arXiv:2304.07929v1 [math.CV] 17 Apr 2023

# 四元数切片正则函数上的纤维丛

J. Oscar Gonz´alez-Cervantes

摘要。近年来，若干新的拓扑方法已成功应用于超复分析的研究；例如，多复变函数理论（见 [15] , [17] 和 [19], ）、克利福德分析（见 [20] 和 [22], ）以及切片正则函数理论（见 [10]）。特别是，纤维丛是这些拓扑研究主题之一，许多作者在数学期刊上对其进行了深入研究，见 [1], [3], [14], [18], [21] 和 [23]。

本文旨在展示，分裂引理和表示公式如何利用一致度量，内在地确定四元数切片正则函数空间上的一个纤维丛。由此，该函数空间的若干性质也可通过纤维丛的截面、拉回和同构得到恰当的诠释。

2010年数学主题分类。主要分类 30G35；次要分类 46M20。

关键词：四元数切片正则函数、纤维丛。

## 1. 预备知识

四元数表示为 $q = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ 其中 $x_0$、$x_1$、$x_2$、$x_3$均为实数，且虚单位满足： $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1$、 $e_1e_2 = -e_2e_1 = e_3$、 $e_2e_3 = -e_3e_2 = e_1$、 $e_3e_1 = -e_1e_3 = e_2$。四元数斜域记为 $\mathbb{H}$。集合 $\{e_1, e_2, e_3\}$和 $\{1, e_1, e_2, e_3\}$分别称为实线性空间 $\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{H}$的标准基。

我们用 $T$表示由满足以下条件的 (i, j) $\in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 组成的集合： {i、j、ij} 与 $\mathbb{R}^3$的标准基同向。

$q \in \mathbb{H}$ 的向量部是 $\mathfrak{q} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ ，其实部是 $q_0 = x_0$。 $q$ 的四元数共轭为 $\bar{q} = q_0 - \mathfrak{q}$，其范数为$\|q\| := \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^3 + x_3^2} = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\bar{q}q}$。

本研究部分得到了 CONACYT 的支持。

$\mathbb{H}$ 中的单位开球是 $\mathbb{B}^4(0,1) := \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| < 1\}$，我们分别用 $\mathbb{S}^2 := \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{q}\| = 1\}$ 和$\mathbb{S}^3 := \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\}$表示 $\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{H}$ 中的单位球面。

四元数结构使我们可以看出，对于所有 $\mathbf{i} \in \mathbb{S}^2$，$\mathbf{i}^2 = -1$ and $\mathbb{C}(\mathbf{i}) := \{x + \mathbf{i}y; \mid x, y \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{C}$ 都是域。任意 $q \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$ 都表示为 $x + \mathbf{I}_q y$，其中 $x, y \in \mathbb{R}$ 且 $\mathbf{I}_q := \|\mathbf{q}\|^{-1}\mathbf{q} \in \mathbb{S}^2$；即 $q \in \mathbb{C}(\mathbf{I}_q)$，并且如果 $q \in \mathbb{R}$，那么 $q$ 位于所有复平面中。

给定 $u \in \mathbb{S}^3$，映射 $\mathbf{q} \mapsto u\mathbf{q}\bar{u}$ 对所有 $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ 都是一个保持 $\mathbb{R}^3$ 的四元数旋转，见 [16]。定义 $R_u : T \to T$，使得对所有 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in T$，$R_u(\mathbf{i}, \mathbf{j}) := (u\mathbf{i}\bar{u}, u\mathbf{j}\bar{u})$；并用 $\rho_T$ 表示由 $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^6}$ 在 $T$ 中诱导的度量。

本文需要用到以下切片正则函数的定义和性质，详见 [5], [7], [10] 和 [13]。

定义 1.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{H}$ 是一个开集，且 $f : \Omega \to \mathbb{H}$ 是一个实可微函数。若 $f$ 满足

$$\overline{\partial}_{\mathbf{i}} f \mid_{\Omega \cap \mathbb{C}(\mathbf{i})} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) f \mid_{\Omega \cap \mathbb{C}(\mathbf{i})} = 0, \quad \text{on } \Omega \cap \mathbb{C}(\mathbf{i}),$$

对所有 $\mathbf{i} \in \mathbb{S}^2$成立，且其导数为 $f' = \partial_{\mathbf{i}} f \mid_{\Omega \cap \mathbb{C}(\mathbf{i})} = \dfrac{\partial}{\partial x} f \mid_{\Omega \cap \mathbb{C}(\mathbf{i})} = \partial_x f \mid_{\Omega \cap \mathbb{C}(\mathbf{i})}$，则称其为左切片正则函数，或切片正则函数。$\Omega$ 上切片正则函数构成的四元数右线性空间记为 $\mathcal{SR}(\Omega)$。

定义 1.2. 若集合 $U \subset \mathbb{H}$ 满足：当 $x + \mathbf{i}y \in U$ 且$x$时，$y \in \mathbb{R}$ 则 $\{x + \mathbf{j}y \mid \mathbf{j} \in \mathbb{S}^2\} \subset U$，则称其为轴对称集合。若域 $U \subset \mathbb{H}$ 满足：对所有 $\mathbf{i} \in \mathbb{S}^2$，$U_{\mathbf{i}} = U \cap \mathbb{C}(\mathbf{i})$ 都是 $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ 中的一个域，则称其为切片域，或 s-域。

设 $\Omega \subset \mathbb{H}$ 是一个轴对称 s-域。那么，如果对所有 $q \in \Omega$ 都有 $f(q) = f(\bar{q})$，则 $f \in \mathcal{SR}(\Omega)$ 是一个本征函数。$\Omega$ 上本征切片正则函数的实线性空间记为 $\mathcal{N}(\Omega)$，参见 [5] 和 [12]。

**T**定理 1.3。设 $\Omega \subset \mathbb{H}$ 是一个轴对称 s-域，且 $f \in \mathcal{SR}(\Omega)$ .

1.（分裂引理）对于每个 $\mathbf{i} \in \mathbb{S}$ 和与 $\mathbf{i}$ 正交的 $\mathbf{j} \in \mathbb{S}$，都存在 $F, G \in Hol(\Omega_{\mathbf{i}})$，它们是从 $\Omega_{\mathbf{i}}$ 到 $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ 的全纯函数，使得$f \mid_{\Omega_{\mathbf{i}}} = F + G\mathbf{j}$ 在 $\Omega_{\mathbf{i}}$ 上，参见 [10]。
2.（表示公式）对于每个满足 $x, y \in \mathbb{R}$ 且 $\mathbf{I}_q \in \mathbb{S}^2$ 的 $q = x + \mathbf{I}_q y \in \Omega$，都有

$$f(x + \mathbf{I}_q y) = \frac{1}{2}[f(x + \mathbf{i}y) + f(x - \mathbf{i}y)] + \frac{1}{2}\mathbf{I}_q\mathbf{i}[f(x - \mathbf{i}y) - f(x + \mathbf{i}y)],$$

*for all* $\mathbf{i} \in \mathbb{S}^2$, *see* [7].

在轴对称 s-域 $\Omega \subset \mathbb{H}$ 中，分裂引理和表示公式保证了以下算子的良定义：

1. $Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}} : \mathcal{SR}(\Omega) \to Hol(\Omega_{\mathbf{i}}) + Hol(\Omega_{\mathbf{i}})\mathbf{j}$ 由 $Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f] = f \mid_{\Omega_{\mathbf{i}}} = f_1 + f_2\mathbf{j}$ 给出，对所有 $f \in \mathcal{SR}(\Omega)$ 均成立，其中 $f_1, f_2 \in Hol(\Omega_{\mathbf{i}})$,

2. $P_{\mathbf{i},\mathbf{j}}: Hol(\Omega_{\mathbf{i}}) + Hol(\Omega_{\mathbf{i}})\mathbf{j} \to \mathcal{SR}(\Omega)$ 定义为

$$P_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[g](q) = \frac{1}{2}\left[(1+\mathbf{I}_q\mathbf{i})g(x-y\mathbf{i}) + (1-\mathbf{I}_q\mathbf{i})g(x+y\mathbf{i})\right],$$

对所有 $g \in Hol(\Omega_{\mathbf{i}}) + Hol(\Omega_{\mathbf{i}})\mathbf{j}$，其中 $q = x + \mathbf{I}_q y \in \Omega$。

此外 ，

$$P_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \circ Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}} = \mathcal{I}_{\mathcal{SR}(\Omega)} \quad \text{and} \quad Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \circ P_{\mathbf{i},\mathbf{j}} = \mathcal{I}_{Hol(\Omega_{\mathbf{i}})+Hol(\Omega_{\mathbf{i}})\mathbf{j}}, \tag{1.1}$$

其中， $\mathcal{I}_{\mathcal{SR}(\Omega)}$ 和 $\mathcal{I}_{Hol(\Omega_{\mathbf{i}})+Hol(\Omega_{\mathbf{i}})\mathbf{j}}$ 分别是 $\mathcal{SR}(\Omega)$ 和 $Hol(\Omega_{\mathbf{i}}) + Hol(\Omega_{\mathbf{i}})\mathbf{j}$ 中的恒等算子，见 [12]。

给定 $g \in \mathcal{SR}(\Omega)$ 和 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in T$，$Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f]$ 的实分量为

$$D_1[g,\mathbf{i},\mathbf{j}] := \frac{Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[g] + \overline{Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[g]}}{2}, \qquad D_2[g,\mathbf{i},\mathbf{j}] := -\frac{Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[g]\mathbf{i} + \overline{Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[g]\mathbf{i}}}{2},$$
$$D_3[g,\mathbf{i},\mathbf{j}] := -\frac{Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[g]\mathbf{j} + \overline{Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[g]\mathbf{j}}}{2}, \quad D_4[g,\mathbf{i},\mathbf{j}] := \frac{Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[g]\mathbf{j}\mathbf{i} + \overline{Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[g]\mathbf{j}\mathbf{i}}}{2}. \tag{1.2}$$

Thus

$$Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[g] = D_1[g,\mathbf{i},\mathbf{j}] + D_2[g,\mathbf{i},\mathbf{j}]\mathbf{i} + D_3[g,\mathbf{i},\mathbf{j}]\mathbf{j} + D_4[g,\mathbf{i},\mathbf{j}]\mathbf{i}\mathbf{j}. \tag{1.3}$$

**De定义 1.4.** 设 $\Omega\ \Xi \in \mathbb{H}$ 为轴对称 s-域，且 $(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in T$ .

1. 对任意 $f, g \in \mathcal{SR}(\Omega)$，定义 $f \bullet_{\mathbf{i},\mathbf{j}} g := P_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[\, f_1 g_1 + f_2 g_2 \mathbf{j}\,] \in \mathcal{SR}(\Omega)$，其中 $Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f] = f_1 + f_2\mathbf{j}$ 且 $Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[g] = g_1 + g_2\mathbf{j}$，并且 $f_1, f_2, g_1, g_2 \in Hol(\Omega_{\mathbf{i}})$。
2. 给定 $f \in \mathcal{SR}(\Omega)$ 和 $h \in \mathcal{SR}(\Xi)$，满足 $Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[h] : \Xi_{\mathbf{i}} \to \Omega_{\mathbf{i}}$，则它们的 i、j-复合为 $f \circ_{\mathbf{i},\mathbf{j}} h := P_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[\, Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f] \circ Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[h]\,] \in \mathcal{SR}(\Xi)$。
3. 轴对称 s-域 $\Omega\ \Xi \subset \mathbb{H}$ 若存在 $\alpha \in \mathcal{SR}(\Omega)$，使得 $Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[\alpha]$ 是从 $\Omega_{\mathbf{i}}$ 到 $\Xi_{\mathbf{i}}$ 的双全纯映射，则称它们 i-共形等价。

4. 设 $f, g \in \mathcal{SR}(\mathbb{B}^4(0,1))$ 存在 $(a_n)$、$(b_n) \subset \mathbb{H}$ 使得 $f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n$ 且 $g(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n b_n$ 对所有 $q \in \mathbb{B}^4(0,1)$ 均成立。则它们的 $*$-积 $f * g(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$，对所有 $q \in \mathbb{B}^4(0,1)$ 均成立，见 [7]。可以看出 $Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f * g] = f_1(z)g_1(z) - f_2(z)g_2(\bar{z}) + (\, f_2(z)g_1(\bar{z}) + f_1(z)g_2(z)\,)J$ 对所有 $z \in \Omega_{\mathbf{i}}$ 均成立，其中 $Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f] = f_1 + f_2\mathbf{j}$ 和 $\overline{Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[g]} = g_1 + g_2\mathbf{j}$ 满足 $f_1, f_2, g_1, g_2 \in Hol(\Omega_{\mathbf{i}})$。

设 $\Omega \subset \mathbb{H}$ 是一个有界轴对称 s-域。定义 $\mathcal{SR}_c(\Omega) := \mathcal{SR}(\Omega) \cap C(\Omega\ \mathbb{H})$，$\mathcal{N}_c(\Omega) := \mathcal{N}(\Omega) \cap C(\Omega\ \mathbb{H})$，并且

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(q)\| \mid q \in \Omega\},$$

对所有 $f \in \mathcal{SR}_c(\Omega)$ 均成立。

读者可在 [1], [3], [14], [18], [21] 和 [23] 中找到如下所示的纤维丛理论。

定义 1.5.（纤维丛）设 $X$、$B$ 和 $F$ 为豪斯多夫空间，且设 $K$ 为一个拓扑群，它以同胚群的形式作用于 $F$。纤维丛表示为 $(X, \mathrm{P}, B, F)$，其中 $X$ 称为全空间，$B$ 称为底空间，$F$ 称为纤维，$K$ 称为结构群，$\mathrm{P}: X \to B$称为丛投影。此外，还必须满足以下条件：

1. 对于 $B$ 中的每个元素，都存在一个邻域 $U \subset B$ 和一个同胚 $\varphi$：$U \times F \to \mathrm{P}^{-1}(U)$，称为该丛在 $U$ 上的局部平凡化，使得对所有 $b \in U$ 和 $y \in F$，都有 $\mathrm{P} \circ \varphi(b, y) = b$；也就是说，图表

$$\begin{array}{ccc} & \varphi & \\ U \times F & \longrightarrow & \mathbf{P}^{-1}(U) \\ \Pi_1 \downarrow & & \downarrow \mathbf{P} \\ U & = & U \end{array}$$

交换。$\Phi$ 表示所有局部平凡化构成的族。

2. 如果 $\varphi$: $U \times F \to \mathrm{P}^{-1}(U)$ 属于 $\Phi$，且 $V \subset U$，那么 $\varphi_{|V \times F}$ 属于 $\Phi$。

3. 如果 $\varphi, \phi \in \Phi$ 是 $U \subset B$ 上的局部平凡化，那么存在一个映射 $\psi$: $U \to K$，使得对所有 $u \in U$ 和 $y \in F$，都有 $\phi(u, y) = \varphi(u, \psi(u)(y))$。

4. $\Phi$ 是满足 (1)、(2) 和 (3) 的映射所构成的极大族。参见 [1]。

注 1.6. 纤维丛的若干类型。

1. 圆盘丛或球丛是一种纤维丛，其纤维空间是欧几里得空间中的度量圆盘或球面，且其结构群是该空间的正交群的子群，见 [1]。

2. 设 $\Phi = \{\varphi_u\}_{u \in L}$ 为纤维丛的局部平凡化族。令 $\varphi_{u,\ x}$: $F \to \mathrm{P}^{-1}(x)$ 由 $\varphi_{u,\ x}(y) = \varphi_u(x, y)$ 对所有 $u \in L$ 及 $(x, y) \in U \times F$ 定义，并在转移函数 $g_{u,\ v}(x) = \varphi_{u,\ x}^{-1} \circ \varphi_{v,\ x}$存在时定义之。若转移函数满足：

$$g_{uv} g_{v,w} = g_{u,w}, \quad g_{uu} = e, \quad [g_{u,v}]^{-1} = g_{u,v}, \tag{1.4}$$

其中 $e$ 是单位元，则该纤维丛称为坐标丛。尽管这一形容词通常用于向量丛，见 [1]和 [14]。

两个豪斯多夫空间的积空间、莫比乌斯带和克莱因瓶有一个共同点：它们都可以通过纤维丛来定义，见 [1]和 [14]。

定义 1.7。（纤维丛的截面、拉回丛及同构）设 $(X, \mathrm{P}, B, F)$ 是一个结构群为 $K$ 且具有所有局部平凡化集合 $\Phi$ 的纤维丛。如果连续映射 $S: B \to X$ 满足对所有 $x \in B$ 都有 $\mathrm{P} \circ S(x) = x$，则称其为 $(X, \mathrm{P}, B, F)$ 的一个截面或横截面，见 [21]。

任意映射 $\mathfrak{K}$: $A \to B$，其中 $A$ 是非空集合，都会生成纤维丛 $(\mathfrak{K}^*(X), \mathrm{P}', A, F)$，称为 P 经由$\mathfrak{K}$得到的诱导丛，或拉回丛，其中 $\mathfrak{K}^*(X) := \{(a, x) \in A \times X \mid \mathrm{P}(x) = f(a)\}$ 并且

对所有 $(a,x)\in\mathfrak{K}^*(X)$，$\mathrm{P}'(a,x)=a$。该诱导丛的结构群和所有局部平凡化分别为 $K$ 和 $\Phi$，参见 [1] 和 [14]。

给定两个纤维丛 $(X_1,\mathrm{P}_1,B_1,F_1)$ 和 $(X_2,\mathrm{P}_2,B_2,F_2)$。态-射 $\Gamma:(X_1,\mathrm{P}_1,B_1,F_1)\to(X_2,\mathrm{P}_2,B_2,F_2)$ 是一对连续映射 $\Gamma_1:\ X_1\to X_2$ 和 $\Gamma_2:\ B_1\to B_2$，使得下图

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{P}_2 & \\ X_2 & \longrightarrow & B_2 \\ \Gamma_1\ \uparrow & & \uparrow\ \Gamma_2 \\ X_1 & \longrightarrow & B_1 \\ & \mathbf{P}_1 & \end{array}$$

可交换。注意，$\Gamma$ 确定了一个连续映射 $\Gamma_0:\ F_1\to F_2$。

若存在一个态射 $\Gamma^{-1}:(X_2,\mathrm{P}_2,B_2,F_2)\to(X_1,\mathrm{P}_1,B_1,F_1)$，使得 $\Gamma\circ\Gamma^{-1}$ 和 $\Gamma^{-1}\circ\Gamma$ 是恒等态射（见 [1] 和 [14]），则称态射 $\Gamma:(X_1,\mathrm{P}_1,B_1,F_1)\to(X_2,\mathrm{P}_2,B_2,F_2)$ 为同构，记作 $(X_1,\mathrm{P}_1,B_1,F_1)\cong(X_2,\mathrm{P}_2,B_2,F_2)$。

### 1.1. 切片正则函数上的纤维丛

本节中，我们假设 $\Omega\subset\mathbb{H}$ 是一个有界轴对称 s-域，以便在 $\mathcal{SR}_c(\Omega)$ 中建立一致度量 $\rho_\infty$。我们将看到，算子族$P_{\mathrm{i},\ \mathrm{j}}$ 和 $Q_{\mathrm{i},\ \mathrm{j}}$ 分别自然地定义了一个纤维丛的丛投影和一族局部平凡化，该纤维丛的底空间为 $\mathcal{SR}_c(\Omega)$。

注意，对每个 $\epsilon>0$，都存在一个轴对称 s-域$\Lambda\subset\mathbb{H}$，使得 $\overline{\Lambda}\subset\Omega$ 且 $dist(\partial\Lambda,\partial\Omega)<\epsilon$。因此，通过限制算子，$\mathcal{SR}(\Omega)$ 嵌入到 $\mathcal{SR}_c(\Lambda)$ 中。因此，针对 $\mathcal{SR}_c(\Lambda)$ 得到的结果并不会缩小其对 $\mathcal{SR}(\Omega)$ 的适用范围。

定义 1.8. 令

$$S_\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ \mid\ \text{there exists }\mathbf{i}\in\mathbb{S}^2\text{ such that }x+y\mathbf{i}\in\Omega\}.$$

并且对所有 $(f,(\mathrm{p},\mathrm{r}))\in\mathcal{SR}_c(\Omega)\times\mathbb{R}^6$，有 $\|(f,(\mathrm{i},\mathrm{j}))\|_{\mathcal{SR}_c(\Omega)\times\mathbb{R}^6}=\|f\|_\infty+\|(\mathrm{q},\mathrm{r})\|_{\mathbb{R}^6}$。由前述范数在 $\mathcal{SR}_c(\Omega)$ 上诱导的度量 $\times\,T$ 记为$\rho_{\mathcal{SR}_c(\Omega)\times T}$。

由 $Harm_c^2(S_\Omega)$ 表示在 $S_\Omega$ 上且两个函数在 $\overline{S_\Omega}$ 上均连续的共轭调和函数对，并建立 $\mathcal{H}(S_\Omega)=Harm_c^2(S_\Omega)\times Harm_c^2(S_\Omega)\times T$；或者等价地，

$$\mathcal{H}(S_\Omega)=\left\{\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},(\mathbf{i},\mathbf{j})\right)\ \mid\ (a,b),(c,d)\in Harm_c^2(S_\Omega),\ (\mathbf{i},\mathbf{j})\in T\right\}.$$

考虑以下范数:

$$\begin{aligned}&\left\|\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},(\mathbf{q},\mathbf{r})\right)\right\|_{Harm_c^2(S_\Omega)\times Harm_c^2(S_\Omega)\times\mathbb{R}^6}\\ =&\|a\|_\infty+\|b\|_\infty+\|c\|_\infty+\|d\|_\infty+\|(\mathbf{q},\mathbf{r})\|_{\mathbb{R}^6},\end{aligned}$$

对于所有 $((a,b),(c,d),(\mathbf{q},\mathbf{r})) \in Harm_c^2(S_\Omega) \times Harm_c^2(S_\Omega) \times \mathbb{R}^6$，并令 $\rho_{\mathcal{H}(S_\Omega)}$ 表示由此范数在 $\mathcal{H}(S_\Omega)$ 上诱导的度量。此外，记

$$\begin{aligned}&\| \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (\mathbf{q},\mathbf{r}) \right)(x,y)\|_p \\ =&|a(x,y)| + |b(x,y)| + |c(x,y)| + |d(x,y)| + \|(\mathbf{q},\mathbf{r})\|_{\mathbb{R}^6},\end{aligned}$$

对每个 $(x,y) \in S_\Omega$。

注 1.9. 注意，$\mathcal{SR}_c(\Omega) \times \mathbb{R}^6$ 和 $Harm_c^2(S_\Omega) \times Harm_c^2(S_\Omega) \times \mathbb{R}^6$都是完备赋范实线性空间的 1-直和。尽管可以将这些空间定义为相同分量空间的 $p$-直和（其中 $p \geq 1$），但就纤维丛而言，所得结果预计与本文所示的结果非常相似。

定义 1.10. 通过 $\mathcal{P}_\Omega : \mathcal{H}(S_\Omega) \to \mathcal{SR}_c(\Omega)$，我们指以下算子：

$$\mathcal{P}_\Omega \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (\mathbf{i},\mathbf{j}) \right) = P_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{ij}].$$

$P_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ 的性质表明，$\mathcal{P}_\Omega$ 是一个定义良好的满射算子。

给定 $(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in T$，令 $\mathbf{S}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f] = \Big( \begin{pmatrix} D_1[f,\ ,\ ] & D_2[f,\ ,\ ] \\ D_3[f,\ ,\ ] & D_4[f,\ ,\ ] \end{pmatrix}, (\mathbf{i},\mathbf{j}) \Big)$ 对所有$f \in \mathcal{SR}_c(\Omega)$。

设 $U \subset \mathcal{SR}_c(\Omega)$ 是一个邻域，并定义 $u \in \mathbb{S}^3$

$$\varphi_u[f,(\mathbf{i},\mathbf{j})] = \left( \begin{pmatrix} D_1[f, u\mathbf{i}\bar{u}, u\mathbf{j}\bar{u}] & D_2[f, u\mathbf{i}\bar{u}, u\mathbf{j}\bar{u}] \\ D_3[f, u\mathbf{i}\bar{u}, u\mathbf{j}\bar{u}] & D_4[f, u\mathbf{i}\bar{u}, u\mathbf{j}\bar{u}] \end{pmatrix}, (u\mathbf{i}\bar{u}, u\mathbf{j}\bar{u}) \right),$$

对所有 $(f,(\mathbf{i},\mathbf{j})) \in U \times T$。

命题 1.11. 给定 $(a,b)$、$(c,d)$、$(p,q)$、$(r,s) \in Harm_c^2(S_\Omega)$ 以及 $(\mathbf{i},\mathbf{j})$、$(\mathbf{k},\mathbf{l}) \in T$，可得

$$\begin{aligned}&\rho_\infty(P_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{ij}], P_{\mathbf{k},\mathbf{l}}[p + q\mathbf{k} + r\mathbf{l} + s\mathbf{kl}]) \\ \leq& 2(\ \|a-p\|_\infty + \|b-q\|_\infty + \|c-r\|_\infty + \|d-s\|_\infty + \|(\mathbf{i},\mathbf{j}) - (\mathbf{k},\mathbf{l})\|_{\mathbb{R}^6}\ ) \\ &(\ \|p\|_\infty + \|q\|_\infty + \|r\|_\infty + \|s\|_\infty + 1\ ).\end{aligned}$$

*Proof.* Set $q = x + \mathbf{I}_q y \in \Omega$ with $x, y \in \mathbb{R}$ and $\mathbf{I}_q \in \mathbb{S}^2$ then

$$\begin{aligned}
&2\|\{P_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{ij}](q) - P_{\mathbf{k},\mathbf{l}}[p + q\mathbf{k} + r\mathbf{l} + s\mathbf{kl}]\}(q)\| \\
=&\|(1 + \mathbf{I}_q\mathbf{i})[a(x,-y) + b(x,-y)\mathbf{i} + c(x,-y)\mathbf{j} + d(x,-y)\mathbf{ij}] \\
&+ (1 - \mathbf{I}_q\mathbf{i})[a(x,y) + b(x,y)\mathbf{i} + c(x,y)\mathbf{j} + d(x,y)\mathbf{ij}] \\
&- (1 + \mathbf{I}_q\mathbf{k})[p(x,-y) + q(x,-y)\mathbf{k} + r(x,-y)\mathbf{l} + s(x,-y)\mathbf{kl}] \\
&- (1 - \mathbf{I}_q\mathbf{k})[p(x,y) + q(x,y)\mathbf{k} + r(x,y)\mathbf{l} + s(x,y)\mathbf{kl}]\| \\
\leq&4(\|a-p\|_\infty + \|b-q\|_\infty + \|c-r\|_\infty + \|d-s\|_\infty) \\
&+ 4(\|\mathbf{i}-\mathbf{k}\| + \|\mathbf{j}-\mathbf{l}\|)(\|p\|_\infty + \|q\|_\infty + \|r\|_\infty + \|s\|_\infty) \\
\leq&4(\|a-p\|_\infty + \|b-q\|_\infty + \|c-r\|_\infty + \|d-s\|_\infty + \|(\mathbf{i},\mathbf{j}) - (\mathbf{k},\mathbf{l})\|_{\mathbb{R}^6}) \\
&(\|p\|_\infty + \|q\|_\infty + \|r\|_\infty + \|s\|_\infty + 1).
\end{aligned}$$

□

命题 1.12. 给定 $g, f \in \mathcal{SR}_c(\Omega)$、$(\mathbf{i}, \mathbf{j})$、$(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \in T$以及 $u \in \mathbb{S}^3$，可得

$$\begin{aligned}
\|\varphi_u[f,(\mathbf{i},\mathbf{j})](x,y) - \varphi_u[g,(\mathbf{k},\mathbf{l})](x,y)\|_p \leq& 4\|f-g\|_\infty + 4\|g(x+\mathbf{i}y) - g(x+\mathbf{k}y)\| \\
&+ (2\|g\|_\infty + 1)\|(\mathbf{i},\mathbf{j}) - (\mathbf{k},\mathbf{l})\|_{\mathbb{R}^6},
\end{aligned}$$

对于所有 $(x, y) \in S_\Omega$。

证明。恒等式 (1.2) 意味着

$$\begin{aligned}
&|D_1[f, u\mathbf{i}\bar{u}, u\mathbf{j}\bar{u}](x,y) - D_1[g, u\mathbf{k}\bar{u}, u\mathbf{l}\bar{u}](x,y)| \\
\leq&\|f(x+\mathbf{i}y) - g(x+\mathbf{i}y)\| + \|g(x+\mathbf{i}y) - g(x+\mathbf{k}y)\|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&|D_2[f, u\mathbf{i}\bar{u}, u\mathbf{j}\bar{u}](x,y) - D_2[g, u\mathbf{k}\bar{u}, u\mathbf{l}\bar{u}](x,y)| \\
\leq&\|f(x+\mathbf{i}y) - g(x+\mathbf{i}y)\| + \|g(x+\mathbf{i}y) - g(x+\mathbf{k}y)\| + \|g(x+\mathbf{i}y)\|\|\mathbf{i}-\mathbf{k}\|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&|D_3[f, u\mathbf{i}\bar{u}, u\mathbf{j}\bar{u}](x,y) - D_3[g, u\mathbf{k}\bar{u}, u\mathbf{l}\bar{u}](x,y)| \leq \|f(x+\mathbf{i}y) - g(x+\mathbf{i}y) \\
\| + \|g(x+\mathbf{i}y) - g(x+\mathbf{k}y)\| + \|g(x+\mathbf{i}y)\|\|\mathbf{j} - \mathbf{l}\|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&|D_4[f, u\mathbf{i}\bar{u}, u\mathbf{j}\bar{u}](x,y) - D_4[g, u\mathbf{k}\bar{u}, u\mathbf{l}\bar{u}](x,y)| \\
\leq&\|f(x+\mathbf{i}y) - g(x+\mathbf{i}y)\| + \|g(x+\mathbf{i}y) - g(x+\mathbf{k}y)\| \\
&+ \|g(x+\mathbf{i}y)\|(\|\mathbf{i}-\mathbf{k}\| + \|\mathbf{j}-\mathbf{l}\|),
\end{aligned}$$

对于所有 $(x, y) \in S_\Omega$。因此

$$\begin{aligned}
&\|\varphi_u[f,(\mathbf{i},\mathbf{j})](x,y) - \varphi_u[g,(\mathbf{k},\mathbf{l})](x,y)\|_p \leq 4\|f(x+\mathbf{i}y) - g(x+\mathbf{i}y) \\
\| + 4\|g(x+\mathbf{i}y) - g(x+\mathbf{k}y)\| + 2\|g(x+\mathbf{i}y)\|(\|\mathbf{i} - \mathbf{k}\| + \|\mathbf{j} - \mathbf{l}\|) + \|(\mathbf{i},\mathbf{j}) - \\
(\mathbf{k},\mathbf{l})\|_{\mathbb{R}^6} \leq 4\|f-g\|_\infty + 4\|g(x+\mathbf{i}y) - g(x+\mathbf{k}y)\| + (2\|g\|_\infty + 1)\|(\mathbf{i},\mathbf{j}) - \\
(\mathbf{k},\mathbf{l})\|_{\mathbb{R}^6},
\end{aligned}$$

对所有 $(x,y) \in S_\Omega$。 □

命题 1.13. $(\mathcal{H}(S_\Omega)\ \mathcal{P}_\Omega, \mathcal{SR}_c(\Omega)\ T)$ 是一个纤维丛，其结构群为 $K = \{R_u \mid u \in \mathbb{S}^3\}$，局部平凡化族为$\Phi = \{\varphi_u \mid u \in \mathbb{S}^3\}$。

证明. 可以看出，$(\mathcal{H}(S_\Omega)^{\rho_{\mathcal{H}(S_\Omega)}})$、$(\mathcal{SR}_c(\Omega)^{\rho_{\mathcal{SR}_c(\Omega)}})$ 和 $(T,\rho_T)$ 都是豪斯多夫空间。命题 1.11 表明 $\mathcal{P}_\Omega$ 的连续性。

集合 $K = \{R_u \mid u \in \mathbb{S}^3\}$ 配备复合运算后构成一个群，它以同胚群的形式作用于 $T$，因为 $R_u \circ R_v = R_{uv}$

$$\begin{aligned}\|R_u(\mathbf{i},\mathbf{j}) - R_u(\mathbf{k},\mathbf{l})\|_{\mathbb{R}^6} =& \|(\mathbf{i},\mathbf{j}) - (\mathbf{k},\mathbf{l})\|_{\mathbb{R}^3},\\ \|R_u(\mathbf{i},\mathbf{j}) - R_v(\mathbf{i},\mathbf{j})\|^2_{\mathbb{R}^6} =& \|(u\mathbf{i}\bar{u} - v\mathbf{i}\bar{v}\|^2_{\mathbb{R}^3} + \|u\mathbf{j}\bar{u} - v\mathbf{j}\bar{v})\|^2_{\mathbb{R}^3}\\ \leq& 4\|u-v\|^2_{\mathbb{H}},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\|R_u \circ R_v(\mathbf{i},\mathbf{j}) - R_u \circ R_w(\mathbf{i},\mathbf{j})\|^2_{\mathbb{R}^6} =& \|v\mathbf{i}\bar{v} - w\mathbf{i}\bar{w}\|^2_{\mathbb{R}^3} + \|v\mathbf{j}\bar{v} - w\mathbf{j}\bar{w}\|^2_{\mathbb{R}^3}\\ =& \|R_v(\mathbf{i},\mathbf{j}) - R_w(\mathbf{i},\mathbf{j})\|^2_{\mathbb{R}^6}\end{aligned}$$

对所有 (i, j)、(k, l) $\in T$ 和 $u, v, w, \in \mathbb{S}^3$。因此 $K$ 是一个拓扑群 .

设 $U \subset \mathcal{SR}_c(\Omega)$ 是一个邻域，族 $\Phi$ 具有以下性质:

1. $\varphi_u : U \times T \to (\mathcal{P}_\Omega)^{-1}(U)$ 是一个同胚，因为：(a) 假设 $\varphi_u[f,$(i, j) $] = \varphi_u[g,$(k, l)$]$，则 (i, j) $=$(k, l)。利用 and (1.3) 可得 $f = g$。(b) 给定 $\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ (\mathbf{i},\mathbf{j})\right) \in \mathcal{H}(S_\Omega)$。若 (k, l) $= (\bar{u}\mathbf{i}u, \bar{u}\mathbf{j}u) \in T$，则

$f = P_{u\mathbf{k}\bar{u},\ u\mathbf{l}\bar{u}}[a + bu\mathbf{k}\bar{u} + (c + du\mathbf{k}\bar{u})u\mathbf{l}\bar{u}] \in \mathcal{SR}_c(\Omega)$ 满足

$$\varphi_u[f,(\mathbf{k},\mathbf{l})] = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ (u\mathbf{k}\bar{u}, u\mathbf{l}\bar{u})\right] = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ (\mathbf{i},\mathbf{j})\right].$$

(c) $\varphi_u$ 的逆算子为

$$\varphi_u^{-1}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ (\mathbf{k},\mathbf{l})\right] = (\ \mathcal{P}_\Omega\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ (\bar{u}\mathbf{k}u, \bar{u}\mathbf{l}u)\right], (\bar{u}\mathbf{k}u, \bar{u}\mathbf{l}u)\ ).$$

(d) 令 $f, g \in \mathcal{SR}_c(\Omega)$。由于 $g$ 是一致连续函数，对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得 $q_1, q_2 \in \Omega$ 且 $\|q_1 - q_2\| < \delta$ 时，有 $\|g(q_1) - g(q_2)\| < \epsilon$。因此，如果

$$\rho_{\mathcal{SR}_c(\Omega)\times T}((f,(\mathbf{i},\mathbf{j})),(g,(\mathbf{k},\mathbf{l}))) < \min\{\delta,\epsilon\},$$

那么对于所有 $x, y \in S_\Omega$，$\|g(x + \mathbf{i}y) - g(x + \mathbf{k}y)\| < \epsilon$，并且由命题 1.12 可得

$$\|\varphi_u[f,(\mathbf{i},\mathbf{j})](x,y) - \varphi_u[g,(\mathbf{k},\mathbf{l})](x,y)\|_p < (9 + 2\|g\|_\infty)\epsilon,$$

对所有 $(x, y) \in S_\Omega$。因此

$$\rho_{\mathcal{H}(S_\Omega)}(\varphi_u[f,(\mathbf{i},\mathbf{j})], \varphi_u[g,(\mathbf{k},\mathbf{l})]) \leq 5(9 + 2\|g\|_\infty)\epsilon.$$

那么， $\varphi_u$ 是一个连续算子，并且由于 $\mathcal{P}_\Omega$的连续性以及旋转的连续性，可以证明 $\varphi_u^{-1}$是连续的。

2. 恒等式 (1.1) 和 (1.3) 意味着

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\Omega \circ \varphi_u[f,(\mathbf{i},\mathbf{j})] =&\mathcal{P}_\Omega\left(\begin{pmatrix} D_1[f,u\mathbf{i}\bar{u},u\mathbf{j}\bar{u}] & D_2[f,u\mathbf{i}\bar{u},u\mathbf{j}\bar{u}] \\ D_3[f,u\mathbf{i}\bar{u},u\mathbf{j}\bar{u}] & D_4[f,u\mathbf{i}\bar{u},u\mathbf{j}\bar{u}] \end{pmatrix},(u\mathbf{i}\bar{u},u\mathbf{j}\bar{u})\right)\\ =&P_{u\mathbf{i}\bar{u},u\mathbf{j}\bar{u}}\circ Q_{u\mathbf{i}\bar{u},u\mathbf{j}\bar{u}}[f]=f.\end{aligned}$$

对所有 $(f,(\mathbf{i},\mathbf{j}))\in U\times T$。

3. 对于 $u,v\in\mathbb{S}^3$, $(\mathbf{i},\mathbf{j})\in T$以及 $f=a+bu\mathbf{i}\bar{u}+cu\mathbf{j}\bar{u}+du\mathbf{i}\mathbf{j}\bar{u}\in\mathcal{SR}_c(\Omega)$，若 $(a,b)$、$(c,d)\in Harm_c^2(S_\Omega)$，则可见

$$\begin{aligned}\varphi_u[f,(\mathbf{i},\mathbf{j})]=&\left[\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix},(v(\bar{v}u)\mathbf{i}(\bar{u}v)\bar{v},v(\bar{v}u)\mathbf{j}(\bar{u}v)\bar{v})\right]\\ =&\left[\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix},(vp\mathbf{i}\bar{p}\bar{v},vp\mathbf{j}\bar{p}\bar{v})\right]\\ =&\varphi_v[f,R_p(\mathbf{i},\mathbf{j})],\end{aligned}$$

其中 $p=\bar{v}u\in\mathbb{S}^3$。

纤维空间和结构群的定义

最后，纤维空间和结构群的定义表明， $\{\varphi_u \mid u\in\mathbb{S}^3\}$ 是满足先前性质的极大算子族。□

注记 1.14. $(\mathcal{H}(S_\Omega)\ \mathcal{P}_\Omega,\mathcal{SR}_c(\Omega)\ T)$ 的一些性质。

1. $\mathcal{H}(S_\Omega)$ 分解为纤维：

$$\mathcal{P}_\Omega^{-1}(f):=\{\left(\begin{pmatrix} D_1[f,\mathbf{i},\mathbf{j}] & D_2[f,\mathbf{i},\mathbf{j}]\\ D_3[f,\mathbf{i},\mathbf{j}] & D_4[f,\mathbf{i},\mathbf{j}]\end{pmatrix},(\mathbf{i},\mathbf{j})\right)\mid(\mathbf{i},\mathbf{j})\in T\}$$

其中 $f\in\mathcal{SR}_c(\Omega)$。

2. 利用前一个证明中的情形 3，可得到转移函数：

$$\begin{aligned}g_{v,u}(f)=&\varphi_{v,f}^{-1}\circ\varphi_{u,f}(\mathbf{i},\mathbf{j})=\varphi_{v,f}^{-1}\circ\varphi_u(f,(\mathbf{i},\mathbf{j}))\\ =&\varphi_{v,f}^{-1}\circ\varphi_v(f,R_{\bar{v}u}(\mathbf{i},\mathbf{j})=\varphi_{v,f}^{-1}\circ\varphi_{v,f}(R_{\bar{v}u}(\mathbf{i},\mathbf{j}))\\ =&R_{\bar{v}u}(\mathbf{i},\mathbf{j}),\end{aligned}$$

其中 $u,v\in\mathbb{S}^3$, $f\in\mathcal{SR}_c(\Omega)$，且 $(\mathbf{i},\mathbf{j})\in T$。算子族 $\{R_u\mid u\in\mathbb{S}^3\}$表明转移函数满足 (1.4)。

因此，$(\mathcal{H}(S_\Omega)\ \mathcal{P}_\Omega,\mathcal{SR}_c(\Omega)\ T)$ 是一种坐标双球面丛，因为 $T\subset\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$。

命题1.15. 对于每个 $(\mathbf{i},\mathbf{j})\in T$，算子 $\mathbf{S}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$是 $(\mathcal{H}(S_\Omega)\ \mathcal{P}_\Omega,\mathcal{SR}_c(\Omega)\ T)$ 的一个截面。

证明。由 (1.1) 和 (1.3) 可知，对于所有 $f\in\mathcal{SR}_c(\Omega)$， $\mathcal{P}_\Omega\circ\mathbf{S}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f]=f$，且不等式

$$\rho_{\mathcal{H}(S_\Omega)}(\mathbf{S}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f],\mathbf{S}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[g])=\sum_{k=1}^{4}\|D_k[f-g,\mathbf{i},\mathbf{j}]\|_\infty\le 4\|f-g\|_\infty,$$

表明 $S_{\mathbf{i},\ \mathbf{j}}$ 的连续性。 □

推论 1.16. 令 $f \in \mathcal{SR}(\Omega)$。

1. 对每个 $(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in T$，存在唯一的 $(a,b)$、$(c,d) \in Harm_c^2(S_\Omega)$，使得 $\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ (\mathbf{i},\mathbf{j})\right) \in \mathcal{P}^{-1}\,\Omega\,(f)$。2. $Q_{\mathbf{i},\ \mathbf{j}}(f) \in Hol(\Omega_{\mathbf{i}})$ 当且仅当存在 $(a, b) \in Harm_c^2(S_\Omega)$，使得 $\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ (\mathbf{i},\mathbf{j})\right) \in \mathcal{P}^{-1}\,\Omega\,(f)$。3. $f \in \mathcal{N}_c(\Omega)$ 当且仅当对每个 $(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in T$，存在 $(a,b) \in Harm_c^2(S_\Omega)$，使得 $\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ (\mathbf{i},\mathbf{j})\right) \in \mathcal{P}^{-1}\,\Omega\,(f)$。

证明。由 $P_{\mathbf{i},\ \mathbf{j}}$ 和 $Q_{\mathbf{i},\ \mathbf{j}}$的性质可知。 □

$\mathcal{H}(S_\Omega)$ 中的以下运算将帮助我们了解 $\mathcal{P}_\Omega$ 的一些代数性质。

定义 1.17。令 $\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},(\mathbf{i},\mathbf{j})\right),\left(\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix},(\mathbf{i},\mathbf{j})\right) \in \mathcal{H}(S_\Omega)$。定义

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ (\mathbf{i},\mathbf{j})\right)+\left(\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix},\ (\mathbf{i},\mathbf{j})\right)=\left(\begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix},\ (\mathbf{i},\mathbf{j})\right),$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ (\mathbf{i},\mathbf{j})\right)\bullet_{\mathbf{i},\mathbf{j}}\left(\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix},\ (\mathbf{i},\mathbf{j})\right)=\left(\begin{pmatrix} ap-bq & aq+bp \\ cr-ds & cs+dr \end{pmatrix},\ (\mathbf{i},\mathbf{j})\right),$$

$$\mathcal{D}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ (\mathbf{i},\mathbf{j})\right)=\left(\begin{pmatrix} \partial_x a & \partial_x b \\ \partial_x c & \partial_x d \end{pmatrix},\ (\mathbf{i},\mathbf{j})\right),$$

and

$$\mathcal{R}_u\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ (\mathbf{i},\mathbf{j})\right)=\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ (u\mathbf{i}\bar{u},u\mathbf{j}\bar{u})\right),$$

其中 $u \in \mathbb{S}^3$。设 $\Xi \subset \mathbb{H}$ 为有界轴对称 s-域，且 $(m,n) \in Harm_c^2(S_\Xi)$ 满足：对所有 $(x,y) \in S_\Xi$，均有 $(m(x,y)\ n(x,y)) \in S_\Omega$，则可建立

$$\begin{aligned}&\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ (\mathbf{i},\mathbf{j})\right)\circ_{\mathbf{i},\mathbf{j}}\left(\begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ (\mathbf{i},\mathbf{j})\right)\\ =&\left(\begin{pmatrix} a(m,n) & b(m,n) \\ c(m,n) & d(m,n) \end{pmatrix},(\mathbf{i},\mathbf{j})\right).\end{aligned}$$

如果 $\Omega = \mathbb{B}^4(0,1)$，那么

$$\begin{aligned}&\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ (\mathbf{i},\mathbf{j})\right)*\left(\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix},\ (\mathbf{i},\mathbf{j})\right)\\ =&\left(\begin{pmatrix} ap-bq-c(r\circ Inv)-d(s\circ Inv) & aq+bp-c(s\circ Inv)-d(r\circ Inv) \\ ar-bs+c(p\circ Inv)+d(q\circ Inv) & br+ar-c(q\circ Inv)+d(p\circ Inv) \end{pmatrix},\right.\\ &\left.(\mathbf{i},\mathbf{j})\right),\end{aligned}$$

其中，对所有 $(x,y)\in S_\Omega$，$Inv(x,y)=(x,-y)$。

前述定义基于一些全纯函数运算。

命题 1.18.（$\mathcal{P}_\Omega$ 的一些代数性质）设 $\Omega\ \Xi\subset\mathbb{H}$ 是两个有界轴对称 s-域。给定 $(\mathbf{i},\mathbf{j})\in T$ 和 $A,\ B\in Harm_c^2(S_\Omega)\times Harm_c^2(S_\Omega)\times\{(\mathbf{i},\mathbf{j})\}$。可得

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\Omega(A+B)=&\mathcal{P}_\Omega(A)+\mathcal{P}_\Omega(B),\\ \mathcal{P}_\Omega(A\bullet_{\mathbf{i},\mathbf{j}}B)=&\mathcal{P}_\Omega(A)\bullet_{\mathbf{i},\mathbf{j}}\mathcal{P}_\Omega(B),\\ (\mathcal{P}_\Omega(A))'=&\mathcal{P}_\Omega(\mathcal{D}(A)),\\ \mathcal{R}_u(A)=&\mathcal{P}_{u\mathbf{i}\bar{u},u\mathbf{j}\bar{u}}[\ uQ_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[\mathcal{P}_\Omega(A)]\bar{u}\ ].\end{aligned}$$

若存在 $C=\left(\begin{pmatrix}m&n\\0&0\end{pmatrix},(\mathbf{i},\mathbf{j})\right)\in\mathcal{H}(S_\Xi)$，使得 $(m(x,y)\ n(x,y))\in S_\Omega$ 对所有 $(x,y)\in\Xi$ 均成立，则

$$\mathcal{P}_\Xi(A\circ_{\mathbf{i},\mathbf{j}}C)=\mathcal{P}_\Omega(A)\circ_{\mathbf{i},\mathbf{j}}\mathcal{P}_\Xi(C).$$

*If* $\Omega=\mathbb{B}^4(0,1)$ *then* $\mathcal{P}_\Omega(A*B)=\mathcal{P}_\Omega(A)*\mathcal{P}_\Omega(B)$.

证明。由定义 1.4 和 1.17 可得。 □

接下来的评注说明定义 1.4 中给出的运算如何由拉回丛表示。

注 1.19. 设 $\Omega\ \Xi\subset\mathbb{H}$ 为有界轴对称 s-域。给定 $(\mathbf{i},\mathbf{j})\in T$ 和 $g\in\mathcal{SR}_(S_\Omega)$：

1. 定义 $\mathfrak{S}_g(f):=f+g$ 对所有 $f\in\mathcal{SR}_c(\Omega)$。根据定义 1.5，有 $(\mathfrak{S}_g^*(\mathcal{H}(S_\Omega))\ \mathcal{P}_\Omega',\mathcal{SR}_c(\Omega)\ T)$ 是由 $\mathcal{P}_\Omega$通过 $\mathfrak{S}_g$ 诱导的纤维丛，其中 $\mathfrak{S}_g^*(\mathcal{H}(S_\Omega))$ 为

$$\begin{aligned}&\{(f,A)\in\mathcal{SR}_c(\Omega)\times\mathcal{H}(S_\Omega)\ \mid\ \mathcal{P}_\Omega(A)=f+g\}\\ =&\{\left(f,\left(\begin{pmatrix}D_1[f+g,\mathbf{k},\mathbf{l}]&D_2[f+g,\mathbf{k},\mathbf{l}]\\D_3[f+g,\mathbf{k},\mathbf{l}]&D_4[f+g,\mathbf{k},\mathbf{l}]\end{pmatrix},(\mathbf{k},\mathbf{l})\right)\right)\mid f\in\mathcal{SR}_c(\Omega),\\ &(\mathbf{k},\mathbf{l})\in T\},\end{aligned}$$

并且对所有 $(f,A)\in\mathcal{SR}_c(\Omega)\times\mathcal{H}(S_\Omega)$，有 $\mathcal{P}_\Omega'(f,A)=f$。

由上述内容可得以下映射：

$$g\mapsto(\mathfrak{S}_g^*(\mathcal{H}(S_\Omega)),\mathcal{P}_\Omega',\mathcal{SR}_c(\Omega),T),$$

对所有 $g\in\mathcal{SR}_c(\Omega)$。

2. 对所有 $f\in\mathcal{SR}_c(\Omega)$，令 $\mathfrak{P}_g(f):=f\bullet_{\mathbf{i},\mathbf{j}}g$，诱导纤维丛为 $(\mathfrak{P}_g^*(\mathcal{H}(S_\Omega))\ \mathcal{P}_\Omega',\mathcal{SR}_c(\Omega)\ T)$，其中 $\mathfrak{P}_g^*(\mathcal{H}(S_\Omega))$ 定义为

$$\begin{aligned}&\{\left(f,\left(\begin{pmatrix}D_1[f\bullet_{\mathbf{i},\mathbf{j}}g,\mathbf{k},\mathbf{l}]&D_2[f\bullet_{\mathbf{i},\mathbf{j}}g,\mathbf{k},\mathbf{l}]\\D_3[f\bullet_{\mathbf{i},\mathbf{j}}g,\mathbf{k},\mathbf{l}]&D_4[f\bullet_{\mathbf{i},\mathbf{j}}g,\mathbf{k},\mathbf{l}]\end{pmatrix},(\mathbf{k},\mathbf{l})\right)\right)\mid f\in\mathcal{SR}_c(\Omega),\\ &(\mathbf{k},\mathbf{l})\in T\},\end{aligned}$$

并且对所有 $(f, A) \in \mathcal{SR}_c(\Omega)$, $\mathcal{P}_\Omega{}'(f, A) = f \times \mathcal{H}(S_\Omega)$。类似地，可得到映射

$$g \mapsto (\mathfrak{P}_g^*(\mathcal{H}(S_\Omega)), \mathcal{P}_\Omega{}', \mathcal{SR}_c(\Omega), T),$$

对所有 $g \in \mathcal{SR}_c(\Omega)$。

3. 由 $*$ 积、导数以及 $\mathcal{SR}_c(\Omega)$ 中的其他运算得到的拉回丛具有相似的结构。

注 1.20. 设 $\Omega\ \Xi \subset \mathbb{H}$ 为有界轴对称 s-域。若存在 $h \in \mathcal{SR}_c(S_\Xi)$ 使得 $Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[h](\Xi_\mathbf{i}) \subset \Omega_\mathbf{i}$，则算子 $\mathfrak{K}_3(f) := f \circ_{\mathbf{i},\mathbf{j}} h$ 对所有 $f \in \mathcal{SR}_c(\Omega)$ 均成立，并诱导出 $(\mathfrak{K}_3^*(\mathcal{H}(S_\Xi)), \mathrm{P}', \mathcal{SR}_c(\Omega)\ T)$，其中 $\mathfrak{K}_3^*(\mathcal{H}(S_\Xi))$ 是

$$\{\left(f, \left(\begin{pmatrix} D_1[f \circ_{\mathbf{i},\mathbf{j}} h, \mathbf{k}, \mathbf{l}] & D_2[f \circ_{\mathbf{i},\mathbf{j}} h, \mathbf{k}, \mathbf{l}] \\ D_3[f \circ_{\mathbf{i},\mathbf{j}} h, \mathbf{k}, \mathbf{l}] & D_4[f \circ_{\mathbf{i},\mathbf{j}} h, \mathbf{k}, \mathbf{l}] \end{pmatrix}, (\mathbf{k}, \mathbf{l})\right)\right) \mid f \in \mathcal{SR}_c(\Omega), (\mathbf{k}, \mathbf{l}) \in T\}$$

且 $\mathcal{P}_\Omega{}'(f, A) = f$ 对所有 $(f, A) \in \mathcal{SR}_c(\Omega) \times \mathcal{H}(S_\Xi)$ 均成立。

注 1.21.（全纯函数空间是拉回丛的底空间）设 $(\underline{\mathbf{i}, \mathbf{j}}) \in \mathbb{S}^2$, $Hol_c(\Omega_\mathbf{i}) = Hol(\Omega_\mathbf{i}) \cap C(\Omega_\mathbf{i})$，且 $M(f) := P_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f]$ 对所有 $f \in Hol_c(\Omega_\mathbf{i})$ 均成立，则其拉回丛为 $(M^*(\mathcal{H}(S_\Omega))\ \mathcal{P}_\Omega{}', Hol_c(\Omega_\mathbf{i})\ T)$，其中

$$M^*(\mathcal{H}(S_\Omega)) = \{(f, A) \in Hol_c(\Omega_\mathbf{i}) \times \mathcal{H}(S_\Omega) \mid \mathcal{P}_\Omega(A) = P_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f]\}$$

且对于所有 $(f, A) \in Hol_c(\Omega_\mathbf{i})$, $= f \times \mathcal{H}(S_\Omega)\ \mathcal{P}_\Omega{}'(f, A)$。

命题 1.22. 设 $\Omega\ \Xi \subset \mathbb{H}$ 为有界轴对称 s-域。若 $\Omega$ 与 $\Xi$ 共形等价，则

$$(\mathcal{H}(S_\Omega), \mathcal{P}_\Omega, \mathcal{SR}_c(\Omega), T) \cong (\mathcal{H}(S_\Xi), \mathcal{P}_\Xi, \mathcal{SR}_c(\Xi), T).$$

证明. 设 $\alpha \in \mathcal{SR}(\Omega)$，使得 $Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[\alpha] : \Omega_\mathbf{i} \to \Xi_\mathbf{i}$ 是一个双全纯映射。定义 $\Gamma_{2,\alpha}[f] := f \circ_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \alpha$，对所有 $f \in \mathcal{SR}_c(\Xi)$ 均成立。由 i、j-复合可得 $\Gamma_{2,\alpha} : \mathcal{SR}_c(\Xi) \to \mathcal{SR}_c(\Omega)$，并且

$$\begin{aligned}\|\Gamma_{2,\alpha}[f](q)\| \leq & \|Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f] \circ Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[\alpha](x + \mathbf{i}y)\| + \|\|Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f] \circ Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[\alpha](x - \mathbf{i}y)\| \\ \leq & 2\|f\|_\infty,\end{aligned}$$

对于所有 $q = x + \mathbf{I}_q y \in \Omega$，其中 $(x, y) \in S_\Omega$ 且 $\mathbf{I}_q \in \mathbb{S}^2$。因此 $\Gamma_{2,\alpha}$ 是一个连续算子。

若 $\beta = P_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[\alpha]^{-1}]$，则由与上述论证类似的推理可得 $\Gamma_{2,\beta} : \mathcal{SR}_c(\Omega) \to \mathcal{SR}_c(\Xi)$，$\Gamma_{2,\alpha}^{-1} = \Gamma_{2,\beta}$，且对于所有 $g \in \mathcal{SR}_c(\Xi)$，$\|\Gamma_{2,\beta}[g]\|_\infty \leq 2\|g\|_\infty$。

对于每个 $\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (\mathbf{k}, \mathbf{l})\right) \in \mathcal{H}(S_\Xi)$ 表示 $A = P_{\mathbf{k},\mathbf{l}}[a + b\mathbf{k} + c\mathbf{l} + d\mathbf{kl}]$，并定义

$$\Gamma_{1,\alpha}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (\mathbf{k}, \mathbf{l})\right) = \left(\begin{pmatrix} D_1[A \circ_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \alpha, \mathbf{k}, \mathbf{l}] & D_2[A \circ_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \alpha, \mathbf{k}, \mathbf{l}] \\ D_3[A \circ_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \alpha, \mathbf{k}, \mathbf{l}] & D_4[A \circ_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \alpha, \mathbf{k}, \mathbf{l}] \end{pmatrix}, \mathbf{k}, \mathbf{l}\right).$$

可以看出 $\Gamma_{1,\alpha}$ : $\mathcal{H}(S_\Xi) \to \mathcal{H}(S_\Omega)$, $(\Gamma_{1,\alpha})^{-1} = \Gamma_{1,\beta}$ , 该算子的连续性通过切片正则函数的一致连续性以及命题 1.11 和 1.12 的证明得到证明。□

本文中的计算可以在其他四元数切片正则函数空间上重复进行，例如Bergman空间，参见 [8] 和[9], Dirichlet空间、Besov空间和Bloch空间，参见 [2] ，以及 BMO- 和 VMO- 空间，参见[11], ，并选择适合该计算的拓扑或度量。

## 参考文献

[1] G. E. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer Verlang, 1913年。[2]M. P. Castillo Villalba, F. Colombo, J. Gantner, J. O. Gonz´alez-Cervantes, *Bloch, Besov and Dirichlet Spaces of Slice Hyperholomorphic Functions*, 《复分析与算子理论》, 9（2014年）, 479–517。[3] R. L. Cohen, *The topology of fiber bundles*, 斯坦福大学, 1998年。[4] F. Colombo, J. O. Gonz´alez-Cervantes, M. E. Luna-Elizarrar´as, I. Sabadini, M. Shapiro, *On two approaches to the Bergman theory for slice regular functions*, Springer INdAM 1（2013年）, 39–54。[5] F. Colombo, J. O. Gonz´alez-Cervantes, *The C-property for slice regular functions and applications to the Bergman space* I. Sabadini, , Compl. Var. Ell. Equa., 58（2013年）, 1355–1372。[6]F. Colombo, I. Sabadini, D.C. Struppa, *Noncommutative Functional Calculus. Theory and Applications of Slice Hyperholomorphic Functions*, Birkhauser, 巴塞尔, 289 2011年。[7] F. Colombo, G. Gentili, I. Sabadini, D.C. Struppa, *Extension results for slice regular functions of a quaternionic variable* **222** 2009 1793 , 《数学进展》, （）, – 1808。[8] F. Colombo, J. O. Gonz´alez-Cervantes, I. Sabadini, *Further properties of theBergman spaces of slice regular functions*, 《几何学进展》, 15（2014年）, 469—484。[9] F. Colombo, J.O. Gonz´alez-Cervantes, M. E. Luna-Elizarrar´as, I. Sabadini, M. Shapiro。 *On two approaches to the Bergman theory for slice regular functions*, 《超复分析进展》, Springer-Indam丛书 1（2012年）, 39–54。[10] F. Colombo, I. Sabadini, 和 D. C. Struppa, *Sheaves of slice regular functions*。《数学新闻》, 285（2012年）, 949–958。[11] J. Gantner, J. O. Gonz´alez-Cervantes, *BMO- and VMO-spaces of slice hyperholomorphic functions* **290** 2017 2259 2279 T. Janssens, , 《数学新闻》, （）, –。[12] J. O. Gonz´alez-Cervantes, *On some splitting properties of slice regular functions* **62** 2017 1393 1409 I. Sabadini, , Compl. Var. Ell. Equa.（）。[13] G. Gentili, C. Stoppato, D. C. Struppa, *Regular functions of a quaternionic variable* 2013 , 施普林格数学专著。Springer, 海德堡, 。[14] A. Hatcher, *Algebraic-Topology*, 剑桥大学出版社, 2002年。

[15] Hgrauert, T.H. Peternell, R. Remmert, *Several Several Complex Variables VII: Sheaf-Theoretical Methods in Complex Analysis*, 《数学科学百科全书》, Springer Verlag, 74 1991年。[16] R. Heidrich 和 G. Jank, *On iteration of quaternionic Möbius transformation*, Compl. Var. Theory Appls., 29（1996年）, 313–318。[17] F. Hirzebruch, *Topological Methods in Algebraic Geometry*, 《数学经典》, 1978年版重印, Springer-Verlag 柏林海德堡, 1995年[18] D. Husemoller, *Fibre bundles*, Springer Verlag, 第3版, 1993年。[19] S. Krantz, *Function theory of several complex variables*, 美国数学会, 第2版, 2001年。[20] I. Sabadini, F. Sommen, D.C. Struppa, *Sato's Hyperfunctions and Boundary Values of Monogenic Functions* **24** 2014 1131 。《应用

克利福德代数进展》（）, – 1143。[21] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, 普林斯顿大学出版社, 1999年。[22] D.C. Struppa Alpay D. *Quaternionic and Clifford Analysis in Several Variables*Springer, 巴塞尔, 2015年[23] G. Walschap, *Metric Structures in Differential Geometry*, Springer, 2004年。

J. Oscar Gonz´ález-Cervantes 墨西哥国立理工学院高等数学学院（E.S.F.M.）数学系 07338 墨西哥城, 墨西哥 电子邮箱: jogc200678@gmail.com

arXiv:2304.07929v1 [math.CV] 17 Apr 2023

# 多变量切片正则函数与纤维丛

J. Oscar Gonz´alez-Cervantes

摘要。本文介绍一族纤维丛，其总空间与多复变量上的全纯函数相关联，而基空间则推广了多个四元数变量的四元数切片正则函数的概念。本文还展示了纤维丛理论如何为这些多变量切片正则函数的域提供依据。

2010年数学主题分类。主要分类 30G35；次要分类 46M20。

关键词：四元数切片正则函数，多复变量全纯函数，纤维丛。

## 1. 引言

纤维丛理论是20世纪50年代代数拓扑研究的主题，见 [2, 3, 4, 6, 19, 22, 24, 25, 26], ，并已用于研究现代物理学的各个分支，见 [2, 3, 26]。

多复变量函数的现代理论始于卡尔·魏尔施特拉斯在19世纪做出的一些贡献，并随着所谓的 Hartogs 现象而受到重视。这一现象揭示了弗里德里希·哈托格斯在20世纪第一个十年发现的一维复分析与多维复分析之间的深刻差异，见 [20, 23]。

近年来，切片正则函数理论发展迅速，因为它是复幂级数以及全纯函数的直接延伸，见 [9, 11, 12, 17, 18]。

众所周知，人们会运用代数拓扑、代数几何及其他数学领域来研究切片正则函数的某些性质。例如，在 [14] 中，我们看到，切片正则函数构成的四元数右模是一个坐标球丛的底空间。切片正则函数被定义在某些球面丛的全空间上，作为二维解析流形上全纯函数的

T他的工作得到了 CONA 的部分支持 CYT..

一种推广，见 [15]。此外， [16] 从纤维丛理论的角度展示了某些正则多项式零点集的行为。

文献 [1, 12, 13, 27]介绍了多变量情形下切片正则函数的基本概念和性质。本文给出了分裂引理和表示公式的推广，由此建立了底空间由多个四元数变量的切片正则型函数构成的纤维丛。

第2节简要总结了多复变函数全纯函数理论、四元数切片正则函数以及纤维丛的基本定义和事实。第3节介绍主要结果。

## 2. 预备知识

### 2.1. 关于多复变函数中的全纯函数

以下关于多复变函数（SVC）的概念已有七十年历史。令 $\mathbb{C}^n$ 表示 $\mathbb{C}$ 与自身作 $\mathbb{C}\times$ 次 $n-$重乘积
$\cdots\times\mathbb{C}$ 并记 $Z=(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n$。回顾一下， $\mathbb{C}^n$ 是一个 $\mathbb{C}$-线性希尔伯特空间：

$$\begin{aligned} a(z_1,\ldots,z_n) =&(az_1,\ldots,az_n),\\ (z_1,\ldots,z_n)+(w_1,\ldots,w_n) =&(z_1+w_1,\ldots,z_n+w_n),\\ \langle(z_1,\ldots,z_n),(w_1,\ldots,w_n)\rangle_{\mathbb{C}^n} =&z_1\overline{w_1}+\cdots+z_n\overline{w_n},\\ \|(z_1,\ldots,z_n)\|_{\mathbb{C}^n} =&(|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

对所有 $a\in\mathbb{C}$ 以及 $(z_1,\ldots,z_n),(w_1,\ldots,w_n)\in\mathbb{C}^n$， $\mathbb{C}^n$ 的拓扑与 $\mathbb{R}^{2n}$的通常拓扑一致。此外，给定 $Z=(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n$和 $r>0$，开多圆盘和闭多圆盘分别为

$$\begin{aligned} D(Z,r)^n =&\{(w_1,\ldots,w_n)\in\mathbb{C}^n \mid |z_\ell-w_\ell|<r, \quad \ell=1,\ldots,n\},\\ \overline{D}(Z,r)^n =&\{(w_1,\ldots,w_n)\in\mathbb{C}^n \mid |z_\ell-w_\ell|\leq r, \quad \ell=1,\ldots,n\}, \end{aligned}$$

分别。
柯西-黎曼算子和导数算子记为

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z_\ell}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\ell}+i\frac{\partial}{\partial y_\ell}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial z_\ell}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\ell}-i\frac{\partial}{\partial y_\ell}\right),$$

分别，其中 $z_\ell=x_\ell+iy_\ell$对于 $\ell=1,\ldots,n$。
给定一个域 $\Lambda\subset\mathbb{C}^n$。如果对每个固定点 $(p_1,\ldots,p_n)\in\Omega$ 以及所有 $\ell\in\{1,\cdots,n\}$，映射 $f:\Lambda\to\mathbb{C}$ 是全纯的

$$z\mapsto f(p_1,\ldots,p_{\ell-1},p_\ell+z,p_{\ell+1},\ldots,p_n)$$

在 $0 \in \mathbb{C}$ 的某个邻域上是全纯函数，或者等价地，柯西-黎曼方程对每个复变量都成立，即，

$$\frac{\partial \Re f}{\partial x_\ell} = \frac{\partial \Im f}{\partial y_\ell}, \quad \frac{\partial \Re f}{\partial y_\ell} = -\frac{\partial \Im f}{\partial x_\ell}, \quad \text{on} \quad \Lambda,$$

对于 $\ell = 1, \ldots, n$，即 $\frac{\partial f}{\partial \overline{z_\ell}} = 0$ 在 $\Lambda$ 上对于 $\ell = 1, \ldots, n$。我们用 Hol(Λ) 表示定义在 $\Lambda$ 上的 $\mathbb{C}$线性全纯函数空间。在 [20, 23] 中，我们可以看到以下公式:

1. 多圆盘上的柯西积分公式。给定 $f \in \text{Hol}(\Lambda)$。若 $\overline{D}(A, r) \subset \Lambda$，则

$$f(Z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T(A,r)} \frac{f(W)}{(w_1 - z_1) \cdots (w_n - z_n)} dw_1 \cdots dw_n, \tag{2.1}$$

对于所有 $Z \in D(A, r)$，其中 $T(A, r) := \partial D(a_1, r) \times \cdots \times \partial D(a_n, r)$，圆 $\partial D(a_\ell, r)$ 的取向为正向。

2. 奥斯古德引理。$f \in \text{Hol}(\Lambda)$ 当且仅当对每个 $A \in \Lambda$，都存在 $r > 0$使得 $D(A, r) \subset \Lambda$ 并且

$$f(Z) = \sum_{\alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_n \geq 0} c_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} (z_1 - a_1)^{\alpha_1} \cdots (z_n - a_n)^{\alpha_n}, \tag{2.2}$$

对所有 $(z_1, \ldots, z_n) = Z \in D(A, r)$，其中 $c_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \in \mathbb{C}$ 对所有族$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$。

3. 导数的柯西积分。若 $f \in \text{Hol}(\overline{D}(A, r))$，则

$$D^\alpha f(Z) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{T(A,r)} \frac{f(W)}{(w_1 - z_1)^{\alpha_1 + 1} \cdots (w_n - z_n)^{\alpha_n + 1}} dw_1 \cdots dw_n, \tag{2.3}$$

对所有 $Z \in D(A, r)$，其中 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ 并且 $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$.

## 2.2. 四元数切片正则函数

四元数斜域 $\mathbb{H}$ 由 $q = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ 构成，其中$x_0$、$x_1$、$x_2$、$x_3 \in \mathbb{R}$，且虚单位 $e_1$、$e_2$、$e_3$ 满足 $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1$、$e_1 e_2 = -e_2 e_1 = e_3$、$e_2 e_3 = -e_3 e_2 = e_1$、$e_3 e_1 = -e_1 e_3 = e_2$。三元组$\{e_1, e_2, e_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$的通常基（或标准基）。用 $\mathbf{q} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ 表示 $q$ 的向量部，它对应于向量 $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$。$q$ 的实部为 $q_0 = x_0$。$q$ 的四元数共轭和范数分别为$\bar{q} = q_0 - \mathbf{q}$ 和 $\|q\| := \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\bar{q}q}$。给定$r > 0$，记 $\mathbb{B}^4(q, r)$: $= \{p \in \mathbb{H} \mid \|q - p\| < r\}$。$\mathbb{R}^3$ 中的单位球面为 $\mathbb{S}^2 := \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{q}\| = 1\}$，而单位球面和 $\mathbb{H}$ 为 $\mathbb{S}^3 := \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\}$。注意，对所有 $\mathbf{i} \in \mathbb{S}^2$，$\mathbf{i}^2 = -1$，因此 $\mathbb{C}(\mathbf{i}) := \{x + \mathbf{i}y; \mid x、y \in \mathbb{R}\}$和 $\mathbb{C}$ 作为域彼此同构。此外，任意 $q \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$ 都可写为$q = x + \mathbf{I}_q y \in \mathbb{C}(\mathbf{I}_q)$，其中 $x、y \in \mathbb{R}$ 且 $\mathbf{I}_q := \|\mathbf{q}\|^{-1}\mathbf{q}$ $\in \mathbb{S}^2$。集合 $T$由满足 $\{\mathbf{i}、\mathbf{j}、\mathbf{ij}\}$ 且 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 共定向的 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 组成。

$\mathbb{R}^3$。$T$ 中的拓扑由 $\mathbb{R}^6$中的通常拓扑诱导。在 [21] 中我们看到，保持 $\mathbb{R}^3$ 不变的四元数旋转由 $\mathbf{q} \mapsto u\mathbf{q}\bar{u}$ 给出，对所有 $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ 均成立，其中 $u \in \mathbb{S}^3$。定义 $R_u(\mathbf{i}, \mathbf{j}) := (u\mathbf{i}\bar{u}, u\mathbf{j}\bar{u})$，对所有 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in T$均成立。

切片正则函数的以下性质见[8, 11, 9, 12, 18]。设 $\Omega \subset \mathbb{H}$ 是一个开集，且 $f : \Omega \to \mathbb{H}$ 是一个实可微函数。那么，如果满足以下条件，$f$ 就是 $\Omega$ 上的左切片正则函数，简称切片正则函数：

$$\overline{\partial}_{\mathbf{i}} f \mid_{\Omega \cap \mathbb{C}(\mathbf{i})} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) f \mid_{\Omega \cap \mathbb{C}(\mathbf{i})} = 0 \text{ on } \Omega \cap \mathbb{C}(\mathbf{i}), \tag{2.4}$$

对所有 $\mathbf{i} \in \mathbb{S}^2$均成立。$f$的 Cullen 导数为 $f' = \partial_{\mathbf{i}} f \mid_{\Omega \cap \mathbb{C}(\mathbf{i})} = \dfrac{\partial}{\partial x} f \mid_{\Omega \cap \mathbb{C}(\mathbf{i})} = \partial_x f \mid_{\Omega \cap \mathbb{C}(\mathbf{i})}$。$\Omega$ 上切片正则函数构成的四元数右模记为 $\mathcal{SR}(\Omega)$。

集合 $\Omega \subset \mathbb{H}$ 是一个轴对称切片域，或轴对称 s-域，当且仅当

1. $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$。2. 若 $x + \mathbf{i}y \in \Omega$，且 $x, y \in \mathbb{R}$，则 $\{x + \mathbf{j}y \mid \mathbf{j} \in \mathbb{S}^2\} \subset \Omega$。3. 对所有 $\mathbf{i} \in \mathbb{S}^2$，$\Omega_{\mathbf{i}} = \Omega \cap \mathbb{C}(\mathbf{i})$ 是 $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ 中的一个域。

记 $S_\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x + \mathbf{i}y \in \Omega$，其中某个 $\mathbf{i} \in \mathbb{S}^2\}$。

分裂引理。设 $\Omega \subset \mathbb{H}$ 是一个轴对称 s-域，且$f \in \mathcal{SR}(\Omega)$。那么对每个 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in T$，都有 $f_{|\Omega_{\mathbf{i}}} = f_1 + f_2\mathbf{j}$，其中 $f_1, f_2 \in Hol(\Omega_{\mathbf{i}})$，参见 [9]。

表示公式。设 $\Omega \subset \mathbb{H}$ 是一个轴对称 s-域，且 $f \in \mathcal{SR}(\Omega)$。那么

$$f(x + \mathbf{I}y) = \frac{1}{2}[f(x + \mathbf{i}y) + f(x - \mathbf{i}y)] + \frac{1}{2}\mathbf{I}\mathbf{i}[f(x - \mathbf{i}y) - f(x + \mathbf{i}y)],$$

对所有 $\mathbf{I}$、$\mathbf{i} \in \mathbb{S}^2$ 以及 $(x, y) \in S_\Omega$，参见 [11]。

由前两句话可得到以下算子及其性质。

$Q_{\mathbf{i},\ \mathbf{j}}$: $\mathcal{SR}(\Omega) \to$ 全纯函数$(\Omega_{\mathbf{i}})$ + 全纯函数$(\Omega_{\mathbf{i}})\mathbf{j}$

$$Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f] = f \mid_{\Omega_{\mathbf{i}}} = f_1 + f_2\mathbf{j}, \tag{2.5}$$

其中 $_1f$ ，$f$全纯函数$(\Omega_{\mathbf{i}})$。

$P_{\mathbf{i},\mathbf{j}} : \mathrm{Hol}(\Omega_{\mathbf{i}}) + \mathrm{Hol}(\Omega_{\mathbf{i}})\mathbf{j} \to \mathcal{SR}(\Omega)$

$$P_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[g](q) = \frac{1}{2}\left[(1 + \mathbf{I}_q\mathbf{i})g(x - y\mathbf{i}) + (1 - \mathbf{I}_q\mathbf{i})g(x + y\mathbf{i})\right], \tag{2.6}$$

其中 $q = x + \mathbf{I}_q y \in \Omega$。前述算子满足

$$P_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \circ Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}} = \mathcal{I}_{\mathcal{SR}(\Omega)}, \qquad Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \circ P_{\mathbf{i},\mathbf{j}} = \mathcal{I}_{\mathrm{Hol}(\Omega_{\mathbf{i}}) + \mathrm{Hol}(\Omega_{\mathbf{i}})\mathbf{j}}, \tag{2.7}$$

其中 $\mathcal{I}_{\mathcal{SR}(\Omega)}$ 是 $\mathcal{SR}(\Omega)$ 上的恒等算子，而 $\mathcal{I}_{\mathrm{Hol}(\Omega_{\mathbf{i}}) + \mathrm{Hol}(\Omega_{\mathbf{i}})\mathbf{j}}$ 是 $\mathcal{SR}(\Omega)$ $\mathrm{Hol}(\Omega_{\mathbf{i}})$ + $\mathrm{Hol}(\Omega_{\mathbf{i}})\mathbf{j}$ 上的恒等算子，参见 [17], , 而且实数

$Q_{\mathbf{i},\ \mathbf{j}}[f]$ 的分量为

$$D_1[f,\mathbf{i},\mathbf{j}] := \frac{Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f]+\overline{Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f]}}{2}, \qquad D_2[f,\mathbf{i},\mathbf{j}] := -\frac{Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f]\mathbf{i}+\overline{Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f]\mathbf{i}}}{2},$$
$$D_3[f,\mathbf{i},\mathbf{j}] := -\frac{Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f]\mathbf{j}+\overline{Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f]\mathbf{j}}}{2}, \qquad D_4[f,\mathbf{i},\mathbf{j}] := \frac{Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f]\mathbf{j}\mathbf{i}+\overline{Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f]\mathbf{j}\mathbf{i}}}{2}. \quad (2.8)$$

定义 2.1. 设 $\Omega \in \mathbb{H}$ 轴对称 s-域，且 $(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in T$. 令$f,g \in \mathcal{SR}(\Omega)$.

1. 定义 $f \bullet_{\mathbf{i},\mathbf{j}} g := P_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[\ f_1g_1 + f_2g_2\mathbf{j}\ ]$, 其中 $Q_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f] = f_1 + f_2\mathbf{j}$ 且$Q_{\mathbf{i},\ \mathbf{j}}[g] = g_1 + g_2\mathbf{j}$，并且 $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathrm{Hol}(\Omega_{\mathbf{i}})$。2. 若 $\Omega = \mathbb{B}^4(0,1)$，则 $f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n$, $g(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n b_n$ 且 $f *g(q) := \sum_{n=0}^{\infty} q^n \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ 对所有 $q \in \mathbb{B}^4(0,1)$ 均成立，其中 $(a_n)$ 和 $(b_n)$ 是四元数序列，见 [11]。记 $f^c(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n\overline{a_n}$ 且$f^s = f * f^c = f^c * f$对所有 $q \in \mathbb{B}^4(0,1)$ 均成立。若 $f^s$的零点集为空集，则 $f$的 $*$-逆为 $f^{-*} = \frac{1}{f^s} * f^c$，见 [7, 9]。3. 令 $\mathcal{SR}_c(\Omega) := \mathcal{SR}(\Omega) \cap C(\Omega\ \mathbb{H})$，且 $\|f\|_\infty := \sup\{\|f(q)\| \mid q \in \Omega\}$，对所有 $f \in \mathcal{SR}_c(\Omega)$ 均成立。

## 2.3. 关于纤维丛

下面给出的纤维丛概念及其性质见 [4,6, 19, 22, 24, 25]。考虑豪斯多夫空间： $X$、$B$ 和 $F$。设 $K$ 是作用于 $F$ 上的拓扑群作用，且 $\mathrm{P}: X \to B$ 是连续映射。如果 $B$中的每个元素都有一个邻域$U \subset B$ 以及一个同胚 $\varphi: U \times F \to \mathrm{P}^{-1}(U)$，称为 $U$上的局部平凡化，并满足：对于所有 $b \in U$和 $y \in F$，$\mathrm{P} \circ \varphi(b,y) = b$。此外，如果$\varphi: U\times F \to \mathrm{P}^{-1}(U)$是一个局部平凡化，且 $V \subset U$，那么 $\varphi_{|V\times F}$也是一个局部平凡化。如果 $\varphi$ 和 $\phi$ 是 $U \subset B$ 上的局部平凡化，那么存在映射 $\psi: U \to K$，使得对于所有 $u \in U$和 $y \in F$，$\phi(u,y) = \varphi(u,\psi(u)(y))$。最后，局部平凡化族 $\Phi$是极大的。空间 $X$ 称为全空间，$B$ 称为底空间，$F$ 称为纤维，而 $\mathrm{P}$ 是丛投影。如果 $F$和 $K$ 分别是同一欧几里得空间中的球面和正交群的子群，那么 $(X, \mathrm{P}\ B, F)$称为球丛。如果对于所有 $\varphi_u \in \Phi$，映射 $g_{u,v}(x) = \varphi_u^{-1}{}_x \circ \varphi_{v,x}$满足 $[g_{u,v}]^{-1} = g_{u,v}$, $g_{uv}g_{v,w} = g_{u,w}$，其中 $\varphi_{u,x}(y) = \varphi_u(x,y)$ 对所有 $(x,y) \in U \times F$成立，且 $g_{uu}$是单位元，那么 $(X, \mathrm{P}\ B, F)$称为坐标丛。$(X, \mathrm{P}\ B, F)$的一个截面是连续映射 $S: B \to X$，满足对于所有 $x \in B$，$\mathrm{P} \circ S(x) = x$。非空集合 $A$ 和映射 $\mathfrak{K}: A \to B$ 诱导出纤维丛 $(\mathfrak{K}^*(X), \mathrm{P}', A, F)$，称为由 $\mathrm{P}$ 通过 $\mathfrak{K}$ 诱导的丛或拉回丛，其中 $\mathfrak{K}^*(X) := \{(a,x) \in A \times X \mid \mathrm{P}(x) = \mathfrak{K}(a)\}$，且对于所有 $(a,x) \in \mathfrak{K}^*(X)$，$\mathrm{P}'(a,x) = a$。给定纤维丛 $(X_1, \mathrm{P}1, B_1, F_1)$ 和 $(X_2, \mathrm{P}2, B_2, F_2)$

使得存在连续映射 $\Gamma_1:\ X_1 \to X_2$、 $\Gamma_2:\ B_1 \to B_2$ ，并且

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{P}_2 & \\ X_2 & \longrightarrow & B_2 \\ \Gamma_1 \uparrow & & \uparrow\ \Gamma_2 \\ X_1 & \longrightarrow & B_1 \\ & \mathbf{P}_1 & \end{array}$$

若交换，则 $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2)$ 是一个态射。特别地，如果存在一个态射 $\Gamma^{-1}: (X_2, \mathrm{P}_2, B_2, F_2) \to (X_1, \mathrm{P}_1, B_1, F_1)$，使得 $\Gamma^{-1} \circ \Gamma$ 和 $\Gamma \circ \Gamma^{-1}$ 是恒等态射，则 $\Gamma$ 是一个同构，$(X_1, \mathrm{P}_1, B_1, F_1) \cong (X_2, \mathrm{P}_2, B_2, F_2)$。

我们将看到两个与某些正则函数空间相关的纤维丛。

**1.** 设 $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n \subset \mathbb{R}^2$ 是区域，并且

$$Harm_c(\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_n) = \{(\alpha, \beta) \ \mid\ \exists\ f \in \mathrm{Hol}(\prod_{k=1}^{n} \Lambda_k),\ \alpha = \Re f, \beta = \Im f\}.$$

给定 $(\alpha, \beta) \in Harm_c(\prod_{k=1}^{n} \Lambda_k)$，定义

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}_\ell[(\alpha, \beta)](x_1, y_1, \cdots, z_\ell, \cdots, x_n, y_n) \\ &= (\alpha + i\beta)\,(x_1, y_1, \cdots, x_\ell, y_\ell, \cdots, x_n, y_n), \end{aligned} \tag{2.9}$$

其中 $x_\ell + iy_\ell = z_\ell$。注意，$\mathrm{P}_\ell[(\alpha, \beta)] \in C^\infty(\Lambda_1 \times \cdots \times \widehat{\Lambda_\ell} \times \cdots \times \Lambda_n, \mathbb{C})$，$\widehat{\ }$其中 $\Lambda_\ell = \{x + iy \in \mathbb{C} \ \mid (x, y) \in \Lambda_\ell\}$，且映射 $z_\ell \to \mathrm{P}_\ell[(\alpha, \beta)](x_1, y_1, \cdots, z_\ell, \cdots, x_n, y_n)$ 属于全纯函数$(\Lambda_\ell)$。反过来，给定 $h \in \mathrm{P}_\ell(\ Harm_c(\prod_{k=1}^{n} \Lambda_k)\ )$，定义

$$\begin{aligned} &\mathbf{Q}_\ell[h](x_1, y_1, \cdots, z_\ell, \cdots, x_n, y_n) \\ &= \left(\frac{1}{2}(h + \bar{h}), \frac{1}{2i}(h - \bar{h})\right)(x_1, y_1, \cdots, x_\ell, y_\ell, \cdots, x_n, y_n), \end{aligned}$$

$\widehat{\ } x_\ell + iy\ell = z_\ell \in \Lambda_\ell$。那么

$$(Harm_c(\prod_{k=1}^{n} \Lambda_k), \mathbf{P}_\ell, \mathbf{P}_\ell(\ Harm_c(\prod_{k=1}^{n} \Lambda_k))) \tag{2.10}$$

对于所有 $\ell = 1, \ldots, n$，它都是一个平凡纤维丛。

**2.** 设 $\Omega \subset \mathbb{H}$ 是一个有界轴对称 s-域。集合 $Harm_c^2(S_\Omega)$ 由定义在 $S_\Omega$ 上且在$\overline{S_\Omega}$上连续的共轭调和函数对组成。令

$$\mathcal{H}(S_\Omega) := \left\{\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, (\mathbf{i}, \mathbf{j})\right) \ \mid\ (\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in Harm_c^2(S_\Omega),\ (\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in T\right\},$$

$$\mathcal{P}_\Omega\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, (\mathbf{i}, \mathbf{j})\right) := P_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[\alpha + \beta\mathbf{i} + \gamma\mathbf{j} + \delta\mathbf{ij}].$$

给定邻域 $U \subset \mathcal{SR}_c(\Omega)$, $u \in \mathbb{S}^3$ 和 $(f,(\mathbf{i},\mathbf{j})) \in U \times T$表示

$$\varphi_u[f,(\mathbf{i},\mathbf{j})] := \left( \begin{pmatrix} D_1[f,u\mathbf{i}\bar{u},u\mathbf{j}\bar{u}] & D_2[f,u\mathbf{i}\bar{u},u\mathbf{j}\bar{u}] \\ D_3[f,u\mathbf{i}\bar{u},u\mathbf{j}\bar{u}] & D_4[f,u\mathbf{i}\bar{u},u\mathbf{j}\bar{u}] \end{pmatrix}, (u\mathbf{i}\bar{u},u\mathbf{j}\bar{u}) \right).$$

Then

$$(\mathcal{H}(S_\Omega),\mathcal{P}_\Omega,\mathcal{SR}_c(\Omega),T), \tag{2.11}$$

是一个纤维丛，见 [14]。

## 3. 主要结果

我们将定义一些函数度量空间和连续算子，以建立我们的纤维丛。

定义 3.1. 给定轴对称 s-域 $\Omega_1, \ldots, \Omega_n \subset \mathbb{H}$。集合 $Harm_c(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})$ 由 $\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}$ 上连续的共轭调和函数对组成，即

$$Harm_c(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}) = \{(\alpha,\beta) \mid \exists\, f \in \mathrm{Hol}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}) \cap C(\prod_{k=1}^n \overline{S_{\Omega_k}}),\ \alpha = \Re f, \beta = \Im f\}.$$

对于 $\ell = 1, \ldots, n$，记作

$$\mathrm{Inv}^\ell((x_1,y_1),\cdots,(x_\ell,y_\ell),\cdots(x_n,y_n)) := ((x_1,y_1),\cdots,(x_\ell,-y_\ell),\cdots(x_n,y_n)),$$

~对于所有 $(x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n) = ((x_1,y_1)\ldots,(x_n,y_n)) \in \prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}$。设 $\Omega_\ell :=$ $S_{\Omega_1} \times \cdots \times S_{\Omega_{\ell-1}} \times \Omega_\ell \times S_{\Omega_{\ell+1}} \times \cdots \times S_{\Omega_n}$，四元数右模 ~ ~ ~$\mathcal{SR}(\Omega_\ell)$由满足以下条件的 $f \in C^\infty(\Omega_\ell,\mathbb{H})$ $\cap\, C(\Omega_\ell,\mathbb{H})$构成：映射 $q \mapsto f(x_1,y_1,\ldots,x_{\ell-1},y_{\ell-1},q,x_{\ell+1},y_{\ell+1},\ldots,x_n,y_n)$ 属于 $\mathcal{SR}$ $(\Omega_\ell)$。给定 $(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in T$，定义 $P^\ell{}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$：$Harm_c(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})^2 \to \mathcal{SR}(\tilde{\Omega}_\ell)$ 如下：

$$\begin{aligned} &P^\ell_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[(\alpha,\beta,\gamma,\delta)](x_1,y_1,\ldots,x_{\ell-1},y_{\ell-1},q,x_{\ell+1},y_{\ell+1},\ldots,x_n,y_n) \\ =&\left\{ \frac{1}{2}(1+\mathbf{I}_q\mathbf{i}) \left[ \alpha\circ\mathrm{Inv}^\ell + \mathbf{i}\beta\circ\mathrm{Inv}^\ell + \mathbf{j}\gamma\circ\mathrm{Inv}^\ell + \mathbf{ij}\delta\circ\mathrm{Inv}^\ell \right] \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}(1-\mathbf{I_q i}) \left[ \alpha + \mathbf{i}\beta + \mathbf{j}\gamma + \mathbf{ij}\delta \right] \right\} (x_1,y_1,\ldots,x_\ell,y_\ell,\ldots,x_n,y_n), \end{aligned}$$

对于所有 $(\alpha,\beta)$、$(\gamma,\delta) \in Harm_c(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})$，其中 $q = x_\ell + \mathrm{I}_q y_\ell \in \Omega_\ell$，并令$Q^\ell_{\mathbf{i},\ \mathbf{j}}$：$P^\ell{}_{\mathbf{i},\ \mathbf{j}}[Harm_c(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})^2] \to Harm_c(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})^2$为如下算子

由 $Q^{\ell}_{\mathbf{i},\ \mathbf{j}}[h] = (\,(E_1[h,\mathbf{i},\mathbf{j}], E_2[h,\mathbf{i},\mathbf{j}])\,,\,(E_3[h,\mathbf{i},\mathbf{j}], E_4[h,\mathbf{i},\mathbf{j}])\,)$ 给出，其中

$$
\begin{aligned}
E_1[h,\mathbf{i},\mathbf{j}](x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n) &:= \frac{h+\overline{h}}{2}(x_1,y_1,\ldots,x_\ell+\mathbf{i}y_\ell,\ldots,x_n,y_n),\\
E_2[h,\mathbf{i},\mathbf{j}](x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n) &:= -\frac{h\mathbf{i}+\overline{h\mathbf{i}}}{2}(x_1,y_1,\ldots,x_\ell+\mathbf{i}y_\ell,\ldots,x_n,y_n),\\
E_3[h,\mathbf{i},\mathbf{j}](x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n) &:= -\frac{h\mathbf{j}+\overline{h\mathbf{j}}}{2}(x_1,y_1,\ldots,x_\ell+\mathbf{i}y_\ell,\ldots,x_n,y_n),\\
E_4[h,\mathbf{i},\mathbf{j}](x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n) &:= \frac{h\mathbf{j}\mathbf{i}+\overline{h\mathbf{j}\mathbf{i}}}{2}(x_1,y_1,\ldots,x_\ell+\mathbf{i}y_\ell,\ldots,x_n,y_n),
\end{aligned}
$$

对于所有 $(x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n)\in\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k}$。

注 3.2. 注意，给定 $((\alpha,\beta),(\gamma,\delta))\in Harm_c(\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k})^2$，表示公式使我们可以看出

$$
q\mapsto P^{\ell}_{\mathbf{ij}}[(\alpha,\beta,\gamma,\delta)](x_1,y_1,\ldots,x_{\ell-1},y_{\ell-1},q,x_{\ell+1},y_{\ell+1},\ldots,x_n,y_n)
$$

属于 $\mathcal{SR}(\Omega_\ell)$，由分裂引理可知，$E_1[h,\mathbf{i},\mathbf{j}]$、$E_2[h,\mathbf{i},\mathbf{j}]$,$E_3[h,\mathbf{i},\mathbf{j}]$和 $E_4[h,\mathbf{i},\mathbf{j}]$ 是 $h\in P^{\ell}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[Harm_c(\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k})^2]$的实分量。此外，$Q^{\ell}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}\circ P^{\ell}_{\mathbf{i}\ \mathbf{j}}$ 是 $Harm_c(\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k})\times Harm_c(\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k})$ 上的恒等算子；类似于恒等式 (2.7)，$P^{\ell}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}\circ Q^{\ell}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$是 $P^{\ell}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[Harm_c(\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k})\times Harm_c(\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k})]$上的恒等算子。特别地，若$n=1$，则对于 $k=1$、2、3、4，$E_k=D_k$。

例 3.3. 给定 $(\mathbf{i},\mathbf{j})\in T$和 $\ell\in\{1,\ldots,n\}$，我们将考察 $P^{\ell}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}(Harm_c(\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k})^2)$ 中的一些元素。

1. 设 $n=2$和$\Omega_1=\Omega_2=\mathbb{C}$。考虑 $f(z_1,z_2)=z_1z_2+z_2^2$和$g(z_1,z_2)=z_1^2-3z_2$。由

$$
\begin{aligned}
\alpha(x_1,y_1,x_2,y_2)=\Re f(x_1+iy_1,x_2+iy_2) &= x_1x_2-y_1y_2+x_2^2-y_2^2,\\
\beta(x_1,y_1,x_2,y_2)=\Im f(z_1,z_2) &= x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2,\\
\gamma(x_1,y_1,x_2,y_2)=\Re g(z_1,z_2) &= x_1^2-y_1^2-3x_2,\\
\delta(x_1,y_1,x_2,y_2)=\Im g(z_1,z_2) &= 2x_1y_1-3y_2
\end{aligned}
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
&P^{1}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[(\alpha,\beta,\gamma,\delta)](x_1+\mathbf{I}_q y_1,x_2,y_2)\\
=&\frac{1}{2}(1+\mathbf{I_q i})\left[x_1x_2+y_1y_2+x_2^2-y_2^2+\mathbf{i}(x_1y_2-x_2y_1+2x_2y_2)\right.\\
&\left.+\mathbf{j}(x_1^2-y_1^2-3x_2)+\mathbf{ij}(-2x_1y_1-3y_2)\right]+\frac{1}{2}(1-\mathbf{I_q i})\left[x_1x_2-y_1y_2\right.\\
&\left.+x_2^2-y_2^2+\mathbf{i}(x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2)+\mathbf{j}(x_1^2-y_1^2-3x_2)+\mathbf{ij}(2x_1y_1-3y_2)\right],
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&P^2_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[(\alpha,\beta,\gamma,\delta)](x_1,y_1,x_2+\mathbf{I}_q y_2)\\
=&\frac{1}{2}(1+\mathbf{I_q i})\left[x_1x_2+y_1y_2+x_2^2-y_2^2+\mathbf{i}(-x_1y_2+x_2y_1-2x_2y_2)\right.\\
&\left.+\mathbf{j}(x_1^2-y_1^2-3x_2)+\mathbf{ij}(2x_1y_1+3y_2)\right]+\frac{1}{2}(1-\mathbf{I_q i})\left[x_1x_2-y_1y_2+x_2^2-y_2^2\right.\\
&\left.+\mathbf{i}(x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2)+\mathbf{j}(x_1^2-y_1^2-3x_2)+\mathbf{ij}(2x_1y_1-3y_2)\right].
\end{aligned}
$$

2. 设 $\Omega_1,\ldots,\Omega_n\subset\mathbb{C}(\mathbf{i})$ 为区域，并令 $f_\ell,g_\ell\in \mathrm{Hol}(\Omega_\ell)\cap C(\Omega_\ell,\mathbb{C}(\mathbf{i}))$, 对于 $\ell=\overline{1,\ldots,n}$。若 $f(z_1,\ldots,z_2)=f_1(z_1)\cdots f_n(z_n)$ 且 $g(z_1,\ldots,z_2)=g_1(z_1)\cdots g_n(z_n)$，对于所有 $(z_1,\ldots,z_n)\in\Omega_1\times\cdots\times\Omega_n$，并且 $\alpha=\Re(f),\beta=\Im(f)$，$\gamma=\Re(g)$ 和 $\delta=\Im(g)$，则

$$
\begin{aligned}
&P^1_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[(\alpha,\beta,\gamma,\delta)](q,x_2,y_2,\ldots,x_n,y_u)\\
=&\frac{1}{2}(1+\mathbf{I_q i})f_1(\bar z_1)f(z_2)\cdots f_n(z_n)+\frac{1}{2}(1-\mathbf{I_q i})f_1(z_1)f(z_2)\cdots f_n(z_n)\\
&+\left\{\frac{1}{2}(1+\mathbf{I_q i})g_1(\bar z_1)g(z_2)\cdots g_n(z_n)+\frac{1}{2}(1-\mathbf{I_q i})g_1(z_1)g(z_2)\cdots g_n(z_n)\right\}\mathbf{j}\\
=&P_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f_1](q)f_2(z_2)\cdots f_n(z_n)+P_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[g_1](q)g_2(z_2)\cdots g_n(z_n)\mathbf{j},
\end{aligned}
$$

其中 $q=x_1+\mathbf{I}_q y_1$，且对所有 $k$，$z_k=x_k+\mathbf{i}y_k$。类似地，

$$
\begin{aligned}
&P^2_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[(\alpha,\beta,\gamma,\delta)](x_1,y_1,q,x_3,y_3,\ldots,x_n,y_u)\\
=&P_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f_2](q)f_1(z_1)f_3(z_3)\cdots f_n(z_n)+P_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[g_2](q)g_1(z_1)g_3(z_3)\cdots g_n(z_n)\mathbf{j},
\end{aligned}
$$

其中 $q=x_2+\mathbf{I}_q y_2$。对于 $k=3,\ldots,n$，$P^k_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[(\alpha,\beta,\gamma,\delta)]$ 的表示具有类似的行为。

与 [14]，中一样，我们函数集合上的度量由一致范数（亦称上确界范数）诱导。

定义 3.4. 给定轴对称 s-域 $\Omega_1,\ldots,\Omega_n\subset\mathbb{H},\ell=1,\ldots,n$ 以及 $(f,(\mathbf{i},\mathbf{j}))\in P^\ell_{\mathbf{ij}}[(Harm_c(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}))^2]\times T$，记作 $\|(f,(\mathbf{i},\mathbf{j}))\|_{\infty,\ell}:=\|f\|_\infty+\|(\mathbf{i},\mathbf{j})\|_{\mathbb{R}^6}$。令

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}_c(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}):=\left(Harm_c^2(S_\Omega)\right)^2\times T\\
&=\left\{\left(\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix},(\mathbf{i},\mathbf{j})\right)\mid(\alpha,\beta),(\gamma,\delta)\in Harm_c(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}),\ (\mathbf{i},\mathbf{j})\in T\right\},
\end{aligned}
$$

并给定 $((\alpha,\beta),(\gamma,\delta),(\mathbf{i},\mathbf{j}))\in\left(Harm_c^2(S_\Omega)\right)^2\times T$ 写

$$
\left\|\left(\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix},(\mathbf{i},\mathbf{j})\right)\right\|_\infty:=\|\alpha\|_\infty+\|\beta\|_\infty+\|\gamma\|_\infty+\|\delta\|_\infty+\|(\mathbf{i},\mathbf{j})\|_{\mathbb{R}^6},
$$

and

$$\|\left(\left(\begin{array}{cc}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{array}\right),(\mathbf{i},\mathbf{j})\right)(x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n)\| := |\alpha(x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n)|$$
$$+|\beta(x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n)|+|\gamma(x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n)|+|\delta(x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n)|$$
$$+\|(\mathbf{i},\mathbf{j})\|_{\mathbb{R}^6}.$$

$_n$还考虑如下的 $\mathcal{P}_\ell:\ \mathcal{H}(\prod S_{\Omega_k}) \to \mathcal{SR}(\tilde{\ }\Omega_\ell)$:

$k=1$

$$\mathcal{P}_\ell\left(\left(\begin{array}{cc}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{array}\right),(\mathbf{i},\mathbf{j})\right)(x_1,y_1,\ldots,x_{\ell-1},y_{\ell-1},q,x_{\ell+1},y_{\ell+1},\ldots,x_n,y_n)$$
$$:= P^\ell_{\mathbf{ij}}[(\alpha,\beta,\gamma,\delta)](x_1,y_1,\ldots,x_{\ell-1},y_{\ell-1},q,x_{\ell+1},y_{\ell+1},\ldots,x_n,y_n).$$

对于 $(f,(\mathbf{i},\mathbf{j})) \in P^\ell{}_{\mathbf{ij}}[(Harm_c(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}))^2]\times T$和 $u\in\mathbb{S}^3$表示

$$\mathbf{S}^\ell_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f] := \left(\left(\begin{array}{cc}E_1[f,\mathbf{i},\mathbf{j}] & E_2[f,\mathbf{i},\mathbf{j}]\\ E_3[f,\mathbf{i},\mathbf{j}] & E_4[f,\mathbf{i},\mathbf{j}]\end{array}\right),(\mathbf{i},\mathbf{j})\right)$$

以及 $\varphi^\ell_u[f,(\mathbf{i},\mathbf{j})] = \mathbf{S}^\ell_{u\mathbf{i}\bar{u},\ u\mathbf{j}\bar{u}}[f]$。

我们将考察 $P^\ell_{\mathbf{i},\ \mathbf{j}}$的一些性质。

命题 3.5。设 $\Omega_1,\ldots,\Omega_n \subset \mathbb{H}$ 为轴对称 s-域。给定 $(\alpha,\beta),(\gamma,\delta),(\rho,\sigma),(\tau,\eta) \in Harm_c(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})$ 以及 $(\mathbf{i},\mathbf{j}),(\mathbf{k},\mathbf{l}) \in T$。对于 $\ell=1,\ldots,n$，我们得到

$$\|P^\ell_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[\alpha+\beta\mathbf{i}+\gamma\mathbf{j}+\delta\mathbf{ij}]-P^\ell_{\mathbf{k},\mathbf{l}}[\rho+\sigma\mathbf{k}+\tau\mathbf{l}+\eta\mathbf{kl}]\|_{\infty,\ell}$$
$$\le 2\|\left(\left(\begin{array}{cc}\alpha-\rho & \beta-\sigma\\ \gamma-\tau & \delta-\eta\end{array}\right),(\mathbf{i}-\mathbf{k},\mathbf{j}-\mathbf{l})\right)\|_\infty(1+(\|\rho\|_\infty+\|\sigma\|_\infty+\|\tau\|_\infty+\|\eta\|_\infty)).$$

证明。给定 $q=x_\ell+\mathbf{I}_q y_\ell \in \Omega_\ell$ 以及 $(x_k,y_k)\in S_{\Omega_k}$，其中 $k=1,\ldots,n$。根据 $P^\ell_{\mathbf{i},\ \mathbf{j}}$ 的定义可知

$$\|(P^{\ell}{}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[\alpha+\beta\mathbf{i}+\gamma\mathbf{j}+\delta\mathbf{ij}]-P^{\ell}{}_{\mathbf{k},\mathbf{l}}[\rho+\sigma\mathbf{k}+\tau\mathbf{l}+\eta\mathbf{kl}])((x_1,y_1,\ldots,q,\ldots,x_n,$$
$$y_n))\|\le 2(\|\alpha-\rho\|_\infty+\|\beta-\sigma\|_\infty+\|\gamma-\tau\|_\infty+\|\delta-\eta\|_\infty)$$
$$+2(\|\mathbf{i}-\mathbf{k}\|+\|\mathbf{j}-\mathbf{l}\|)(\|\rho\|_\infty+\|\sigma\|_\infty+\|\tau\|_\infty+\|\eta\|_\infty)$$
$$\le 2\|\left(\left(\begin{array}{cc}\alpha-\rho & \beta-\sigma\\ \gamma-\tau & \delta-\eta\end{array}\right),(\mathbf{i}-\mathbf{k},\mathbf{j}-\mathbf{l})\right)\|_\infty(1+(\|\rho\|_\infty+\|\sigma\|_\infty+\|\tau\|_\infty+\|\eta\|_\infty)).$$

□

命题 3.6。若 $f,g\in P^\ell_{\mathbf{ij}}[(Harm_c(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}))^2]$, $u\in\mathbb{S}^3$ 且 $(\mathbf{i},\mathbf{j}),(\mathbf{k},\mathbf{l}) \in T$ 则

$$\|\varphi^\ell_u[f,(\mathbf{i},\mathbf{j})]-\varphi^\ell_u[g,(\mathbf{k},\mathbf{l})]\|_\infty \le 4\|f-g\|_\infty+(2\|g\|_\infty+1)\|(\mathbf{i},\mathbf{j})-(\mathbf{k},\mathbf{l})\|_{\mathbb{R}^6}$$
$$+4\sup\{\|g(x_1,y_1,\ldots,x_\ell+\mathbf{i}y_\ell,\ldots,x_n,y_n)-g(x_1,y_1,\ldots,x_\ell+\mathbf{k}y_\ell,\ldots,x_n,y_{\ n})$$
$$|\ (x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n)\in\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}\}.$$

证明。

$$
\begin{aligned}
&|E_1[f,u\mathbf{i}\bar{u},u\mathbf{j}\bar{u}](x_1,y_1,\cdots,x_n,y_n)-E_1[g,u\mathbf{k}\bar{u},u\mathbf{l}\bar{u}](x_1,y_1,\cdots,x_n,y_n)|\\
&\le\|f(x_1,y_1,\cdots,x_\ell+\mathbf{i}y_\ell,\cdots x_n,y_n)-g(x_1,y_1,\cdots,x_\ell+\mathbf{i}y_\ell,\cdots x_n,y_n)\|\\
&+\|g(x_1,y_1,\cdots,x_\ell+\mathbf{i}y_\ell,\cdots x_n,y_n)-g(x_1,y_1,\cdots,x_\ell+\mathbf{k}y_\ell,\cdots x_n,y_n)\|,\\
&|E_2[f,u\mathbf{i}\bar{u},u\mathbf{j}\bar{u}](x_1,y_1,\cdots,x_n,y_n)-E_2[g,u\mathbf{k}\bar{u},u\mathbf{l}\bar{u}](x_1,y_1,\cdots,x_n,y_n)|\\
&\le\|f(x_1,y_1,\cdots,x_\ell+\mathbf{i}y_\ell,\cdots x_n,y_n)-g(x_1,y_1,\cdots,x_\ell+\mathbf{i}y_\ell,\cdots x_n,y_n)\|\\
&+\|g(x_1,y_1,\cdots,x_\ell+\mathbf{i}y_\ell,\cdots x_n,y_n)-g(x_1,y_1,\cdots,x_\ell+\mathbf{k}y_\ell,\cdots x_n,y_n)\|\\
&+\|g(x_1,y_1,\cdots,x_\ell+\mathbf{i}y_\ell,\cdots x_n,y_n)\|\|\mathbf{i}-\mathbf{k}\|,
\end{aligned}
$$

对所有的 $(x_1,y_1,\cdots x_n,y_n)\in\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}$。对$E_3$, $E_4$ 也可得到类似的不等式, 这意味着

$$
\begin{aligned}
&\|\varphi_u^\ell[f,(\mathbf{i},\mathbf{j})](x_1,y_1,\ldots,x_\ell+\mathbf{i}y_\ell,\ldots,x_n,y_n)-\\
&\varphi_u^\ell[g,(\mathbf{k},\mathbf{l})](x_1,y_1,\ldots,x_\ell+\mathbf{k}y_\ell,\ldots,x_n,y_n)\|\\
\le&4\|g(x_1,y_1,\ldots,x_\ell+\mathbf{i}y_\ell,\ldots,x_n,y_n)-g(x_1,y_1,\ldots,x_\ell+\mathbf{k}y_\ell,\ldots,x_n,y_n)\|\\
&+4\|f-g\|_\infty+(2\|g\|_\infty+1)\|(\mathbf{i},\mathbf{j})-(\mathbf{k},\mathbf{l})\|_{\mathbb{R}^6}.
\end{aligned}
$$

对所有 $(x_1,y_1,\cdots x_n,y_n)\in\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}$。 □

命题 3.5 和 3.6 是对 [14, 命题 3.4,3.5] 的结构性扩展。

命题 3.7。设 $\Omega_1,\ldots,\Omega_n\subset\mathbb{H}$ 为轴对称 s-域, 且$\ell\in\{1,\ldots,n\}$。则 $(\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})\ \mathcal{P}_\ell,\ \mathcal{P}_\ell[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})],T)$ 是一个纤维丛, 其中 $K=\{R_u\mid u\in\mathbb{S}^3\}$ 且 $\Phi_\ell=\{\varphi_u^\ell\mid u\in\mathbb{S}^3\}$。

证明。显然, $\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})$、 $P^{\ell}{}_{\mathbf{ij}}[(Harm_c(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}))^2]$ 和 $T$都是豪斯多夫空间。命题 3.5 和 3.6 分别表明 $\mathcal{P}_\ell$ 和 $\varphi_u^\ell$的连续性。群 $K=\{R_u\mid u\in\mathbb{S}^3\}$ 作用于 $T$, 参见 [14, 命题 3.6]。

给定一个邻域 $V\subset\mathcal{P}_\ell[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})]$, 则映射 $\varphi_u^\ell:V\times T\to(\mathcal{P}_\ell)^{-1}(V)$ 根据定义 3.4 满足以下条件:

1. 若 $\varphi_u^\ell[f,(\mathbf{i},\mathbf{j})]=\varphi_u^\ell[g,(\mathbf{k},\mathbf{l})]$, 则 $(\mathbf{i},\mathbf{j})=(\mathbf{k},\mathbf{l})$, 并在两边应用 $P_\ell$, 可得 $f=P_\ell\circ\varphi_u^\ell[f,(\mathbf{i},\mathbf{j})]=P_\ell\circ\varphi_u^\ell[g,(\mathbf{k},\mathbf{l})]=g$。 2. 对于 $\left(\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix},\ 令\ (\mathbf{i},\mathbf{j})\right)\in\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})$ 中的 $(\mathbf{k},\mathbf{l})=(\bar{u}\mathbf{i}u,\bar{u}\mathbf{j}u)\in T$, 并且$f=P^\ell_{u\mathbf{k}\bar{u},u\mathbf{l}\bar{u}}[\alpha+\beta u\mathbf{k}\bar{u}+(\gamma+\delta u\mathbf{k}\bar{u})u\mathbf{l}\bar{u}]\in\mathcal{P}_\ell[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})]$, 则

$$
\varphi_u^\ell[f,(\mathbf{k},\mathbf{l})]=\left[\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix},\ (u\mathbf{k}\bar{u},u\mathbf{l}\bar{u})\right]=\left[\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix},\ (\mathbf{i},\mathbf{j})\right]
$$

通过直接计算, 我们可以得出

$$
(\varphi_u^\ell)^{-1}\left[\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix},\ (\mathbf{k},\mathbf{l})\right]=(\ \mathcal{P}_\ell\left[\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix},\ (\bar{u}\mathbf{k}u,\bar{u}\mathbf{l}u)\right],(\bar{u}\mathbf{k}u,\bar{u}\mathbf{l}u)\ ).
$$

因此, $\varphi_u^\ell$ 是一个同胚。

**3.** 算子 $\mathcal{P}_\ell$ 和 $\varphi_u^\ell$ 满足

$$\mathcal{P}_\ell \circ \varphi_u^\ell[f,(\mathbf{i},\mathbf{j})] = P^\ell_{u\mathbf{i}\bar{u},u\mathbf{j}\bar{u}} \circ Q^\ell_{u\mathbf{i}\bar{u},u\mathbf{j}\bar{u}}[f] = f, \quad \forall (f,(\mathbf{i},\mathbf{j})) \in U \times T.$$

最后，$\{\varphi_u^\ell \mid u \in \mathbb{S}^3\}$ 是一个局部平凡化族，因为

$$\varphi_u^\ell[f,(\mathbf{i},\mathbf{j})] = \left[\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, (v(\bar{v}u)\mathbf{i}(\bar{u}v)\bar{v}, v(\bar{v}u)\mathbf{j}(\bar{u}v)\bar{v})\right] = \varphi_v^\ell[f, R_p(\mathbf{i},\mathbf{j})],$$

对所有 $u,v \in \mathbb{S}^3$，$(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in T$和 $(\alpha,\beta),(\gamma,\delta) \in Harm_c(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})$，其中 $f = \alpha + \beta u\mathbf{i}\bar{u} + \gamma u\mathbf{j}\bar{u} + \delta u\mathbf{i}\mathbf{j}\bar{u}$ 和 $p = \bar{v}u \in \mathbb{S}^3$。

□

纤维丛

$$\{(\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}), \mathcal{P}_\ell, \mathcal{P}_\ell[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})], T) \mid \ell = 1,\dots,n\}$$

与其丛投影密切相关，其方式类似于例 (2.10)，并且在结构上扩展了 (2.11) 中给出的纤维。

注 3.8. 给定两个不同的数 $m,\ell \in \{1,\dots,n\}$。令 $\Gamma^1_{m,\ell}$:$\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}) \to \mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})$ 为恒等算子，并定义 $\Gamma^2_{m,\ell}$:$P_m[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})] \to \mathcal{P}_\ell[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})]$ 为

$$\Gamma^2_{m,\ell}[f] = \Gamma^2_{m,\ell}[P^m_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[\alpha + \beta\mathbf{i} + \gamma\mathbf{j} + \delta\mathbf{i}\mathbf{j}]] = P^\ell_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[\alpha + \beta\mathbf{i} + \gamma\mathbf{j} + \delta\mathbf{i}\mathbf{j}],$$

其中 $(\alpha,\beta)$、$(\gamma,\delta) \in Harm_c(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})$、$(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in T$和 $f = P^\ell{}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[\alpha+\beta\mathbf{i}+\gamma\mathbf{j}+\delta\mathbf{i}\mathbf{j}]$。由此可直接看出，该图表

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\mathcal{P}_\ell}{} & \\ \mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}) & \longrightarrow & \mathcal{P}_\ell[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})] \\ \Gamma^1_{m,\ell} \uparrow & & \uparrow \Gamma^2_{m,\ell} \\ \mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}) & \underset{\mathcal{P}_m}{\longrightarrow} & \mathcal{P}_m[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})] \end{array}$$

是交换的。若 $\Gamma_{m,\ell} = (\Gamma^1_{m,\ell}, \Gamma^2_{m,\ell})$，则 $\Gamma_{m,\ell} \circ \Gamma_{\ell,m}$ 和 $\Gamma_{\ell,m} \circ \Gamma_{m,\ell}$ 都是恒等态射，也就是说，$(\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})\ \mathcal{P}_m, \mathcal{P}_m[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})], T)$ 和 $(\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})\ \mathcal{P}_\ell, \mathcal{P}_\ell[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})], T)$ 是同构纤维丛。

前述同构族表明，下述映射定义良好。

$$\mathcal{P} : \mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}) \to (\mathcal{P}_1[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})] \times \cdots \times \mathcal{P}_n[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})])$$

$$h \mapsto (\mathcal{P}_1[h], \mathcal{P}_2[h], \cdots, \mathcal{P}_n[h]), \quad \forall h \in \mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}).$$

此外,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}[h] =&(\mathcal{P}_1[h], \Gamma^2_{1,2}[\mathcal{P}_1[h]], \cdots, \Gamma^2_{1,n}[\mathcal{P}_1[h]])\\ =&(\Gamma^2_{2,1}[\mathcal{P}_2[h]], \mathcal{P}_2[h], \cdots, \Gamma^2_{2,n}[\mathcal{P}_2[h]])\\ &\vdots\\ =&(\Gamma^2_{n,1}[\mathcal{P}_n[h]], \Gamma^2_{n,2}[\mathcal{P}_n[h]], \cdots, \mathcal{P}_n[h]),\end{aligned}$$

并且，如果 $f, g \in P^{\ell}_{\mathbf{ij}}[(Harm_c(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}))^2]$ 对于 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in T$，那么 $\mathcal{P}$满足$\mathcal{P}[fa+g] = \mathcal{P}[f]a + \mathcal{P}[g]$，对所有 $a \in \mathbb{H}$均成立。

定义 3.9。对于轴对称 s-域 $\Omega_1, \ldots, \Omega_n \subset \mathbb{H}$，定义 $\prod_{k=1}^n \Omega_k$ 的坐标切片扩张为 $\bigcup_{k=1}^n \tilde{\Omega}_k$。函数 $F : \bigcup_{k=1}^n \tilde{\Omega}_k \to \mathbb{H}$ 是 $\bigcup_{k=1}^n \tilde{\Omega}_k$ 上的切片正则函数，当且仅当存在 $f \in \mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})$，使得对于所有 $A \in \tilde{\Omega}_k$和 $k \in \{1, \ldots, n\}$，均有 $F(A) := \mathcal{P}_k[f](A)$。$\bigcup_{k=1}^n \tilde{\Omega}_k$ 上的切片正则函数集合记为 $\mathcal{SR}(\bigcup_{k=1}^n \tilde{\Omega}_k)$。

注 3.10. 由注 3.8 和前面的定义，我们很容易推出

$$\mathcal{P}_k[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})] = \{F|_{\tilde{\Omega}_k} \mid F \in \mathcal{SR}(\bigcup_{k=1}^n \tilde{\Omega}_k)\},$$

对所有 $k = 1$、.....、$n$，若 $\ell \neq m$ 属于 $\{1, \ldots, n\}$，则

$$F|_{\tilde{\Omega}_m} = \Gamma^2_{\ell,m}[F|_{\tilde{\Omega}_\ell}], \quad \text{on} \quad \tilde{\Omega}_m.$$

对于 $G \in \mathcal{SR}(\bigcup_{k=1}^n \tilde{\Omega}_k)$，取 $g \in \mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})$，使得 $G(A) := \mathcal{P}_k[g](A)$，对所有 $A \in \Omega_k$ 和 $k \in \{1, \ldots, n\}$ 均成立

$$(Fa + G)(A) = \mathcal{P}_k[f](A)a + \mathcal{P}_k[g](A) = \mathcal{P}_k[fa+g](A),$$

对所有 $a \in \mathbb{H}$、$A \in \tilde{\Omega}_k$ 和 $k \in \{1, \ldots, n\}$，即 $\mathcal{SR}(\bigcup_{k=1}^n \tilde{\Omega}_k)$ 是一个四元数右线性空间。对于 $n = 1$，我们很容易看出 $\mathcal{SR}(\bigcup_{k=1}^1 \tilde{\Omega}_k) = \mathcal{SR}(\Omega_1)$。

我们将描述 $\mathcal{P}_\ell[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})]$ 的一些性质。

命题 3.11. 柯西型公式。给定 $f \in \mathcal{P}_\ell[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})]$,$(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in T$，以及 $A \in \prod_{k=1}^n \Omega_{k,\,\mathbf{i}}$，其中 $\Omega_{k,\,\mathbf{i}} = \Omega_k \cap \mathbb{C}(\mathbf{i})$，且 $r > 0$ 使得 $f \in P^{\ell}_{\mathbf{ij}}[(Harm_c(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}))^2]$ 且 $\overline{D}(A, r) \subset \prod_{k=1}^n \Omega_{k,\,\mathbf{i}}$。那么

$$f(x_1, y_1, \ldots, q, \ldots, x_n, y_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T(A,r)} (w_\ell - q)^{-*} \frac{dw_1 \cdots dw_n}{(w_1 - z_1) \cdots (w_{\ell-1} - z_{\ell-1})(w_{\ell+1} - z_{\ell+1}) \cdots (w_n - z_n)} f(W),$$

对于所有 $(z_1, \ldots, x_\ell + \mathbf{i}y_\ell, \ldots, z_n) \in D(A, r)$，其中 $z_k = x_k + \mathbf{i}y_k$对于所有 $k$和 $q = x_\ell + \mathbf{I}_q y_\ell$。

证明。存在 $(\alpha,\beta)$、$(\gamma,\delta)\in Harm_c(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})$，使得 $f=P^{\ell}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[\alpha+\beta\mathbf{i}+\gamma\mathbf{j}+\delta\mathbf{ij}]$。记 $f_1=\alpha+\beta\mathbf{i}$ 和 $f_2=\gamma+\delta\mathbf{i}$，并由 (2.1) 可得

$$f_k(Z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T(A,r)}\frac{f_k(W)}{(w_1-z_1)\cdots(w_n-z_n)}dw_1\cdots dw_n,\quad \forall Z\in D(A,r),$$

对于 $k=1,\ 2$。那么 $f=P^{\ell}_{\mathbf{i},\ \mathbf{j}}[f_1+f_2\mathbf{j}]$ 变为

$$\begin{aligned}
&f(x_1,y_1,\ldots,x_\ell+\mathbf{I}_q y_\ell,\ldots,x_n,y_n)\\
=&\frac{1}{2}(1+\mathbf{I}_q\mathbf{i})\left[\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T(A,r)}\frac{dw_1\cdots dw_n}{(w_1-z_1)\cdots(w_\ell-x_\ell+\mathbf{i}y_\ell)\cdots(w_n-z_n)}f(W)\right]\\
&+\frac{1}{2}(1-\mathbf{I}_q\mathbf{i})\left[\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T(A,r)}\frac{dw_1\cdots dw_n}{(w_1-z_1)\cdots(w_\ell-x_\ell-\mathbf{i}y_\ell)\cdots(w_n-z_n)}f(W)\right]\\
=&\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T(A,r)}\left[\frac{1}{2}(1+\mathbf{I}_q\mathbf{i})\frac{1}{w_\ell-x_\ell+\mathbf{i}y_\ell}+\frac{1}{2}(1-\mathbf{I}_q\mathbf{i})\frac{1}{w_\ell-x_\ell-\mathbf{i}y_\ell}\right]\\
&\frac{dw_1\cdots dw_n}{(w_1-z_1)\cdots(w_{\ell-1}-z_{\ell-1})(w_{\ell+1}-z_{\ell+1})\cdots(w_n-z_n)}f(W).
\end{aligned}$$

Use

$$(w_\ell-q)^{-*}=\frac{1}{2}(1+\mathbf{I}_q\mathbf{i})\frac{1}{w_\ell-x_\ell+\mathbf{i}y_\ell}+\frac{1}{2}(1-\mathbf{I}_q\mathbf{i})\frac{1}{w_\ell-x_\ell-\mathbf{i}y_\ell},$$

以结束证明。 □

命题 3.12. 导数的柯西积分推广。设 $f\in\mathcal{P}_\ell[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})],(\mathbf{i},\mathbf{j})\in T$，$A\in\prod_{k=1}^n\Omega_{k,\ \mathbf{i}}$ 且 $r>0$ 使得 $f\in P^{\ell}_{\mathbf{ij}}[(Harm_c(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}))^2]$ 且 $\overline{D}(A,r)\subset\prod_{k=1}^n\Omega_{k,\ \mathbf{i}}\subset\mathbb{C}(\mathbf{i})^n$。那么，$f$ 的 $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell,\ldots,\alpha_n)$ 阶导数的柯西积分推广为

$$\begin{aligned}
D^\alpha f(x_1,y_1,\ldots,q,\ldots,x_n,y_n)=&\frac{\alpha!}{(2\pi i)^n}\int_{T(A,r)}(w_\ell-q)^{-(\alpha_\ell+1)}dw_1\cdots dw_n(w_1-z_1)^{\alpha_1+1}\cdots(w_{\ell-1}-z_{\ell-1})^{\alpha_{\ell-1}+1}(w_{\ell+1}-z_{\ell+1})^{\alpha_{\ell+1}+1}\cdots(w_n-z_n)^{\alpha_n+1}f(W),\\
&\text{对于所有 } (z_1,\ldots,z_n)\in D(A,r),\ \text{其中 } z_k=x_k+\mathbf{i}y_k \text{ 对所有 } k \text{ 和 } q=x_\ell+\mathbf{I}_q y_\ell \text{ 均成立。}
\end{aligned}$$

证明。类似于前一个证明，使用 (2.3) 即可。 □

命题 3.13. 幂级数。给定 $f\in\mathcal{P}_\ell[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})],(\mathbf{i},\mathbf{j})\in T,A=(w_1,\ldots,w_n)\in\prod_{k=1}^n\Omega_{k,\mathbf{i}}$ 以及 $r>0$，使得 $f\in P^{\ell}_{\mathbf{ij}}[(Harm_c(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}))^2]$ 且 $\overline{D}(A,r)\subset\prod_{k=1}^n\Omega_{k,\mathbf{i}}$。那么

$$\begin{aligned}
f(x_1,y_1,\ldots,q,\ldots,x_n,y_n)=&\sum_{\alpha_1\geq0,\ldots,\alpha_n\geq0}(q-w_\ell)^{*\alpha_\ell}(z_1-w_1)^{\alpha_1}\cdots\\
&(z_{\ell-1}-w_{\ell-1})^{\alpha_{\ell-1}}(z_{\ell+1}-w_{\ell+1})^{\alpha_{\ell+1}}\cdots(z_n-w_n)^{\alpha_n}u_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n},
\end{aligned}$$

对于所有的 $(z_1,\ldots,z_{\ell-1},x_\ell+\mathbf{i}y_\ell,z_{\ell+1},\ldots,z_n)\in D(A,r)$，其中 $z_k=x_k+\mathbf{i}y_k$ 对于所有 $k\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{\ell\}$ 和 $q=x_\ell+\mathbf{I}_q y_\ell$ 以及 $u_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\in\mathbb{H}$ 对于所有族 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$。

证明。考虑 $f = P^{\ell}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[\alpha+\beta\mathbf{i}+\gamma\mathbf{j}+\delta\mathbf{ij}]$, $f_1 = \alpha+\beta\mathbf{i}$ 和 $f_2 = \gamma+\delta\mathbf{i}$。根据奥斯古德引理，存在 $r>0$ 使得

$$f_1(Z) = \sum_{\alpha_1\geq 0,\ldots,\alpha_n\geq 0} c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(z_1-w_1)^{\alpha_1}\cdots(z_n-w_n)^{\alpha_n}$$

$$f_2(Z) = \sum_{\alpha_1\geq 0,\ldots,\alpha_n\geq 0} d_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(z_1-w_1)^{\alpha_1}\cdots(z_n-w_n)^{\alpha_n},$$

对于所有 $(z_1,\ldots,z_n)\in D(A,r)$。于是 $f = P^{\ell}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f_1+f_2\mathbf{j}]$ 变为

$$\begin{aligned}
&f(x_1,y_1,\ldots,x_\ell+\mathbf{I}_q y_\ell,\ldots,x_n,y_n)\\
=&\frac{1}{2}(1+\mathbf{I}_q\mathbf{i})\sum_{\alpha_1\geq 0,\ldots,\alpha_n\geq 0}(\bar{z}_\ell-w_\ell)^{\alpha_\ell}(z_1-w_1)^{\alpha_1}\cdots(z_{\ell-1}-w_{\ell-1})^{\alpha_{\ell-1}}\\
&\qquad(z_{\ell+1}-w_{\ell+1})^{\alpha_{\ell+1}}\cdots(z_n-w_n)^{\alpha_n}u_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\\
&+\frac{1}{2}(1-\mathbf{I}_q\mathbf{i})\sum_{\alpha_1\geq 0,\ldots,\alpha_n\geq 0}(z_\ell-w_\ell)^{\alpha_\ell}(z_1-w_1)^{\alpha_1}\cdots(z_{\ell-1}-w_{\ell-1})^{\alpha_{\ell-1}}\\
&\qquad(z_{\ell+1}-w_{\ell+1})^{\alpha_{\ell+1}}\cdots(z_n-w_n)^{\alpha_n}u_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\\
=&\sum_{\alpha_1\geq 0,\ldots,\alpha_n\geq 0}[\frac{1}{2}(1+\mathbf{I}_q\mathbf{i})(\bar{z}_\ell-w_\ell)^{\alpha_\ell}+\frac{1}{2}(1-\mathbf{I}_q\mathbf{i})(z_\ell-w_\ell)^{\alpha_\ell}](z_1-w_1)^{\alpha_1}\cdots\\
&\qquad(z_{\ell-1}-w_{\ell-1})^{\alpha_{\ell-1}}(z_{\ell+1}-w_{\ell+1})^{\alpha_{\ell+1}}\cdots(z_n-w_n)^{\alpha_n}u_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n},
\end{aligned}$$

其中 $u_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = (c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}+d_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\mathbf{j})$，对所有族 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$均成立。最后，使用

$$(q-w_\ell)^{*\alpha_\ell} = [\frac{1}{2}(1+\mathbf{I}_q\mathbf{i})(\bar{z}_\ell-w_\ell)^{\alpha_\ell}+\frac{1}{2}(1-\mathbf{I}_q\mathbf{i})(z_\ell-w_\ell)^{\alpha_\ell}].$$

□

命题 3.14。设 $\Omega_k = \mathbb{B}^4(0,1)$，对所有 $k$，且 $f\in\mathcal{P}_\ell[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})]$。令 $(\mathbf{i},\mathbf{j})\in T$，使得 $f\in P^{\ell}_{\mathbf{ij}}[(Harm_c(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}))^2]$。给定 $\mathbf{I}_q\neq\mathbf{i}$，则

$$\begin{aligned}
f(x_1,y_1,\cdots,q,\cdots,x_n,y_n) =& f_1(x_1,y_1,\cdots,q,\cdots,x_n,y_n)\\
&+f_2(x_1,y_1,\cdots,q,\cdots,x_n,y_n),
\end{aligned}$$

~对于所有 $(x_1,y_1,\cdots,q,\cdots,x_n,y_n)\in\Omega_\ell$，其中 $f_1$ 是一个取值于 $\mathbb{H}$ 的右全纯函数，其复变量为 $z_1,\ldots,z_{\ell-1},z_{\ell+1},\ldots,z_n\in\mathbb{C}(\mathbf{i})$，$z_k = x_k+\mathbf{i}y_k$；$f_2$ 是一个取值于 $\mathbb{H}$ 的右反全纯函数，其复变量为 $w_1,\ldots,w_{\ell-1},w_{\ell+1},\ldots,w_n\in\mathbb{C}(\mathbf{I}_q\mathbf{i}\mathbf{I}_q)$，$w_k = x_k+\mathbf{I}_q\mathbf{i}\mathbf{I}_q y_k$。

特别地，如果 $\mathbf{I}_q = \mathbf{j}$，那么 $f_2$ 是关于复变量 $z_1,\ldots,z_{\ell-1},z_{\ell+1},\ldots,z_n\in\mathbb{C}(\mathbf{i})$ 的 $\mathbb{H}$ 值右反全纯函数。

证明。命题 3.13 表明

$$f(x_1,y_1,\ldots,q,\ldots,x_n,y_n) = \sum_{\alpha_1\geq 0,\ldots,\alpha_n\geq 0} q^{\alpha_\ell}z_1^{\alpha_1}\cdots z_{\ell-1}^{\alpha_{\ell-1}}z_{\ell+1}^{\alpha_{\ell+1}}\cdots z_n^{\alpha_n}u_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n},$$

对所有 $(z_1,\ldots,z_n)\in D(O,1)$，其中 $z_k = x_k+\mathbf{i}y_k$ 对所有 $k$, $q = x_\ell+\mathbf{I}_q y_\ell$ 和 $u_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\in\mathbb{H}$ 对所有族 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$。

定义

$$\begin{aligned}&f_1(x_1,y_1,\dots,q,\dots,x_n,y_n)\\:=&\frac{1}{2}\left\{f(x_1,y_1,\dots,q,\dots,x_n,y_n)+f(x_1,y_1,\dots,\bar{q},\dots,x_n,y_n)\right\}\\=&\sum_{\alpha_1\geq 0,\dots,\alpha_n\geq 0}\frac{1}{2}(q^{\alpha_\ell}+\overline{q^{\alpha_\ell}})z_1^{\alpha_1}\cdots z_{\ell-1}^{\alpha_{\ell-1}}z_{\ell+1}^{\alpha_{\ell+1}}\cdots z_n^{\alpha_n}u_{\alpha_1,\dots,\alpha_n},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&f_2(x_1,y_1,\dots,q,\dots,x_n,y_n)\\:=&\frac{1}{2}\left\{f(x_1,y_1,\dots,q,\dots,x_n,y_n)-f(x_1,y_1,\dots,\bar{q},\dots,x_n,y_n)\right\}\\=&\sum_{\alpha_1\geq 0,\dots,\alpha_n\geq 0}\frac{1}{2}(q^{\alpha_\ell}-\overline{q^{\alpha_\ell}})z_1^{\alpha_1}\cdots z_{\ell-1}^{\alpha_{\ell-1}}z_{\ell+1}^{\alpha_{\ell+1}}\cdots z_n^{\alpha_n}u_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}.\end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{2}(q^{\alpha_\ell}+\overline{q^{\alpha_\ell}})\in\mathbb{R}$ 和 $\frac{1}{2}(q^{\alpha_\ell}-\overline{q^{\alpha_\ell}})\in \mathbf{I}_q\mathbb{R}$ 对所有 $\alpha_\ell$ 都成立，由此可得一致收敛允许我们得到

$$\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_k}+\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y_k})f_1(x_1,y_1,\dots,q,\dots,x_n,y_n)=0,$$

and

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_k}-\mathbf{I}_q\mathbf{i}\mathbf{I}_q\frac{\partial}{\partial y_k})f_2(x_1,y_1,\dots,q,\dots,x_n,y_n)=\\&\sum_{\alpha_1\geq 0,\dots,\alpha_n\geq 0}\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_k}-\mathbf{I}_q\mathbf{i}\mathbf{I}_q\frac{\partial}{\partial y_k})\frac{1}{2}(q^{\alpha_\ell}-\overline{q^{\alpha_\ell}})z_1^{\alpha_1}\cdots z_{\ell-1}^{\alpha_{\ell-1}}z_{\ell+1}^{\alpha_{\ell+1}}\cdots z_n^{\alpha_n}u_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}\\&=\sum_{\alpha_1\geq 0,\dots,\alpha_n\geq 0}\frac{1}{2}(q^{\alpha_\ell}-\overline{q^{\alpha_\ell}})\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_k}+\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y_k})z_1^{\alpha_1}\cdots z_{\ell-1}^{\alpha_{\ell-1}}z_{\ell+1}^{\alpha_{\ell+1}}\cdots z_n^{\alpha_n}u_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}=0,\end{aligned}$$

对所有 $k\in\{1,\dots,n\}\setminus\{\ell\}$。

如果 $\mathbf{I}_q=\mathbf{j}$，请记住 $\mathbf{I}_q\mathbf{i}\mathbf{I}_q=i$。

□

注 3.15。我们将把前面的句子写成 $\mathcal{SR}(\bigcup_{k=1}^n \tilde{\Omega}_k)$。令 $F\in\mathcal{SR}(\bigcup_{k=1}^n \tilde{\Omega}_k)$，并取 $(\mathbf{i},\mathbf{j})\in T$ 使得 $F\mid_{\tilde{\Omega}_\ell}\in P^\ell_{\mathbf{ij}}[(Harm_c(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}))^2]$，那么柯西公式为

$$\begin{aligned}F\mid_{\tilde{\Omega}_\ell}(x_1,y_1,\dots,q,\dots,x_n,y_n)=&\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T(A,r)}(w_\ell-q)^{-*}\\&\frac{dw_1\cdots dw_n}{(w_1-z_1)\cdots(w_{\ell-1}-z_{\ell-1})(w_{\ell+1}-z_{\ell+1})\cdots(w_n-z_n)}F\mid_{\tilde{\Omega}_{\ell,\mathbf{i}}}(W),\end{aligned}$$

关于 $F\mid_{\tilde{\Omega}_\ell}$ 的 $\alpha$ 阶导数的柯西积分推广为

$$\begin{aligned}D^\alpha F\mid_{\tilde{\Omega}_\ell}(x_1,y_1,\dots,q,\dots,x_n,y_n)=&\frac{\alpha!}{(2\pi i)^n}\int_{T(A,r)}(w_\ell-q)^{-(\alpha_\ell+1)}\\&\frac{dw_1\cdots dw_n}{(w_1-z_1)^{\alpha_1+1}\cdots(w_{\ell-1}-z_{\ell-1})^{\alpha_{\ell-1}+1}(w_{\ell+1}-z_{\ell+1})^{\alpha_{\ell+1}+1}\cdots(w_n-z_n)^{\alpha_n+1}}\\&F\mid_{\tilde{\Omega}_{\ell,\mathbf{i}}}(W),\end{aligned}$$

$F$ 的泰勒型级数为

$$F\mid_{\tilde{\Omega}_\ell}(x_1,y_1,\ldots,q,\ldots,x_n,y_n)=\sum_{\alpha_1\geq 0,\ldots,\alpha_n\geq 0}(q-w_\ell)^{*\alpha_\ell}(z_1-w_1)^{\alpha_1}\cdots$$
$$(z_{\ell-1}-w_{\ell-1})^{\alpha_{\ell-1}}(z_{\ell+1}-w_{\ell+1})^{\alpha_{\ell+1}}\cdots(z_n-w_n)^{\alpha_n}u_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n},$$

对于所有 $(z_1,\ldots,x_\ell+\mathbf{i}y_\ell,\ldots,z_n)\in D(A,r)\subset\prod_{k=1}^n\Omega_{k,\mathbf{i}}$，其中 $z_k=x_k+\mathbf{i}y_k$对于所有 $k$和 $q=x_\ell+\mathbf{I}_q y\ell$，并且对于所有族 $u_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\in\mathbb{H}\ \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$。

注 3.16. 假设对于所有 $k$，$\Omega_k=\mathbb{B}^4(0,1)$。给定 $f\in\mathcal{P}_\ell[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})]$以及 (i, j) $\in T$，使得 $f\in P^\ell_{\mathbf{ij}}[(Harm_c(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}))^2]$。那么

$$f(z_1,\ldots,q,\ldots,z_n)=\sum_{\alpha_1\geq 0,\ldots,\alpha_n\geq 0}q^{\alpha_\ell}z_1^{\alpha_1}\cdots z_{\ell-1}^{\alpha_{\ell-1}}z_{\ell+1}^{\alpha_{\ell+1}}\cdots z_n^{\alpha_n}u_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n},$$

1. 对于 $q\in\mathbb{B}^4(0,1)\cap\mathbb{C}(\mathbf{j})$，我们看到

$$\frac{d}{dz_k}f(z_1,\ldots,q,\ldots,z_n)$$
$$=\frac{d}{dz_k}\sum_{\alpha_1\geq 0,\ldots,\alpha_n\geq 0}q^{\alpha_\ell}z_1^{\alpha_1}\cdots z_{\ell-1}^{\alpha_{\ell-1}}z_{\ell+1}^{\alpha_{\ell+1}}\cdots z_n^{\alpha_n}u_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$$
$$=\sum_{\alpha_1\geq 0,\ldots,\alpha_\ell\in 2\mathbb{N},\ldots,\alpha_n\geq 0}q^{\alpha_\ell}z_1^{\alpha_1}\cdots\alpha_k z_{\alpha_k}^{\alpha_k-1}\cdots z_{\ell-1}^{\alpha_{\ell-1}}z_{\ell+1}^{\alpha_{\ell+1}}\cdots z_n^{\alpha_n}u_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$$

and

$$\frac{d}{d\overline{z_k}}f(z_1,\ldots,q,\ldots,z_n)=$$
$$\sum_{\alpha_1\geq 0,\ldots,\alpha_\ell\in 2\mathbb{N}-1,\ldots,\alpha_n\geq 0}q^{\alpha_\ell}z_1^{\alpha_1}\cdots\alpha_k z_{\alpha_k}^{\alpha_k-1}\cdots z_{\ell-1}^{\alpha_{\ell-1}}z_{\ell+1}^{\alpha_{\ell+1}}\cdots z_n^{\alpha_n}u_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$$

对于所有 $k\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{\ell\}$，其中 $2\mathbb{N}=\{2n\mid n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ 和 $2\mathbb{N}-1=\{2n-1\mid n\in\mathbb{N}\}$。

2. 根据注 3.8 中给出的纤维丛同构$\Gamma_m$, $\ell$ 算子$\Gamma^2_{\ell,\ m}$ 在前述级数中的作用如下:

$$\Gamma^2_{\ell,m}[\sum_{\alpha_1\geq 0,\ldots,\alpha_n\geq 0}q^{\alpha_\ell}z_1^{\alpha_1}\cdots z_{\ell-1}^{\alpha_{\ell-1}}z_{\ell+1}^{\alpha_{\ell+1}}\cdots z_n^{\alpha_n}u_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}]$$
$$=\sum_{\alpha_1\geq 0,\ldots,\alpha_n\geq 0}q^{\alpha_m}z_1^{\alpha_1}\cdots z_{m-1}^{\alpha_{m-1}}z_{m+1}^{\alpha_{m+1}}\cdots z_n^{\alpha_n}u_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$$

它补充了注 3.15 中给出的泰勒型级数。命题 3.11 中给出的柯西型公式也有类似的性质。

我们将扩展定义 2.1 中给出的概念。

定义 3.17. 给定 $f,g\in\mathcal{P}_\ell[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})]$ 和满足$f,g\in P^\ell_{\mathbf{ij}}[(Harm_c(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}))^2]$ 的 (i, j) $\in T$，定义

$$f\bullet_{\mathbf{i},\mathbf{j}}g:=P^\ell_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[\,f_1g_1+f_2g_2\mathbf{j}\,],$$

其中 $Q^{\ell}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f]=f_1+f_2\mathbf{j}$ 和 $Q^{\ell}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[g]=g_1+g_2\mathbf{j}$，且 $f_1,f_2,g_1,g_2\in$ 属于 $\mathrm{Hol}(\prod_{k=1}^{n}\Omega_{k,\mathbf{i}})$。假设对于所有 $k$，$\Omega_k=\mathbb{B}^4(0,1)$，则

$$f(z_1,\dots,z_{\ell-1},q,z_{\ell+1},\dots,z_n)=\sum_{\alpha_1\geq 0,\dots,\alpha_n\geq 0} q^{\alpha_\ell}z_1^{\alpha_1}\cdots z_{\ell-1}^{\alpha_{\ell-1}}z_{\ell+1}^{\alpha_{\ell+1}}\cdots z_n^{\alpha_n}u_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$$

$$g(z_1,\dots,z_{\ell-1},q,z_{\ell+1},\dots,z_n)=\sum_{\beta_1\geq 0,\dots,\beta_n\geq 0} q^{\beta_\ell}z_1^{\beta_1}\cdots z_{\ell-1}^{\beta_{\ell-1}}z_{\ell+1}^{\beta_{\ell+1}}\cdots z_n^{\beta_n}v_{\beta_1,\dots,\beta_n}$$

对所有 $(z_1,\dots,z_{\ell-1},x_\ell+\mathbf{i}y_\ell,z_{\ell+1},\dots,z_n)\in D(O,1)\subset\prod_{k=1}^{n}\Omega_{k,\mathbf{i}}$ 其中 $q=x_\ell+\mathbf{I}_q y_\ell$。然后定义

$$f*g(z_1,\dots,z_{\ell-1},q,z_{\ell+1},\dots,z_n)=$$

$$\sum_{\delta_1\geq 0,\dots,\delta_n\geq 0} q^{\delta_\ell}z_1^{\delta_1}\cdots z_{\ell-1}^{\delta_{\ell-1}}z_{\ell+1}^{\delta_{\ell+1}}\cdots z_n^{\delta_n}\left(\sum_{\alpha_1+\beta_1=\delta_1,\dots,\alpha_n+\beta_n=\delta_n} u_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}v_{\beta_1,\dots,\beta_n}\right).$$

注 3.18. 给定 $f,g,h\in\mathcal{P}_\ell[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k})]$ 以及 $(\mathbf{i},\mathbf{j})\in T$ 使得 $f,g,h\in P^{\ell}_{\mathbf{ij}}[(Harm_c(\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k}))^2]$ 则 $f\bullet_{\mathbf{i},\mathbf{j}}(ga+h)=(f\bullet_{\mathbf{i},\mathbf{j}}g)a+f\bullet_{\mathbf{i},\mathbf{j}}h$ 且 $f*(gb+h)=(f*g)b+f*h$，其中 $a\in\mathbb{C}(\mathbf{i})$ 和 $b\in\mathbb{H}$。

命题 3.19. 关于 $(\mathcal{H}(\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k})\ \mathcal{P}_\ell,\mathcal{P}_\ell[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k})],T)$.

1. $\mathcal{H}(\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k})$ 的纤维为

$$\mathcal{P}_\ell^{-1}(f):=\{\left(\begin{pmatrix} E_1[f,\mathbf{i},\mathbf{j}] & E_2[f,\mathbf{i},\mathbf{j}]\\ E_3[f,\mathbf{i},\mathbf{j}] & E_4[f,\mathbf{i},\mathbf{j}]\end{pmatrix},(\mathbf{i},\mathbf{j})\right)\ \mid\ (\mathbf{i},\mathbf{j})\in T\},$$

其中 $f\in\mathcal{P}_\ell[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k})]$。

2. 转移函数为

$$g_{v,u}(f)=\varphi_{v,f}^{-1}\circ\varphi_{u,f}(\mathbf{i},\mathbf{j})=\varphi_{v,f}^{-1}\circ\varphi_v(f,R_{\bar{v}u}(\mathbf{i},\mathbf{j}))=R_{\bar{v}u}(\mathbf{i},\mathbf{j}),$$

即，$(\mathcal{H}(\prod_{k=\ 1}^{n}S_{\Omega_k})\ \mathcal{P}_\ell,\mathcal{P}_\ell[\mathcal{H}(\prod_{k=\ 1}^{n}S_{\Omega_k})],T)$ 是一个坐标球面丛。

3. 与 $(\mathbf{i},\mathbf{j})\in T$ 相关联的 $(\mathcal{H}(\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k})\ \mathcal{P}_\ell,\mathcal{P}_\ell[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k})],T)$ 的一个截面是

$$\mathbf{S}^{\ell}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f]:=\left(\begin{pmatrix} E_1[f,\mathbf{i},\mathbf{j}] & E_2[f,\mathbf{i},\mathbf{j}]\\ E_3[f,\mathbf{i},\mathbf{j}] & E_4[f,\mathbf{i},\mathbf{j}]\end{pmatrix},(\mathbf{i},\mathbf{j})\right),\quad \forall f\in\mathcal{P}_\ell[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k})].$$

证明。由直接计算可得，只需指出该截面的连续性源于

$$\|\mathbf{S}^{\ell}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f]-\mathbf{S}^{\ell}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[g]\|_\infty:=\sum_{k=1}^{4}\|E_k[f-g,\mathbf{i},\mathbf{j}]\|_\infty\leq 4\|f-g\|_\infty.$$

□

推论 3.20。令 $f\in\mathcal{P}_\ell[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k})]$。

1. 给定 $(\mathbf{i},\mathbf{j})\in T$，满足 $\left(\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\text{ 且 }(\mathbf{i},\mathbf{j})\right)\in\mathcal{P}_\ell^{-1}(f)$ 的对 $(\alpha,\beta)$、$(\gamma,\delta)\in Harm_c(\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k})$ 是唯一的。

2. $Q^{\ell}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}(f)$ *is a holomorphic function on* $\prod_{k=1}^{n}\Omega_{k,\mathbf{i}}$ *iff there exists* $(\alpha,\beta)\in Harm_c(\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k})$ *such that* $\left(\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 0\end{pmatrix},(\mathbf{i},\mathbf{j})\right)\in\mathcal{P}_{\ell}^{-1}(f)$.

证明。由 $P^{\ell}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ 和 $Q^{\ell}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ 的性质可得。 □

定义 3.21. 给定 $\left(\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},(\mathbf{i},\mathbf{j})\right),\left(\begin{pmatrix}\rho & \sigma\\ \tau & \eta\end{pmatrix},(\mathbf{i},\mathbf{j})\right)\in\mathcal{H}(\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k})$。定义

$$\left(\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},(\mathbf{i},\mathbf{j})\right)+\left(\begin{pmatrix}\rho & \sigma\\ \tau & \eta\end{pmatrix},(\mathbf{i},\mathbf{j})\right):=\left(\begin{pmatrix}\alpha+\rho & \beta+\sigma\\ \gamma+\tau & \delta+\eta\end{pmatrix},(\mathbf{i},\mathbf{j})\right),$$

$$\left(\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},(\mathbf{i},\mathbf{j})\right)\bullet_{\mathbf{i},\mathbf{j}}\left(\begin{pmatrix}\rho & \sigma\\ \tau & \eta\end{pmatrix},(\mathbf{i},\mathbf{j})\right):=\left(\begin{pmatrix}\alpha\rho-\beta\sigma & \alpha\sigma+\beta\rho\\ \gamma\tau-\delta\eta & \gamma\eta+\delta\tau\end{pmatrix},(\mathbf{i},\mathbf{j})\right),$$

$$\mathcal{R}_u\left(\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},(\mathbf{i},\mathbf{j})\right):=\left(\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},(u\mathbf{i}\bar{u},u\mathbf{j}\bar{u})\right),$$

其中 $u\in\mathbb{S}^3$。

若 $\Omega_k=\mathbb{B}^4(0,1)$ 对于 $k=1,\dots,n$，定义

$$\left(\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},(\mathbf{i},\mathbf{j})\right)*\left(\begin{pmatrix}\rho & \sigma\\ \tau & \eta\end{pmatrix},(\mathbf{i},\mathbf{j})\right):=$$
$$\left(\begin{pmatrix}\alpha\rho-\beta\sigma-\gamma(\tau\circ\mathcal{I})-\delta(\eta\circ\mathcal{I}) & \alpha\sigma+\beta\rho-\gamma(\eta\circ\mathcal{I})-\delta(\tau\circ\mathcal{I})\\ \alpha\tau-\beta\eta+\gamma(\rho\circ\mathcal{I})+\delta(\sigma\circ\mathcal{I}) & \beta\tau+\alpha\tau-\gamma(\sigma\circ\mathcal{I})+\delta(\rho\circ\mathcal{I})\end{pmatrix},(\mathbf{i},\mathbf{j})\right),$$

其中 $\mathcal{I}(x_1,y_1,\dots,x_n,y_n)=(x_1,-y_1,\dots,x_n,-y_n)$ 对所有 $(x_1,y_1,\dots,x_n,y_n)\in\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k}$ 均成立。

命题 3.22. $\mathcal{P}_{\ell}$ 的一些性质。若 $A,B\in\left(Harm_c^2(S_\Omega)\right)^2\times\{(\mathbf{i},\mathbf{j})\}$，则

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\ell}(A+B)=&\mathcal{P}_{\ell}(A)+\mathcal{P}_{\ell}(B),\\ \mathcal{P}_{\ell}(A\bullet_{\mathbf{i},\mathbf{j}}B)=&\mathcal{P}_{\ell}(A)\bullet_{\mathbf{i},\mathbf{j}}\mathcal{P}_{\ell}(B),\\ \mathcal{R}^{\ell}_{u}(A)=&P^{\ell}_{u\mathbf{i}\bar{u},u\mathbf{j}\bar{u}}[\,uQ^{\ell}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[\mathcal{P}_{\ell}(A)]\bar{u}\,].\end{aligned}$$

另一方面，如果对所有 $k$ 都有 $\Omega_k=\mathbb{B}^4(0,1)$，那么 $\mathcal{P}_{\ell}(A*B)=\mathcal{P}_{\ell}(A)*\mathcal{P}_{\ell}(B)$。

证明。直接计算以及定义 3.21。 □

注 3.23. 与 [14] 中介绍的拉回类似，我们可以看到，前述运算生成了拉回丛。例如，对于 $g\in\mathcal{P}_{\ell}[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k})]$，定义 $\mathfrak{S}^{\ell}_{g}(f):=f+g$，对所有 $f\in\mathcal{P}_{\ell}[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k})]$均成立。接着考虑 $((\mathfrak{S}^{\ell}_{g})^*(\mathcal{P}_{\ell}[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k})])\ \mathcal{P}_{\ell}',\mathcal{P}_{\ell}[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k})],T)$，其中

$$(\mathfrak{S}^{\ell}_{g})^*(\mathcal{H}(S_\Omega))=\{\left(f,\left(\begin{pmatrix}E_1[f+g,\mathbf{k},\mathbf{l}] & E_2[f+g,\mathbf{k},\mathbf{l}]\\ E_3[f+g,\mathbf{k},\mathbf{l}] & E_4[f+g,\mathbf{k},\mathbf{l}]\end{pmatrix},(\mathbf{k},\mathbf{l})\right)\right)\mid$$
$$f\in\mathcal{P}_{\ell}[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^{n}S_{\Omega_k})],\ (\mathbf{k},\mathbf{l})\in T\},$$

and $\mathcal{P}_\ell{}'(f,A)=f$ for all $(f,A)\in\mathcal{P}_\ell[\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})]\times\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})$.

注 3.24. 多变量全纯函数构成拉回丛的底空间。令 (i, j) $\in T$ 并且

$$\begin{aligned}\mathrm{Hol}_c(\prod_{k=1}^n \Omega_{k,\mathbf{i}}) :=&\mathrm{Hol}(\prod_{k=1}^n \Omega_{k,\mathbf{i}})\cap C(\prod_{k=1}^n \overline{\Omega_{k,\mathbf{i}}},\mathbb{C}(\mathbf{i})),\\ M(f) :=&P^\ell_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f],\end{aligned}$$

对于所有 $f\in$ 全纯函数$_c(\prod_{k=1}^n \Omega_{k,\ \mathbf{i}})$，其中 $\Omega_{k,\ \mathbf{i}}=\Omega_k\cap\mathbb{C}(\mathbf{i})$ 对所有 $k$均成立。则其拉回丛为

$$(M^*(\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})),\mathcal{P}_\ell{}',\mathrm{Hol}_c(\prod_{k=1}^n \Omega_{k,\mathbf{i}}),T)$$

其中

$$M^*(\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k}))=\{(f,A)\in\mathrm{Hol}_c(\prod_{k=1}^n \Omega_{k,\mathbf{i}})\times\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})\ \mid\ \mathcal{P}_\ell(A)=P^\ell_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[f]\}$$

且 $\mathcal{P}_\ell{}'(f,A)=f$，对于所有 $(f,A)\in$全纯函数$_c(\prod_{k=1}^n \Omega_{k,\ \mathbf{i}})\times\mathcal{H}(\prod_{k=1}^n S_{\Omega_k})$。

## 4. 结论与未来工作

给定轴对称 s-域 $\Omega_1$，.....，$\Omega_n\subset\mathbb{H}$，当纤维丛理论将切片正则性扩展到多个维度时，$\Omega_k$ 上的 $\Omega_k$ 的坐标切片扩张 $\bigcup_{k=1}^n\ \tilde{}\Omega_k$以及四元数右线性空间$\mathcal{SR}(\bigcup_{k=1}^n\ \tilde{}\Omega_k)$自然地出现。对于 $n=1$，我们有 $\mathcal{SR}(\bigcup_{k=1}^1\ \tilde{}\Omega_k)=\mathcal{SR}(\Omega_1)$。

作为未来的工作，我们需要进一步描述函数空间 $\mathcal{SR}(\bigcup_{k=1}^n\ \tilde{}\Omega_k)$的更多性质，描述 $\mathcal{SR}(\bigcup_{k=1}^n\ \tilde{}\Omega_k)$中多复变函数论（SCV）中的一些现象（如 Hartogs 现象）的表现，寻找 $\mathcal{SR}(\bigcup_{k=1}^n\ \tilde{}\Omega_k)$中类似于 Cullen 导数的微分算子。我们还可以计算 Bergman 空间、Dirichlet 空间、Besov 空间以及单变量切片正则函数理论中已经描述的其他函数空间在 $\mathcal{SR}(\bigcup_{k=1}^n\ \tilde{}\Omega_k)$中的对应版本。

对于 $n=2$而言，纤维丛理论是否能够证明左切片正则性和右切片正则性的同时存在？例如，我们可以考虑 $\mathbb{B}^4(0,1)\times\mathbb{B}^4(0,1)$上的如下收敛级数

$$f(q_1,q_2)=\sum_{\alpha_1\geq 0,\alpha_2\geq 0} q_1^{\alpha_1}u_{\alpha_1,\alpha_2}q_2^{\alpha_1},$$

$q_k=x_k+\mathbf{I}_q y_k$对 $k=1$、2 和 $u_{\alpha_1,\ \alpha_2}\in\mathbb{H}$对于所有族 $\{\alpha_1,\alpha_2\}$，映射 $q_1\mapsto f(q_1,q_2)$ 和 $q_2\mapsto f(q_1,q_2)$ 分别是 $\mathbb{B}^4(0,1)$ 上的左切片函数和右切片函数。

## 声明

资金支持
国立理工学院（资助编号 SIP20232103）和 CONACYT。

利益冲突
作者声明，就本文的发表而言，他不存在利益冲突。

数据和材料的可用性 不适用

代码可用性：不适
用

## 参考文献

[1] Adams, W.W., Berenstein, C.A., Loustaunau, P., *Regular functions of several quaternionic variables and the Cauchy-Fueter complex* 1999 。《J Geom Anal.》（）9，1–15。[2] H. J. Bernstein, A. Philips, *Fiber Bundles and Quantum Theory*，《Scientific American》，245 1（1981），122–137。[3] D. Bleecker，*Guage theory and variational principles*，Dover Books on physics Dover Books on mathemtics，Courier Corporation，（2005）。[4] G. E. Bredon，*Topology and Geometry*，Springer Verlang，1913年。[5]M. P. Castillo Villalba, F. Colombo, J. Gantner, J. O. Gonz´alez-Cervantes，*Bloch, Besov and Dirichlet Spaces of Slice Hyperholomorphic Functions*，Complex Analysis and Operator Theory，9（2014），479–517。[6] R. L. Cohen, *The topology of fiber bundles*，斯坦福大学，1998年。[7]F. Colombo, I. Sabadini, *A structure formula for slice monogenic functionsand some of its consequences*，超复分析，Trends in Mathematics，Birkh¨auser，101–114（2009）[8] F. Colombo, J. O. Gonz´alez-Cervantes, I. Sabadini,，Compl. Var. Ell. Equa.，58（2013），1355–1372。[9] F. Colombo, I. Sabadini, D.C. Struppa，*Noncommutative Functional Calculus. Theory and Applications of Slice Hyperholomorphic Functions*，Birkhauser，巴塞尔，289 2011。[10] F. Colombo, I. Sabadini, D.C. Struppa, *Algebraic Properties of the Module of Slice Regular Functions in Several Quaternionic Variables*，Indiana University Mathematics Journal，61 4，（2012）1581–1602。[11] F. Colombo, G. Gentili, I. Sabadini, D.C. Struppa, *Extension results for slice regular functions of a quaternionic variable* **222** 2009 1793 ，《数学进展》，（），– 1808。[12] F. Colombo, I. Sabadini, and D. C. Struppa, *Entire slice regular functions*。Springer Briefs in Mathematics，Springer，2016年。

[13] Ghiloni, R., Perotti, A. *Slice regular functions in several variables*, 《Mathematische Zeitschrift》, 302（2022）, 295–351。DOI：10.1007/s00209-022-03066-9[14] J. O. Gonz´alez-Cervantes。。*A fiber bundle over the quaternionic slice regular functions* 1 072 2021 《应用克利福德代数进展》（IF .），发布日期：- 06-21，DOI：10.1007/s00006-021-01158-z[15] J. O. Gonz´alez-Cervantes。。*Quaternionic slice regular functions associated with some sphere bundles* 2021 1 12 《复变函数与椭圆方程》，（）–。DOI 10.1080/17476933.2021.1971658 [16] J. O. Gonz´alez-Cervantes。。*On fiber bundles and quaternionic slice regular functions* 2022 Complex Analysis and Operator Theory，。[17] J. O. Gonz´alez-Cervantes, I. Sabadini，Compl. Var. Ell. Equa.（），*On some splitting properties of slice regular functions* **62** 2017 1393 1409 [18] G. Gentili, C. Stoppato, D. C. Struppa, *Regular functions of a quaternionic variable* 2013 ，施普林格数学专著。Springer，海德堡，。[19] A. Hatcher, *Algebraic-Topology*，剑桥大学出版社，2002年。[20] H. Grauert, Th. Peternell, R. Remmert, *Several Several Complex Variables VII: Sheaf-Theoretical Methods in Complex Analysis*，数学科学百科全书，Springer Verlag，74 1991年。[21] R. Heidrich and G. Jank, *On iteration of quaternionic Möbius transformation*, Compl. Var. Theory Appls.，29（1996），313–318。[22] D. Husemoller, *Fibre bundles*, Springer Verlag，第3版，1993年。[23] S. Krantz, *Function theory of several complex variables*, 美国数学学会，第2版，2001年。[24] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1951年。[25] G. Walschap, *Metric Structures in Differential Geometry*，Springer，2004年。[26] J.O Weatherall, *Fiber bundles*, *Yang-Mills theory*, *and general relativity*，Synthese，193（2016），2389–2425。[27]D. Xinyuan, G. Ren, I. Sabadini. *A representation formula for slice regular functions over slice-cones in several variables*《纯粹与应用数学年刊》。（1923）。DOI：10.1007/s10231-023-01325-y

J. Oscar Gonz´alez-Cervantes
数学系 E.S.F.M.，I.P.N. 07338 墨西哥城，墨西哥 电子邮箱：
jogc200678@gmail.com