arXiv:2304.08011v1 [math.RT] 17 Apr 2023

何时继承倾斜离散性?

TAKUMA AIHARA 和 TAKAHIRO HONMA

Abstract. 我们探讨 silting 离散性何时能够继承。由此可知，对代数进行幂等元截断以及取同调满射，都会传递 silting 离散性。我们还研究了单连通张量代数和倾斜非离散自内射 Nakayama 代数的分类。本文包含两个附录：一个指出每个导出离散代数都是 silting 离散的，另一个讨论其倾斜对象均为倾斜对象的三角范畴。

1. Introduction

Silting 离散性是三角范畴上的一种有限性条件；具体而言，silting 离散三角范畴在任意倾斜对象区间 [Ai1] 中仅有有限个倾斜对象。事实上，倾斜对象的集合具有偏序集结构 [AI]。在这种情况下，我们能够全面把握倾斜对象的整体图景，而且这样的三角范畴具有非常良好的结构。例如，silting 离散三角范畴满足 Bongartz 型条件；也就是说，任意预倾斜对象都是部分 silting [AM]。对于一个 ST 对 $(\mathcal{C},\mathcal{D})$，$\mathcal{C}$ 是 silting 离散的，当且仅当 $\mathcal{D}$ 是 t-离散的，当且仅当 $\mathcal{D}$ 中的每个有界 t-结构都是代数的；此外，在这种情况下，$\mathcal{D}$ 的稳定性空间是可缩的 [AMY]；另见 [PSZ]。

一般而言，要判断给定的三角范畴是否 silting 离散非常困难。因此，文献 [AAC, Ai1, AM]，提出了一种极其强大的工具，并将其应用于代数闭域上的有限维代数的完美导出范畴；我们已知一些完美导出范畴为 silting 离散的代数，即 silting 离散代数 [AAC, AK, Ai1, AI, AHMW, AM, Au, AD, BPP, EJR]。典型的 silting 离散代数包括局部代数、Dynkin 型的分段遗传代数，以及表示有限对称代数。[YY] 还证明，对于一个 ST 三元组 $(\mathcal{C},\mathcal{D},T)$，若 $\mathcal{C}$ 是 T 离散的，则它是 silting 离散的。这意味着任何导出离散代数都是 silting 离散的；我们也将在附录中考察这一结果。由 [AMY] 可知，若 $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 是关于 $d=1$ 的 $(d+1)$-Calabi–Yau 对（$d=1$ 为 2），则 $\mathcal{C}$ 是 silting 离散的，当且仅当某个 silting 对象的自同态代数是 τ-倾斜有限的。由此可得，对于有限箭图 Q 的导出前投射代数 $\Gamma:=\Gamma_{d+1}(Q)$，若 $H^0(\Gamma)$ 有限维（注意，它是一个非正 dg 代数），则 Γ 的完美导出范畴是 silting 离散的，当且仅当 Q 是 Dynkin 型。

本文旨在探究 silting 离散性何时能够传递。例如，导出等价必然会传递 silting 离散性。对

关键词和短语：silting 对象、silting 离散、完美导出范畴、微分分次代数、粘合、自内射 Nakayama 代数。2020 年数学主题分类：16B50、16G20、16E45、18G80。TA 的部分研究经费由日本学术振兴会青年科学家研究资助项目 19K14497 提供。

局部代数进行张量积也能传递这一性质 [AH]。本文的主要定理之一（定理 2.10）指出，silting 离散三角范畴的全三角子范畴也具有 silting 离散性。此外，我们证明了（非正）微分分次代数之间的同调满射会诱导 silting 离散性（定理 2.15）。由此得到以下结果。

定理 1（推论 2.11 和 2.22）。设 Λ 是代数闭域上的有限维代数。假设 Λ 是 silting 离散的。那么有以下结论。

（1）对于 Λ 的幂等元 e，截断 $e\Lambda e$ 是 silting 离散的。（2）若 e 是 Λ 的分层幂等元，则 $\Lambda/\Lambda e\Lambda$ 是 silting 离散的。

我们注意到，代数的商总是继承 τ-倾斜有限性 [DIRRT]，但不一定继承 silting 离散性（小节 2.5）。

Bongartz 型条件也是 silting 理论中最重要的课题之一。我们自然会问，Bongartz 型条件是否总是成立[1]。例如，silting 离散的三角范畴满足 Bongartz 型条件，并且每个 2-项预 silting 对象都可以补全为一个 silting 对象 [AM, Ai1]。请注意，倾斜版本（即预倾斜对象是否为部分倾斜对象？）往往不成立 [R1, LVY]；参见例 B.8。定理 1 及其证明在一定条件下给出了一个新的 Bongartz 型引理；一般情形见推论 2.17，它恢复了 2-项版本。

定理 2（推论 2.18(2)）。设 e 是 Λ 的一个幂等元。则，完美导出范畴中的一个预 silting 对象 Λ 生成 $e\Lambda$ 的厚闭包时，它是部分 silting 的。

作为定理 1 的推论，我们对 silting 离散的单连通张量代数进行了分类；注意，三个非局部代数的张量代数从来都不是 silting 离散的 [AH]。此外，我们还得到了一个令人惊讶的结果：表示有限自内射代数不一定是 silting 离散的。

T定理 3（命题 3.1，定理 3.4 和 3.6）。（1）单连通代数是 silting 离散的，当且仅当它是 Dynkin 型的分段遗传代数。（2）设 A 和 B 是代数闭域 K 上的有限维（非局部）单连通代数。以下条件等价：（i） $A \otimes_K B$ 是 silting 离散的；（ii）它是 D_4、E_6 或 E_8 型的分段遗传代数；（iii）它与次数为 ≤ 4 的交换梯导出等价。（3）具有 n 个长度为 r 的简单模的自内射 Nakayama 代数在以下情形下不是 silting 离散的：（i） $r = 3$、4 和 $n \geq 11$；（ii） $r = 5$、6 和 $n \geq r + 8$；或（iii） $r \geq 7$ 和 $n \geq 2r + 1$。

2. Main results

本文中，设 $\mathcal{T}$ 是一个 Krull–Schmidt 三角范畴，它是关于代数闭域 K 的 K-线性范畴，且 Hom-有限。对于 $\mathcal{T}$ 中的对象 T，其厚闭包记为 thick T；也就是说，它是包含 T 的 $\mathcal{T}$ 的最小厚子范畴。

倾斜对象在本文中起着核心作用。

[1]最近，这个问题得到了否定的回答 [LZ]。（见 B.2小节。）

定义 2.1。设 T 是 $\mathcal{T}$ 的一个对象。

(1) 若 T 满足对任意 $i>0$ （$i\neq 0$），都有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(T,T[i])=0$，则称其为预 silting（预 tilting）。(2) 若预倾斜对象 T 满足 $\mathcal{T}=\mathrm{thick}\ T$，则称其为 silting（倾斜）对象。(3) 部分 silting（部分倾斜）对象定义为某个 silting（倾斜）对象的直和项。

记号 2.2。我们使用以下记号。

- 用 $\mathrm{silt}\mathcal{T}$ 表示 $\mathcal{T}$ 的基本 silting 对象的同构类集合。
- 我们始终假设 $\mathrm{silt}\mathcal{T}$ 非空。
- 对于 $\mathcal{T}$ 的 silting 对象 A 及 $d>0$，d_A-$\mathrm{silt}\ \mathcal{T}:=\{T\in\mathrm{silt}\ \mathcal{T}\mid A\geq T\geq A[d-1]\}$。
- 令 S 为 $\mathcal{T}$的一个预倾斜对象。$\mathrm{silt}_S\mathcal{T}$中由 $\mathrm{silt}\mathcal{T}$的所有以 S 为直和项的 silting 对象组成。

作为术语，对于 $\mathcal{T}$中的预倾斜对象 T和 U，若对每个 $i>0$，都有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(T,U[i])=0$，则记为 $T\geq U$。事实上，这在 $\mathrm{silt}\mathcal{T}$ [上给出了一个偏序（参见 AI，定理 2.11]）。我们定义 $\mathcal{T}$ 的 silting 离散性，这是本文的主题。

定义 2.3. (1) 若 $\mathcal{T}$存在一个 silting 对象 A，使得对任意 $d>0$，集合 d_A-$\mathrm{silt}\mathcal{T}$都是有限的，则称 $\mathcal{T}$为 silting 离散；关于 silting 离散性的等价条件，参见 [Ai1，命题 3.8] 。（按照约定，不含 silting 对象的三角范畴也称为 silting 离散。）(2) 对于 $\mathcal{T}$中的 silting 对象 A，若 2_A-$\mathrm{silt}\mathcal{T}$是有限集，则称其为 $\mathcal{T}$ 2_A-silting 有限。(3) 若一个三角范畴对于 $\mathcal{T}$中的每个 silting 对象 A 都是 2_A-silting 有限的，则称其为 2-silting 有限。

备注 2.4. (1) 2_A-silting 有限性与 $\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(A)$ 的 τ-倾斜有限性并无二致，参见 [DIJ，推论 2.8]。关于 τ-倾斜理论，参见 [AIR]。(2) silting 离散性在三角等价下保持不变，但 2_A-silting 有限性并非总是如此；这取决于所选的 silting 对象 A。

我们回顾 [Ai1, AM] 中的若干结果。

命题 2.5. 设 A 是一个 silting 对象，T 是 $\mathcal{T}$ 的一个预倾斜对象。

(1) [Ai1，命题 2.16] 若 $A\geq T\geq A[1]$，则 T 是一个 silting 对象的直和项，且该对象位于 A 与 $A[1]$之间的区间内。(2) [AM，命题 2.14] 假设 $\mathcal{T}$ 是 2_A-silting 有限的。若 $A\geq T\geq A[2]$，则存在一个 $\mathcal{T}$ 的 silting 对象 B，满足 $A\geq B\geq T\geq B[1]\geq A[2]$。(3) [AM，命题 2.14] 假设 $\mathcal{T}$ 是 silting 离散的。那么存在一个 $\mathcal{T}$ 的 silting 对象 P，使得 $P\geq T\geq P[1]$。(4) [AM，定理 2.4] $\mathcal{T}$ 当且仅当它是 2-silting 有限的时，才是 silting 离散的。

下文将研究三角范畴的 silting 离散性:

- 满三角子范畴继承 silting 离散性（2.1）；
- 再胶合会对 silting 离散性产生影响（2.2）。

此外，我们也将把 silting 离散代数作为这些推论来考察。

设 Λ 是一个有限维的 K代数，它是基本且环不可分解的；除非另有说明，模均指有限维右模。Λ 的完美导出范畴记为 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$。

如果 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ 是 silting 离散的，我们就称 Λ 是 silting 离散的。下面给出一个我们首先应当注意的倾斜离散代数的例子；本文后续部分会经常用到它。

例 2.6. 类型为 $\mathcal{H}$ 的分段遗传代数是 silting 离散的，当且仅当 $\mathcal{H}$ 属于 Dynkin 型。

设 Q 是一个（有限）箭图。对于 Q 中的箭头 $\alpha: i \to j$，我们考虑其形式逆 $\alpha^{-1}: j \to i$，并定义虚次数 $\deg(\alpha^{\pm}) = \pm 1$（双符号对应）。游走（由连续的箭头和形式逆组成的序列）的虚次数按对数规则定义：$\deg(\alpha\beta) = \deg(\alpha) + \deg(\beta)$。如果任意闭游走的虚次数均为 0，我们就称 Q 是可分次的。例如，每个树箭图（即底层图是树）都是可分次的。注意，可分次箭图不含有向圈；但反过来不一定成立。

我们考察根基平方为零的 silting 离散代数。

命题 2.7. 设 Λ 是由可分次箭图 Q 给出的根平方为零代数。那么，当且仅当 Q 是 Dynkin 时，Λ 是 silting 离散的。

证明. 由 [Y，定理 4.4] 可知，Λ 与 KQ 导出等价。 □

注意，存在一个由不可分次的非 Dynkin 无圈箭图表示的 silting 离散根平方为零代数（例 2.19）。

W我们称 Λ 是温和的，如果它由带有关系 I 的箭图 Q 表示，使得 at

（1）对于 Q 的任意顶点，入箭头至多有 2 个，出箭头至多有 2 个；（2）对于 Q 中的每条箭 $x: i \to j$，在 i 处终止（从 j 出发）且满足 $yx \notin I$（$xy \notin I$）的箭 y 的数量至多为 1；（3）对于 Q 中的每条箭 $x: i \to j$，在 i 处终止（从 j 出发）且满足 $yx \in I$（$xy \in I$）的箭 y 的数量至多为 1；（4）I 中的所有关系都是长度为 2 的路径。

如果箭图 Q 的底层图恰好包含一个环，则称其为单环。温和单环代数定义为由单环箭图给出的温和代数。如果环上顺时针和逆时针定向关系的数量相同，则称温和单环代数满足时钟条件。

下面的命题也很有用。

命题 2.8. 温和单环代数 Λ 是 silting 离散的，当且仅当它不满足时钟条件。

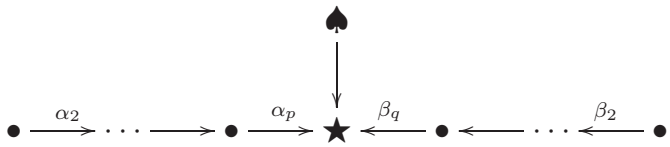
证明。假设 Λ 满足时钟条件。由 [AS，定理 (A)],可知，$\Lambda\tilde{}$是类型为 A的分段遗传代数，因此不是 silting 离散的。

假设 Λ不满足时钟条件。由 [V，定理] 可知，Λ 是导出离散的，因此根据 [YY，例 3.9，推论 4.2]，它是 silting 离散的。□

$\tilde{}$让我们考察具有交换关系的类型 A 的 silting 离散性。

命题 2.9. 设 Λ 是由类型为 $A_{p,q}$ 且具有交换关系的箭图给出的代数；假设 $1 < p \leq q$。那么，当且仅当 $p = 2$ 且任意 q，或 $p = 3$ 且 $q = 3, 4, 5$ 时，Λ 是 silting 离散的。

证明。令 Q 为箭图 $\bullet \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \longrightarrow \bullet \xrightarrow{\alpha_p} \bigstar \xleftarrow{\beta_q} \bullet \longleftarrow \cdots \xleftarrow{\beta_2} \bullet$。由于 Λ 是路径代数 KQ 关于与顶点 $\bigstar$ 对应的不可分解内射模的单点扩张，我们看到它与 KQ 关于与顶点 $\bigstar$ [对应的不可分解投射模的单点扩张导出等价；参见 BL，定理 1], 。后者是如下箭图的路径代数



因此，当且仅当满足所需条件之一时，它才是 silting 离散的。 □

2.1. 满三角子范畴。以下是第一个主定理。

定理 2.10. 设 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{T}$ 的全三角子范畴。若 $\mathcal{T}$ 是 silting 离散的，则 $\mathcal{U}$ 也是如此。

证明。我们证明 $\mathcal{U}$ 是 2-silting 有限的；因此，由命题 2.5(4) 可知它是 silting 离散的。设 T 是 $\mathcal{U}$ 中的一个 silting 对象。由于 T 在 $\mathcal{T}$ 中是预 silting 的，我们由命题 2.5(3) 得到一个满足 $A \geq T \geq A[1]$ 的 silting 对象 A。设 U 是 $\mathcal{U}$ 的一个 silting 对象，且满足 $T \geq U \geq T[1]$。由于存在一个三角 $T_1 \to T_0 \to U \to T_1[1]$，其中 T_0，$T_1 \in$ 在 $\mathcal{U}$ [中属于 add T，由命题 2.24], 可得不等式 $A \geq U \geq A[2]$。命题 2.5(1) 和 (2) 推出，U 是一个位于 A 与 $A[2]$ 之间区间内的 silting 对象的直和项。由于该区间是有限集，我们推得 $\{U \in \text{silt}\,\mathcal{U} \mid T \geq U \geq T[1]\}$ 也是有限的。□

全忠实函子的一个典型例子是三角函子 $- \otimes_{e\Lambda e} e\Lambda : \mathrm{K^b}(\text{proj}\ e\Lambda e) \to \mathrm{K^b}(\text{proj}\,\Lambda)$，其中 e 是 Λ的一个幂等元。这推出定理 2.10 的一个推论，即取幂等元截断会保留原有的 silting 离散性。

推论 2.11. 设 e 是 Λ的一个幂等元。若 Λ 是 silting 离散的，则 $e\Lambda e$也是。

2.2. 再胶合。本小节中，我们考察再胶合对 silting 离散性的影响。

我们先研究 silting 约化 [IY], ；它使我们能够将 $\mathcal{T}$ 关于某个预 silting 对象的厚闭包的 Verdier商实现为 $\mathcal{T}$的某个子因子范畴，并且使倾斜偏序集之间的同构得以实现。

设 S 是 $\mathcal{T}$的一个预 silting 对象，并令 $\mathcal{S} := \text{thick}\,S$。 $\mathcal{T}$关于$\mathcal{S}$ 的 Verdier商记作 $\mathcal{T}/\mathcal{S}$。

取 $\mathcal{T}$ 的全子范畴 $\mathcal{Z}$ 如下:

$$\mathcal{Z} := \{X \in \mathcal{T} \mid \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, S[i]) = 0 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(S, X[i]) \text{ for any } i > 0\}.$$

我们用 $\frac{\mathcal{Z}}{[S]}$ 表示 $\mathcal{Z}$ 关于理想 $[S]$ 的加性商，它具有三角结构 [IY，定理 3。6]。

于是，silting 约化 [IY，定理 3.6]表明， $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ 与 $\frac{\mathcal{Z}}{[S]}$之间存在三角等价。由于 $\mathcal{T}$是 Hom- 有限且满足 Krull–Schmidt 性质，因此 $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ 也如此。

现在，我们为本小节的主定理准备一个引理。

Le理 2.12。沿用上述记号。若 $\mathcal{T}$ 是 silting 离散的，则 $\mathcal{T}/\mathcal{S}$也是如此。

证明。根据 silting 约化 [IY，定理 3,7 和推论 3.8], ，自然函子$\mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{S}$ 诱导了偏序集 $\operatorname{silt}_S \mathcal{T} \simeq \operatorname{silt} \mathcal{T}/\mathcal{S}$ 之间的同构。因此，不难推得 $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ 是 silting 离散的。□

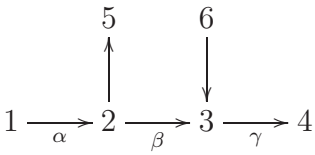
注 2.13。为应用 silting 约化，我们假设 $\operatorname{silt} \mathcal{T} \neq \emptyset$ ；但也可能出现 $\operatorname{silt} \mathcal{T}/\mathcal{S} = \emptyset$ ，参见 B.2小节。

为实现本小节的目标，我们需要（非正的）微分分次代数。

设 $\mathcal{A}$ 是一个微分分次 K-代数，并用 per($\mathcal{A}$) 表示 $\mathcal{A}$ 的完美导出范畴。若 $\mathcal{A}$ 是非正的且具有有限维上同调，则 per($\mathcal{A}$) 是 Hom-有限且满足 Krull–Schmidt 性质；例如参见 [AMY, 命题 6.12] 。

我们给出一个引人注目的例子 [Y，例 5.3], ，其中指出 $\mathcal{A}$ 的零次上同调 $H^0(\mathcal{A})$ 不一定继承其 silting 离散性；此外，silting 对象的自同态代数也不总能继承这一性质。

例 2.14. 设 Λ 为由箭图 Q 给出的代数

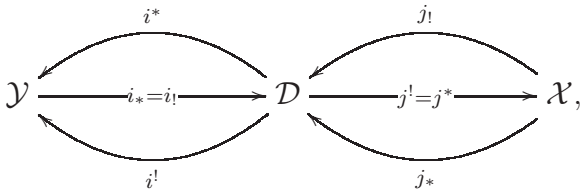


带有关系 $\alpha\beta\gamma = 0$。那么，我们很容易观察到 Λ 是 E_6 型的分段遗传代数；因此，它是 silting 离散的。取 $T := S_1 \oplus S_2[1] \oplus S_3[2] \oplus S_4[3] \oplus S_5[2] \oplus S_6[1]$，其中 S_i 是与 Q 的顶点 i 对应的简单模；由于 Λ 具有有限整体维数，它属于 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda)$。我们看到， T 是一个 silting 对象，其 dg 自同态代数 $\mathcal{A}$ 是非正的且具有有限维上同调；因此，per($\mathcal{A}$) 满足 Krull–Schmidt 性质。根据 Keller–Rickard 定理 [K, R1], ，我们有一个三角等价 per($\mathcal{A}$) $\simeq \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda)$，故 per($\mathcal{A}$) 是 silting 离散的。然而， $\mathcal{A}$ 的零次上同调 $H^0(\mathcal{A})$ 同构于 $\operatorname{End}_{\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda)}(T)$，是 Q^{op} 的根平方为零代数，并且它与 D_5 型遗传代数导出$\widetilde{\ }$等价。因此，$H^0(\mathcal{A})$ 不是 silting 离散的。

这个例子也说明，尽管 Dynkin 型的导出前投射代数 $\mathcal{A}$ （它是一个非正 dg 代数）拥有 silting 离散的完美导出范畴 [AMY，推论 8.6], ，但除了 A_2、D_{2n}、E_7 和 E_8 之外，作为 $\mathcal{A}$ 的零次上同调出现的 Dynkin 型前射影代数是否为 silting 离散，仍是一个悬而未决的问题。我们的目标是

^{g}本小节的目标。

回顾一下，粘合 $\mathcal{R}$ 由以下三角范畴$\mathcal{D}$、 $\mathcal{X}$和 $\mathcal{Y}$的数据以及它们之间的三角函子组成：



使得

(1) (i^*, i_*)、$(i_!, i^!)$、$(j_!, j^!)$ 和 (j^*, j_*) 是伴随对；(2) i_* $(= i_!)$ $j_!$ 和 j_* 是全忠实的；(3) $\mathcal{D}$ 中的任意对象 D 都有两个三角形

$$i_!i^!(D) \to D \to j_*j^*(D) \to i_!i^!(D)[1] \text{ and } j_!j^!(D) \to D \to i_*i^*(D) \to j_!j^!(D)[1],$$

其中， D 周围的态射由伴随给出。

省略三角函子后，我们将这样的重粘写作 $\mathcal{R} = (\mathcal{Y}, \mathcal{D}, \mathcal{X})$。

我们用 D(–) 表示（无界）导出范畴；对于 D(Λ) 中的对象 X ， Tria(X) 表示 D(Λ) 中包含 X 且对所有直和封闭的最小全三角子范畴。

从现在起，我们考虑以下两种情形之一。

- 从给定的粘合 $(\mathcal{Y}, \mathrm{D}(\Lambda)\ \mathcal{X})$ 出发，其中 $\mathcal{X}$紧生成：于是，根据 [AHMV，定理 4.5] $\mathcal{X}$ 可写为 Tria(S)，其中 S 是 $\mathrm{K^b}$(proj Λ) 中的某个预 silting 对象。

- 从给定的预 silting 对象 S 出发，该对象属于 $\mathrm{K^b}$(proj Λ)：由于 Tria(S) 是 D(Λ) 的 smashing子范畴，根据 [AHMV，命题 3.5]，，存在 D(Λ) 的一个全三角子范畴 $\mathcal{Y}$，使得 ($\mathcal{Y}$, D(Λ), Tria(S)) 构成一个粘合；实际上，$\mathcal{Y}$ 与 Tria(S) 右正交，参见 [NS，推论 2.4]。

无论哪种情形，对于 $\mathrm{K^b}$(proj Λ) 中的预 silting 对象 S，我们都有一个粘合 ($\mathcal{Y}$, D(Λ), Tria(S))。此外，得益于 Nicolas–Saorin 的结果 [NS，第 4], 节中存在一个 dg K-代数 $\mathcal{A}$ 以及一个 dg 代数的态射 $\varphi : \Lambda \to \mathcal{A}$ ，使得 $i_! = - \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}$ 诱导出一个粘合 (D($\mathcal{A}$), D(Λ), Tria(S))。这里， φ 嵌入到 D($\Lambda^{\mathrm{op}} \otimes_K \Lambda$) 中的三角 $X := \mathrm{RHom}_\Lambda(S, \Lambda) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} S \to \Lambda \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A} \to X[1]$ 之中，其中 $\mathcal{B}$ 是 S 的 dg 自同态代数。显然，对于任意 i， $H^i(\mathcal{A})$ 都是有限维的。也可以将 $\mathcal{A}$ 描述为 $\mathrm{K^b}$(proj Λ)/thick(S) 的某个 dg 增强中的 Λ 的 dg 自同态代数。这样的态射 φ 称为同调满射；参见 [P]。

现在，我们陈述本文的第二个主定理。

Theo注 2.15. 沿用上述记号。若 Λ 是 silting 离散的，则 per($\mathcal{A}$) 也是如此 .

关键之处在于，证明与 [KY1，推论 2.12(a)] 的证明类似。

证明。定理 2.15 之前的粘合 (D($\mathcal{A}$),D(Λ),Tria(S)) 导出了三角范畴的正合列 $0 \to$ Tria(S) $\to$ D(Λ) $\xrightarrow{i^*}$ D($\mathcal{A}$) $\to 0$ 。由于 S 是 $\mathrm{K^b}$(proj Λ) 中的预 silting 对象，我们由 Thomason–Trobaugh–Yao 局部化定理推出

[N，定理 2.1] 表明 i^* 诱导出三角等价 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)/\,\mathrm{thick}(S) \simeq \mathrm{per}(\mathcal{A})$，因此根据引理 2.12，$\mathrm{per}(\mathcal{A})$ 是 silting 离散的。□

注 2.16. 对于非正 dg K-代数 Λ，定理 2.15 同样成立。

定理 2.15 的证明引出了以下结果，其中提到了针对给定预 silting 对象 S 的 Bongartz 型引理；若 $\Lambda \geq S \geq \Lambda[1]$，则 $\mathcal{A}$ 由于$H^i(\mathcal{A}) \simeq H^{i+1}(X)$而是非正的，因此该结果推广了命题 2.5(1)。

推论 2.17. 保持定理 2.15 之前的记号。假设 $\mathcal{A}$ 是非正的。那么 S 是部分 silting。

证明. 在定理 2.15 的证明中，我们得到了一个三角等价 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\ \Lambda)/\,\mathrm{thick}\,S \simeq \mathrm{per}(\mathcal{A})$。silting 约化（引理 2.12）给出了偏序集之间的同构 $\mathrm{silt}_S(\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)) \simeq \mathrm{silt}(\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\ \Lambda)/\,\mathrm{thick}\,S) \simeq \mathrm{silt}(\mathrm{per}(\mathcal{A}))$。由于 $\mathcal{A}$ 是非正的，它是 $\mathrm{per}(\mathcal{A})$ 中的 silting 对象，因此 $\mathrm{silt}(\mathrm{per}(\mathcal{A}))$ 非空；$\mathrm{silt}_S(\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda))$ 也非空。由此可知，S是部分 silting。□

设 e 是 Λ 的一个幂等元。按照 [KY1，命题 2.10] 及其证明，我们可以构造一个非正的微分分次 K-代数 $\mathcal{A}_e$ 和一个微分分次代数的同调满射 $\varphi\colon \Lambda \to \mathcal{A}_e$；将典范态射 $\Lambda e \otimes^{\mathbf{L}}_{e\Lambda e} e\Lambda \to \Lambda$ 嵌入三角

$$\Lambda e \otimes^{\mathbf{L}}_{e\Lambda e} e\Lambda \to \Lambda \xrightarrow{\varphi'} \mathcal{A}' \to \Lambda e \otimes^{\mathbf{L}}_{e\Lambda e} e\Lambda[1],$$

并取标准截断 $\mathcal{A}_e := \sigma^{\leq 0}(\mathcal{A}')$ 和 $\varphi := \sigma^{\leq 0}(\varphi')$。那么，$\mathcal{A}_e$ 和 φ 就是所需的微分分次代数和同调满射，因为我们有同构

$$H^i(\mathcal{A}_e) \simeq \begin{cases} 0 & (i > 0); \\ \Lambda/\Lambda e\Lambda & (i = 0); \\ \mathrm{Ker}(\Lambda e \otimes_{e\Lambda e} e\Lambda \to \Lambda e\Lambda) & (i = -1); \\ \mathrm{Tor}^{e\Lambda e}_{-i-1}(\Lambda e, e\Lambda) & (i < -1). \end{cases} \tag{2.17.1}$$

下面给出定理 2.15 和推论 2.17 的一个推论。

推论 2.18. 设 e 是 Λ 的一个幂等元。则有如下结论。

(1) 若 Λ 是 silting 离散的，则 $\mathrm{per}(\mathcal{A}_e)$ 也是如此。(2) $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ 中生成 $\mathrm{thick}(e\Lambda)$ 的预倾斜对象是部分 silting。

证明. 如上所述，我们得到一个粘合 $(\mathrm{D}(\mathcal{A}_e), \mathrm{D}(\Lambda), \mathrm{Tria}(e\Lambda))$，并且知道 $\mathcal{A}_e$ 是非正的。因此，第一个断言直接由定理 2.15 得出。若 S 是 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ 中生成 $\mathrm{thick}(e\Lambda)$ 的预倾斜对象，则有 $\mathrm{Tria}(S) = \mathrm{Tria}(e\Lambda)$，因此最后一个断言由推论 2.17 得出。□

在本小节的其余部分中，借助 [KY3]，我们将对 $\mathcal{A}_e$ 及其例子作出明确描述。

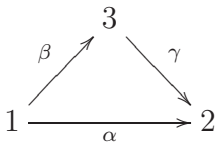
我们首先构造一个非正微分分次代数。设 Λ 由一个（有限）箭图 Q及容许理想 I给出；记$Q^{(0)} := Q$。我们通过向 $Q^{(0)}$ 添加次数为 -1 的箭来构造一个分次箭图 $Q^{(1)}$，这些箭分别对应于 I 的每个元素，并考虑一个将新箭映射到相应关系的微分；于是 $H^0(KQ^{(1)}) = \Lambda$。选取一个生成集

我们首先构造一个非正微分分次代数。设 Λ 由一个（有限）箭图 Q及容许理想 I给出；记$Q^{(0)} := Q$。我们通过向 $Q^{(0)}$ 添加次数为 -1 的箭来构造一个分次箭图 $Q^{(1)}$，这些箭分别对应于 I 的每个元素，并考虑一个将新箭映射到相应关系的微分；于是 $H^0(KQ^{(1)}) = \Lambda$。选取一个生成集

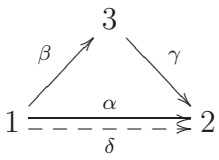
$H^{-1}(KQ^{(1)})$，便可通过向 $Q^{(1)}$ 添加次数为 -2的箭来构造一个分次箭图 $Q^{(2)}$，这些箭分别对应于该生成集的每个元素，并同时考虑一个微分。反复进行此过程，我们得到一个分次箭图 $Q^{(\infty)} := \bigcup_{i=0}^{\infty} Q^{(i)}$，使得微分分次箭图代数$\widetilde{\Lambda} := (KQ^{(\infty)}, d)$拟同构于 Λ。

现在，我们应用 [KY3] 中的定理 7.1，得到 $\mathcal{A}_e$ 与以下对象拟同构 $\widetilde{\Lambda}/\widetilde{\Lambda}\widetilde{e}\widetilde{\Lambda}$，其中 $\widetilde{e}$ 是与 e 对应的 Λ 的幂等元。

例 2.19. 设 Λ 是由以下箭图给出的代数



其中 $\beta\gamma = 0$；由命题 2.8 可知，它是 silting 离散的。于是，Λ 是以下对象的微分分次箭图代数



其中 $\deg(\delta) = -1$，其余箭头的次数为 0，且微分平凡。

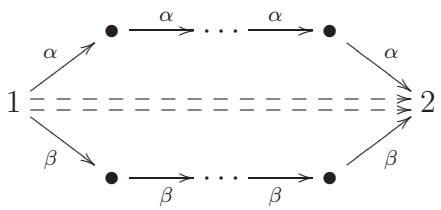
令 e 为与顶点 3 对应的 Λ 的本原幂等元。我们看到，$\mathcal{A}_e$ 是由次数为 0 和 -1 的箭组成、微分平凡的分次克罗内克箭图的微分分次箭图代数。根据推论 2.18(1)，该代数是 silting 离散的。

注意，由次数相同的箭 $n \leq 0$ 构成且微分平凡的分次克罗内克箭图的微分分次箭图代数并非 silting 离散；事实上，它通过 silting 对象 $P_1[-n] \oplus P_2$ 与（通常的）克罗内克代数 $1 \rightrightarrows 2$ 导出等价。这里，P_1 和 P_2 分别是与顶点 1 和 2 对应的不可分解投射模。

这一观察给出了 silting 非离散代数的一个例子。

例 2.20. 设 Q为类型 $A_{p,q}$ 的箭图；将 α 和 β 分别赋给从源点到汇点的两条路径（长度分别为 p 和 q）上的箭头。那么 $\Lambda := KQ/(\alpha^p, \beta^q)$ 是硅化离散的。

证明. 我们看到，Λ 由以下分次箭图给出



其虚线箭头的次数为 -1。取 e Λ 中除顶点 1 和 2 外所有顶点对应的本原幂等元之和，可得 $\Lambda/\Lambda\widetilde{e}\Lambda$ 是一个箭头次数为 -1的分次克罗内克箭图的微分分次箭图代数。该代数是硅化离散的，因此根据推论 2.18(1)，Λ也是硅化离散的。□

2.3. 代数的同调满射。在本小节中，我们将小节 2.2 中的结果限制到“普通”代数的情形；也就是说，$\mathcal{A}$ 只是一个代数。

设 Γ 是有限维 K-代数。回顾一下，代数的同态 $\varphi\colon \Lambda \to \Gamma$ 若其典范态射 $\Gamma \otimes^{\mathbf{L}}_{\Lambda} \Gamma \to \Gamma$ 在 (Γ,Γ)-双模的导出范畴中是同构，则称为同调满射；也就是说，乘法映射 $\Gamma \otimes_{\Lambda} \Gamma \to \Gamma$ 是同构，且对所有 $i > 0$，$\mathrm{Tor}^{\Lambda}_{i}(\Gamma,\Gamma) = 0$。注意，前一个条件 $\Gamma \otimes_{\Lambda} \Gamma \simeq \Gamma$ 成立当且仅当 φ 是环范畴中的满态射；它被称为环满射 [S，命题 1.1]。满同态（即“通常的”满射）是环满射，但反之并不总是成立。

由于代数的同调满射 $\Lambda \to \Gamma$ 通过 [NS 第 4]，节诱导出一个粘合 $(\mathrm{D}(\Gamma), \mathrm{D}(\Lambda), \mathcal{X})$，因此在一个微妙条件下，我们可立即从定理 2.15 得到以下结果。

推论 2.21. 设 $\varphi\colon \Lambda \to \Gamma$ 是一个同调满射，并假设 $\mathcal{X}$ 是紧生成的；例如，$\mathrm{pd}\,\Gamma_{\Lambda} < \infty$。若 Λ 是 silting 离散的，则 Γ 也是如此。

若 Λ 的幂等元 e（或理想 $\Lambda e\Lambda$）满足典范同态 $\pi\colon \Lambda \to \Lambda/\Lambda e\Lambda$ 是同调满射，则称其为分层的；等价地，推论 2.18 中的微分分次代数 $\mathcal{A}_e$ 与 $\Lambda/\Lambda e\Lambda$ 同构。例如，若 Λ 是遗传的（即，对于无圈箭图 Q，$\Lambda = KQ$），则 Λ 的任意幂等元 e 都是分层的；注意，2.2 小节末尾的 Λ 仅仅是 $(KQ, 0) = \Lambda$。更一般地，若 $\Lambda e\Lambda$ 作为右 Λ-模是投射的，则它是分层的。下面是推论 2.18/2.21 的直接推论。

推论 2.22. 设 e 是 Λ 的一个分层幂等元。若 Λ 是 silting 离散的，则 $\Lambda/\Lambda e\Lambda$ 也是 silting 离散的。

分层幂等元的一个典型例子是 Λ 的 Gabriel 箭图中对应于源或汇点的本原幂等元。因此，我们有：

例 2.23. 设 e 是 Λ 的 Gabriel 箭图中对应于源或汇点的本原幂等元。若 Λ 是 silting 离散的，则 $\Lambda/\Lambda e\Lambda$ 也是 silting 离散的。换言之，若 Λ 的单点扩张代数是 silting 离散的，则 Λ 也是 silting 离散的。

我们指出，对于这样的幂等元 e，这一例子也可以由 $\Lambda/\Lambda e\Lambda$ 同构于 $(1-e)\Lambda(1-e)$ 这一事实得到。

注意，例 2.23 的逆命题不一定成立；Dynkin 型路径代数的单点扩张通常是非 Dynkin 型的。这也意味着，在一个粘合中，两侧的 silting 离散性并不总能传递到该粘合的中间项。

我们将例 2.23 应用于树箭图代数。

例 2.24. 设 Λ 是树箭图代数；也就是说，其 Gabriel 箭图的底层图是一棵树。若 Λ 是 silting 离散的，则对 Λ的每个幂等元 e，$\Lambda/\Lambda e\Lambda$ 也都是 silting 离散的。

2.4. 关于克罗内克代数的注记。众所周知，克罗内克代数是 τ-倾斜无限代数的首个且很好的例子。在讨论 silting 离散性时，

通常需要使用分次克罗内克代数，正如我们在前面的几个小节中已经指出的那样。现在，我们对其进行总结。

令 $\mathcal{K}$ 为带平凡微分的分次 n-克罗内克箭图的微分分次箭图代数。对于 $\lambda := (n_i) \in \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们记作 $\mathcal{K} := \mathcal{K}(\lambda)$，其中 n_i 表示次数为 i 的箭的数量；我们省略零项。注意，$n = \sum_i n_i$。我们指出，对任意 $m \in \mathbb{Z}$，经过移位，$\mathcal{K}((n_i)_i)$ 与 $\mathcal{K}((n_{i+m})_i)$ 导出等价。

在 $n_i \neq 0$ 至多有两个分量 i 的情况下，我们得到以下结果 t.

Pr命题 2.25。设 $i < 0$。则 $\mathcal{K} = \mathcal{K}(n_0, n_i)$ 是 silting 离散的，当且仅当 $n_0, n_i \leq 1$.

证明。若 $n_0 \geq 2$，则 $H^0(\mathcal{K})$ 是通常的（2-）克罗内克代数；因此，它不是 τ-倾斜有限的。所以，$\mathcal{K}$ 不是 silting 离散的。设 $n_i \geq 2$ 且 $S := H^0(\mathcal{K})/\operatorname{rad} H^0(\mathcal{K})$。那么，$\mathcal{K}$ 的 Koszul 对偶 $\mathcal{K}^! := \operatorname{Ext}^*_{\mathcal{K}}(S, S)$ 拟同构于 $\mathcal{K}(n'_{1-i}, n'_1)$，后者与 $\mathcal{K}(n''_0, n''_i)$ 导出等价。这里，$n''_0 = n'_{1-i} = n_i$ 且 $n''_i = n'_1 = n_0$。由于 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{K}^!$ 导出等价于 [SY，第 5]，节可得，$\mathcal{K}$ 不是 silting 离散的。

我们来证明“若”部分；这里只处理 $n_0 = 1 = n_i$ 的情形。令 Λ 为由下列箭图给出的根平方为零代数



由命题 2.8 可知，Λ 是 silting 离散的。令 e_v 为 Λ 中与顶点 v 对对应的本原幂等元。取幂等元 $e := e_1 + \cdots + e_{-i}$，可见 $\mathcal{K}$ 与 $\mathcal{A}_e$ 拟同构，因此由推论 2.18 可知它是 silting 离散的。□

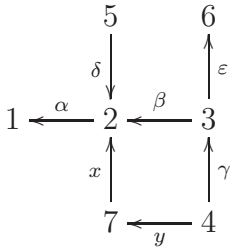
注 2.26. 由 [LY，推论 3.2] 可知，若 $\mathcal{K}$ 与某个“通常”代数导出等价，则 $\mathcal{K} = \mathcal{K}(n_0, n_{-1})$（相差一个移位）。此外，由 [LY，推论 3.10] 可见，$\mathcal{K}(n_0, n_{-1})$ 与由如下箭图表示的代数导出等价：该箭图由顶点 1 和 2 组成，含有从 1 到 2 的 n_0 条箭（记作 x）以及从 2 到 1 的 n_{-1} 条箭（记作 y），且所有关系均为 $yx = 0$。这就是一个有 2 个单模的拟遗传代数。

备注 2.27. 我们注意到，对于任意次数，$\mathcal{K}(1, 1)$ 与某个分次温和单环代数导出等价，而后者的性质类似于（普通的）导出离散代数。~我们希望那些不与 KA 导出等价的分次温和单环代数是 silting 离散的；参见 [KY2]。

2.5. 关于商的备注。我们对 silting 离散性在（幂等元）商下的继承性作一备注，并将其与 τ-倾斜有限性进行比较。

首先请注意，代数（“普通的”）满同态不一定能传递 silting 离散性；参见命题 2.9 和例 2.20。

接下来，我们观察到幂等元商也不一定能够继承 silting-离散性。设 Γ 为由下列箭图给出的代数



其关系为 $\beta\alpha = \delta\alpha = \gamma\varepsilon = 0$ 和 $\gamma\beta = yx$。为验证 Γ 是类型为 E_7 的分段遗传代数，我们首先证明以下断言。

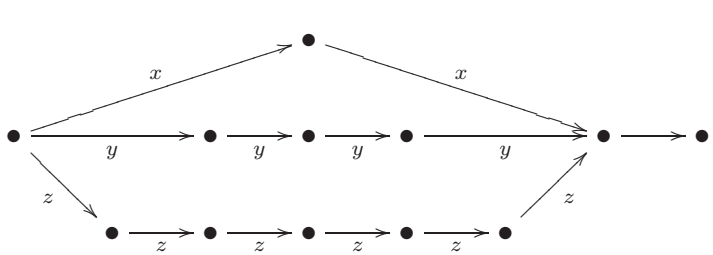
断言。设 Λ 是 Dynkin 型的分段遗传代数，且 M 是一个不可分解右 Λ-模。那么，单点扩张代数 $\begin{pmatrix} K & M \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}$ 与某个遗传代数导出等价。

证明。设 A 是一个 Dynkin 型遗传代数，且与 Λ 导出等价。必要时应用移位函子，我们可以假设，在 Λ 与 A 之间的一个导出等价下，M 对应于一个不可分解的 A-模 N。由于 A 表示有限，存在一个整数 $\ell \geq 0$，使得 $P := \tau^{\ell}(N)$ 是投射的。这里，τ 表示 Auslander–Reiten 平移。由于它在 A 上诱导一个导出自等价，我们可以取一个将 M 映到 P 的 Λ 与 A 之间的导出等价。由 [BL，定理1]，，可得 $\begin{pmatrix} K & M \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} K & P \\ 0 & A \end{pmatrix}$ 导出等价，而后者是遗传代数。 □

让我们重新关注 Γ。由于顶点 2、3、4 和 7 所构成的全子箭图对应一个 D_4型分段遗传代数，根据该断言，我们可知在顶点 5 处的单点扩张与一个 Coxeter 多项式为 $(x+1)(x^4+1)$ 的遗传代数导出等价，其类型为 D_5。因此，由顶点 2、3、4、5 和 7 所构成的全子箭图所表示的代数是 D_5型分段遗传代数。类似地（使用该断言的对偶），我们看到 Γ 与一个 Coxeter 多项式为 $(x+1)(x^6-x^3+1)$ 的遗传代数导出等价，其类型为 E_7。由此可知，Γ 是 silting 离散的。

然而，由例 2.14 可知，幂等元商 $\Gamma/\Gamma e_7\Gamma$ 不是 silting 离散的，其中 e_7 表示与顶点 7 对应的本原幂等元。

注 2.28. 虽然 Coxeter 多项式是导出不变量，但一般而言，我们不能仅凭它们判断给定代数是否具有 silting 离散性。事实上，类型为 $\langle 2, 4, 6\rangle$ 的扩张典范代数由以下箭图给出



具有关系 $z^6 = x^2 - y^4$，其 Coxeter 多项式与 D_{12} [型的（分段）遗传代数相同（命题 5.9]，），但它不是 silting 离散的。注意，该代数绝不与遗传代数导出等价；对于遗传代数，如果谱半径（$= 1$）不是 Coxeter 多项式的根，则该代数是表示有限的；如果谱半径（$= 1$）是 Coxeter 多项式的根，则该代数是表示驯的；如果谱半径严格大于 1，则该代数是表示野的。

3. Applications

在本节中，我们研究有限维代数的 silting 离散性；特别是，我们重点关注

- 单连通张量代数（3.1），以及
- 自内射 Nakayama 代数（3.2）。

设 Λ 是一个有限维 K-代数，其为基本且环不可分解。设 $\overrightarrow{A_n}$ 为箭图 $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n$。对于 Λ 的 Gabriel 箭图中的两个连续箭头 $\bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet \xrightarrow{\beta} \bullet$，若 $\alpha\beta = 0$，则画出 $\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$。

3.1. 单连通张量代数。在本小节中，我们将完整分类 silting 离散的单连通张量代数。由于我们已经知道，三个非局部代数的张量代数绝非 silting 离散 [AH，命题 4.1]，使人们转而关注两个代数的 silting 离散单连通张量代数的分类。下面是第一种情形；其中一个是 K。

命题 3.1。单连通代数是 silting 离散的，当且仅当它是 Dynkin 型的分段遗传代数。

证明。“如果”部分是显然的。我们证明“仅当”部分。设 Λ 是一个 silting 离散的单连通代数。注意，silting 离散性蕴含 2_Λ-silting 有限性（对于 Λ，即 τ-倾斜有限性）。由 [W，定理 3.4]，可知 Λ 是表示有限的。类似地，由 [ANS，引理 3.1] 可知，Λ 的每个反射都是单连通的且是 τ-倾斜有限的，因此它是表示有限的。于是，我们应用 [ANS] 的命题 3.3，得到 Λ 是 Dynkin 型的分段遗传代数。□

在本小节的其余部分，设 A 和 B 是基本且环不可分解的三角代数，并令 $\Lambda := A \otimes_K B$。这里，三角代数是一个有限维 K-代数，其 Gabriel 箭图是无圈的。

本小节的目标是完整分类 silting 离散的单连通张量代数。我们知道，若 A 是局部的且 B 是 silting 离散的，则 Λ 是 silting 离散的 [AH，定理 2.1]。下面给出一个简单的观察。

引理 3.2. 若 Λ 是 silting 离散的，则 A 和 B 也都是 silting 离散的。

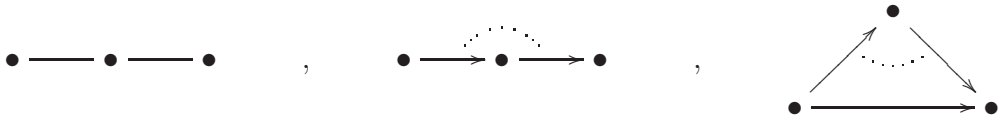
证明. 设 e 是 A 的一个本原幂等元。由于 A 是三角的，我们有一个同构 $eAe \simeq K$。应用推论 2.11，可得 $B \simeq (e \otimes 1)\Lambda(e \otimes 1)$ 是 silting 离散的。□

我们确定当 Λ 是 silting 离散时，其中一个分量的代数结构。

引理 3.3. 若 Λ 是 silting 离散的，则 A 和 B 中至少有一个至多有 2 个非同构简单模。特别地，它同构于 K 或 $K\overrightarrow{A_2}$。

证明。由引理 3.2 可知，A和 B 是 silting 离散的，因此它们的 Gabriel 箭图中没有重箭头 [DIRRT，定理 5.12(d)]。注意，对于 A的每个幂等元 e，eAe 都是 silting 离散的三角代数。

现在，假设 A 至少有 3 个两两不同构的单模。与上文一样，存在 A 的一个幂等元 e，使得 eAe 同构于以下对象之一：



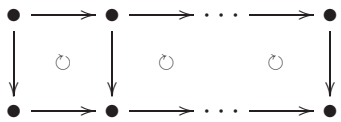
由推论 2.11 可得，$(e \otimes 1)\Lambda(e \otimes 1) = (eAe) \otimes_K B$ 是 silting 离散的。注意，上述三个代数中的前两个与路径代数 $K\overrightarrow{A_3}$ 导出等价。若 eAe 是前两个之一，则 $(eAe) \otimes_K B$ 与 $K\overrightarrow{A_3} \otimes_K B$ 导出等价，因此它必定是 silting 离散的。由此，根据 [AH，定理 4.4] 可知，B 是根基平方为零的中山代数，因此它同构于某个 $r > 0$ 的 $K\overrightarrow{A_r}/\mathrm{rad}^2\, K\overrightarrow{A_r}$；这是因为 B 是三角的。我们看到，$(eAe) \otimes_K B$ 与 $K\overrightarrow{A_3} \otimes_K K\overrightarrow{A_r}$ 导出等价，后者也是 silting 离散的。再次根据 [AH，定理 4.4]，可得 $r \leq 2$。

最后，假设 eAe 是上述三个代数中的最后一个，它与由以下箭图给出的代数 C 导出等价

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} 3$$

其中 $\gamma\beta = 0$。因此，我们注意到 $(eAe) \otimes_K B$ 与 $C \otimes_K B$导出等价，而后者是 silting 离散的。由于存在一个满同态 $C \otimes_K B \to K\overrightarrow{A_3} \otimes_K B$，可知$K\overrightarrow{A_3} \otimes_K B$ 是 τ-倾斜有限的 [DIRRT]。按照上文类似的论证，我们得出结论：B至多有 2 个两两不同构的单模。□

我们常将代数 $K\overrightarrow{A_2} \otimes_K K\overrightarrow{A_r}$ 称为次数为 r 的交换梯，它由带有如下关系的箭图给出：



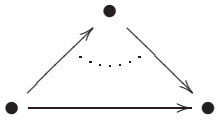
现在，我们实现了本小节的目标，即对 silting 离散的单连通张量代数给出完整分类。

定理 3.4. 假设 A 是非局部且单连通的。则以下命题等价：

(1) Λ 是 silting 离散的；(2) 它是类型为 D_4、E_6 或 E_8 的分段遗传代数；(3) 它与次数为 ≤ 4 的交换梯导出等价。

证明。(2)⇔(3) 的等价性归功于 [L]。我们知道蕴含关系 (2)⇒(1) 成立。下面证明蕴含关系 (1)⇒(3) 成立。应用引理 3.3，我们不妨设 $A \simeq K\overrightarrow{A_2}$。由引理 3.2 可知，$B$ 是 silting 离散的。因此，由命题 3.1 可得，B 是 Dynkin 型 Δ 的分段遗传代数，故 Λ 与 $K\overrightarrow{A_2} \otimes_K K\overrightarrow{\Delta}$ 导出等价。由于它是 silting 离散的，我们根据 [AH 定理 3.2] 得知，Δ 必须是 A_r 型；也就是说，Λ 与次数为 r 的交换梯导出等价。由 [AH 例 3.3],，我们得到 $r \leq 4$。□

注 3.5。引理 3.3 还指出，如果 Λ 是 silting 离散的，那么 A 和 B 中至少有一个自动是单连通的。于是，我们想知道它们是否都单连通。事实上，似乎尚不清楚 $K\overrightarrow{A_2} \otimes_K C$ 是否 silting 离散，其中 C 是由带有以下关系的箭图给出的代数：



（由于 Aoki 的 QPA 程序，它是 τ-倾斜有限的。）这也是我们不能在定理 3.4 中去掉 A 和 B 单连通这一假设的原因之一。

3.2. 自内射 Nakayama 代数。十年前，本文第一作者证明，任意表示有限对称代数都是 silting 离散的 [Ai1]。因此，我们自然会期望每个表示有限自内射代数也是 silting 离散的。然而，我们在此给出以下令人惊讶的结果，表明这一猜想并不总是成立。

定理 3.6. 设 Λ 是一个（非局部）自内射 Nakayama 代数；也就是说，它由具有 n 个顶点的循环箭图给出，且对某个 n、$r > 1$，其第 r 根为零。那么，当 (i) $r = 3$、4 和 $n \geq 11$；(ii) $r = 5$、6 和 $n \geq r + 8$；或 (iii)$r \geq 7$ 和 $n \geq 2r + 1$ 时，Λ 不是 silting 离散的。

设 $n, r > 1$。我们用 $N_{n,r}$ 表示由以下箭图给出的代数

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "x"] & 2 \arrow[r, "x"] & \cdots \arrow[r, "x"] & n \arrow[lll, bend left, "x"] \end{tikzcd}$$

其中 $x^r = 0$。箭图中对应于顶点 i 的本原幂等元记为 e_i。众所周知，代数是非局部自内射（对称）Nakayama 代数，当且仅当它同构于 $N_{n,r}$，其中 $n, r > 1$ ($r \equiv 1 \pmod{n}$)。

我们给出一个 silting 离散的自内射 Nakayama 代数的例子。

命题 3.7. 若 $r = 2$ 或 $r \equiv 1 \pmod{n}$，则 $N_{n,r}$ 是 silting 离散的。

证明. 根据命题 2.8，适用于 $r = 2$ 和 [Ai1；定理 5.6] 适用于 $r \equiv 1 \pmod{n}$。 □

令 $A(n, r) := K\overrightarrow{A_n} / \operatorname{rad}^r K\overrightarrow{A_n}$。在适当条件下，我们可以通过对一个自内射 Nakayama 代数进行幂等元截断，得到 $A(n, r)$。

引理 3.8. 令 $1 \leq s \leq n$ 并令 $e := e_1 + \cdots + e_s$。若 $s + r \leq n + 1$，则 $eN_{n,\ r}e$ 同构于 $A(s, r)$。

证明。显然。 □

借助 [HS] 的列表（另见 [LP]），我们给出完整分类。

引理 3.9. (1) 若 $A(n, r)$ 不是 silting 离散的，则 $A(n + 1, r)$ 也不是；(2) $A(n, r)$ 是 silting 离散的，当且仅当以下情形之一成立：(i) $r = 2$；(ii) $r = 3$、5、6 和 $n \leq 8$；(iii) $r = 4$ 和 $n \leq 7$；(iv) $r \geq 7$ 和 $n = r + 1$。

现在，我们给出本小节的主定理。

*Pro*定理 3.6 的。令 $\Lambda := N_{n,r}$ 对于 $n, r > 1$。我们在每种情况下都按如下方式设定 s s:

(i) $r = 3$、4 和 $n \geq 11 \rightsquigarrow s = 9$ ($r = 3$) 或 $s = 8$ ($r = 4$);

(ii) $r = 5$、6 和 $n \geq r + 8 \rightsquigarrow s = 9$; (iii) $r \geq 7$ 和 $n \geq 2r + 1 \rightsquigarrow s = r + 2$。

在所有情形下，引理 3.8 的假设均成立；因此，$e\Lambda e \simeq A(s, r)$。

由引理 3.9 可知，对于这些配对 (s, r)，$A(s, r)$ 不是 silting 离散的，因此根据推论 2.11，Λ 不是 silting 离散的。□

Appendix A. Derived-discrete algebras are silting-discrete

本附录旨在通过对不可分解对象进行分类，给出一种检验 silting 离散性的方法。作为推论，我们得到任意 derived-discrete 代数都是 silting 离散的 [YY，例 3.9，推论 4.2]；对于具有有限整体维数的情形，这一结论归功于 [BPP]。以下是本附录的主定理。

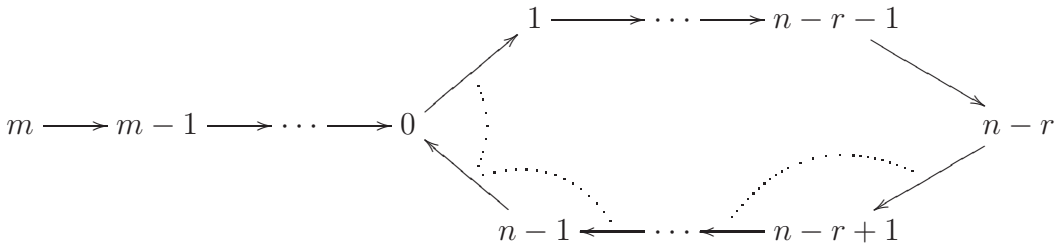
定理 A.1. 假设对每个整数 $d > 0$，所有长度为 d 的不可分解完美复形 P，$\mathrm{Hom}_\Lambda(\oplus_{i\in\mathbb{Z}} P^i, \Lambda/\operatorname{rad}\Lambda)$ 的维数都存在一个上界。那么 Λ 是 silting 离散的。

证明. 根据 [HZS，推论 9]（另见 [ANR，定理 1.1]），该假设意味着 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda)$ 中长度为 d 的不可分解预倾斜复形只有有限多个，由此可得 d_Λ-silt $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda)$ 是有限的。因此，$\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda)$ 是 silting 离散的。□

例如，若 Λ 是导出离散代数 [BM，BGS]（另见 [ALPP]），则定理 A.1 的假设成立。因此，我们得到了姚–杨的结果。

推论 A.2. 任意导出离散代数都是 silting 离散的。特别地，每个根基平方为零的中山代数都是 silting 离散的。

证明。设 Λ 是一个导出离散代数，但不是 Dynkin 型的分段遗传代数。由 [BGS]，可知，Λ 与由带关系的箭图所表示的代数导出等价，其中 $1 \leq r \leq n$ 和 $m \geq 0$ 满足：



由 [BM] 可知，不可分解完美复形的每一项都是无重数的投射模，这意味着 Λ 满足定理 A.1 的假设，因此它是 silting 离散的。□

AppendixB. Triangulated categories whose silting objects are tilting

silting 与倾斜之间的差距近来常受到关注；例如参见[AK, AD] 。在本附录中，我们探讨三角范畴何时只有倾斜对象；本附录的主要结果曾被本文第一作者

在文章 [Ai2], 中使用，但他没有给出证明，因为这很容易。本附录旨在给出该主要结果的证明和一些例子。

我们称 $\mathcal{T}$ 为 asotic，当且仅当 $\mathcal{T}$ 中的任意 silting 对象都是 tilting 对象；“asotic”一词是短语“Any Silting Object is Tilting”与后缀“-ic”的缩合形式 $+$ 。

除非另有说明，本附录中的代数均为有限维 K-代数，且是基本的、环不可分解的。

第一个 asotic 三角范畴的例子是具有不可分解 tilting 对象 [的三角范畴 [AI，定理 2.26]。下面我们考虑非局部情形。

我们称 $\mathcal{T}$ 为 ℓ-Calabi–Yau，如果存在双函子同构 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-,?) \simeq D\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(?\ -[\ell])$，其中 D 表示 K-对偶。以下是 asotic 三角范畴的一个简单例子；参见 [AI，引理 2.7 和例 2.8]。

例 B.1. 0-Calabi–Yau 三角范畴是 asotic 的。特别地，对称代数的完美导出范畴是 0-Calabi–Yau 的，因此也是 asotic 的。

我们还知道，扩展 Dynkin 型的（完备）前射影代数具有 asotic 的完美导出范畴 [KM，命题 A.1]；注意，该代数不是有限维的，且其完美导出范畴具有类似 0-Calabi-Yau 性质的对称性。

本附录的主要结果对例 B.1 作了轻微推广。关于 silting 变异的细节留待论文 [AI], 讨论；我们用术语 $\mu_X^-(T)$ 和 $\mu_X^+(T)$ 分别表示 silting 对象 T 在其直和项 X 处的左变异和右变异。

定理 B.2. 设 Λ 是一个代数，且 $\mathcal{T} := \mathrm{K^b}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$。

(1) 以下条件等价：(i) 对任意不可分解投射模 P，$\mu_P^-(\Lambda)$ 都是倾斜的；(ii) 对每个简单模 S，对应于 S 的不可分解内射模的顶是若干个 S 的直和。(2) 以下条件等价：(i) 对任意不可分解投射模 P，$\mu_P^+(\Lambda)$ 都是倾斜的；(ii) 对每个简单模 S，对应于 S 的不可分解投射模的底是若干个 S 的直和。

证明。我们证明 (2)；另一种情况可对偶地处理。令 S 为一个简单模，并令 P 为其对应的不可分解投射模，它具有如下形式：$e\Lambda$，其中 e 是 Λ 的一个本原幂等元。接下来注意到，右变异 $\mu_P^+(\Lambda)$ 是复形 X 与所讨论的次数 0 茎复形 Λ/P 的直和，其中 X 是 M 的投射表示的 (-1)-移位：$= e\Lambda/e\Lambda(1-e)\Lambda$。注意，$M$ 的第二轮换模 $\Omega^2(M)$ 包含于若干个 Λ/P [AI 的直和中，见引理 2.25]。因此，可以通过同构 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K^b}(\text{投射 }\Lambda)}(\mu_P^+(\Lambda)\ \mu_P^+(\Lambda)[-1]) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(M, \Lambda/P \oplus \Omega^2(M))$，轻松验证等价关系 (i)⇔(ii)。□

例如，弱对称代数满足定理 B.2(1)(2)中的条件 (ii)。此外，代数的弱对称性质是一个导出不变量；例如，参见 [AD，命题 3。1]由此得到以下推论。

推论 B.3. 设 Λ 为弱对称代数，且 $\mathcal{T} := \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda)$。设 $\mathcal{C}$ 为 $\operatorname{silt}\mathcal{T}$ 的 Hasse 箭图的一个连通分支。那么有以下结论：

(1) 如果 $\mathcal{C}$ 有 tilting 对象，那么 $\mathcal{C}$ 中的所有对象都是 tilting 的。(2) 如果 Λ 是 silting 连通的；也就是说，$\mathcal{C} = \operatorname{silt}\mathcal{T}$，那么 $\mathcal{T}$ 是 asotic 的。

我们给出一个非对称代数的例子，其完美导出范畴是 asotic；参见 [Ai2,AM, AK, AD]。

例 B.4。令 Λ 为 Dynkin 型 D_{2n}、E_7 或 E_8 的前射影代数，它是非对称的弱对称代数。那么 $\mathcal{T} := \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda)$ 是 asotic 的。

证明。该策略源自 [AM]；为方便读者，我们在此给出证明。

根据定理 B.2，Λ 的任意（不可约）silting 变异都是一个 tilting 对象，其自同态代数同构于 Λ。因此，对于每一列 $\Lambda =: T_0, T_1, \cdots, T_d$，其中的 silting 对象满足 T_{i+1} 是在一个不可分解直和项处对 T_i 作的（左）silting 变异，我们可知所有 T_i 都是 tilting 的。由于集合 $2_{T_i}\text{-}\operatorname{silt}\mathcal{T}$ 是有限的，我们得到 $\mathcal{T}$ 是 silting 离散的；特别地，它是 silting 连通的。因此，由推论 B.3 可知 $\mathcal{T}$ 是 asotic 的。□

我们指出，存在一些弱对称代数，其完美导出范畴并非 asotic [AD，第 4] 节。这说明，对于这样的代数 Λ，$\operatorname{silt}(\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda))$ 的 Hasse 箭图有一个连通分支，其中包含非倾斜 silting 对象。另一方面，根据 [AD，命题 3.6]，我们知道，对于弱对称代数 Λ，每个位于 $2_\Lambda\text{-}\operatorname{silt}(\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda))$ 中的 silting 对象都是倾斜对象。

我们还发现了完美导出范畴为 asotic 的非弱对称代数。

命题 B.5. 设 R 是一个局部代数，Λ 是一个 silting 离散代数。若 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda)$ 是 asotic，则 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda \otimes_K R)$ 也是。

证明. 该断言由 [AH，定理 2.1] 得出。□

B.1. 厚子范畴。作为一个应用，我们用与给定代数相关的代数来描述由 silting 对象生成的厚子范畴（即预 silting 对象的厚闭包）；不过，我们假设 Bongartz 型条件成立（即每个预 silting 对象都是部分 silting）。由于任意 silting 离散三角范畴都满足 Bongartz 型条件 [AM，定理 2.15],，例如，我们可以选择一个 silting 离散的对称代数作为我们的代数。

下面的命题便于具体写出含有 silting 对象的满三角子范畴（在三角等价意义下）。

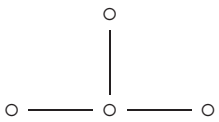
命题 B.6. 设 Λ 是一个代数，其完美导出范畴是 asotic 的，并满足 Bongartz 型条件。那么，$\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda)$ 中每个含有 silting 对象的全三角子范畴，都可以在三角等价意义下实现为 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj} e\Gamma e)$。这里，$\Gamma$ 是与 Λ 导出等价的代数，而 e 是它的幂等元。

证明。令 $\mathcal{U}$ 为 $\mathcal{T} := \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda)$ 的全三角子范畴，且 U 为 silting。由于 U 在 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda)$ 中是预 silting，$\mathcal{T}$ 的 Bongartz 型条件意味着 U 可以补全为 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda)$ 中的一个 silting 对象 $T := U \oplus X$。由于 $\mathcal{T}$ 是 asotic，可见

T 在 $\mathcal{T}$ 中是倾斜的，因此 U 在 $\mathcal{U}$ 中是倾斜的。因此， $\Gamma := \mathrm{End}_{\mathcal{T}}(T)$ 与 Λ 导出等价。取典范态射 $T \to U \to T$ 的复合 e，它是 Γ 的一个幂等元，且 $e\Gamma e \simeq \mathrm{End}_{\mathcal{T}}(U)$。由于 U 在 $\mathcal{U}$ 中是倾斜的，因此存在三角等价 $\mathcal{U} \simeq \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\ \mathrm{End}_{\mathcal{T}}(U)) \simeq \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\ e\Gamma e)$。□

我们来看一个简单的例子。

例 B.7. 令 $\Lambda := \Lambda_0$ 为具有 3 条边的无重 Brauer 星形代数；也就是说，其 Brauer 树如下：



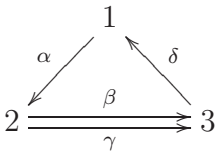
众所周知， [R2], 有两个与 Λ 导出等价的代数；其中一个就是它本身 Λ，另一个是具有 3 条边的无重 Brauer 线形代数 Λ_1。取幂等元截断后，除 Λ 和 Λ_1 之外，我们得到 3 类 Brauer 树代数：其 Brauer 树分别为 G_2、 G_3 和 $G_3 \times G_3$ 的 Brauer 树代数 Λ_2、 Λ_3 和 Λ_4：

$$G_2 := \quad \circ \text{——} \circ \text{——} \circ \qquad , \qquad G_3 := \quad \circ \text{——} \circ$$

由命题 B.6，这些给出了 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ 中所有带有 silting 对象的（非零）满三角子范畴；对于 $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$，它们与 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda_i)$ 三角等价。

即使给定的全三角子范畴具有 tilting 对象，它在整个范畴中也未必存在部分 tilting；以下例子最早见于 [RS]。

例 B.8. 设 Λ 为由以下箭图给出的代数



其关系为 $\alpha\beta = \gamma\delta = \delta\alpha = 0$。那么， Λ的整体维数为 4，而与顶点 1 对应的简单模S 是一个投射维数为 2 的部分 tilting 模；因此，它是 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ 中的预 tilting 对象。设 $\mathcal{U}$为 S在 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\ \Lambda)$ 中的厚闭包。那么， $\mathcal{U}$具有一个 tilting 对象 S，但它的（预）tilting 对象在 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ 中从来不是部分 tilting。

事实上， $\mathcal{U}$ 的 Grothendieck 群秩为 1，因此 $\mathrm{silt}\,\mathcal{U} = S[\mathbb{Z}]$。然而，根据 [LVY，例 4.4] ，我们得到，对于任意 $n \in \mathbb{Z}$， $S[n]$ 在 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ 中都不是部分 tilting。因此， $\mathcal{U}$ 在 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ 中没有部分 tilting 对象。另一方面， S 在 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\ \Lambda)$ 中是部分 silting；实际上， $S \oplus \Lambda/P[2]$ 是 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\ \Lambda)$ 中的 silting，其中 P表示与顶点 1 对应的不可分解投射模。

注 B.9。命题 B.6 的关键在于，我们的三角范畴满足 Bongartz 型条件，但不满足 asotic；也就是说，可以利用微分分次代数的幂等元截断来分类含有 silting 对象的厚子范畴。然而，我们在这里避免采用这种方法，因为要分类所有与原微分分次代数导出等价的微分分次代数非常困难。在这种情况下，渐近性条件是有用的。

B.2. 关于 Bongartz 型条件的注。最近，[LZ] 指出，预 silting 对象的 Bongartz 型条件未必成立。我们在此回顾这一点。

我们考虑由箭图 $2 \underset{y}{\overset{x}{\rightrightarrows}} 1 \underset{y}{\overset{x}{\rightrightarrows}} 3$ 和 $x^2 = 0 = y^2$ 表示的代数 Γ。令 $S := P_2/(y)$；它的投射维数为 2，且是 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Gamma)$ 中的预 tilting。这里，P_i 表示与顶点 i 对应的不可分解投射模。现在，我们找到 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Gamma)$ 的一个厚生成元 $S \oplus P_2 \oplus P_3$，其 dg 自同态代数 Λ 由例 B.8 中的箭图给出，且 $\deg(\delta) = 2$；由 Keller–Rickard定理，Γ 与 Λ 之间存在导出等价，它将 S_Γ 映到 $P_{1\Lambda}$。对 Λ 应用 silting 约化（定理 2.15 和推论 2.17），我们得到同构 $\operatorname{silt}_S \Gamma \simeq$

偏序集的 $\operatorname{silt}_{P_1} \Lambda \simeq \operatorname{silt} \mathcal{A}$。这里，$\mathcal{A}$是由以下内容给出的微分分次箭图代数：$2 \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} 3$ with $\gamma\varepsilon = 0 = \varepsilon\beta$ 且 $\deg(\varepsilon) = 1$（平凡微分）。已证明，在 [LZ] 中 $\operatorname{silt}_S \Gamma = \emptyset$，在 [CJS] 中 $\operatorname{silt} \mathcal{A} = \emptyset$；也就是说，$S$ 不是部分 silting。

注B.10. 如上所见，silting 约化有时会产生一个没有 silting 的三角范畴。我们列出一些没有 silting 的三角范畴：

- 有限维代数 Λ 的奇异性范畴 $\mathrm{D_{sg}}(\Lambda)$；特别地，自内射代数 Λ [的稳定模范畴 mod Λ，见 CLZZ、AHMW、AI];
- 一个正Calabi–Yau三角范畴 [AI];
- 对于上述 $\mathcal{A}$，在保持相同关系但令 $\deg(\beta) + \deg(\varepsilon) = 1 = \deg(\gamma) + \deg(\varepsilon)$ [CJS, JSW]的情况下，其完美导出范畴 $\operatorname{per}(\mathcal{A})$。

Acknowledgements

作者谨向 Osamu Iyama 和 Norihiro Hanihara 致以谢意，感谢他们进行了有益的讨论，并提出了许多宝贵而有帮助的意见。

References

[AAC] T. Adachi, T. Aihara and A. Chan, Brauer 图代数上的二项倾斜复形分类。《数学杂志》290（2018），第1–2期，1–36页。[AK] T. Adachi and R. Kase, 非 silting 离散的倾斜离散自内射代数示例。预印本（2020），arXiv：2012.14119。[AIR] T. Adachi, O. Iyama and I. Reiten, τ-倾斜理论。《组合数学》150，第3期，415–452页（2014）。[AMY] T. Adachi, Y. Mizuno and D. Yang, 三角范畴中 silting 对象的离散性与 t-结构。《伦敦数学会会刊》（第3辑）118（2019），第1期，1–42页。[Ai1] T. Aihara, 倾斜连通对称代数。《代数与表示论》16（2013），第3期，873–894页。[Ai2] T. Aihara, 关于 silting 离散三角范畴。第47届环论与表示论研讨会论文集，7–13页，环论与表示论研讨会组织委员会，冈山，2015。[AH] T. Aihara and T. Honma, τ-倾斜有限三角矩阵代数。《纯粹与应用代数杂志》225（2021），第12期，论文编号106785，10页。[AHMW] T. Aihara, T. Honma, K. Miyamoto and Q. Wang, 关于 silting 对象有限性的报告。《爱丁堡数学学会会刊》（第 2 辑）64（2021），第 2 期，217–233页。[AI] T. Aihara and O. Iyama, 三角范畴中的 silting 变异。《伦敦数学会杂志》（第2辑）85（2012），第3期，633–668页。

[AM] T. Aihara and Y. Mizuno, Dynkin 型前射影代数上的倾斜复形分类。《代数与数论》11（2017），第6期，1287–1315页。[ANR] S. Al-Nofayee and J. Rickard, 自内射代数倾斜复形的刚性与导出等价。http://www.maths.bris.ac.uk/~majcr/papers.html（预印本）[AHMV] L. Angeleri-Hugel, F. Marks and J. Vitoria, 部分 silting 对象与 smashing 子范畴。《数学杂志》296（2020），第3–4期，887–900页。[ALPP] K. K. Arnesen, R. Laking, D. Pauksztello and M. Prest, 导出离散代数的 Ziegler 谱。《数学进展》319（2017），653–698页。[ANS] I. Assem, J. Nehring and A. Skowronski, 单连通代数的国内平凡扩张。《筑波数学杂志》13（1989），第1期，31–72页。⁀[AS] I. Assem and A. Skowronski, A_n型的迭代倾斜代数。《数学杂志》195（1987），第2期，269–290页。[Au] J. August, 关于某些稳定端同态环的导出等价类的有限性。《数学杂志》296（2020），第3–4期，1157–1183页。[AD] J. August and A. Dugas, 弱对称代数的 silting 与倾斜。预印本（2021），arXiv: 2101.03097。[BL] M. Barot and H. Lenzing, 单点扩张与导出等价。《代数杂志》264（2003），第1期，1–5页。[BM] V. Bekkert and H. A. Merklen, 温和代数导出范畴中的不可分解对象。《代数与表示论》6（2003），第3期，285–302页。[BGS] G. Bobinski, C. Geiss and A. Skowronski, 离散导出范畴的分类。《中欧数学杂志》2（2004），第1期，19–49页。[BPP] N. Broomhead, D. Pauksztello and D. Ploog, 离散导出范畴 II：silting 对的 CW 复形与稳定性流形。《伦敦数学会杂志》（第2辑）93（2016），第2期，273–300页。[CJS] W. Chang, H. Jin and S. Schroll, 分次温和代数导出范畴的再胶合与曲面切割。预印本（2022），arXiv：2206.11196。[CLZZ] X.-W. Chen, Z.-W. Li, X. Zhang and Z. Zhao, 关于奇异性范畴的一个非消失结果。预印本（2023），arXiv：2301.01897。[DIJ] L. Demonet, O. Iyama and G. Jasso, τ-倾斜有限代数、砖与 g-向量。《国际数学研究通知》2019，第3期，852–892页。[DIRRT] L. Demonet, O. Iyama, N. Reading, I. Reiten and H. Thomas, 挠类的格理论。预印本（2017），arXiv：1711.01785。[EJR] F. Eisele, G. Janssens and T. Raedschelders, 关于 τ-刚性模的约化定理。《数学杂志》290（2018），第3–4期，1377–1413页。[HS] D. Happel and U. Seidel, 分段遗传中山代数。《代数与表示论》13（2010），第6期，693–704页。[HZS] B. Huisgen-Zimmermann and M. Saorin, 导出等价下链复形的几何与外自同构。《美国数学会汇刊》353（2001），第12期，4757–4777页。[IY] O. Iyama and D. Yang, 三角范畴的 silting 约化与 Calabi-Yau 约化。《美国数学会汇刊》370（2018），第11期，7861–7898页。[JSW] H. Jin, S. Schroll and Z. Wang, 分次温和代数的完全导出不变量与 silting 理论。预印本（2023），arXiv：2303.17474。[KY1] M. Kalck and D. Yang, 相对奇点范畴 I：Auslander 分解。《数学进展》301（2016），973–1021页。[KY2] M. Kalck and D. Yang, 分次温和单环代数的导出范畴。《纯粹与应用代数杂志》222（2018），第10期，3005–3035页。[KY3] M. Kalck and D. Yang, 相对奇点范畴 II：微分分次模。预印本（2018），arXiv：1803.08192。[K] B. Keller, 导出微分分次范畴。《高等师范学校科学年刊》（第4辑）27（1994），63–102页。[KM] Y. Kimura and Y. Mizuno, 非 Dynkin 型前射影代数的二项倾斜复形。《代数通讯》50（2022），第 2 期，556–570 页。[L] S. Ladkani, 关于线、矩形与三角形的导出等价。《伦敦数学会杂志》（第2辑）87（2013），第1期，157–176页。

[LP] H. Lenzing and J. A. de la Pena, 《有限维代数与奇点的谱分析》。代数表示论及相关主题的趋势，541–588，EMS 会议报告丛书，欧洲数学会，苏黎世，2008年。[LVY] Q. Liu, 《粘合 silting 对象》。名古屋数学杂志 216（2014年），117–151。[LY] Q. Liu and D. Yang, 《具有两个简单模的代数的分层》。数学论坛 28（2016年），第1期，175–188。[LZ] Y.-Z. Liu and Y. Zhou, 《关于预倾斜复形补对象问题的否定答案》。预印本（2023年），arXiv：2302.12502。[N] A. Neeman, 《Thomason、Trobauch 和 Yao 的 K-理论局部化定理与 Bousfield 和 Ravenel 的 smashing 子范畴之间的联系》。高等师范学校科学年刊（第4辑）25（1992年），第5期，547–566。[NS] P. Nicolas and M. Saorin, 《三角范畴再拼接数据的参数化》。代数杂志 322（2009年），第4期，1220–1250。[O] S. Oppermann, 《silting 变异的箭图》。数学进展 307（2017年），684–714。[P] D. Pauksztello, 《微分分次代数的同调满射》。代数通讯 37（2009年），第7期，2337–2350。[PSZ] D. Pauksztello, 《silting 离散代数的稳定性流形的可缩性》。数学论坛 30（2018年），第5期，1255–1263。[R1] J. Rickard, 《导出范畴的 Morita理论》。伦敦数学会杂志（第2辑）39（1989年），第3期，436–456。[R2] J. Rickard, 《导出范畴与稳定等价》。纯粹与应用代数杂志 61（1989年），第3期，303–317。[RS] J. Rickard and A. Schofield, 《余覆盖与倾斜模》。剑桥哲学会数学学报 106（1989年），第1期，1–5。[S] L. Silver, 《非交换局部化及其应用》。代数杂志 7（1967年），44–76。[SY] H. Su and D. Yang, 《通过 Koszul对偶从简单心集合到 silting 对象》。代数与表示论 22（2019年），第1期，219–238。[V] D. Vossieck, 《具有离散导出范畴的代数》。代数杂志 243（2001年），第1期，168–176。[W] Q. Wang, 《关于 τ-倾斜有限的单连通代数》。筑波数学杂志 46（2022年），第1期，1–37。[Y] D. Yang, 《有限维代数的若干 t-结构实例》。代数杂志 560（2020年），17–47。[YY] L. Yao and D. Yang, 《三角范畴两种离散性概念的等价性》。代数与表示论 24（2021年），第5期，1295–1312。

Department of Mathematics, Tokyo Gakugei University, 4-1-1 Nukuikita-machi, Ko-ganei, Tokyo 184-8501, Japan电子邮箱地址：aihara@u-gakugei.ac.jp

Department of General Education, National Institute of Technology (KOSEN), YugeCollege, Ochi, Ehime 794-2506, Japan电子邮箱地址：99cfqqc9@gmail.com