arXiv:2304.07870v1 [math.NT] 16 Apr 2023

关于任意数域上的奇数ζ值与扩展艾森斯坦级数的注记

SOUMYARUP BANERJEE、RAJAT GUPTA 和 RAHUL KUMAR

Abstract. 本文研究了任意数域上奇整数处ζ函数的变换公式，从而推广了黎曼ζ函数的拉马努金恒等式。上述变换导出了一种新的艾森斯坦级数数域扩张，它满足类似于 $SL_2(\mathbb{Z})$ 上整权模形式的变换公式 $z \mapsto -1/z$ 。这些结果提供了许多重要应用，有助于研究任意数域中奇数ζ值以及朗伯级数的性质。

1. Introduction

解析数论的核心研究对象之一是黎曼ζ函数 $\zeta(s)$，它在研究素数分布方面发挥着至关重要的作用，并应用于物理学、概率论和应用统计学等多个领域。多年来，许多数学家对ζ值及其算术性质进行了广泛研究。欧拉于1734年发现了正偶数积分自变量处的ζ值，具体而言，对于任意自然数 m，

$$\zeta(2m) = (-1)^{m+1}\frac{(2\pi)^{2m}B_{2m}}{2(2m)!}, \tag{1.1}$$

其中 B_m 表示第 m个伯努利数。因此，由上述公式可知，任意正偶整数处的ζ值都是超越数，这是因为众所周知， π 是超越数，而 B_m 是有理数。

$\zeta(s)$在奇整数处的算术性质仍是个谜。阿佩里 [1], [2] 证明了 $\zeta(3)$的无理性。最近，祖迪林 [29] 证明， $\zeta(5)$、 $\zeta(7)$、 $\zeta(9)$、$\zeta(11)$这四个数中至少有一个是无理数。在这方面，勒奇 [21], 取得了一项著名成果，其精确表述为：对于 $m \geq 0$,

$$\zeta(4m+3) = 2^{4m+2}\pi^{4m+3}\sum_{j=0}^{2m+2}(-1)^{j+1}\frac{B_{2j}B_{4m+4-2j}}{(2j)!(4m+4-2j)!} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-4m-3}}{e^{2\pi n}-1}. \tag{1.2}$$

由于上述公式中的无穷级数收敛迅速，伯恩特和施特劳布 [4] 指出：“$\zeta(4m+3)$几乎是π^{4m+3}的有理数倍。”

拉马努金 [24, 第173页，第14章，条目21(i)] 得到了勒奇恒等式（1.2）的一个优雅推广，即对于任意非零整数 m 和 α， $\beta > 0$ 满足 $\alpha\beta = \pi^2$,

$$\alpha^{-m}\left\{\frac{1}{2}\zeta(2m+1) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2m-1}}{e^{2n\alpha}-1}\right\} = (-\beta)^{-m}\left\{\frac{1}{2}\zeta(2m+1) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2m-1}}{e^{2n\beta}-1}\right\} + \frac{1}{\pi^{2m+2}}\sum_{j=0}^{m+1}(-1)^{m+j}\zeta(2j)\zeta(2m-2j+2)\alpha^{m+1-j}\beta^{j}. \tag{1.3}$$

上述恒等式编码了偶数整数权艾森斯坦级数在 $z \mapsto -1/z$ 整个模群上的变换，以及艾希勒积分，并在理论

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：11M06、11R42、33E20；次要分类：33C10。
Keywords and phrases. 奇数ζ值、戴德金ζ函数、拉马努金公式、扩展艾森斯坦级数、数域。

计算机科学中有重要应用 [参见 [17]]。拉马努金恒等式 (1.3) 已沿不同方向得到推广（参见 [6], [8], [9], [10], [11], [12], [15]和 [19]）。

任意数域上偶整数处的ζ值已得到广泛研究。Klingen [18]和 Siegel [25] 将欧拉关于任意全实数域的结果（1.1）加以推广。该结果具体表述如下：对于任意次数为 d 、判别式为 $D_{\mathbb{K}}$的全实数域 $\mathbb{K}$,

$$\zeta_{\mathbb{K}}(2m) = \frac{q_m \pi^{2md}}{\sqrt{D_K}} \qquad (m \in \mathbb{N}), \tag{1.4}$$

其中 q_m 是某个固定的非零有理数。Zagier [28] 为任意数域 $\mathbb{K}$上的$\zeta_{\mathbb{K}}$(2)得到了一个闭式表达式。在本文中，我们研究任意数域上奇数ζ值的变换公式，并由此推广（1.3）。在陈述新的变换公式之前，我们先定义戴德金ζ函数。

设 $\mathbb{K}$是任意数域，其扩张次数为 $[\mathbb{K}:\ \mathbb{Q}] = d$，符号为（$r_1$，$r_2$）（即 $d = r_1 + 2r_2$），且 $D_{\mathbb{K}}$ 表示 $\mathbb{K}$的判别式的绝对值。设 $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ 为其整数环， $\mathfrak{N}$ 为 $\mathbb{K}$ 在 $\mathbb{Q}$上的范数映射。则与数域 $\mathbb{K}$ 相关联的戴德金ζ函数定义为

$$\zeta_{\mathbb{K}}(s) := \sum_{\mathsf{a} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{K}}} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathsf{a})^s},$$

当 Re(s) > 1时，其中 a 遍历 $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ 的非零整理想。若 $V_{\mathbb{K}}(m)$ 表示 $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ 中范数为 m的非零整理想的个数，那么 $\zeta_{\mathbb{K}}(s)$ 也可以写成

$$\zeta_{\mathbb{K}}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{V_{\mathbb{K}}(m)}{m^s}, \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1). \tag{1.5}$$

函数 $\zeta_{\mathbb{K}}(s)$ 可解析延拓到整个复平面，除在 $s = 1$ 处有一个简单极点外处处解析。我们将 $s = 1$ 处的留数记为 H，它可由解析类数公式表示为，

$$H = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2} hR}{w\sqrt{D_{\mathbb{K}}}},$$

其中， h 表示类数， R 是调节子， w 是 $\mathbb{K}$中的单位根个数。全文中，对于任意数域 $\mathbb{K}$，我们将沿用上述记号。

拉马努金恒等式 (1.3) 主要涉及朗伯级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{e^{ny} - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_a(n) e^{-ny}, \tag{1.6}$$

其中 $\sigma_a(n) := \sum_{d|n} d^a$。上述级数在模形式理论中起着关键作用，因为对于$a = 2m - 1$，当 $m \in \mathbb{N}$ 且 $y = -2\pi i z$ 时，上述级数本质上都是全模群上的权 $2m$ 艾森斯坦级数。这里， $m = 1$ 的情形是权 2 艾森斯坦级数，它并非严格意义上的模形式，而是拟模形式。对于 $a = -2m - 1$，当 $m \in \mathbb{N}$ 且 $y = -2\pi i z$ 时，其级数表示对应于权 $2m$ 艾森斯坦级数的艾希勒积分。

这里，我们考虑一个涉及 Meijer G 函数的无穷级数 [（参见 §2], ），它将上述朗伯级数 (1.6) 推广到任意数域 $\mathbb{K}$，形式如下:

$$\sum_{\mathsf{a} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{K}}} \mathfrak{N}(\mathsf{a})^a \Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{\mathfrak{N}(\mathsf{a}) y}{D_{\mathbb{K}}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} V_{\mathbb{K}}(n) n^a \Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{ny}{D_{\mathbb{K}}}\right) \tag{1.7}$$

其中,

$$\Omega_{\mathbb{K}}(x) := \frac{2^{1-r_1-r_2}}{\pi^{1-\frac{r_1}{2}}} \sum_{j=1}^{\infty} V_{\mathbb{K}}(j) G_{0,2d}^{d+1,0}\left(\begin{matrix} - \\ (0)_{r_1+r_2}, \left(\frac{1}{2}\right)_{r_2+1}; \left(\frac{1}{2}\right)_{r_1+r_2-1}, (0)_{r_2} \end{matrix} \middle| \frac{x^2 j^2}{4^d} \right). \tag{1.8}$$

In 特别地，对于 $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$，$\Omega_{\mathbb{K}}(x)$ 化简为 $\frac{1}{e^x - 1}$，这已在 (3.15) 中推导得出 .

在下述定理中，我们得到了任意数域 $\mathbb{K}$ 上戴德金ζ函数在奇整数处的一个变换公式；当 $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$ 时，该公式将 (1.3) 作为特例。

定理 1.1. 设 $\mathbb{K}$ 为任意数域。对于任意非零整数 m 以及满足 $\alpha\beta=\pi^{2d}$的 Re(α)、Re(β) >0，下列恒等式成立

$$\begin{aligned}&\alpha^{-m}\left\{\frac{H}{2}\zeta_{\mathbb{K}}(2m+1)+\mathcal{C}_{\mathbb{K}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{2m+1}}\Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{2^dn\alpha}{D_{\mathbb{K}}}\right)\right\}\\&=(-\beta)^{-m}\left\{\frac{H}{2}\zeta_{\mathbb{K}}(2m+1)+\mathcal{C}_{\mathbb{K}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{2m+1}}\Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{2^dn\beta}{D_{\mathbb{K}}}\right)\right\}\\&\quad+\frac{1}{\pi^{(2m+1)d+1}}\sum_{j=0}^{m+1}(-1)^{m+j}\zeta_{\mathbb{K}}(2j)\zeta_{\mathbb{K}}(2m-2j+2)\alpha^{m+1-j}\beta^j.\end{aligned}\tag{1.9}$$

其中 $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}=\frac{2^{r_1-1}(2\pi)^{r_2}}{\sqrt{D_{\mathbb{K}}}}$。

以下推论将拉马努金恒等式作为上述定理的一个特例。

推论1.2. 对于 $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$，拉马努金恒等式 (1.3) 成立。

当 $\mathbb{K}$ 为任意实二次数域时，Franke [14] 研究了拉马努金恒等式的一种类似形式，但未能得到对称形式的结果。以下推论由定理 1.1 得出，该定理给出了对称形式的变换公式。

推论1.3. 设 $\mathbb{K}$ 为任意实二次数域。设

$$\mathfrak{R}(x):=\sum_{j=1}^{\infty}V_{\mathbb{K}}(j)\left(K_0(2\epsilon\sqrt{jx})+K_0(2\overline{\epsilon}\sqrt{jx})\right),$$

其中，$\epsilon=e^{i\pi/4}$ 和 $K_\nu(x)$表示第二类贝塞尔函数（参见§2）。如果 Re(α) >0 且 Re(β) >0，其中 $\alpha\beta=\pi^4$ 和 m 为任意非零整数，则

$$\begin{aligned}&\alpha^{-m}\left\{\frac{H}{2}\zeta_{\mathbb{K}}(2m+1)+\frac{2}{\sqrt{D}_{\mathbb{K}}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{2m+1}}\mathfrak{R}\left(\frac{4n\alpha}{D_{\mathbb{K}}}\right)\right\}\\&=(-\beta)^{-m}\left\{\frac{H}{2}\zeta_{\mathbb{K}}(2m+1)+\frac{2}{\sqrt{D}_{\mathbb{K}}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{2m+1}}\mathfrak{R}\left(\frac{4n\beta}{D_{\mathbb{K}}}\right)\right\}\\&\quad+\frac{1}{\pi^{4m+3}}\sum_{j=0}^{m+1}(-1)^{m+j}\zeta_{\mathbb{K}}(2j)\zeta_{\mathbb{K}}(2m-2j+2)\alpha^{m+1-j}\beta^j.\end{aligned}\tag{1.10}$$

以下推论给出了 $\zeta_{\mathbb{K}}(2m+1)$的变换公式，其中 $\mathbb{K}$ 为虚二次数域。

推论1.4. 设 $\mathbb{K}$ 为任意虚二次数域。设

$$\mathcal{I}(x):=\frac{2i}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}V_{\mathbb{K}}(j)\left(K_0(2\epsilon\sqrt{jx})-K_0(2\overline{\epsilon}\sqrt{jx})\right).\tag{1.11}$$

对于 $m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 和 Re(α)、Re(β) >0，其中 $\alpha\beta=\pi^4$，我们有

$$\alpha^{-m}\left\{\frac{H}{2}\zeta_{\mathbb{K}}(2m+1)+\frac{\pi}{\sqrt{D}_{\mathbb{K}}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{2m+1}}\mathcal{I}\left(\frac{4n\alpha}{D_{\mathbb{K}}}\right)\right\}$$

$$= (-\beta)^{-m}\left\{\frac{H}{2}\zeta_{\mathbb{K}}(2m+1)+\frac{\pi}{\sqrt{D_{\mathbb{K}}}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{2m+1}}\mathcal{I}\left(\frac{4n\beta}{D_{\mathbb{K}}}\right)\right\}$$
$$+\frac{1}{\pi^{4m+3}}\sum_{j=0}^{m+1}(-1)^{m+j}\zeta_{\mathbb{K}}(2j)\zeta_{\mathbb{K}}(2m-2j+2)\alpha^{m+1-j}\beta^{j}.$$

接下来，我们将勒奇恒等式 (1.2) 推广到任意数域 $\mathbb{K}$。

定理 1.5. 设 $\mathbb{K}$ 是任意数域。对于任意整数 m，下列恒等式成立：

$$\zeta_{\mathbb{K}}(4m+3)=\frac{1}{\pi H}\sum_{j=0}^{2m+2}(-1)^{j+1}\zeta_{\mathbb{K}}(2j)\zeta_{\mathbb{K}}(4m-2j+4)-\frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{H\sqrt{D_{\mathbb{K}}}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{4m+3}}\Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{(2\pi)^{d}n}{D_{\mathbb{K}}}\right). \quad (1.12)$$

由上述定理可知，当 m 为奇数时，$\zeta_{\mathbb{K}}(2m+1)$ 的算术性质。

推论 1.6. 若 $\mathbb{K}$ 为全实域，则 $\zeta_{\mathbb{K}}(4m+3)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{4m+3}}\Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{(2\pi)^{d}n}{D_{\mathbb{K}}}\right)$ 中至少有一个是超越数。

备注. 当 $\mathbb{K}$ 是任意实二次数域时，$K_0(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的渐近行为直接意味着上述推论中的无穷级数收敛得很快。因此，我们可以得出结论：对于某个固定的正整数 n，$\zeta_{\mathbb{K}}(4m+3)$“几乎”是 π^n 的代数倍数。

接下来，我们探讨定理 1.1 在模形式理论中的应用。设 f 是庞加莱上半平面 $\mathfrak{H}$ 上的一个全纯函数。对于任意正整数 k，如果 f 满足下列条件，则称其为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上权为 k 的模形式：

$$(i)\, f(z+1)=f(z)$$
$$(ii)\, f(-1/z)=(-z)^{k}f(z). \quad (1.13)$$

在模形式理论中，模形式的重要例子是艾森斯坦级数。对于 $z\in\mathfrak{H}$，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上偶整数权 k 的“归一化艾森斯坦级数”可由以下傅里叶级数展开定义：

$$E_k(z):=1-\frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)e^{2\pi inz}=1-\frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{k-1}}{e^{-2\pi inz}-1}.$$

我们在此将艾森斯坦级数的上述级数定义推广到任意数域 $\mathbb{K}$。对于偶正整数 k 和 $z\in\mathfrak{H}$，定义

$$\mathcal{G}_{k,\mathbb{K}}(z):=\frac{H}{2\mathcal{C}_{\mathbb{K}}}\zeta_{\mathbb{K}}(1-k)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{1-k}}\Omega_{\mathbb{K}}\left(-\frac{(2\pi)^{d}inz}{D_{\mathbb{K}}}\right). \quad (1.14)$$

若 $\mathbb{K}$ 是全实的，则上述定义可规范化为

$$\mathcal{E}_{k,\mathbb{K}}(z):=\frac{2\mathcal{C}_{\mathbb{K}}}{H\zeta_{\mathbb{K}}(1-k)}\mathcal{G}_{k,\mathbb{K}}(z)=1+\frac{2\mathcal{C}_{\mathbb{K}}}{H\zeta_{\mathbb{K}}(1-k)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{1-k}}\Omega_{\mathbb{K}}\left(-\frac{(2\pi)^{d}inz}{D_{\mathbb{K}}}\right).$$

特别地，对于 $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$，$\mathcal{E}_{k,\,\mathbb{Q}}(z)=E_k(z)$（使用下文的 (3.15)）。对于非全实的 $\mathbb{K}$，(1.14) 中的第一项为零。因此我们有

$$\mathcal{G}_{k,\mathbb{K}}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{1-k}}\Omega_{\mathbb{K}}\left(-\frac{(2\pi)^{d}inz}{D_{\mathbb{K}}}\right).$$

在下述定理中，我们证明了扩展艾森斯坦级数满足 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上整权模形式的变换公式 (1.13)。

定理 1.7. 设 $\mathbb{K}$ 为任意数域。对于大于 2 的偶整数 k 以及 $z \in \mathfrak{H}$，有

$$\mathcal{G}_{k,\mathbb{K}}(-1/z) = z^k \mathcal{G}_{k,\mathbb{K}}(z).$$

备注。一般而言，$\mathcal{G}_{k,\ \mathbb{K}}(z)$ 不是周期函数。因此，它并非严格意义上定义在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上的模形式。

上述定理可以改写为如下对称形式。

定理 1.8。设 $\mathbb{K}$ 为任意数域。对于任意非零正整数 $m > 1$ 以及满足 $\alpha\beta = \pi^{2d}$ 的 $\mathrm{Re}(\alpha),\mathrm{Re}(\beta) > 0$，有

$$\alpha^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{1-2m}} \Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{2^d n\alpha}{D_{\mathbb{K}}}\right) - (-\beta)^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{1-2m}} \Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{2^d n\beta}{D_{\mathbb{K}}}\right) = -\frac{H}{2\mathcal{C}_{\mathbb{K}}}\{\alpha^m - (-\beta)^m\}\zeta_{\mathbb{K}}(1-2m). \quad (1.15)$$

特别地，对于 $\mathbb{K}$非全实的情形，有

$$\alpha^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{1-2m}} \Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{2^d n\alpha}{D_{\mathbb{K}}}\right) = (-\beta)^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{1-2m}} \Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{2^d n\beta}{D_{\mathbb{K}}}\right).$$

作为上述定理的一个直接推论，下面的推论给出了广义 Lambert 级数的显式求值。

推论 1.9。对于任意数域 $\mathbb{K}$ 以及任意奇自然数 $m > 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{1-2m}} \Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{(2\pi)^d n}{D_{\mathbb{K}}}\right) = -\frac{H}{2\mathcal{C}_{\mathbb{K}}}\zeta_{\mathbb{K}}(1-2m). \quad (1.16)$$

特别地，如果 $\mathbb{K}$不是全实的,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{1-2m}} \Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{(2\pi)^d n}{D_{\mathbb{K}}}\right) = 0.$$

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上的权 2 埃森斯坦级数 $E_2(z)$ 并非严格意义上的模形式，因为它满足的不是 (1.13)，而是

$$E_2(-1/z) = z^2 E_2(z) + \frac{6z}{\pi i}.$$

因此，它有时被称为拟模形式。在下一个定理中，我们研究$\mathcal{G}_{2,\ \mathbb{K}}(z)$ 的变换性质。

定理 1.10. 设 $\mathbb{K}$ 是任意一个数域。对于 $z \in \mathfrak{H}$,

$$\mathcal{G}_{2,\mathbb{K}}(-1/z) = z^2 \mathcal{G}_{2,\mathbb{K}}(z) - \frac{z}{\pi i}\zeta_{\mathbb{K}}^2(0). \quad (1.17)$$

等价地，对于 $\mathrm{Re}(\alpha)$、$\mathrm{Re}(\beta) > 0$ 且 $\alpha\beta = \pi^{2d}$,

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} n V_{\mathbb{K}}(n) \Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{2^d n\alpha}{D_{\mathbb{K}}}\right) + \beta \sum_{n=1}^{\infty} n V_{\mathbb{K}}(n) \Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{2^d n\beta}{D_{\mathbb{K}}}\right) = -\frac{H\zeta_{\mathbb{K}}(-1)}{2\mathcal{C}_{\mathbb{K}}}(\alpha+\beta) - \frac{\zeta_{\mathbb{K}}^2(0)}{\pi^{1-d}}. \quad (1.18)$$

备注. 如果 $\mathbb{K}$ 不是 $\mathbb{Q}$ 或虚二次数域，那么众所周知， $\zeta_{\mathbb{K}}(0)$ 为零，因此 $\mathcal{G}_{2,\ \mathbb{K}}(z)$ 满足 (1.13)。

最终结果推广了 Dedekind η 函数的对数所满足的变换公式 [3, 公式（3.10）]，并适用于任意数域 $\mathbb{K}$。

定理 1.11。设 $\mathbb{K}$ 为任意数域。对于 $\mathrm{Re}(\alpha)$、$\mathrm{Re}(\beta) > 0$ 且 $\alpha\beta = \pi^{2d}$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n} \Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{2^d n\alpha}{D_{\mathbb{K}}}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n} \Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{2^d n\beta}{D_{\mathbb{K}}}\right) = \frac{H^2}{4\mathcal{C}_{\mathbb{K}}} \log\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{\zeta_{\mathbb{K}}(0)\zeta_{\mathbb{K}}(2)}{\pi^{d+1}\mathcal{C}_{\mathbb{K}}}(\alpha-\beta).$$

2. Preliminaries

本节将汇集文献中的已知结果，以供后续证明使用。其中一个结果是戴德金ζ函数 $\zeta_{\mathbb{K}}(s)$ 满足的函数方程，该方程为： [20,第 254-255] 页。

$$\zeta_{\mathbb{K}}(s) = D_{\mathbb{K}}^{\frac{1}{2}-s} 2^{ds-r_2} \pi^{ds-r_1-r_2} \frac{\Gamma(1-s)^{r_1+r_2}}{\Gamma(s)^{r_2}} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)^{r_1} \zeta_{\mathbb{K}}(1-s). \tag{2.1}$$

下面的引理 给出了临界区域内戴德金ζ函数的凸性界。

引理 2.1. 设 $\mathbb{K}$是任意数域。则

$$\zeta_{\mathbb{K}}(\sigma+it) \ll \begin{cases} |t|^{\frac{d}{2}-d\sigma+\epsilon} D_{\mathbb{K}}^{\frac{1}{2}-\sigma+\epsilon}, & if\ \sigma \le 0, \\ |t|^{\frac{d(1-\sigma)}{2}+\epsilon} D_{\mathbb{K}}^{\frac{1-\sigma}{2}+\epsilon}, & if\ 0 \le \sigma \le 1, \\ |t|^{\epsilon} D_{\mathbb{K}}^{\epsilon}, & if\ \sigma \ge 1 \end{cases}$$

对任意 $\epsilon > 0$均成立。

证明。这可通过应用Phragmen-Lindel¨ofof原理以及戴德金ζ函数的函数方程（2.1）由标准论证得到。具体细节可见 [16, 第 5], 章。例如，□

伽马函数的著名倍增公式和反射公式见 [26, 第46页、公式和（3.5）] ，如下所示 (3.4)

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1}}\Gamma(2s) \tag{2.2}$$

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}. \tag{2.3}$$

现在写出贝塞尔函数的定义。阶数为 ν 的第一类和第二类贝塞尔函数定义为 [27, 第 40, 64]页

$$J_\nu(z) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m+\nu}}{m!\Gamma(m+1+\nu)} \qquad (z, \nu \in \mathbb{C}),$$

$$Y_\nu(z) := \frac{J_\nu(z)\cos(\pi\nu) - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi\nu} \quad (z \in \mathbb{C}, \nu \notin \mathbb{Z}),$$

以及当 $n \in \mathbb{Z}$时的 Y_n（z） $= \lim_{\nu\to n} Y_\nu$（z）。第一类和第二类修正贝塞尔函数定义为 [27, 第 77, 78]页

$$I_\nu(z) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}\pi\nu i} J_\nu(e^{\frac{1}{2}\pi i} z), & \text{if } -\pi < \arg(z) \le \frac{\pi}{2}, \\ e^{\frac{3}{2}\pi\nu i} J_\nu(e^{-\frac{3}{2}\pi i} z), & \text{if } \frac{\pi}{2} < \arg(z) \le \pi, \end{cases}$$

$$K_\nu(z) := \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu\pi} \tag{2.4}$$

分别。当 $\nu \in \mathbb{Z}$， K_ν（z）被解释为（2.4）右端的极限时。

接下来我们定义 Meijer G 函数。G 函数最初由 Meijer 引入，是一种通过级数表示的非常一般的函数。后来，人们通过复平面上的线积分对它作了更一般的定义（参见 [13]）：

$$G_{p,\,q}^{m,\,n}\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} \,\middle|\, z\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j - s)} z^s \mathrm{ds}, \tag{2.5}$$

其中 $z \neq 0$ 、 m、 n、 p、 q 是满足 $0 \leq m \leq q$ 和 $0 \leq n \leq p$ 的整数。被积函数的极点必须全部为单极点。这里积分中的 (C) 表示从 $C - i\infty$ 到 $C + i\infty$ 的竖直直线，使得对于 $j = 1$、.....、 m，$\Gamma(b_j - s)$ 的所有极点都位于该直线的一侧，而对于 $j = 1$、.....、 n， $\Gamma(1 - a_j + s)$ 的所有极点都位于另一侧。于是，当 $|\arg\ z| < \delta\pi$ 时，积分收敛，其中

$$\delta = m + n - \frac{1}{2}(p + q).$$

该积分 当 $|\arg\ z| = \delta\pi$ if $(q - p)(\mathrm{Re}(s)\ + 1/2)\ > \mathrm{Re}(v)\ + 1$ 时也收敛，其中

$$v = \sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{j=1}^{p} a_j.$$

G-函数的特例包括许多其他特殊函数。

3. Transformation formulas for odd zeta values over an arbitrary number field

本节将证明引言中给出的所有结果。我们首先提出一个引理，它将作为证明一般性定理 1.1 的关键步骤。

引理 3.1. 对于 $c = \mathrm{Re}(s)\ > 1$，有

$$\Omega_{\mathbb{K}}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{\zeta_{\mathbb{K}}(s)\Gamma(s)^{r_1+r_2}}{\Gamma(1-s)^{r_2}} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)^{r_1-1} x^{-s} ds.$$

这里以及下文中，$\int_{(c)} ds$ 表示线积分 $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds$，其中 $c = \mathrm{Re}(s)$。

证明。由 (2.5) 中给出的 Meijer G 函数定义可得

$$G_{0,2d}^{d+1,0}\left({}_{(0)_{r_1+r_2},(\frac{1}{2})_{r_2+1}}{}^{-}{}_{;(\frac{1}{2})_{r_1+r_2-1},(0)_{r_2}} \,\middle|\, \frac{x^2j^2}{4^d}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(L)} \frac{\Gamma(-s)^{r_1+r_2}\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)^{r_2+1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right)^{r_1+r_2-1}\Gamma(1+s)^{r_2}} \left(\frac{x^2j^2}{4^d}\right)^{s} ds, \quad (3.1)$$

其中 $L = \mathrm{Re}\ \ (s)\ < -\frac{1}{2}$。接下来，我们在 (3.1) 中用 $-s/2$ 替换 s，从而得到当 $c = \mathrm{Re}(s)\ > 1$ ，

$$\begin{aligned} G_{0,2d}^{d+1,0}\left({}_{(0)_{r_1+r_2},(\frac{1}{2})_{r_2+1}}{}^{-}{}_{;(\frac{1}{2})_{r_1+r_2-1},(0)_{r_2}} \,\middle|\, \frac{x^2j^2}{4^d}\right) &= \frac{1}{4\pi i}\int_{(c)} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1+r_2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right)^{r_2+1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right)^{r_1+r_2-1}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)^{r_2}} \left(\frac{xj}{2^d}\right)^{-s} ds \\ &= \frac{1}{4\pi i}\int_{(c)} \frac{\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right)\right)^{r_1+r_2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right)^{1-r_1}}{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\right)^{r_2}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right)^{r_1-1}} \left(\frac{xj}{2^d}\right)^{-s} ds. \end{aligned} \quad (3.2)$$

在 (3.2) 中应用倍增公式和反射公式 (2.2) 与 (2.3)，并化简后，我们推出

$$G_{0,2d}^{d+1,0}\left({}_{(0)_{r_1+r_2},(\frac{1}{2})_{r_2+1}}{}^{-}{}_{;(\frac{1}{2})_{r_1+r_2-1},(0)_{r_2}} \,\middle|\, \frac{x^2j^2}{4^d}\right) = \frac{2^{r_1+r_2-1}}{\pi^{\frac{r_1}{2}-1}}\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{\Gamma(s)^{r_1+r_2}}{\Gamma(1-s)^{r_2}} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)^{r_1-1} (xj)^{-s} ds. \quad (3.3)$$

将上述表达式代入 (1.8)，可得

$$\Omega_{\mathbb{K}}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} V_{\mathbb{K}}(j)\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{\Gamma(s)^{r_1+r_2}}{\Gamma(1-s)^{r_2}} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)^{r_1-1} (xj)^{-s} ds.$$

现在，根据 [26, 第 30 页定理 2.1], 所述理由，交换上述方程中求和与积分的顺序，随后使用（1.5），即可得到该引理。□

我们现在证明 给出我们在任意数域上的一般变换公式的证明 .

定理 1.1 的证明。首先，我们证明 (1.9) 两边级数的收敛性。值得注意的是，只需证明 (1.7) 中级数的收敛性。由 (3.3)，对于 $c>1$ 和较大的 j，我们有

$$\left|G_{0,2d}^{d+1,0}\left(\begin{matrix}-\\ (0)_{r_1+r_2},(\frac{1}{2})_{r_2+1};(\frac{1}{2})_{r_1+r_2-1},(0)_{r_2}\end{matrix}\middle|\frac{x^2j^2}{4^d}\right)\right|<\frac{2^{r_1+r_2-1}}{\pi^{\frac{r_1}{2}-1}(xj)^c}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\Gamma(c+it)^{r_1+r_2}}{\Gamma(1-c-it)^{r_2}}\cos\left(\frac{\pi(c+it)}{2}\right)^{r_1-1}dt\right|$$
$$\ll j^{-c}, \tag{3.4}$$

这是因为注意到第一步中右侧的积分收敛，这一事实可利用斯特林公式 [7, p. 224], 验证；具体而言，对于 $p\le\sigma\le q$,

$$|\Gamma(s)|=\sqrt{2\pi}|t|^{\sigma-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\pi|t|}\left(1+O\left(\frac{1}{|t|}\right)\right) \tag{3.5}$$

当 $|t|\to\infty$ 时。利用 (3.4) 中给出的界以及 [5, p. 430, Corollary 7.119], , 我们证明了 (1.8) 中定义的 $\Omega_{\mathbb{K}}(x)$ 是良定义的。此外，根据公式 (3.5) 和引理 3.1，对于 $c>\max\{1,1+\mathrm{Re}(a)\}$，我们可以推出：

$$\Omega_{\mathbb{K}}\left(ny\right)\ll_y n^{-c},$$

当 $n\to\infty$ 时。因此，我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}V_{\mathbb{K}}(n)n^a\Omega_{\mathbb{K}}\left(ny\right)\ll\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{c-a}}.$$

由于右侧的级数收敛，我们的断言得证

现在我们证明 tra 换公式 (1.9)。在下面的第一步中应用引理 3.1，我们有 e

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\mathbb{K}}(n)\Omega_{\mathbb{K}}(ny)}{n^{2m+1}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{2m+1}}\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\zeta_{\mathbb{K}}(s)\frac{\Gamma(s)^{r_1+r_2}}{\Gamma(1-s)^{r_2}}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)^{r_1-1}(ny)^{-s}ds\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\zeta_{\mathbb{K}}(2m+1+s)\zeta_{\mathbb{K}}(s)\frac{\Gamma(s)^{r_1+r_2}}{\Gamma(1-s)^{r_2}}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)^{r_1-1}y^{-s}ds,\end{aligned} \tag{3.6}$$

其中在最后一步中，我们先交换了求和与积分的顺序，这可由 [26, 第 30 页定理 2.1], 证明，然后使用了 (1.5)。函数方程 (2.1) 可写成如下形式

$$\frac{\Gamma(s)^{r_1+r_2}}{\Gamma(1-s)^{r_2}}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)^{r_1-1}\zeta_{\mathbb{K}}(s)=\frac{D_{\mathbb{K}}^{\frac{1}{2}-s}2^{r_2-d(1-s)}\pi^{r_1+r_2-d(1-s)}}{\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}\zeta_{\mathbb{K}}(1-s), \tag{3.7}$$

由此将 (3.6) 化为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\mathbb{K}}(n)\Omega_{\mathbb{K}}(ny)}{n^{2m+1}}=\sqrt{D_{\mathbb{K}}}2^{r_2-d}\pi^{r_1+r_2-d}\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{\zeta_{\mathbb{K}}(2m+1+s)\zeta_{\mathbb{K}}(1-s)}{\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}\left(\frac{yD_{\mathbb{K}}}{(2\pi)^d}\right)^{-s}ds. \tag{3.8}$$

接下来，我们将积分路径从 $c>1$ 移至 $-2m-3<\mu=\mathrm{Re}(s)<-2m-1$。为此，考虑由线段 $[\mu-iT,c-iT]$, $[c-iT,c+iT]$, $[c+iT,\mu+iT]$, $[\mu+iT,\mu-iT]$构成的正向闭合路径。注意，被积函数在 $s=0,-2m$ 和 $s=1-2k$ 处有简单极点，其中 $0\le k\le m+1$。根据柯西留数定理，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{c-iT}^{c+iT}+\int_{c+iT}^{\mu+iT}+\int_{\mu+iT}^{\mu-iT}+\int_{\mu-iT}^{c-iT}\right)\frac{\zeta_{\mathbb{K}}(2m+1+s)\zeta_{\mathbb{K}}(1-s)}{\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}\left(\frac{yD_{\mathbb{K}}}{(2\pi)^d}\right)^{-s}ds\\&=R_0+R_{-2m}+\sum_{k=0}^{m+1}R_{1-2k}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

借助引理 2.1 和斯特林公式 (3.5)，不难看出，当 $T \to \infty$ 时，沿水平线段的积分趋于零，因为根据 (2.3)，余弦函数可化为伽马因子。

因此，利用上述事实、(3.8) 和 (3.9)，可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\mathbb{K}}(n)\Omega_{\mathbb{K}}(ny)}{n^{2m+1}} = \sqrt{D_{\mathbb{K}}} 2^{r_2-d} \pi^{r_1+r_2-d} \left(R_0 + R_{-2m} + \sum_{k=0}^{m+1} R_{1-2k} + I(y) \right), \tag{3.10}$$

其中

$$I(y) := \frac{1}{2\pi i} \int_{(\mu)} \frac{\zeta_{\mathbb{K}}(2m+1+s)\zeta_{\mathbb{K}}(1-s)}{\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)} \left(\frac{yD_{\mathbb{K}}}{(2\pi)^d} \right)^{-s} ds. \tag{3.11}$$

(3.10) 中涉及的留数可轻易求得为

$$\begin{aligned} R_0 &= -H\zeta_{\mathbb{K}}(2m+1) \\ R_{-2m} &= (-1)^m H\zeta_{\mathbb{K}}(2m+1) \left(\frac{yD_{\mathbb{K}}}{(2\pi)^d} \right)^{2m} \\ R_{1-2k} &= (-1)^{k+1} \frac{2}{\pi} \zeta_{\mathbb{K}}(2m-2k+2)\zeta_{\mathbb{K}}(2k) \left(\frac{yD_{\mathbb{K}}}{(2\pi)^d} \right)^{2k-1}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

利用 在 (3.11) 中作变量替换 $s = -2m - w$，对于 $1 < c = \mathrm{Re}(s) < 3$，有

$$\begin{aligned} I(y) &= (-1)^m \left(\frac{yD_{\mathbb{K}}}{(2\pi)^d} \right)^{2m} \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{\zeta_{\mathbb{K}}(1-w)\zeta_{\mathbb{K}}(2m+1+w)}{\cos\left(\frac{\pi w}{2}\right)} \left(\frac{yD_{\mathbb{K}}}{(2\pi)^d} \right)^{w} ds \\ &= (-1)^m \left(\frac{yD_{\mathbb{K}}}{(2\pi)^d} \right)^{2m} \left(\sqrt{D_{\mathbb{K}}} 2^{r_2-d} \pi^{r_1+r_2-d} \right)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{2m+1}} \Omega_{\mathbb{K}} \left(\frac{n(2\pi)^{2d}}{yD_{\mathbb{K}}^2} \right), \end{aligned} \tag{3.13}$$

其中用到了 (3.8)。现在，方程 (3.10)、(3.12) 和 (3.13) 合起来得到

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\mathbb{K}}(n)\Omega_{\mathbb{K}}(ny)}{n^{2m+1}} = \sqrt{D_{\mathbb{K}}} 2^{r_2-d} \pi^{r_1+r_2-d} \Bigg\{ & -H\zeta_{\mathbb{K}}(2m+1) + (-1)^m H\zeta_{\mathbb{K}}(2m+1) \left(\frac{yD_{\mathbb{K}}}{(2\pi)^d} \right)^{2m} \\ & + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{k+1} \zeta_{\mathbb{K}}(2m-2k+2)\zeta_{\mathbb{K}}(2k) \left(\frac{yD_{\mathbb{K}}}{(2\pi)^d} \right)^{2k-1} \Bigg\} \\ & + (-1)^m \left(\frac{yD_{\mathbb{K}}}{(2\pi)^d} \right)^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{2m+1}} \Omega_{\mathbb{K}} \left(\frac{n(2\pi)^{2d}}{yD_{\mathbb{K}}^2} \right). \end{aligned}$$

首先，在上述方程中令 $y = \frac{2^d \alpha}{D_{\mathbb{K}}}$，其中 $\alpha\beta = \pi^{2d}$，然后将等式两边乘以 α^{-m} 并化简，可得

$$\begin{aligned} & \alpha^{-m} \left\{ \sqrt{D_{\mathbb{K}}} 2^{r_2-d} \pi^{r_1+r_2-d} H\zeta_{\mathbb{K}}(2m+1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{2m+1}} \Omega_{\mathbb{K}} \left(\frac{2^d n\alpha}{D_{\mathbb{K}}} \right) \right\} \\ & = (-\beta)^{-m} \left\{ \sqrt{D_{\mathbb{K}}} 2^{r_2-d} \pi^{r_1+r_2-d} H\zeta_{\mathbb{K}}(2m+1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{2m+1}} \Omega_{\mathbb{K}} \left(\frac{2^d n\beta}{D_{\mathbb{K}}} \right) \right\} \\ & \quad + \sqrt{D_{\mathbb{K}}} 2^{r_2-d+1} \pi^{r_1+r_2-d-1} \alpha^{-m} \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{k+1} \zeta_{\mathbb{K}}(2m-2k+2)\zeta_{\mathbb{K}}(2k) \left(\frac{\alpha}{\pi^d} \right)^{2k-1}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

最后，在 (3.14) 的有限和中用 $m+1-k$ 替换 k，并将等式两边乘以 $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}$，即可得到 (1.9)。□

接下来，我们由定理 1.1 证明 (1.3)。

推论1.2的证明。应用 [22, 第231页，公式（8）], ，下面的 Meijer G-函数可化简为

$$\begin{aligned} G_{0,2}^{2,0}\left(\begin{smallmatrix} - \\ 0,\frac{1}{2} \end{smallmatrix}\middle|\frac{x^2j^2}{4}\right) &= \sqrt{2xj}K_{1/2}(xj) \\ &= \sqrt{\pi}e^{-jx}. \end{aligned}$$

对于 $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$，次数 d 为 1，且有 $r_1=1$ 和 $r_2=0$。因此，定义 (1.8) 得出

$$\Omega_{\mathbb{K}}(x)=\frac{1}{e^x-1}, \tag{3.15}$$

由此便证明了推论。 □

接下来我们给出二次域上 $\zeta_{\mathbb{K}}(2m+1)$ 的变换公式的证明。

推论1.3的证明。为证明 (1.10)，只需在定理 1.1 中取 $r_1=2$ 和 $r_2=0$，并注意到 $\Omega_{\mathbb{K}}(jx) = \mathcal{R}(jx)$。为说明这一点，注意对于 $c>0$,

$$\begin{aligned} G_{0,4}^{3,0}\left(\begin{smallmatrix} - \\ 0,0,\frac{1}{2};\frac{1}{2} \end{smallmatrix}\middle|\frac{x^2j^2}{16}\right) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{\Gamma(s)^2\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)}\left(\frac{x^2j^2}{16}\right)^{-s}ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{(\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right))^2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right)}\left(\frac{x^2j^2}{16}\right)^{-s}ds \\ &= \frac{4}{2\pi i}\int_{(c)}\Gamma^2(2s)\cos(\pi s)(xj)^{-2s}ds, \end{aligned} \tag{3.16}$$

这可由应用 (2.2) 和 (2.3) 得出。在 (3.16) 中进行变量替换 $s\to s/2$，得到

$$\begin{aligned} G_{0,4}^{3,0}\left(\begin{smallmatrix} - \\ 0,0,\frac{1}{2};\frac{1}{2} \end{smallmatrix}\middle|\frac{x^2j^2}{16}\right) &= \frac{2}{2\pi i}\int_{(2c)}\Gamma^2(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)(xj)^{-s}ds \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{(2c)}\Gamma^2(s)\left(e^{\frac{\pi i}{2}}jx\right)^{-s}ds+\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\Gamma^2(s)\left(e^{-\frac{\pi i}{2}}jx\right)^{-s}ds\right\} \\ &= 2\left\{K_0\left(2\epsilon\sqrt{jx}\right)+K_0\left(2\overline{\epsilon}\sqrt{jx}\right)\right\}, \end{aligned}$$

其中我们使用了 [23, 第115页，公式（11.1）]

$$K_z(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c_1)}\Gamma\left(\frac{s-z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+z}{2}\right)2^{s-2}x^{-s}ds,\quad c_1>|\mathrm{Re}(z)|. \tag{3.17}$$

这证明了我们的断言 $\Omega_{\mathbb{K}}(jx) = \mathcal{R}(jx)$，从而得出我们的结果。 □

推论1.4的证明。令 $r_1=0$ 和 $r_2=1$ 为定理 1.1中的对象。首先我们证明 $\Omega_{\mathbb{K}}(x)$ 可化简为$\mathcal{I}(x)$。注意

$$\begin{aligned} G_{0,4}^{3,0}\left(\begin{smallmatrix} - \\ 0,\frac{1}{2},\frac{1}{2};0 \end{smallmatrix}\middle|\frac{x^2j^2}{16}\right) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{\Gamma(s)\Gamma^2\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1-s)}\left(\frac{x^2j^2}{16}\right)^{-s}ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{(\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right))^2}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}\left(\frac{x^2j^2}{16}\right)^{-s}ds \\ &= 4\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\Gamma^2(2s)\sin(\pi s)(xj)^{-2s}ds, \end{aligned}$$

其中最后一步用到了 (2.2) 和 (2.3)。对上述表达式作变量替换 $s\to s/2$，得到

$$G_{0,4}^{3,0}\left(\begin{smallmatrix} - \\ 0,\frac{1}{2},\frac{1}{2};0 \end{smallmatrix}\middle|\frac{x^2j^2}{16}\right) = 2\frac{1}{2\pi i}\int_{(2c)}\Gamma^2(s)\sin(\pi s/2)(xj)^{-s}ds$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{i}\frac{1}{2\pi i}\int_{(2c)} \Gamma^2(s)\left(e^{\frac{\pi i s}{2}} - e^{-\frac{\pi i s}{2}}\right)(xj)^{-s}\,ds \\
&= i\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{(2c)} \Gamma^2(s)\left(e^{\frac{\pi i}{2}}xj\right)^{-s} ds - \int_{(2c)} \Gamma^2(s)\left(e^{-\frac{\pi i}{2}}xj\right)^{-s} ds\right\} \\
&= 2i\left\{K_0\left(2\epsilon\sqrt{jx}\right) - K_0\left(2\overline{\epsilon}\sqrt{jx}\right)\right\},
\end{aligned}
$$

其中用到了 (3.17)。结合 (1.11) 和 (1.8)，得到 $\Omega_{\mathbb{K}}(jx) = \mathcal{I}(jx)$。至此，我们的结果得证。□

接下来，我们证明勒奇的结果及其推论 1.6。

定理 1.5 的证明。令 $\alpha = \beta = \pi^d$，将 m 代入 $2m+1$，并化简该表达式，即可得到（1.12）。□

推论 1.6 的证明。对于全实数域，Klingen [18] 和 Siegel [25] 的结果（如上面的（1.4）所示）表明，方程（1.12）右端的有限和是超越数。因此，这意味着 $\zeta_k(4m+3)$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{4m+3}}\Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{(2\pi)^d n}{D_{\mathbb{K}}}\right)$ 也必定是超越数。□

4. 任意数域上的扩展 Eisenstein 级数

我们首先确立艾森斯坦级数 $\mathcal{G}_{k,\mathbb{K}}(z)$ 的变换公式的对称形式，如定理 1.8 所述。随后，我们给出定理 1.7 的证明。

定理 1.8 的证明。将 (1.9) 中的 m 替换为 $-m$，并考虑 $m \in \mathbb{N}$ 的情形，我们注意到有限和为空，因此其值为零。进一步重新排列各项，即可证明所需结果。

证明的第二部分可直接由 (1.15) 得出，因为对于非全实数域，已知 $\zeta_{\mathbb{K}}(1-2m) = 0$。□

定理 1.7 的证明。注意，(1.15) 可改写为

$$
\alpha^m\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{1-2m}}\Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{2^d n\alpha}{D_{\mathbb{K}}}\right) + \frac{H}{2\mathcal{C}_{\mathbb{K}}}\zeta_{\mathbb{K}}(1-2m)\right\} = (-\beta)^m\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{1-2m}}\Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{2^d n\beta}{D_{\mathbb{K}}}\right) + \frac{H}{2\mathcal{C}_{\mathbb{K}}}\zeta_{\mathbb{K}}(1-2m)\right\}.
$$

在上述方程中令 $\alpha = -\pi^d i z$ 和 $\beta = \pi^d i/z$，然后化简，可得

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{1-2m}}\Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{(2\pi)^d i n z}{D_{\mathbb{K}}}\right) + \frac{H}{2\mathcal{C}_{\mathbb{K}}}\zeta_{\mathbb{K}}(1-2m) = z^{-2m}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n^{1-2m}}\Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{(2\pi)^d i n}{zD_{\mathbb{K}}}\right) + \frac{H}{2\mathcal{C}_{\mathbb{K}}}\zeta_{\mathbb{K}}(1-2m)\right\}.
$$

利用 (1.14) 中给出的艾森斯坦级数 $\mathcal{G}_{k,\mathbb{K}}(z)$ 的定义，我们现在完成该定理的证明。□

定理 1.9 的证明。令 $\alpha = \pi^d = \beta$ 并代入 $m \to 2m+1$ 后，我们可以简化该表达式，从而得到式 (1.16) 所示的闭式求值。□

现在我们给出拟模形式情形下该结果的证明。

定理 1.10 的证明。令 $m = 1$ 并相应地重新整理各项，即可由式 (1.9) 得到式 (1.18) 的结果。

为证明 (1.17)，我们将 (1.18) 改写为

$$
\alpha\left\{\sum_{n=1}^{\infty} nV_{\mathbb{K}}(n)\Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{2^d n\alpha}{D_{\mathbb{K}}}\right) + \frac{H\zeta_{\mathbb{K}}(-1)}{2\mathcal{C}_{\mathbb{K}}}\right\} = -\beta\left\{\sum_{n=1}^{\infty} nV_{\mathbb{K}}(n)\Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{2^d n\beta}{D_{\mathbb{K}}}\right) + \frac{H\zeta_{\mathbb{K}}(-1)}{2\mathcal{C}_{\mathbb{K}}}\right\} - \frac{\zeta_{\mathbb{K}}^2(0)}{\pi^{1-d}}.
$$

如果我们取将 $\alpha = -\pi^d iz$ 和 $\beta = \pi^d i/z$ 代入上式并化简后，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} nV_{\mathbb{K}}(n)\Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{(2\pi)^d niz}{D_{\mathbb{K}}}\right) + \frac{H\zeta_{\mathbb{K}}(-1)}{2\mathcal{C}_{\mathbb{K}}} = -\frac{1}{z}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} nV_{\mathbb{K}}(n)\Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{(2\pi)^d ni}{zD_{\mathbb{K}}}\right) + \frac{H\zeta_{\mathbb{K}}(-1)}{2\mathcal{C}_{\mathbb{K}}}\right\} + \frac{\zeta_{\mathbb{K}}^2(0)}{\pi i}.$$

利用式 (1.14) 中给出的 $\mathcal{G}_{2,\mathbb{K}}(z)$ 的定义，并进行化简，我们得到式 (1.17)。

□

接下来证明数域上 Dedekind η 函数对数的变换公式。

定理 1.11 的证明。这里给出的论证与定理 1.1 的证明类似，因此我们将简要说明。我们应用引理 3.1，从而得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\mathbb{K}}(n)\Omega_{\mathbb{K}}(ny)}{n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \zeta_{\mathbb{K}}(1+s)\zeta_{\mathbb{K}}(s)\frac{\Gamma(s)^{r_1+r_2}}{\Gamma(1-s)^{r_2}}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)^{r_1-1} y^{-s}ds, \tag{4.1}$$

结合式 (3.7) 和式 (4.1)，可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\mathbb{K}}(n)\Omega_{\mathbb{K}}(ny)}{n} = \sqrt{D_{\mathbb{K}}}2^{r_2-d}\pi^{r_1+r_2-d}\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{\zeta_{\mathbb{K}}(1+s)\zeta_{\mathbb{K}}(1-s)}{\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}\left(\frac{yD_{\mathbb{K}}}{(2\pi)^d}\right)^{-s} ds. \tag{4.2}$$

现在，我们将积分路径从 $c > 1$ 移至 $-3 < \mu = \text{Re}(s) < -1$，并考虑由线段 $[\mu - iT, c - iT]$、$[c - iT, c + iT]$、$[c + iT, \mu + iT]$、$[\mu + iT, \mu - iT]$ 构成的正向闭合路径。注意，被积函数在 $s = 0$ 处有一个二阶极点，在 $s = 1$ 和 $s = -1$处有简单极点。此外，利用引理 2.1 和 (3.5)，可以证明，当$T \to \infty$时，沿水平方向线段的积分趋于零。结合柯西留数定理和 (4.2)，我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\mathbb{K}}(n)\Omega_{\mathbb{K}}(ny)}{n} = \sqrt{D_{\mathbb{K}}}2^{r_2-d}\pi^{r_1+r_2-d}\left(R_0 + R_1 + R_{-1} + I(y)\right), \tag{4.3}$$

其中

$$I(y) := \frac{1}{2\pi i}\int_{(\mu)} \frac{\zeta_{\mathbb{K}}(1+s)\zeta_{\mathbb{K}}(1-s)}{\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}\left(\frac{yD_{\mathbb{K}}}{(2\pi)^d}\right)^{-s} ds. \tag{4.4}$$

我们可以将 (4.3) 中的留数计算为

$$\begin{aligned} R_0 &= H^2 \log\left(\frac{yD_{\mathbb{K}}}{(2\pi)^d}\right) \\ R_1 &= -\frac{2(2\pi)^d}{\pi yD_{\mathbb{K}}}\zeta_{\mathbb{K}}(2)\zeta_{\mathbb{K}}(0). \\ R_{-1} &= \frac{2yD_{\mathbb{K}}}{\pi(2\pi)^d}\zeta_{\mathbb{K}}(0)\zeta_{\mathbb{K}}(2). \end{aligned} \tag{4.5}$$

在 (4.4) 中采用变量替换 $s = -w$ 后，对于 $1 < c = \text{Re}(s) < 3$，有

$$\begin{aligned} I(y) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{\zeta_{\mathbb{K}}(1-w)\zeta_{\mathbb{K}}(1+w)}{\cos\left(\frac{\pi w}{2}\right)}\left(\frac{yD_{\mathbb{K}}}{(2\pi)^d}\right)^{w} ds \\ &= \left(\sqrt{D_{\mathbb{K}}}2^{r_2-d}\pi^{r_1+r_2-d}\right)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n}\Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{n(2\pi)^{2d}}{yD_{\mathbb{K}}^2}\right), \end{aligned} \tag{4.6}$$

这里我们用到了（4.2）。现在，结合方程（4.3）、（4.5）和（4.6），可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\mathbb{K}}(n)\Omega_{\mathbb{K}}(ny)}{n} = \sqrt{D_{\mathbb{K}}}2^{r_2-d}\pi^{r_1+r_2-d}\left\{H^2\log\left(\frac{yD_{\mathbb{K}}}{(2\pi)^d}\right) - \frac{2(2\pi)^d}{\pi yD_{\mathbb{K}}}\zeta_{\mathbb{K}}(2)\zeta_{\mathbb{K}}(0) + \frac{2yD_{\mathbb{K}}}{\pi(2\pi)^d}\zeta_{\mathbb{K}}(0)\zeta_{\mathbb{K}}(2)\right\}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n}\Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{n(2\pi)^{2d}}{yD_{\mathbb{K}}^2}\right).$$

因此，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\mathbb{K}}(n)\Omega_{\mathbb{K}}(ny)}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\mathbb{K}}(n)}{n}\Omega_{\mathbb{K}}\left(\frac{n(2\pi)^{2d}}{yD_{\mathbb{K}}^2}\right)=\frac{\sqrt{D_{\mathbb{K}}}H^2}{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}\log\left(\frac{yD_{\mathbb{K}}}{(2\pi)^d}\right)$$
$$+\frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{D_{\mathbb{K}}}\zeta_{\mathbb{K}}(0)\zeta_{\mathbb{K}}(2)}{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}\left(\frac{yD_{\mathbb{K}}}{(2\pi)^d}-\frac{(2\pi)^d}{yD_{\mathbb{K}}}\right).$$

在上述等式中令 $y=\frac{2^d\alpha}{D_{\mathbb{K}}}$，其中 $\alpha\beta=\pi^{2d}$，即可得到我们的结果。 □

致谢。第一作者是加尔各答印度科学教育与研究学院的 INSPIRE 教师，其研究经费由印度科学技术部、印度政府提供，资助编号为 DST/INSPIRE/04/2021/002753。本项目的部分工作是在第二作者担任台湾中央研究院数学研究所博士后研究员期间完成的，第二作者谨此感谢该研究所提供的学术支持。第三作者的研究得到富布赖特-尼赫鲁博士后奖学金资助，资助编号为 2846/FNPDR/2022。三位作者谨向各自的资助机构表示诚挚感谢。

References

[1] R. Ap´ery, *Irrationalité de ζ(2) et ζ(3)*, 《Ast´erisque》61（1979），11–13。[2] R. Ap´ery, *Interpolation de fractions continues et irrationalité de certaines constantes*, 载于：《科学部公报》，第三卷，法国国家图书馆，巴黎，1981，37–63。[3] B.C. Berndt、Y. Lee 和 J. Sohn, *The formulas of Koshliakov and Guinand in Ramanujan's lost notebook*, 载于《数论综述》，丛书：《数学进展》第17卷，K. Alladi 编，施普林格，纽约，2008，第21–42页。[4] B. C. Berndt 和 A. Straub, *Ramanujan's formula for ζ(2n+1) Exploring the Riemann zeta function*，第13–34页，施普林格，查姆，2017。[5] O. Bordelles, *Arithmetic tales*，伦敦：施普林格，2012。[6] D. M. Bradley, *Series acceleration formulas for Dirichlet series with periodic coefficients*, 《拉马努金期刊》6（2002），331–346。[7] E. T. Copson, *Theory of Functions of a Complex Variable*，牛津大学出版社，牛津，1935。[8] A. Dixit 和 R. Gupta, *Koshliakov zeta functions I. Modular relations*, 《数学进展》393（2021），论文编号108093。[9] A. Dixit、R. Gupta、R. Kumar 和 B. Maji, *Generalized Lambert series Raabe's cosine transform and a generalization of Ramanujan's formula for ζ 2m + 1*，（），**239** 2020 232 293《名古屋数学杂志》（），–。[10] A. Dixit、A. Kesarwani 和 R. Kumar, *Explicit transformations of certain Lambert series*, 《数学科学研究》9，34（2022）。[11] A. Dixit 和 R. Kumar, *Applications of the Lipschitz summation formula and A generalization of Raabe's cosine transform* 2022，已提交发表，。[12] A. Dixit 和 B. Maji, *Generalized Lambert series and arithmetic nature of odd zeta values*, 《爱丁堡皇家学会学报 A 辑：数学》150，第2期，741–769，2020。[13] A. Erdelyi、W. Magnus、F. Oberhettinger 和 F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*，第1卷（纽约，1953）。《数学文摘》51。[14] J. Franke, *Ramanujan identities of higher degree*, 《数论研究》4（2018），1–19。[15] A. Gupta 和 B. Maji, *On Ramanujan's formula for ζ(1/2) and ζ(2m + 1)*, 《数学分析及其应用杂志》507（2022），125738。[16] H. Iwaniec 和 E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, 《美国数学会讨论会出版物》53，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，（2004）。[17] P. Kirschenhofer 和 H. Prodinger, *On some applications of formulae of Ramanujan in the analysis of algorithms*, 《Mathematika》38（1991），14–33。[18] H. Klingen, *Über die Werte der Dedekindschen Zeta funktionen*, 《数学年刊》145（1962），265–272。[19] Y. Komori、K. Matsumoto 和 H. Tsumura, *Barnes multiple zeta-functions Ramanujan's formula and relevant series involving hyperbolic functions*，，，《拉马努金数学学会杂志》第（），–。**28** 1 2013 49 69[20] S. Lang, *Algebraic number theory*，艾迪生-韦斯利：雷丁，宾夕法尼亚州，（1970）。[21] M. Lerch, *Sur la fonction ζ(s) pour valeurs impaires de l'argument*, 《科学、数学与天文学杂志》，由 F. Gomes Teixeira 博士出版，科英布拉14（1901），65–69。[22] Y. L. Luke, *Special Functions and Their Approximations* 第1卷，学术出版社，（1969）。[23] F. Oberhettinger, *Tables of Mellin Transforms*（施普林格出版社，纽约，1974）。[24] S. Ramanujan, *The Lost Notebook and Other Unpublished Papers*，纳罗萨出版社，新德里，1988。

[25] C. L. Siegel, *Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen*, 《哥廷根科学院新闻》10，87–102（1969）。[26] N. M. Temme, *Special functions: An introduction to the classical functions of mathematical physics*, Wiley-Interscience 出版社，纽约，1996。[27] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*，第二版，剑桥大学出版社，伦敦，1944。[28] D. Zagier, *Hyperbolic manifolds and special values of Dedekind zeta-functions*，《数学发明》83（1986），285–301。[29] V. Zudilin, *One of the numbers* $\zeta(5)$ $\zeta(7)$ $\zeta(9)$ $\zeta(5)$ *is irrational*，（俄文）《数学科学进展》56（2001），第4期（340），149–150；译文载于《俄罗斯数学评论》56（2001），第4期，774–776。

Department of Mathematics and Statistics, Indian Institute of Science Education and Research Kolkata, Mohanpur-741246 West Bengal , , India.
Email address: soumya.tatan@gmail.com

Department of Mathematics, University of Texas at Tyler, TX 75799, U.S.A.
Email address: rgupta@uttyler.edu

Department of Mathematics, The Pennsylvania State University, University Park, PA 16802, U.S.A.
Email address: rjk6031@psu.edu