\frac{1}{2}\gamma_2(c+d))\mathbf{1}_b\\(l(a+c)+\frac{1}{2}s(c+d)-\frac{1}{2}\beta_1(a+b))\mathbf{1}_c\\(-k(a+c)-\frac{1}{2}r(c+d)-\frac{1}{2}\beta_2(a+b))\mathbf{1}_d\\(\frac{1}{2}q(a+b)-\frac{1}{2}r(c+d)-\alpha_1(b+d))\mathbf{1}_e\\(-\frac{1}{2}p(a+b)+\frac{1}{2}s(c+d)-\alpha_2(b+d))\mathbf{1}_f\end{bmatrix}.$$

类似地，可以验证的是

$$A^TA\begin{bmatrix}\mathbf{1}_a\\-\mathbf{1}_b\\0\\0\\\mathbf{1}_e\\-\mathbf{1}_f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\frac{1}{2}l(a+b)+q(a+e)+\frac{1}{2}\gamma_1(e+f))\mathbf{1}_a\\(-\frac{1}{2}k(a+b)-p(a+e)+\frac{1}{2}\gamma_2(e+f)\mathbf{1}_b\\(\frac{1}{2}l(a+b)-\frac{1}{2}s(e+f)-\beta_1(b+f))\mathbf{1}_c\\(-\frac{1}{2}k(a+b)+\frac{1}{2}r(e+f)-\beta_2(b+f))\mathbf{1}_d\\(q(a+e)+\frac{1}{2}r(e+f)-\frac{1}{2}\alpha_1(a+b))\mathbf{1}_e\\(-p(a+e)-\frac{1}{2}s(e+f)-\frac{1}{2}\alpha_2(a+b))\mathbf{1}_f\end{bmatrix}.$$

考虑方程 $A^TA(\zeta_1\mathbf{x}_1+\zeta_2\mathbf{x}_2)=\lambda(\zeta_1\mathbf{x}_1+\zeta_2\mathbf{x}_2)$，其中 ζ_1、ζ_2 和 λ 是实数。利用 $\gamma_i=\beta_i=\alpha_i=\frac{l-k}{2}=\frac{p-q}{2}=\frac{r-s}{2}$，可以验证，第一、第三和第五行块中的方程分别与第二、第四和第六行块中的方程相同。此外，我们可以发现，第一行块中的方程等于第三和第五行块中两个方程之和。因此，$A^TA(\zeta_1\mathbf{x}_1+\zeta_2\mathbf{x}_2)=\lambda(\zeta_1\mathbf{x}_1+\zeta_2\mathbf{x}_2)$ 等价于由第三和第五行块中的两个方程组成的线性方程组：

$$\zeta_1\left(l(a+c)+\frac{1}{2}s(c+d)-\frac{1}{2}\beta_1(a+b)\right)+\zeta_2\left(\frac{1}{2}l(a+b)-\frac{1}{2}s(e+f)-\beta_1(b+f)\right)=\lambda\zeta_1,$$
$$\zeta_1\left(\frac{1}{2}q(a+b)-\frac{1}{2}r(c+d)-\alpha_1(b+d)\right)+\zeta_2\left(q(a+e)+\frac{1}{2}r(e+f)-\frac{1}{2}\alpha_1(a+b)\right)=\lambda\zeta_2.$$

因此，我们得到以下结果。

定理 4.36. 设 E 是形式为 (M5) 的可实现矩阵，且令

$$A=\begin{bmatrix}0&J_{k,b}&0&J_{k,d}&X_{11}&X_{12}\\J_{l,a}&0&J_{l,c}&0&X_{21}&X_{22}\\0&J_{p,b}&Y_{11}&Y_{12}&0&J_{p,f}\\J_{q,a}&0&Y_{21}&Y_{22}&J_{q,e}&0\\Z_{11}&Z_{12}&0&J_{r,d}&J_{r,e}&0\\Z_{21}&Z_{22}&J_{s,c}&0&0&J_{s,f}\end{bmatrix}$$

是一个按 E 进行相容分块的 (0, 1) 矩阵。假设 A 和 $A+E$ 是格拉姆伴矩阵。那么，当且仅当以下条件之一成立时，A 和 $A+E$ 可转换：

以下条件成立：(i) $(X_{i1} - X_{i2})\mathbf{1} = \frac{e-f}{2}\mathbf{1}$ 对 $i = 1,\ 2$；(ii) $(X_{i1}^T - X_{i2}^T)\mathbf{1} = \frac{k-l}{2}\mathbf{1}$ 对 $i = 1,\ 2$；(iii) $(Y_{i1} - Y_{i2})\mathbf{1} = \frac{c-d}{2}\mathbf{1}$ 对 $i = 1,\ 2$；(iv) $(Y_{i1}^T - Y_{i2}^T)\mathbf{1} = \frac{p-q}{2}\mathbf{1}$ 对$i = 1,\ 2$；(v) $(Z_{i1} - Z_{i2})\mathbf{1} = \frac{a-b}{2}\mathbf{1}$ 对 $i = 1,\ 2$；以及 (vi) $(Z_{i1}^T - Z_{i2}^T)\mathbf{1} = \frac{r-s}{2}\mathbf{1}$ 对 $i = 1,\ 2$。此外，如果 A 可转换为 $A + E$，那么 A 和 $A + E$ 的格拉姆奇异值是 M 的特征值 λ 的平方根，其中

$$M = \begin{bmatrix} l(a+c) + \frac{1}{2}s(c+d) + \frac{1}{4}(k-l)(a+b) & \frac{1}{2}l(a+b) - \frac{1}{2}s(e+f) + \frac{1}{2}(k-l)(a+e) \\ \frac{1}{2}q(a+b) - \frac{1}{2}r(c+d) + \frac{1}{2}(p-q)(a+c) & q(a+e) + \frac{1}{2}r(e+f) + \frac{1}{4}(p-q)(a+b) \end{bmatrix}.$$

此外，与 $\sqrt{\lambda}$ 相关联的右奇异向量是 $\zeta_1\mathbf{x}_1 + \zeta_2\mathbf{x}_2$，的归一化向量，其中 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 是式 (17) 中的向量，而 (ζ_1, ζ_2) 是与 M 的 λ 相关联的特征向量。

5. 格拉姆伴矩阵的构造

本节中，我们利用给定的格拉姆伴矩阵对，提供若干构造其他矩阵对的方法。同样地，我们利用给定的可实现矩阵构造其他矩阵，并讨论秩大于 2 的可实现矩阵。

本节中的所有命题均可通过直接验证定义 2.1 得证。因此，我们仅陈述这些命题，不给出证明。

命题 5.1. 设 A 和 B 是格拉姆伴矩阵。那么， $J - A$ 和 $J - B$ 是格拉姆伴矩阵。

命题 5.2. 假设 (A_1, B_1) 和 (A_2, B_2) 是格拉姆伴矩阵对（不一定是方阵）。那么，我们有以下格拉姆伴矩阵对：

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}\right) \text{ and } \left(\begin{bmatrix} A_1 & J \\ J & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 & J \\ J & B_2 \end{bmatrix}\right).$$

令 $\otimes$ 表示矩阵 [3] 的克罗内克积。

命题 5.3. 设 (A_1, B_1) 和 (A_2, B_2) 是两对 Gram 同伴。那么， $A_1 \otimes B_1$ 和 $A_2 \otimes B_2$ 是 Gram 同伴。

注 5.4. 类比图运算，我们可以将命题 5.1–5.3 中构造 Gram 同伴的方式分别视为图的补、两个图的不交并与联图，以及两个图的笛卡尔积。

我们可以将命题 5.2 和 5.3 中类似的方法应用于可实现矩阵。给定可实现矩阵 E_1 和 E_2，由命题 5.2 可知， $\begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}$ 是可实现的。

命题 5.5。设 E 是一个可实现矩阵， X 是一个 (0, 1) 矩阵。那么，$X \otimes E$ 和 $E \otimes X$ 都是可实现矩阵。

注记 5.6. 借助本节的结果，我们可以利用秩大于 2 的可实现矩阵，从我们在第4节研究过的秩至多为 2 的可实现矩阵构造格拉姆伴矩阵。举例来说，考虑一个秩为 2 的可实现矩阵E。对于一个秩为 $k > 0$ 的 (0, 1) 矩阵 X， $X \otimes E$ 是可实现的，其秩为 $2k$。

6. 通过秩为 1 的可实现矩阵构造非同构的格拉姆伴矩阵

这里我们重新探讨 [4] 中的猜想：如果具有互异正奇异值的格拉姆伴矩阵 A 和 B 可转换，那么 A 和 B 以极高概率同构。我们通过一个秩为 1 的可实现矩阵，刻画奇异值均互异的非同构方形格拉姆伴矩阵；尤其是，当格拉姆伴矩阵为奇异矩阵时，0 作为奇异值的重数为 1。正如小节 4.1 所见，这些格拉姆伴矩阵是可转换的。

设 A和 B是满足 $\operatorname{rank}(A-B) = 1$ 的格拉姆伴矩阵。设 α（分别为 β）是这样的行指标集（分别为列指标集）：在 $A - B$ 中，对应的行（分别为列）含有非零项。于是， $A[\alpha^c, \beta^c] = B[\alpha^c, \beta^c]$。子矩阵 $A[\alpha^c, \beta^c]$ 称为格拉姆伴矩阵 A和 B的剩余矩阵。将行按 α 和 α^c 的顺序重新排列，并将列按 β 和β^c 的顺序重新排列，同时保留剩余矩阵的结构，可分别得到与 A 和 B同构的矩阵。根据定理 4.7，不失一般性，

$$A = \begin{bmatrix} 0 & J_{k_1,k_2} & X_1 \\ J_{k_1,k_2} & 0 & X_2 \\ X_3 & X_4 & Y \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} J_{k_1,k_2} & 0 & X_1 \\ 0 & J_{k_1,k_2} & X_2 \\ X_3 & X_4 & Y \end{bmatrix} \tag{18}$$

$\mathbf{1}^T X_1 = \mathbf{1}^T X_2$和 $X_3\mathbf{1} = X_4\mathbf{1}$，其中 k_1、$k_2 > 0$。注意， Y是 A 和 B的剩余矩阵。

现在，我们考虑特定的置换矩阵集合，以建立非同构 Gram 同伴的族（命题6.5和定理6.10）。令 Z_i 为一个 $m \times n$ (0, 1) 矩阵， $i = 1$、...、4。定义 $\mathcal{R}_{Z_1,Z_2}$ 为所有三元组（P_1、P_2、Q）的集合，其中 P_1、 P_2 和 Q 是满足 $Z_2 = P_1 Z_1 Q$ 和 $Z_1 = P_2 Z_2 Q$的置换矩阵。我们还定义 $\mathcal{L}_{Z_3,Z_4}$ 为所有三元组（P、Q_3、Q_4）的集合，其中 P、 Q_3和 Q_4是满足$Z_3 = PZ_3Q_3$ 和 $Z_4 = PZ_4Q_4$的置换矩阵。

如果存在 $(P_1, P_2, Q) \in \mathcal{R}_{X_1,X_2}$和 $(P, Q_3, Q_4) \in \mathcal{L}_{X_3,X_4}$使得$Y = PYQ$，那么

$$\begin{bmatrix} 0 & P_2 & 0 \\ P_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} Q_3 & 0 & 0 \\ 0 & Q_4 & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k_1,k_2} & 0 & P_2X_2Q \\ 0 & J_{k_1,k_2} & P_1X_1Q \\ PX_3Q_3 & PX_4Q_4 & PYQ \end{bmatrix} = B.$$

因此， A 和 B 同构。类似地，如果存在$(P_1, P_2, Q) \in \mathcal{R}_{X_3^T,\ X_4^T}$和

以及$(P, Q_3, Q_4) \in \mathcal{L}_{X_1^T,\ X_2^T}$使得 $Y^T = PY^TQ$，那么

$$\begin{bmatrix} Q_3^T & 0 & 0 \\ 0 & Q_4^T & 0 \\ 0 & 0 & Q^T \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 & P_1^T & 0 \\ P_2^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P^T \end{bmatrix} = B.$$

因此， A 与 B同构。 A 和 B 的剩余矩阵 Y 称为可修复的，如果存在置换矩阵 P和 Q，使得 $Y = PYQ$，并且以下两种情况之一成立：

(i) $(P_1, P_2, Q) \in \mathcal{R}_{X_1,X_2}$ and $(P, Q_3, Q_4) \in \mathcal{L}_{X_3,X_4}$ for some P_1, P_2, Q_3, Q_4; and

(ii) $(Q_3, Q_4, P^T) \in \mathcal{R}_{X_3^T,\ X_4^T}$且 $(Q^T, P_1, P_2) \in \mathcal{L}_{X_1^T,\ X_2^T}$，其中 P_1、 P_2、 Q_3、 Q_4 满足某些条件。以下命题立即可得。

命题 6.1. 假设 A 和 B 是格拉姆伴矩阵，且 $\mathrm{rank}(A-B) = 1$。如果 A 和 B 的剩余矩阵可修复，那么 A 与 B同构。

注 6.2. 设 Z_1 和 Z_2 是大小相同的(0, 1) 矩阵。我们有 $(I, I, I) \in \mathcal{L}_{Z_1,\ Z_2}$。如果 Z_1和 Z_2不同构，那么$\mathcal{R}_{Z_1,\ Z_2}$和$\mathcal{R}_{Z_1^T,\ Z_2^T}$均为空。对于(18)中的矩阵 A 和 B，如果$\mathcal{R}_{X_1,\ X_2}$ 和$\mathcal{R}_{X_3^T,\ X_4^T}$均为空，那么 Y 不可修复。

例 6.3。这里我们重新考察例 4.9：

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc|ccc} 0&0&1&1&1&1&0 \\ 0&0&1&1&0&0&1 \\ \hline 1&1&0&0&1&1&1 \\ 1&1&0&0&0&0&0 \\ \hline 1&0&1&0&1&1&1 \\ 1&0&1&0&1&1&1 \\ 0&1&1&0&1&1&1 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{cc|cc|ccc} 1&1&0&0&1&1&0 \\ 1&1&0&0&0&0&1 \\ \hline 0&0&1&1&1&1&1 \\ 0&0&1&1&0&0&0 \\ \hline 1&0&1&0&1&1&1 \\ 1&0&1&0&1&1&1 \\ 0&1&1&0&1&1&1 \end{array}\right]$$

其中 A 和 B 与（18）中的矩阵按相同方式划分，并且我们沿用（18）中的记号。由于 X_1 和 X_2 不同构，$\mathcal{R}_{X_1,\ X_2}$为空。同理，$\mathcal{R}_{X_3^T,\ X_4^T}$ 也为空。因此，剩余矩阵不可修复。

我们断言 A 和 B 不同构。矩阵的行和与列和的多重集在对矩阵进行行列置换时保持不变。 A 和 B 的行和与列和向量均为 (4, 3, 5, 2, 5, 5, 5)。因此，如果 A和 B同构，那么必然有 $A[\alpha, \alpha]$与 $B[\alpha, \alpha]$同构，其中 $\alpha = \{3, 5, 6, 7\}$。然而， $A[\alpha, \alpha]$中的 1 比 $B[\alpha, \alpha]$少。因此， A 和 B 不同构。

我们将在例 6.3 所启发的某些情形下，考察命题 6.1 的逆命题。

注记 6.4. 令 $A=\begin{bmatrix}0 & J_{k_1\ k_2}\\ J_{k_1\ k_2} & 0\end{bmatrix}$,,和 $B=\begin{bmatrix}J_{k_1,\ k_2} & 0\ ,k_2\\ 0 & J_{k_1}\end{bmatrix}$，其中 $k_1,k_2>0$。可以验证，对于满足$B=PAQ$的任意置换矩阵 P 和 Q ，一对 (P,Q) 要么是

$$\left(\begin{bmatrix}P_1 & 0\\ 0 & P_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & Q_1\\ Q_1 & 0\end{bmatrix}\right)\text{ or }\left(\begin{bmatrix}0 & P_1\\ P_2 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}Q_1 & 0\\ 0 & Q_2\end{bmatrix}\right)$$

对于某些置换矩阵 P_1、P_2、Q_1 和 Q_2。

命题6.5. 设 A 和 B 是形如（18）的 Gram 同伴。设 R 和 S 分别是 A的行和与列和向量，并按照 A 的行和列分别作相应划分，得到 $R=$（R_1、R_2、R_3）和 $S=$（S_1、S_2、S_3）。假设对于 $i=1$、2， R_i（分别为 S_i）的所有元素所构成的集合与 R_3（分别为 S_3）的所有元素所构成的集合没有任何公共元素。那么， A 与B 同构，当且仅当剩余矩阵是可修复的。

证明。假设 A 和 B 同构，即存在某些置换矩阵 P和 Q，使得 $B=PAQ$ 。由于矩阵的行和与列和的多重集在置换下保持不变，因此对于 $i=1$、2， A 中由 R_i 中的某个元素标记的任意一行，不可能通过置换变为由 R_3 中的某个元素标记的行，从而得到 B 。类似地，利用 S_1、 S_2和 S_3，可以针对列得到相应的结论。因此，结合注记6.4，数对（P、Q）必为以下情况之一：

$$\left(\begin{bmatrix}P_1 & 0 & 0\\ 0 & P_2 & 0\\ 0 & 0 & P_3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & Q_1 & 0\\ Q_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & Q_3\end{bmatrix}\right),\left(\begin{bmatrix}0 & P_1 & 0\\ P_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & P_3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}Q_1 & 0 & 0\\ 0 & Q_2 & 0\\ 0 & 0 & Q_3\end{bmatrix}\right). \tag{19}$$

设 (P,Q) 为这两种情形中的前一种。由 $B=PAQ$ 可验证，$X_3=P_3X_4Q_2$、$X_4=P_3X_3Q_1$、 $X_1=P_1X_1Q_3$、 $X_2=P_2X_2Q_3$ 以及 $Y=P_3YQ_3$。因此， Y 是可修复的。对于 (P,Q) 的另一种情形，也可轻易验证。因此，剩余矩阵是可修复的。

证明的逆向部分由命题6.1得出。 □

例6.6. 设 $E=\begin{bmatrix}0 & J_3 & 0\\ -J_3 & J_3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$。考虑

$$A=\begin{bmatrix}0 & J_3 & X_1\\ J_3 & 0 & X_2\\ X_3 & X_4 & Y\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|ccc|cccc}0&0&0&1&1&1&1&1&0&0\\0&0&0&1&1&1&0&1&1&0\\0&0&0&1&1&1&0&0&1&1\\\hline 1&1&1&0&0&0&0&1&0&1\\1&1&1&0&0&0&0&1&1&0\\1&1&1&0&0&0&1&0&1&0\\\hline 1&0&1&1&1&0&0&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&1&0\\1&1&0&0&1&1&1&1&1&1\\0&1&1&1&0&1&1&1&1&1\end{array}\right].$$

由于 $\mathbf{1}^T X_1 = \mathbf{1}^T X_2$和 $X_3\mathbf{1} = X_4\mathbf{1}$、 A和 $A+E$是格拉姆伴矩阵。此外，$(P_1$, $P_2, Q) \in \mathcal{R}_{X_1,\ X_2}$其中 P_1、 P_2和 Q分别对应循环表示法中的置换 (1, 3)、(1, 3) 和 (2, 3)。注意，$(I, I, I) \in \mathcal{L}_{X_3,\ X_4}$。由于 Y在对应于置换 (2, 3) 的列置换下保持不变，因此 A 的剩余矩阵是可修复的。 A 的行和与列和向量分别为 $(5\mathbf{1}_6^T$, 7, 9, 8, 8) 和 $(6\mathbf{1}_6^T$, 5, 8, 8, 5)。根据命题 6.5， A 和 B 同构。

设方阵 A 和 B 互为格拉姆伴矩阵，其中 $\mathrm{rank}(A - B) = 1$。假设 A 的所有奇异值均不相同。我们声称，若 A 的剩余矩阵不可修复，则 A 和 B 不同构。为证明这一点，我们考虑如下定义：对于某个（多重）图的邻接矩阵 X， X的自同构群记为 $\Gamma(X)$，其定义为满足 $PXP^T = X$的所有置换矩阵 P所构成的集合。感兴趣的读者可参阅 [2]，了解 $\Gamma(X)$ 关于 X特征值的性质；关于连通简单图的自同构群与群作用的介绍，可参阅 [5] 。

设 A 和 B （不一定是方阵）互为格拉姆伴矩阵。假设 A 和B 同构。那么，存在置换矩阵 P 和 Q ，使得$B = PAQ$。由于 A和 B互为格拉姆伴矩阵，因此有 $PAA^TP^T = AA^T$和$Q^TA^TAQ = A^TA$。于是， $P \in \Gamma(AA^T)$ 和 $Q \in \Gamma(A^TA)$。然而，反向结论并不成立。

例 6.7. 非同构的对称平衡不完全区组设计A 和 B可见于 [12]。由于 $AA^T = A^TA = aI + bJ$对于某个 a， $b > 0$， $\Gamma(AA^T)$ 和 $\Gamma(A^TA)$ 同构于对称群。

定理 6.8. *[2, 9]* 设 X 为多重图的邻接矩阵。假设 X 具有互异特征值。那么，对于任意 $P \in \Gamma(X)$， $P^2 = I$。此外，这意味着 $\Gamma(X)$ 是阿贝尔群。

推论 6.9. 设 $n \times n$ 矩阵 A 和 B 为具有互异奇异值的 Gram 同伴。如果 A 和 B 同构，那么 B 可由 A 通过按置换对行和列进行置换得到，其中每个置换中的循环长度至多为 2。

定理6.10. 设 $n \times n$(0, 1) 矩阵 A和 B是形式为 (18) 且具有互异奇异值的 Gram 同伴，其中 $\mathrm{rank}(A - B) = 1$。那么，当且仅当剩余矩阵可修复时， A 和 B 同构。

证明。反设 A 和 B 同构，而剩余矩阵不可修复，设其为 $B = P_0AQ_0$ ，其中 P_0 和 Q_0 是置换矩阵。由推论 6.9， $P_0^2 = Q_0^2 = I$。令 σ_0 和 τ_0 分别为与 P_0 和 Q_0 对应的置换。采用式 (18) 中对 A 和 B 的记号，令 $\alpha_1 = \{1, \ldots, k_1\}$、 $\alpha_2 = \{k_1 + 1, \ldots, 2k_1\}$、 $\alpha_3 = \{2k_1 + 1, \ldots, n\}$、$\sim$ $\beta_1 = \{1, \ldots, k_2\}$、 $\beta_2 = \{k_2 + 1, \ldots, 2k_2\}$ 和 $\beta_3 = \{2k_2 + 1, \ldots, n\}$。令 A 为对 A 的行应用置换 σ_0 后得到的矩阵，并令 B

$\widetilde{}$ 为对 A 的列应用 τ_0 后得到的矩阵。考虑

$$A=\begin{bmatrix}0 & J_{k_1,k_2} & X_1\\ J_{k_1,k_2} & 0 & X_2\\ X_3 & X_4 & Y\end{bmatrix}\xrightarrow{\sigma_0}\widetilde{A}=\begin{bmatrix}\widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} & \widetilde{X}_1\\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} & \widetilde{X}_2\\ \widetilde{X}_3 & \widetilde{X}_4 & \widetilde{Y}\end{bmatrix}\xrightarrow{\tau_0}B=\begin{bmatrix}J_{k_1,k_2} & 0 & X_1\\ 0 & J_{k_1,k_2} & X_2\\ X_3 & X_4 & Y\end{bmatrix}.$$

反设对所有 $a\in\alpha_3$, $\sigma_0(a)\in\alpha_3$。我们分三种情况讨论：(a) $\sigma_0(\alpha_1)\neq\alpha_1$ 且 $\sigma_0(\alpha_1)\neq\alpha_2$；(b) $\sigma_0(\alpha_1)=\alpha_1$；(c) $\sigma_0(\alpha_1)=\alpha_2$。设条件 (a) 成立。于是，$|\{x\in\alpha_1|\sigma_0(x)\in\alpha_1\}|>0$。因此，$\begin{bmatrix}\widetilde{A}_{11}\\ \widetilde{A}_{21}\end{bmatrix}$和 $\begin{bmatrix}\widetilde{A}_{12}\\ \widetilde{A}_{22}\end{bmatrix}$ 均不包含列 $\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{k_1}\\ \mathbf{0}_{k_1}\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{k_1}\\ \mathbf{1}_{k_1}\end{bmatrix}$。注意，$\tau_0$ 的任意循环长度都为 1 或 2。为了从 A得到 B，必须将 A 的第一列 $\tilde{}\mathbf{x}_1$ 与 $\widetilde{A}$ 的某一列 j^{th} $\mathbf{x}_j$ 互换，其中 $\tilde{}$，且 $j\in\beta_3$。于是，子向量 $\tilde{}\mathbf{x}_j[\alpha_1\cup\alpha_2]$ 必须为 $\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{k_1}\\ \mathbf{0}_{k_1}\end{bmatrix}$。因此，对于 A的 j^{th} 列 $\mathbf{x}_j$，有 $\mathbf{x}_j[\alpha_1\cup\alpha_2]\xrightarrow{\sigma_0}\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{k_1}\\ \mathbf{0}_{k_1}\end{bmatrix}$。此外，我们可以直接得到 $\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{k_1}\\ \mathbf{1}_{k_1}\end{bmatrix}\xrightarrow{\sigma_0}\tilde{}\mathbf{x}_1[\alpha_1\cup\alpha_2]$。由于 $j\in\beta_3$, A和 B的 j^{th}列必相同，即 $\mathbf{x}_j[\alpha_1\cup\alpha_2]=\tilde{}\mathbf{x}_1[\alpha_1\cup\alpha_2]$。因此，我们得到

$$\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{k_1}\\ \mathbf{1}_{k_1}\end{bmatrix}\xrightarrow{\sigma_0}\tilde{\mathbf{x}}_1[\alpha_1\cup\alpha_2]=\mathbf{x}_j[\alpha_1\cup\alpha_2]\xrightarrow{\sigma_0}\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{k_1}\\ \mathbf{0}_{k_1}\end{bmatrix}.$$

然而，该映射与 σ_0^2 是恒等映射这一事实矛盾。因此，情形 (a) 不成立。

考虑情形 (b)，即 $\sigma_0(\alpha_1)=\alpha_1$。由于 $\mathbf{1}^TX_1=\mathbf{1}^TX_2$, $\widetilde{A}[\alpha_1\cup\alpha_2,\beta_3]$中没有列是 $\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{k_1}\\ \mathbf{0}_{k_1}\end{bmatrix}$或 $\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{k_1}\\ \mathbf{1}_{k_1}\end{bmatrix}$。这意味着 $\tau_0(\beta_1)=\beta_2$、$\tau_0(\beta_2)=\beta_1$ 且 $\tau_0(\beta_3)=\beta_3$。于是，一对 (P,Q) 对应于 (19) 中的前者。根据 6.5 中的证明论证，Y是可修复的，这与假设矛盾。最后，假设 $\sigma_0(\alpha_1)=\alpha_2$。由于 $\mathbf{1}^TX_1=\mathbf{1}^TX_2$，我们有 $\tau_0(\beta_1)=\beta_1$、$\tau_0(\beta_2)=\beta_2$ 且 $\tau_0(\beta_3)=\beta_3$。采用与情形 (b) 类似的论证，可得情形 (c) 矛盾。因此，存在$a\in\alpha_3$，使得 $\sigma_0(a)\notin\alpha_3$。

现在假设存在 $j\in\alpha_3$ 使得 $\sigma_0(j)\notin\alpha_3$。令 $i=\sigma_0(j)$。于是，$i\in\alpha_1\cup\alpha_2$，记作 $i\in\alpha_1$。设 a_i^T和 a_j^T分别为 i^{th} 和 j^{th} 行，其中 $\mathsf{a}A$为 $\mathsf{a}_i^T=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{k_1}^T & \mathbf{1}_{k_1}^T & \mathbf{x}_1^T\end{bmatrix}$，$\mathsf{a}_j^T=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_3^T\mathbf{x}_4^T\mathbf{y}^T\end{bmatrix}$，且 a_j^T与 a_i^T的划分相容。由于 σ_0 的每个循环长度均为 1 或 2，在应用行置换 σ_0 后，a_j^T 和 a_i^T 分别映射到 i^{th} 行 $\tilde{}\mathsf{a}_i^T$ 和 j^{th} 行 $\tilde{}\mathsf{a}_j^T$（它们是 $\widetilde{A}$的行）。根据 τ_0对 $\tilde{}\mathsf{a}_i^T$和 $\tilde{}\mathsf{a}_j^T$的列进行置换后，我们必有 $\mathbf{b}_i^T$和 $\mathbf{b}_j^T$，它们分别是 B的 i^{th} 和 j^{th}行：

$$\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{a}}_i^T\\ \tilde{\mathbf{a}}_j^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_3^T & \mathbf{x}_4^T & \mathbf{y}^T\\ \mathbf{0}^T & \mathbf{1}^T & \mathbf{x}_1^T\end{bmatrix}\xrightarrow{\tau_0}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_i^T\\ \mathbf{b}_j^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{x}_1^T\\ \mathbf{x}_3^T & \mathbf{x}_4^T & \mathbf{y}^T\end{bmatrix}.$$

由于 A 和 B 是 Gram 同伴，$\mathbf{x}_3^T$ 和 $\mathbf{x}_4^T$ 的行和相同，记为ℓ。同时置换 $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_i^T \\ \tilde{\mathbf{a}}_j^T \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} \overset{T}{\mathbf{b}_i} \\ \overset{T}{\mathbf{b}_j} \end{bmatrix}$ $\mathbf{b}$ 的列，可以得到

$$Z_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_\ell^T & \mathbf{0}_{k-\ell}^T & \mathbf{1}_\ell^T & \mathbf{0}_{k-\ell}^T & \mathbf{y}^T \\ \mathbf{0}_\ell^T & \mathbf{0}_{k-\ell}^T & \mathbf{1}_\ell^T & \mathbf{1}_{k-\ell}^T & \mathbf{x}_1^T \end{bmatrix} \xrightarrow{\tau_0} Z_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_\ell^T & \mathbf{1}_{k-\ell}^T & \mathbf{0}_\ell^T & \mathbf{0}_{k-\ell}^T & \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{1}_\ell^T & \mathbf{0}_{k-\ell}^T & \mathbf{1}_\ell^T & \mathbf{0}_{k-\ell}^T & \mathbf{y}^T \end{bmatrix}.$$

假设 $\ell > 0$。注意，若 Z_1 中对应于 $k \in \beta_3$ 的第 k 列为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，那么 Z_2 的第 k 列也如此。考虑到 τ_0 中的每个循环长度都是 1 或 2，Z_1 的第一列 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 必须与 Z_2 的某个第 k_0^{th} 列 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 交换，其中 $k_0 \in \beta_3$。于是，Z_2 的第 k_0^{th} 列就是 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，这与假设矛盾。类似地，将针对 $\ell > 0$ 情形的论证应用于 $\ell = 0$ 情形，也可得到矛盾。因此，我们所需的结论得证。

逆向的证明可应用命题 6.1。 □

致谢：作者感谢奥斯陆大学的 Geir Dahl，就本文中的若干主题进行了有益的讨论。

参考文献

[1] S. Borgatti 和 D. Halgin。《分析隶属网络》。《社会网络分析手册》，1：417–433，2011。[2] D. Cvetkovi´c、M. Doob 和 H. Sachs。《图的谱》。Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich 出版社], 纽约—伦敦，1980。[3] J. Demmel。《应用数值线性代数》。工业与应用数学学会（SIAM），费城，佛罗里达州，1997。[4] M. Everett 和 S. Borgatti。《二模网络的双投影方法》。《社会网络》，35：204–210，2013。[5] C. Godsil 和 G. Royle。《代数图论》。施普林格出版社，纽约，2001。[6] R. Hanneman 和 M. Riddle。《社会网络方法导论》。加利福尼亚大学河滨分校，2005。[7] R. Horn 和 C. Johnson。《矩阵分析》。剑桥大学出版社，剑桥，2013。[8] S. Kirkland。《出现数据丢失的二模网络》。《复杂网络杂志》，6：297–316，2018。

[9] A. Mowshowitz。《邻接矩阵具有互不相同特征值的图的群》，载于《图论中的证明技巧》（第二届安娜堡图论会议论文集，密歇根州安娜堡，1968年）。Academic Press，纽约，1969。[10] H. Ryser。《零一矩阵的组合性质》。《加拿大数学杂志》，9：371–377，1957。[11] G. Strang。《线性代数及其应用》。Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich 出版社], 纽约—伦敦，1980。[12] W. Wallis。《组合设计导论》。Chapman & Hall/CRC，博卡拉顿，佛罗里达州，2007。