arXiv:2304.08037v2 [math.DG] 7 Nov 2023

Birkhoff-Grothendieck定理

OUMAR WONE

摘要。本文从历史角度介绍格罗滕迪克关于黎曼球面上向量丛分裂的定理，并探讨该定理与Riemann-Hilbert-Birkhoff问题及Birkhoff分解定理之间的一些联系。

1. 引言

本文从历史角度阐述黎曼球面上向量丛的格罗滕迪克分裂定理。格罗滕迪克定理有着悠久而卓著的历史，几个世纪以来曾被许多数学家发现。事后看来，该定理最早的发现者或许是Dedekind和Weber，他们证明了以下 [30,命题 3.1]

定理 (Dedekind-Weber)。 设L是一个域，对于 x 这个变量，我们考虑环L $\left[\mathrm{x},\mathrm{x}^{-1}\right]$。对于给定的矩阵 $A \in \mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathrm{L}\ \left[\mathrm{x}, \mathrm{x}^{-1}\right])$，存在矩阵 $B \in \mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathrm{L}\ [\mathrm{x}])$,$C \in \mathrm{GL}(\mathrm{n},\mathrm{L}\ \left[\mathrm{x}^{-1}\right])$ 使得

$$BAC = \begin{bmatrix} x^{d_1} & & & \\ & x^{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & x^{d_n} \end{bmatrix}$$

是一个对角矩阵，并且 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n$、 $d_i \in \mathbb{Z}$ 以及序列 d_i 是唯一的。

当 L $= \mathbb{C}$时，Dedekind-Weber定理等价于复射影直线上代数向量丛的分裂，参见 [30]；或者根据 GAGA，它等价于黎曼球面上全纯向量丛的分裂，也就是 Grothendieck定理 [28]。

在解析情形下，Hilbert、Plemelj 和 Birkhoff 后来证明了全纯函数矩阵的类似分解，[8, 9, 10, 33, 47, 46]。全纯矩阵的这种分解等价于 Grothendieck定理；关于这一等价关系的一个方向，参见推论 4.31。

Hilbert、Plemelj 和 Birkhoff 并非特别关注黎曼球面上向量丛的分类，而是关注所谓的经典黎曼-希尔伯特问题和黎曼-Hilbert边值问题，Hilbert [31], Plemelj [46], Birkhoff [10]。另一方面，Birkhoff问题主要由 Birkhoff [8]研究。

2010 数学主题分类。34A20,32L05,34A30, 34-06.

经典黎曼-希尔伯特问题是 Hilbert 在著名的希尔伯特问题列表中提出的第 21 题，见 1900, [31]。该问题要求在黎曼曲面 M, $\frac{dw}{dz} = A(z)w$ 上寻找一个线性齐次微分系统 $A(z)$ $\in$ M(n $\mathbb{C}$)，其奇点集 $\mathscr{S}$ （在每个点处都只能有第一类奇点，即简单极点）和单值化表示 Ψ: $\pi_1(M\backslash\mathscr{S}, P) \to$ GL(n $\mathbb{C}$) 均已给定， $P \in M\backslash\mathscr{S}$。在这种强形式下，若无某些附加假设，该问题无解。事实上，Bolibrukh 在 [3, 11], 给出了反例，另见 [41]。但是，如果要求所有奇点都是正则奇点（解具有中等增长），那么自 Hilbert 提出该问题以来，许多数学家已多次将其解决。我们可以提及 Plemelj [47], 的工作，他基于所谓的奇异积分方程的黎曼-Hilbert边值问题开展研究， [32, 44, 56]。随后是 Birkhoff 在 [10], 的工作，他运用逐次逼近简化了 Plemelj 的工作。之后，Garnier [24], 简化并推广了 Birkhoff [10] 关于黎曼-Hilbert边值问题的结果，将其扩展到更一般的数据类别。此外，Garnier [25] 还关注黎曼–希尔伯特问题的参数族解，也就是等单值问题。用现代术语来说，这意味着要为某个适当复流形上的一族带有平坦联络的向量丛，找出其具有“恒定”单值化的充要条件。关于这一主题的精彩介绍，可参见 [51] 及其中引用的文献。Lappo-Danilevsky [42], 的工作也很有意思；他基于矩阵上的解析函数开展研究，将 Fuchs系统的解和单值矩阵表示为系统矩阵系数的收敛级数。现代意义上首次尝试解决正则奇点情形下的黎曼–希尔伯特问题，是由 Levelt [43] 完成的。随后，Rohrl [49], 运用上同调框架和纤维丛理论重新发现了该定理。后来，Deligne [20] 将 Rohlr 的工作推广到了高维代数簇上的向量丛。另见 [1, 36]。此外，还有 Katz 强调的黎曼-希尔伯特问题的坦纳克方法。要解释这一方法，首先需要将黎曼曲面 M 上的微分系统（方程）推广到配备平坦全纯联络的复流形 M 上的向量丛。然后构造一个张量范畴 D.E.(M)，其对象是定义在M上的“微分”方程。有了这一构造，Katz 证明了微分方程范畴 D.E.(M) M 与基本群 M（取定基点）的有限维 $\mathbb{C}$表示所构成的张量范畴之间存在等价关系。可参阅 [37, 39]。另一方面，Katz 推广了有趣的格罗滕迪克–Katz猜想。该猜想源于一个问题：Schwartz[53], 最先研究了何时高斯超几何微分方程在有理函数域 $\mathbb{C}(x)$ 上具有一组完整的代数解。Schwarz [53], ，以及最近研究广义超几何微分方程的 Beukers-Heckman, 证明当且仅当单位圆上具有所谓的交错性质时，这种情况才会发生；见 [53, 7]。Katz [38, 40], 运用代数几何方法，并将研究范围限定在算术情形，重新得出了 Schwartz 和 Beukers-Heckman 的结果。他的方法是研究其相应联络的 p-曲率。当除了有限多个之外，其 p-曲率都消失时，他证明这些联络在

猜想.....具有一组完备的代数解。更一般地，Katz证明，对于 Gauss-Manin 连接及其直因子，它们的足够多个 p-曲率消失，等价于这些连接具有一组完备的代数解。格罗滕迪克–Katz猜想认为，对于数域上的代数簇上的向量丛所带的给定连接，该连接除有限多个以外的所有 p-曲率消失，等价于该连接具有一组完备的代数解。最近，André [2] 和 Bost[15], 分别在研究格罗滕迪克–Katz猜想方面作出了重要贡献。两人都采用了丘德诺夫斯基代数性判据[16, 17, 18] 的适当改写；该判据让人联想到经典的 Borel-Dwork 代数性判据。他们据此证明，当该连接的微分伽罗瓦群具有可解中性分支时，格罗滕迪克–Katz猜想成立。

简要来说，Birkhoff问题的内容如下：考虑带有两点 $\{a_1 = \infty, a_2 = 0\}$ 的黎曼球面 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$。在 $a_2 = 0$ 处指定庞加莱秩 $r_2 = 0$，在 $a_1 = \infty$ 处固定庞加莱秩 $r_1 = r$、$r \in \mathbb{Z}_+$ 以及任意斯托克斯数据。接着，我们要问：是否存在定义在 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上的线性齐次微分系统，使其仅在两点 $\{a_1 = \infty, a_2 = 0\}$ 处有奇点，并具有上述固定的奇点轮廓。

还要指出，Birkhoff问题和黎曼–希尔伯特问题属于相似类型，因为二者都可以归入所谓的广义黎曼–希尔伯特问题，见 [12]。

本文的安排如下：第2节介绍表述格罗滕迪克分裂定理所需的记号，并概述黎曼曲面上的向量丛基础知识。随后，第3节陈述Grothendieck定理（定理3.1），并介绍Atiyah和Horrocks沿着Grothendieck定理的思路所做的一些后续工作。最后，第4节介绍黎曼曲面 M 上的线性齐次微分方程或微分系统，并深入讲解经典的黎曼–希尔伯特问题：说明在不加任何限制的情况下，该问题何时有肯定解（正则奇点情形），并展示一个遇到反例的情形，即Bolibrukh给出的福克斯型情形。最后，我们将介绍Birkhoff定理（定理4.28）；其证明依赖于Birkhoff因子分解引理（引理4.29），而Grothendieck定理是该引理的一个推论，见推论4.31。

2. 黎曼曲面上的向量丛

在本节的预备内容中，我们使用 [27, 21, 29, 34]。这里介绍黎曼曲面和向量丛的基础知识。

定义 2.1. 黎曼曲面 M 是一个连通的一维复流形，即一个二维实光滑流形，配备一组极大的坐标图ϕ_α： $U_\alpha \to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$：使得坐标图之间的变换 $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ 是从 $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 到 $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ 的可逆全纯函数，对所有 α、β 均成立，并且 M 是连通的。

例 2.2. 回忆一下， $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 是 $\mathbb{C}^2$ 中经过原点的直线集合：对于 $(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$，我们定义

$$[z_0 : z_1] = \{\lambda(z_0, z_1), \lambda \in \mathbb{C}\}$$

then

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) := \{[z_0 : z_1], (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}\}.$$

令 $M = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 为通常的坐标图 $U_0 = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \ z_0 \neq 0\}$ 和$U_1 = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \ z_1 \neq 0\}$。于是我们有以下两个同胚

$$\psi_0 : U_0 \to \mathbb{C}, \ [z_0 : z_1] \mapsto \frac{z_1}{z_0}$$

and

$$\psi_1 : U_1 \to \mathbb{C}, \ [z_0 : z_1] \mapsto \frac{z_0}{z_1};$$

在交叠区域上，我们有

$$\psi_1 \circ \psi_0^{-1} : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times, \ \ z \mapsto \frac{1}{z},$$

它是全纯的。

定义 2.3. 黎曼曲面 M 上的秩为 $n \geqslant 1$的向量丛是一个维数为 $n+1$ 的复流形 E，带有一个全纯投影 $\pi : E \to M$，使得

- 对于每个 $z \in M$， $\pi^{-1}(z)$ 都是一个 n维复向量空间。
- 每个点 $m \in M$ 都有一个邻域 U 和一个同胚映射 ψ_U，使得

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\psi_U} & U \times \mathbb{C}^n \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & \swarrow{\scriptstyle pr_U} & \\ U & & \end{array}$$

  是交换的。
- 过渡函数 $\psi_V \circ \psi_U^{-1}$ 具有如下形式

$$(z, w) \mapsto (z, g_{VU}(z)w)$$

  其中 $g_{VU} : U \cap V \to \mathrm{GL(n}\ \mathbb{C})$ 是到可逆$n \times n$ 矩阵空间的全纯映射。

秩为 1 的向量丛称为线丛。

例 2.4. 我们给出一些线丛的例子。固定 $p \in M$, U_0 的一个邻域p ，其坐标图为 z ，使得 $z(p) = 0$。令 $U_1 = M \setminus \{p\}$。那么我们可以用 z作为过渡函数，在 M 上定义一个线丛，因为 $z = g_{01}$ 在 $U_0 \cap U_1 = U_0 \setminus \{p\}$上全纯且不为零。我们利用由 ψ 定义的 $U_0 \times \mathbb{C}$ 和 $U_1 \times \mathbb{C}$，在 $U_0 \cap U_1$上将它们粘合起来:

$$\psi(m, w) = (m, g_{01}(m)w).$$

这为每个点 $p \in M$ 给出一个线丛，记作 L_p，称为与 p关联的点丛。

设 $M = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 具有通常的坐标图 $U_0 = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \ z_0 \neq 0\}$ 和$U_1 = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \ z_1 \neq 0\}$。那么，$U_0 \cap U_1 = \mathbb{C}^\times$ 上的过渡函数 $g_{01}(z) = z^n$ 定义了 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上的一个线丛，通常记作 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(k)$，对每个 $k \in \mathbb{Z}$ 都如此。

定义 2.5. 全纯向量丛 E 在 M 上的全纯截面，是满足 $\pi \circ s = \mathrm{Id}_M$的全纯映射 $s : M \to E$。

在向量丛 E的局部平凡化 ψ_U, ψ_V 中，该截面给出

$$\psi_U(s(m)) = (m, s_U(m)) \in U \times \mathbb{C}^n$$

and

$$\psi_V(s(m)) = (m, s_V(m)) \in V \times \mathbb{C}^n$$

因此，在交叠区域 $U \cap V$ 上，我们有

$$\psi_V \circ \psi_U^{-1}(m, s_U(m)) = (m, s_V(m)) = (m, g_{VU} s_U(m)).$$

由此可得

$$s_V = g_{VU} s_U, \text{ on } U \cap V.$$

可以逐点相加截面

$$(s + t)(m) := s(m) + t(m)$$

也可以用标量乘截面

$$(\lambda s)(m) = \lambda s(m),$$

因此， E 的所有截面构成一个向量空间，记作 $H^0(M, E)$。我们有以下重要结果 [21], [27,第 0] 章。

定理 **例 2.6.** 如果 M 是紧黎曼曲面， $H^0(M, E)$ 是有限维的。

定义 2.7. 如果 M 是紧黎曼曲面，其亏格 g_M 定义为 $\dim_{\mathbb{C}} H^0(M, K_M)$，其中 K_M 是 M 的典范线丛。

例 2.8. 任意黎曼曲面 M 上的每个向量丛至少有一个截面，即在 M 的每个点取值为 0 的截面。它称为零截面。

设 $M = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$。其典范丛 $K_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}$ 的截面在 U_0 上形如 $f_0(z)dz$ ，在 U_1 上形如 $f_1(\tilde{z})d\tilde{z}$ ，其中 f_0 和 f_1 是 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数。这些形式必须在交叠区域 $U_0 \cap U_1 = \mathbb{C}^\times, \tilde{z} = \frac{1}{z}$ 上一致。因此

$$d\tilde{z} = -z^{-2}dz, \ f_0(z)dz = -z^{-2}f_1(z^{-1})dz \Longrightarrow f_0(z) = f_1(\tilde{z}) = 0$$

所以 $g_M = 0$. 由于 $d\tilde{z} = z^{-2}(-dz)$，我们有 $K_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(-2)$。

更一般地，线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(k)$， $k \in \mathbb{Z}$ 的截面由 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数 s_0 和 s_1 给出，并满足

$$s_0(z) = z^k s_1(\tilde{z}), \ \tilde{z} = \frac{1}{z}$$

在交叠区域上成立。将这些函数分别按各自的局部坐标展开，并利用$\tilde{z} = z^{-1}$ ，我们得到

$$\sum_{l \geqslant 0} a_l z^l = z^k \sum_{l \geqslant 0} \widetilde{a_l} z^{-l}.$$

令系数相等，得

$$\widetilde{a_l} = a_l = 0, \ l > k$$

and

$$\widetilde{a_0} = a_k, \widetilde{a_1} = a_{k-1}, \ldots, \widetilde{a_k} = a_0.$$

因此，该截面由一个 $k \geqslant 0$时次数为 $\leqslant k$ 的多项式给出：

$$\sum_0^k a_m z^m$$

否则为零。因此，当 $k<0$ 时， $H^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(k)) = k+1$ 的维数等于零；而当 $k \geqslant 0$ 时，

若 $\mathcal{S}$ 是 M 上的一个层，我们可以如下构造系数取自 $\mathcal{S}$ 的切赫上同调群 $H^p(M, \mathcal{S})$。对于由开集构成的 M 的一个（局部有限）覆盖 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ，我们引入

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^0 &= \oplus_\alpha \mathcal{S}(U_\alpha) \\
\mathcal{S}^1 &= \oplus_{\alpha \neq \beta} \mathcal{S}(U_\alpha \cap U_\beta) \\
&\vdots \\
\mathcal{S}^p &= \oplus_{\alpha_0 \neq \ldots \neq \alpha_p} \mathcal{S}(U_{\alpha_0} \cap \ldots U_{\alpha_p})
\end{aligned}$$

并定义 $\mathcal{C}^p$ 为 $\mathcal{S}^p$ 中的交错元素。这意味着，对于指标的一个置换，开集保持不变，但要将该开集上的截面乘以该置换的符号。

定义阿贝尔群同态 $\partial : \mathcal{C}^p \to \mathcal{C}^{p+1}$ ，其定义如下：

$$(\partial f)_{\alpha_0 \ldots \alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1^i f_{\alpha_0 \ldots \hat{\alpha_i} \ldots \alpha_{p+1}} \Big|_{U_{\alpha_0 \cap \ldots \cap U_{\alpha_{p+1}}}}.$$

这里 $f_{\alpha_0 \ldots \hat{} \alpha_i \ldots \alpha_{p+1}} \in \mathcal{S}(U_{\alpha_0} \cap \ldots U_{\alpha_{i-1}} \cap U_{\alpha_{i+1}} \ldots U_{\alpha_{p+1}})$。 ∂ 称为边界算子，并且有 $\partial^2 = 0$。

定义 2.9. 相对于覆盖 $\mathscr{U} = (U_\alpha)_\alpha$，以 $\mathcal{S}$ 为系数的 p 阶上同调群为

$$H^p_{\mathscr{U}}(M, \mathcal{S}) := \frac{\operatorname{Ker} \partial : \mathcal{C}^p \to \mathcal{C}^{p+1}}{\operatorname{Im} : \mathcal{C}^{p-1} \to \mathcal{C}^p}.$$

于是，以 $\mathcal{S}$ 为系数的 M 的 p 阶上同调，是对 M 的开覆盖 $\mathscr{U}$ 取直极限所得，其中这些开覆盖按加细关系构成偏序，而直极限取自 $H^p_{\mathscr{U}}(M, \mathcal{S})$：

$$H^p(M, \mathcal{S}) = \varinjlim_{\mathscr{U} \text{ covering of M}} H^p_{\mathscr{U}}(M, \mathcal{S}).$$

例 2.10. </style}对于 L 这个线丛，其转移函数为 $g_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ ，于是$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$；因此，对于由非零全纯函数构成的层 $\mathcal{O}_M^\times$，族 $g = (g_{\alpha\beta})$ 属于 $\mathcal{C}^1$。此外

$$(\partial g)_{\alpha\beta\gamma} = g_{\beta\gamma} g_{\alpha\gamma}^{-1} g_{\alpha\beta} = \mathrm{Id},$$

所以 $g = (g_{\alpha\beta})_{\alpha\beta} \in \mathsf{Ker}\ \partial$。因此，它定义了 $H^1(M, \mathcal{O}_M^\times)$ 中的一个元素。实际上可以证明， M 上线丛的同构类集合为 $H^1(M, \mathcal{O}_M^\times)$。

以下定理参见 [29, 21, 27]。

定理 2.11（消灭定理）。设 M 为一条黎曼曲面。若 $S = \mathcal{O}$（E） 是向量丛 E的全纯截面层，则对 $p > 1$， H^p（M， $\mathcal{S}$） $= 0$ 。若$\mathcal{S} = \mathbb{C}$ 或 $\mathbb{Z}$，则对 $p > 2$， H^p（M， $\mathcal{S}$） $= 0$ 。

We set $H^1(M, \mathcal{O}(E)) = H^1(M, E)$.

定理 2.12 (向量丛的Serre对偶**)**。 若 M 是紧黎曼曲面，则有

$$H^1(M, E) \simeq H^0(M, K_M \otimes E^\star)^\star$$

and

$$H^0(M, E) \simeq H^1(M, K_M \otimes E^\star)^\star,$$

其中 $E^\star$ 是与 E对偶的线丛。

我们先从紧黎曼曲面 M上的指数正合序列开始

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{O}_M \xrightarrow{e(2i\pi\,\cdot)} \mathcal{O}_M^\times \longrightarrow 1$$

其中 $e(2i\pi\,\cdot)$： $f \mapsto \exp(2i\pi f)$， f是 $\mathcal{O}_M$的一个截面。

由同调代数可得上同调中的一个长正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^\times \hookrightarrow H^1(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(M,\mathcal{O}_M) \longrightarrow H^1(M,\mathcal{O}_M^\times) \longrightarrow H^2(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(M,\mathcal{O}_M) \longrightarrow \dots$$

该序列的第一部分源于这样一个事实：紧黎曼曲面上的全局全纯函数都是常数。由于 exp 映射到 $\mathbb{C}^\times$ 上是满射，因此由正合性可得单射 $H^1(M,\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^1(M,\mathcal{O}_M)$。又由定理 2.11， $H^2(M,\mathcal{O}_M) = 0$；因此，前面的长正合序列化为短正合序列

$$0 \longrightarrow \frac{H^1(M,\mathcal{O}_M)}{H^1(M,\mathbb{Z})} \hookrightarrow H^1(M,\mathcal{O}_M^\times) \xrightarrow{\delta} H^2(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

由于 M 是一个二维紧致定向连通流形，由庞加莱对偶可得 [27]

$$H^2(M,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}.$$

定义 2.13. 线丛 L 的度为 $\delta([L])$。记作 $\deg L$。度只取决于其同构类 $[L]$，即 L 在 $H^1(M, \mathcal{O}_M^\times)$ 中的类。

定义 2.14. 若 E 是 M 上的向量丛，我们将其度定义为

$$\deg(E) := \deg(\det(E))$$

线丛 $\det(E) := \bigwedge^{\operatorname{rank}(E)}(E)$ 的度。

关于下一个定理，可参阅 [27]。我们有

定理 2.15 (黎曼-罗赫**)**。 若 E 是亏格为 g_M 的紧黎曼曲面M 上的一个向量丛，则

$$\dim H^0(M,E) - \dim H^1(M,E) = \deg E + \operatorname{rank}(E) \times (1 - g_M).$$

3. Grothendieck定理

本节将介绍 Grothendieck 关于黎曼球面上向量丛的分裂定理。

定理 **m 3.1** (Grothendieck)**.** 若 E 是 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$上的秩为 n 的全纯向量丛，则 n

$$E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(a_1) \oplus \dots \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(a_n)$$

对于某个 $a_i \in \mathbb{Z}$成立。此外，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(a_n) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(b_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(b_l)$ 当且仅当 $n = l$ 成立，且经重新排序后为 $a_i = b_i$。

证明。 我们只给出证明思路。对向量丛E的秩使用归纳法。显然，对于线丛，结论成立，因为 $H^1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathcal{O}^{\times}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}) = \mathbb{Z}$。接着可以证明，当 $k >> 0$足够大时， $E(k) := E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(k)$分解为

$$E(k) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \oplus \mathcal{Q}$$

其中 $\mathcal{Q}$ 是一个秩为 $n-1$的向量丛。在证明 $E(k)$分裂时，关键之处用到了黎曼-罗赫定理。通过归纳法

$$\mathcal{Q} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(c_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(c_{n-1}).$$

因此

$$E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(-k) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(c_1 - k) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(c_{n-1} - k).$$

a_i 的唯一性源于 $H^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(a))$ 在 $a < 0$ 时消失。更多详情请参见[34] 。□

注 3.2。更一般地，Grothendieck 对约化复李群 G 在 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上的全纯主 G-丛$\mathscr{P}$ 进行了分类，并研究了通过表示 μ: $G \to$ GL(V) 在有限维复向量空间V上与之关联的向量丛 $\mathscr{V}$。更多详情请参见 [28, 定理 1.1、定理 1.2], 以及 [35] （命题 3 及其后续段落）。

3.1. **Birkhoff-Grothendieck 思想的若干后续研究**。 我们有 Horrocks 关于复射影空间上向量丛分裂的如下充要条件，其中复射影空间的维数为 $n \geqslant 1$，参见 [45, 第 21] 页。

定理 3.3 (Horrocks)。 全纯向量丛 E 在 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上， $n \geqslant 1$，当且仅当它分裂

$$H^p(\mathbb{P}^n, E(k)) = 0,$$

对于 $p = 1, \dots, n-1$ 以及所有 $k \in \mathbb{Z}$，其中 $E(k) = E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}(k)$，我们回顾一下，典范线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}(-1)$ 在 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上为

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}(-1) = \{(u, v) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{n+1} | v \in u\}$$

并且对于 $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}(k) = \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}(-1)^{\otimes k} & for\ k \geqslant 0, \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}(-1)^{\otimes |k|} & for\ |k| \leqslant 0. \end{cases}$$

定义 3.4. 设 $E \xrightarrow{\pi} M$ 是复流形 M上的秩为 $n>0$ 的全纯向量丛。全纯子丛 $F \subseteq E$ 是纤维 $E_m = \pi^{-1}(m)$中的子空间 $\{F_m \subset E_m\}_{m\in M}$的集合，并满足 $F = \cup_{m\in M} F_m$ 是 E的子流形，由嵌入 $i\colon F \hookrightarrow E$给出。这意味着每个 $m \in M$ 都有一个邻域 U 和一个平凡化

$$\psi_U : E_U \to U \times \mathbb{C}^n,\ E_U := \pi^{-1}(U),$$

使得

$$\psi_U\big|_{F_U} : F_U \to U \times \mathbb{C}^r \subset U \times \mathbb{C}^n,\ F_U := (\pi \circ i)^{-1}(U),\ r \leqslant n$$

且 $i\big|_{F_m}$ 是从 F_m 到 E_m的包含映射。

定义 3.5. 连通复流形上的非零秩为 $n > 0$ 的全纯向量丛，若不能写成两个非零子丛的直和，则称为不可分解的。

以下内容见于 [4]中的证明

定理 3.6 (Atiyah-Krull-Remak-Schmidt)**.** 连通紧复流形 M 上的任意全纯向量丛都可写成不可分解子丛的直和。此外，设 $E_1,\dots,E_k$和 $F_1,\dots,F_l$是M上的不可分解全纯向量丛，且 $E_1\oplus\ldots\oplus E_k$同构于 $F_1\oplus\ldots\oplus F_l$。那么 $k=l$，并且在指标置换后， $E_1,\dots,E_k$分别同构于 $F_1,\dots,F_l$。

注记 3.7. 设 $E \xrightarrow{\pi} M$和 $E' \xrightarrow{\pi'} M$是复流形 M上的两个全纯向量丛。那么， φ：$E \to E'$是同态，当且仅当

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & E' \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & \swarrow{\scriptstyle \pi'} & \nearrow \\ M & & \end{array}$$

是可交换的。

注记 3.8. Atiyah 给出了椭圆曲线上向量丛的完整分类，精确描述了椭圆曲线上秩为 $r \geqslant 1$ 、度为 d 的不可分解向量丛的同构类。这根据 Krull-Remak-Schmidt分解便已足够。更多细节请参阅 [5] 。

4. 黎曼–希尔伯特问题与Birkhoff定理

本节先介绍黎曼曲面 M上线性齐次常微分方程或系统理论的基础，然后用经典术语阐述黎曼–希尔伯特问题，最后介绍Birkhoff定理和Birkhoff分解定理，由此将推出Grothendieck定理（定理3.1）；以下内容遵循 [54]。这两个定理实际上是等价的。本节的灵感来源于 [55, 54, 1, 20, 36, 21]。关于黎曼–希尔伯特类型问题起源的精彩综述，请参阅 [14, 50, 57]。

定义 4.1. 在黎曼曲面 M 上具有亚纯系数的线性微分方程，是一个如下形式的表达式

$$w^{(n)} + a_{n-1}(z)w^{(n-1)} + \cdots + a_0(z)w = 0, \qquad w^{(k)} := \frac{d^k w}{dz^k},\ 0 \leqslant k \leqslant n \tag{4.1}$$

使得

(1) 对于 M 上的每个局部坐标系（z），在（z）中都规定了这样一个具有亚纯系数的线性微分方程。(2) 在两个坐标系（z）和（ζ）的交叠区域上，所规定的 n 阶线性微分方程在（z）的每个开子集 $\cap$（ζ）上具有相同的全纯解。

定义 4.2。 线性微分方程（4.1）：

$$w^{(n)} + a_{n-1}(z)w^{(n-1)} + \cdots + a_0(z)w = 0,$$

其中 a_k（z）在 $z = 0$ （中心化坐标图）处具有极点；若 b_{n-k}（z）：$=z^k a_{n-k}$（z）、 $k = 1$、2、.....、 n 在 $z = 0$ 处均为全纯，则称其为第一类。b_{n-k}（z） $= z^k a_{n-k}$（z）中阶数最高的极点称为（4.1）的秩。当（4.1）的每个奇点都是第一类时，就称（4.1）为第一类。

注记 4.3。 在局部坐标 ζ 中， $z = z(\zeta)$ 的 $\dfrac{d^{n-k}w}{d\zeta^{n-k}}$ 的系数是 $\zeta(z)$ 的导数、系数 $a_{n-1}(z(\zeta))$ ..... 、 $a_{n-k+1}(z(\zeta))$ 、 $a_{n-k}(z(\zeta))$ 的多项式 $\left(\dfrac{d\zeta}{dz}\right)^{n-k}$，
它们都除以 $\left(\dfrac{d\zeta}{dz}\right)^{n}$。因此，(4.1) 在某点具有第一类奇点这一性质并不依赖于局部坐标。

此外，(4.1) 在点 P 处的秩是内在的。

定义 4.4。 在黎曼曲面 M 上具有亚纯系数的线性齐次系统由如下表达式给出

$$\frac{dw^i}{dz} = A^i_j(z)w^j, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n \tag{4.2}$$

使得

(1) 对于每个局部坐标系 (z)，指定一个亚纯矩阵 $A^i_j(z)$。(2) 在两个坐标系 (z)$\cap$(ζ) 的交集上，所指定的齐次微分系统具有相同的全纯解函数。

注记 4.5。 系数 $A^i_j(z)$ 的极点及其阶数是内在的。此外

$$\frac{dw^i}{d\zeta} = A^i_j(z(\zeta))\frac{dz(\zeta)}{d\zeta}w^j.$$

定义 4.6。 如果 $A(z)$ 在 $z = 0$ 处有一阶极点，则称系统 (4.2) 在该处有第一类奇点。否则，(4.2) 有第二类奇点。 $zA(z)$ 中最高阶极点的阶数就是 (4.2) 的秩。因此，在点 P 处，系统 (4.2) 解析，或有秩为 $\mu = 0$、1、2、.....的奇点。如果 $\mu = 0$，那么 P 是第一类奇点。秩不依赖于 P 周围的坐标系。

以下定义可参阅 [55, 第 5]章。

命题—定义 4.7. 设 (4.1) 或 (4.2) 是一个具有亚纯系数、定义在黎曼曲面 M 上的线性齐次微分方程（或一阶系统）。令$\mathscr{S}$ 为 (4.1) 或 (4.2) 在 M 中的（孤立）奇点。则在每个常点或非奇点 P 处，解族在 P 的某个邻域内全纯，并构成一个维数为 n 的复向量空间。令 $W(z)$ 为相应的解的基本矩阵。考虑 $M \setminus \mathscr{S}$ 中以 P 为基点的所有闭环路组成的集合 Γ。每个这样的回路 γ 都通过解析延拓定义一个从解空间到其自身的线性变换。这意味着存在一个矩阵 $\mathfrak{M} \in \mathrm{GL(n}\ \mathbb{C})$，使得

$$\gamma_* W(z) = W(z)\mathfrak{M},$$

其中，$*$ 表示沿回路 γ对基本矩阵 $W(z)$进行解析延拓的运算。矩阵 $\mathfrak{M}$ 仅取决于 γ在 $M \setminus \mathscr{S}$中的同伦等价类 $[\gamma]$。令 $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{[\gamma]}$。由此得到一个映射

$$\begin{aligned} \Psi\colon \pi_1(M \setminus \mathscr{S}, P) &\to \mathrm{GL(n}, \mathbb{C}) \\ [\gamma] &\mapsto \mathfrak{M}_{[\gamma]}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

现在回顾一下，以 P为基点的两个回路 γ_1 和 γ_2的乘积，是先沿 γ_1 、再沿 γ_2依次遍历所得到的回路。因此，就同伦类而言，我们有$[\gamma_1\gamma_2] = [\gamma_1]\,[\gamma_2]$。现在有

$$\begin{aligned} (\gamma_1\gamma_2)_* W(z) &= (\gamma_2)_*((\gamma_1)_* W(x)) \\ &= (\gamma_2)_* W(x)\mathfrak{M}_{[\gamma_1]} \\ &= W(x)\mathfrak{M}_{[\gamma_2]}\mathfrak{M}_{[\gamma_1]}, \end{aligned}$$

这意味着

$$\mathfrak{M}_{[\gamma_1\gamma_2]} = \mathfrak{M}_{[\gamma_2]}\mathfrak{M}_{[\gamma_1]}.$$

Thus

$$\Psi([\gamma_1\gamma_2]) = \Psi([\gamma_2])\Psi([\gamma_1]). \tag{4.4}$$

因此，Ψ 是一个群反同态，称为齐次线性微分方程（4.1）或系统（4.2）的单值化表示。Ψ 的像是GL(n $\mathbb{C}$)的一个子群，称为（4.1）或（4.2）的单值化群。

注记 4.8。 方程 (4.1) 或 (4.2) 在 P 处的单值化群，在为 P 附近的解选定一组基后，可由 GL(n $\mathbb{C}$) 中的一个矩阵子群表示。改变解的基，会将方程 (4.1) 或 (4.2) 的单值化群 $\mu \subset \mathrm{GL(n}\ \mathbb{C})$ 变为一个共轭子群 $C\mu C^{-1}$，其中固定 $C \in \mathrm{GL(n}\ \mathbb{C})$。

将基点从 P 改为 P'（两者均在 $M \setminus \mathscr{S}$ 内），得到的单值化群彼此同构（但这种同构并非典范的）。对于在 P 和 P' 处固定选定的解基，以及由 $M \setminus \mathscr{S}$ 中连接 P 和 P' 的一条曲线所确定的抽象单值化群之间的固定同构，单值化表示彼此共轭。

4.1. **黎曼曲面上的福克斯微分方程**。

定义 4.9. 若系统 (4.2)：

$$\frac{dw^i}{dz} = A^i_j(z)w^j, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

其中 $A(z) := (A^i_j(z))$ 在 $z = 0$ 处有一个孤立极点，且存在解矩阵 $W(z) = S(z)z^Q$，其中 $S(z)$ 在 $z = 0$ 处是单值且亚纯的，而 Q 是一个常数矩阵，则称 (4.2) 在 $z = 0$ 处有正则奇点或具有中等增长。否则，(4.2) 在 $z = 0$ 处有不规则奇点。

定义 4.10. 黎曼曲面 M 上具有亚纯系数的齐次线性微分系统 (4.2)，如果其每个奇点都是正则奇点，则称为正则奇点型；如果其每个奇点都是简单极点（第一类奇点），则称为福克斯型。

定理 4.11 (Sauvage, [52])。 设(4.2) 是一个在 $z = 0$ 处有第一类奇点的齐次线性微分系统，即 $A(z)$ 在 $z = 0$ 处有一个简单极点。那么(4.2)在 $z = 0$ 处有一个正则奇点。更一般地，如果(4.2) 在 M 上只有第一类奇点，那么它的每个奇点都是正则奇点。

证明。 参见 [19, 第 2.1 节，第 111], [52] 页。 □

我们有 [19, p. 124]

定义 4.12. 微分方程 (4.1)

$$w^{(n)} + a_{n-1}(z)w^{(n-1)} + \cdots + a_0(z)w = 0$$

在 $z = 0$ 处具有亚纯系数；若其在 $z = 0$ 附近的每个解都可以表示为以下形式的有限个（常数）线性组合：$z^r(\log z)^k p(z)$，其中 r 是一个复数， k 是一个整数 $0 \leqslant k \leqslant n-1$，且 $p(z)$ 在 $z = 0$ 处解析，满足 $p(0) \neq 0$，则该处是正则奇点。否则，(4.1) 在 $z = 0$处有一个不规则奇点。

定义 4.13. 线性齐次微分方程 (4.1)

$$w^{(n)} + a_{n-1}(z)w^{(n-1)} + \cdots + a_0(z)w = 0$$

当每个 $b_{n-k}(z) := z^k a_{n-k}(z)$ 在$z = 0$处解析时，该方程在 $z = 0$ 处有一个第一类奇点。更一般地，如果 (4.1) 在 M上只有第一类奇点，则称其为福克斯型。

关于接下来的两个定理，可参见 [19, th. 5.1, th. 5.2]

定理 4.14. 如果线性齐次微分方程 (4.1)

$$w^{(n)} + a_{n-1}(z)w^{(n-1)} + \cdots + a_0(z)w = 0$$

在 $z = 0$ 处有第一类奇点（即 $b_{n-k}(z) := z^k a_{n-k}(z)$ 在$z = 0$处解析），那么 (4.1) 在 $z = 0$ 处有正则奇点。

定理 4.15 (Fuchs, [36, 22, 23])**.** 线性齐次微分方程

$$w^{(n)} + a_{n-1}(z)w^{(n-1)} + \cdots + a_0(z)w = 0$$

在黎曼曲面 M 上具有亚纯系数的微分系统，当且仅当它只有正则奇点时，才只有第一类奇点。

定义 4.16。 考虑微分系统 (4.2)，其在 $z=0$ 处具有第一类奇点，并以矩阵形式表示为

$$\frac{dw}{dz}=\left(\frac{R}{z}+\sum_{m\geqslant 0}R_m z^m w\right),$$

其中 R、 R_m 为常矩阵。 R 的特征值称为方程 (4.2) 在 $z=0$ 处的指数，这些指数之和为 R 的迹 Tr(R)。对于在 $z=0$ 处有第一类奇点的方程 (4.1)， $z=0$ 处的指数是指标方程的根

$$\rho(\rho-1)\dots(\rho-n+1)+b_{n-1}(0)\rho(\rho-1)\dots(\rho-n+2)+\dots+b_0(0)$$

指数之和为

$$-b_{n-1}(0)+\frac{n(n-1)}{2}.$$

注 4.17。 R 矩阵及其特征值与局部坐标的选取无关。还可以证明， b_{n-k}(0) 是不变量。同样，每个指数 ρ_1、 ρ_2、……、 ρ_n （可能有重数）都是不变量。

定理 4.18。 考虑系统

$$w'=(z^{-1}R+\sum_{k\geqslant 0}R_k z^k)w$$

其中 $R\neq 0$ 和 R_k 是常矩阵，并假设该系统在 $z=0$ 处有第一类奇点。如果 R 的特征值之差都不是正整数，那么存在一个形如下式的基本矩阵 W

$$W(z)=S(z)z^R\quad(0<|z|<c,\ \ c>0)$$

其中 $S(z)$ 是收敛幂级数 $S(z)=\sum_{\infty} S_k z^k$，且 $S_0=\mathrm{Id}$。任何其他基本矩阵都具有如下形式： $S(z)z^R\mathscr{K}$，其中 $\mathscr{K}\in \mathrm{GL(n}\ \mathbb{C})$。

证明。 可参见 [19, 第 4.1 节，第 119] 页。 □

定理 4.19 (Fuchs关系)。 设(4.2)： $\dfrac{dw}{dz}=A(z)w$ 是紧黎曼曲面 M 上的一个微分系统（矩阵形式）。假设其系数是亚纯的，且每个奇点都是第一类（福克斯型系统）。设 $E_P=\lambda_{1,P}+\dots\lambda_{n,P}$分别为各奇点 $P\in M$处指数之和。那么

$$\sum_{P\in M}E_P=0.$$

对于紧黎曼曲面 M 上的福克斯线性齐次微分方程 $w^{(n)}+a_{n-1}(z)w^{(n-1)}+\cdots+a_0(z)w=0$ ，我们同样有

$$\sum_{P\in M}E_P=\frac{n(n-1)}{2}(N+2g_M-2),\qquad E_P:=\sum_{i=1}^{n}\rho_{i,P}$$

其中 n 是(4.1)的阶， N 是其奇点的个数，而 g_M 是M的亏格。

证明。 对于微分系统 (4.2)，我们将其基本解矩阵记为 $W(z)$，并将其行列式记为 $D(z)$。于是

$$\frac{d}{dz}(\log(D(z)))dz = \frac{D'(z)}{D(z)}dz = \mathrm{Tr(A(z))dz}$$

给出 M 上的一个亚纯微分（单值）。此外，$D'(z)$ $D(z)$ dz 在 (4.2) 的奇点 P 处以外全纯，并且在这些奇点处的留数为 E_P。由于紧黎曼曲面上亚纯微分的留数之和为零，我们得到

$$\sum_{P\in M} E_P = 0.$$

(4.1) 情形的分析类似。例如，在黎曼球面的情形下，我们需要考察微分 $a_{n-1}(z)(dz)$ 在有限点处以及在 ∞ 处的留数。它们可以用所考察点处局部指数之和表示；随后，我们再次利用黎曼球面上亚纯微分的留数之和为零这一事实，得出结论。□

定理 4.20。设(4.1)： $w^{(n)}+a_{n-1}(z)w^{(n-1)}+\cdots+a_0(z)w=0$ 是复平面上的线性齐次微分方程。当且仅当每个系数 $a_{n-k}(z)$ 都是有理函数（其极点的阶数为 $\leqslant k$），并且

$$|z^k a_{n-k}(z)| = |b_{n-k}(z)| < B, \qquad z\to\infty$$

存在某个上界 B，即

$$a_{n-k}(z) = O(1/z^k), \qquad z\to\infty.$$

定理 4.21。设

$$\frac{dw^i}{dz} = A^i_{1j}(z)w^j, \quad \frac{dw^i}{dz} = A^i_{2j}(z)w^j, \quad i,j=1,2,\ldots,n$$

它们是紧黎曼曲面 M 上的亚纯微分系统，具有相同的奇点 $\mathscr{S}$，且这些奇点全都是第一类。假设在每个奇点处，这两个系统具有相同的指数，且任意两个指数之差都不是整数。进一步假设，相对于在基点 $P\in M\backslash\mathscr{S}$ 处化为单位阵的解的基底，这两个系统在 $\mathrm{GL(n\ \mathbb{C})}$ 中具有相同的单值化群。那么这两个微分系统相同。

证明。 令 $\mathscr{S}$ 为两个系统的奇点。令 $W_1(z)$ 和 $W_2(z)$ 分别为第一个系统和第二个系统的解矩阵，它们在基点 $P\in M\backslash\mathscr{S}$处都化为 Id。我们考察矩阵 $W_1(z)W_2^{-1}(z)$，并沿着 $M\backslash\mathscr{S}$中的所有曲线对其作解析延拓。我们发现，沿回路作解析延拓后

$$W_1(z)\to W_1(z)C_1$$
$$W_2(z)\to W_2(z)C_2.$$

但这两个系统沿此回路的单值化相同，因此我们有$C_1 = C_2$。

Thus

$$W_1(z)C_1C_1^{-1}W_2(z)^{-1} = W_1(z)W_2(z)^{-1}$$

因此， $W_1(z)W_2(z)^{-1}$ 在 $M\backslash\mathscr{S}$ 上是单值且全纯的。接下来，我们考察奇点 P 的邻域内的$W_1(z)W_2(z)^{-1}$ 。这里（定理 4.18）

$$W_1(z) = (I + zS_{1,1} + z^2S_{2,1} + \ldots)z^{R_1}\mathscr{K}_1$$
$$W_2(z) = (I + zS_{1,2} + z^2S_{2,2} + \ldots)z^{R_2}\mathscr{K}_2$$

其中 R_1 和 R_2 （根据假设，它们均可对角化）都与矩阵$\Lambda := \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$相似，例如

$$Q_1R_1Q_1^{-1} = \Lambda$$
$$Q_2R_2Q_2^{-1} = \Lambda.$$

因此我们有

$$W_1(z) = (I + zS_{1,1} + z^2S_{2,1} + \ldots)Q_1^{-1}z^{\Lambda}\widehat{\mathscr{K}_1}, \quad \widehat{\mathscr{K}_1} = Q_1\mathscr{K}_1$$

其中 $z^{\Lambda} = \mathrm{diag}(z^{\lambda_1}, z^{\lambda_2}, \ldots, z^{\lambda_n})$。类似地，我们得到

$$W_2(z) = (I + zS_{1,2} + z^2S_{2,2} + \ldots)Q_2^{-1}z^{\Lambda}\widehat{\mathscr{K}_2}, \quad \widehat{\mathscr{K}_2} = Q_1\mathscr{K}_2,$$

其中 z^{Λ} 与之前相同。因此

$$W_1(z)W_2(z)^{-1} = (I + zS_{1,1} + z^2S_{2,1} + \ldots)Q_1^{-1}z^{\Lambda}\widehat{\mathscr{K}_1}\widehat{\mathscr{K}_2}^{-1}z^{-\Lambda}Q_2(I - zS_{1,1} + z^2S_{2,1} + \ldots).$$

现在我们证明 $\widehat{\mathscr{K}_1}\widehat{\mathscr{K}_2}^{-1}$ 与 z^{Λ} 可交换。于是 $W_1(z)W_2(z)^{-1}$ 在 P 处全纯，因此处处全纯；又因为 M 是紧黎曼曲面，所以它是常数。这就得到

$$W_1(z)W_2^{-1}(z) = \mathrm{Id} \Longleftrightarrow W_1(z) = W_2(z)$$

在 M 上。接着，将这两个微分系统视为平凡向量丛 $\mathcal{O}_M^n$ 上的正则奇点联络，我们看到它们导出相同的局部系统 [20]；利用黎曼-希尔伯特对应 [51, 定理 3.3，第 103], 页，我们看到它们相等。

接下来我们来说明在奇点 P 的邻域内会发生什么。绕 P 走一个小回路后，我们得到

$$W_1(z) \to (I + zS_{1,1} + z^2S_{2,1} + \ldots)Q_1^{-1}z^{\Lambda}e^{2i\pi\Lambda}\widehat{\mathscr{K}_1}$$
$$W_2(z) \to (I + zS_{1,2} + z^2S_{2,2} + \ldots)Q_2^{-1}z^{\Lambda}e^{2i\pi\Lambda}\widehat{\mathscr{K}_2}.$$

因此，在 P 附近我们得到单值化矩阵

$$\widehat{\mathscr{K}_1}^{-1}e^{2i\pi\Lambda}\widehat{\mathscr{K}_1}$$

分别对应于第一个系统

$$\widehat{\mathscr{K}_2}^{-1}e^{2i\pi\Lambda}\widehat{\mathscr{K}_2}$$

对于第二个系统。但这些矩阵相同，因此

$$\widehat{\mathscr{K}_1}^{-1}e^{2i\pi\Lambda}\widehat{\mathscr{K}_1} = \widehat{\mathscr{K}_2}^{-1}e^{2i\pi\Lambda}\widehat{\mathscr{K}_2}.$$

Thus

$$(\widehat{\mathscr{K}_1}\widehat{\mathscr{K}_2}^{-1})^{-1}e^{2i\pi\Lambda}(\widehat{\mathscr{K}_1}\widehat{\mathscr{K}_2}^{-1}) = e^{2i\pi\Lambda}.$$

现在， $e^{2i\pi\Lambda}$ 是对角矩阵，且具有互异的特征值，因此 $\widehat{\mathscr{K}_1}\widehat{\mathscr{K}_2}^{-1}$ 也是对角矩阵。所以它与 z^{Λ}可交换。□

定义 4.22. 设 M 是一个黎曼曲面， M 中的 $\mathscr{S}$ 是一个闭离散点集（可以为空）。设 $P \in M\backslash\mathscr{S}$ 和

$$\Psi : \pi_1(M\backslash\mathscr{S}) \to \mathrm{GL(n, \mathbb{C})}$$

一个同态。广义黎曼–希尔伯特问题是要寻找一个微分系统 $\dfrac{dw}{dz} = A(z)w$，其中 $A(z)$ 是 $M\backslash\mathscr{S}$ 上的一个全纯矩阵 $n \times n$（或者，如果 $\mathscr{S}$ 为空且 M 紧致，则 $A(z)$ 是亚纯的），该系统在 $\mathscr{S}$ 中各点具有指定的奇点（可能是本性奇点）和指定的单值化。这意味着，在 P 处化为单位矩阵的基本解矩阵给出所要求的基本群表示。

定理 4.23. 设 M 是一个黎曼曲面， M 的一个闭（可以为空）离散子集 S，使得 $M\backslash\mathscr{S}$ 非紧致。再设 GL(n $\mathbb{C}$) 为复线性李群，并且

$$\Psi : \pi_1(M\backslash\mathscr{S}) \to \mathrm{GL(n, \mathbb{C})}$$

是 $M\backslash\mathscr{S}$ 的基本群到 GL(n $\mathbb{C}$) 的一个表示。那么存在一个在 $M\backslash\mathscr{S}$ 上全纯、且奇点仅位于 $\mathscr{S}$ 的微分系统，该系统具有给定的单值化表示 Ψ： $\pi_1(M\backslash\mathscr{S}) \to$ GL(n $\mathbb{C}$)。

证明。 我们仅给出主要步骤。它们包括

- 构造一个主 GL(n $\mathbb{C}$)-丛 $\mathscr{P}$在 $M\backslash\mathscr{S}$上。
- 证明存在一个从 $M\backslash\mathscr{S}$到 $\mathscr{P}$的非平凡全纯截面。
- 一旦证明存在这样一个从 $M\backslash\mathscr{S}$到 $\mathscr{P}$ 的截面，就利用它构造一个基本解矩阵（它是一个从 $M\backslash\mathscr{S}$的普适覆盖 $M\backslash\mathscr{S}$到 GL(n $\mathbb{C}$)的全纯函数）。

见 [49, 51]。 □

定理 4.24。 设 M 是一个非紧黎曼曲面， $\mathscr{S}$ 是 M中一个闭离散（可能为空）的点集。设 Ψ: $\pi_1(M\backslash\mathscr{S})$ → GL(n $\mathbb{C}$) 是基点 $P \in M\backslash\mathscr{S}$处给定的同态。则存在一个定义在 M 上的正则奇点微分系统 $\dfrac{dw}{dz} = A(z)w$，其奇点集和单值化群均为所给定的。

证明。 [21,第 3]章。 □

定理4.25。 设 M 是一个紧黎曼曲面， M上的点集 $\mathscr{S}$ 是一个离散闭集（可以为空）。设

$$\Psi : \pi_1(M\backslash\mathscr{S}) \to \mathrm{GL(n, \mathbb{C})}$$

是以基点 $P \in M \backslash \mathscr{S}$ 为基准的同态。则存在一个定义在 M 上的正则奇点微分系统 $\frac{dw}{dz} = A(z)w$，其奇点仅位于 $\mathscr{S}$（若 $\mathscr{S}$ 为空，则还会有一个额外的奇点），并且具有所指定的单值化。

证明。 [1, 20, 36]。 □

4.2. **Bolibrukh 反例：一个实例**。在本段中，我们给出以下 [11, 6] 一个关于黎曼-希尔伯特问题的反例，属于福克斯情形。

在 Plemelj 和 Birkhoff 的研究之后， [46, 47, 10], 人们普遍认为，黎曼球面上的福克斯型（简单极点）微分系统的黎曼–希尔伯特问题 $\mathbb{P}^1$（$\mathbb{C}$）已经得到解决。直到 Bolibrukh 带着一个反例出现， [11] 情况才有所改变（事实上，多年来他给出了许多反例）。为了说明 Plemelj 和 Birkhoff 的证明存在哪些问题，我们来概述他们证明的主要步骤。设 $\mathscr{S}$ 是 $\mathbb{P}^1$（$\mathbb{C}$）的一个有限非空子集，并且

$$\Psi : \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathscr{S}) \to \mathrm{GL(n, \mathbb{C})},\ \mathrm{n} \geqslant 1,$$

一个固定的表示。Plemelj 和 Birkhoff 按照以下步骤进行：首先，他们沿袭 Riemann 的做法，构造一个多值可逆矩阵 $W(z)$，使其在沿回路 γ 进行解析延拓时按 $W(z)\Psi(\gamma)$ 变换。根据构造，矩阵 $W'(z)W^{-1}(z)$ 在单值化作用下是不变量，因此它来自一个在 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\mathscr{S}$ 中全纯的矩阵 $A(z)$。由此， $W(z)$ 是系统 $w'(z) = A(z)w(z)$ 在 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathscr{S}$ 上的基本矩阵。该系统的单值化表示按构造由Ψ给出。此外，所构造的矩阵 $W(z)$ 在 $\mathscr{S}$ 各点的邻域中具有中等增长。因此， $A(z)$ 也具有中等增长，进而在 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$上是亚纯的。这样，我们便将 Ψ 实现为一个具有正则奇点的系统的单值化表示。完成这一步后，Plemelj 和 Birkhoff 进入第二步：固定一点$P \in \mathscr{S}$，并证明可以选择 $W(z)$，使其在$\mathscr{S} \setminus \{P\}$的所有点都有简单极点。最后，作为最后一步，他们修改矩阵 $W(z)$，以使所得系统在 P 处也具有一个简单极点。论证正是在这最后一步出现了问题。事实上，Plemelj 和 Birkhoff（隐含地）假设单值化矩阵 $\mathfrak{M}_{[\gamma_P]}$ 是可对角化的；它是同伦类经 Ψ 映射后的像，该同伦类由一个小回路 γ_P 构成，此回路仅环绕P 一周，方向为逆时针。我们有如下

定理 4.26 ([6, 13])。 设 $\Psi : \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathscr{S}) \to \mathrm{GL(n\ \mathbb{C})}$，$n \geqslant 4$ 是一个满足以下条件的表示

- Ψ 是可约的，也就是说， Ψ 的像固定了一个不同于 $\{0\}$ 和 $\mathbb{C}^n$ 本身的 $\mathbb{C}^n$ 子空间；
- 矩阵 $\mathfrak{M}_{[\gamma_P]}$、 $P \in \mathscr{S}$各自只有一个特征值 μ_P，且仅含一个若尔当块；此外，对于 $\mathrm{I_n}$ 这个单位 $n \times n$ 复矩阵

$$\prod_{P \in \mathscr{S}} \mathfrak{M}_{[\gamma_P]} = \mathrm{I}_n;$$

- 且

$$\prod_{P \in \mathscr{S}} \mu_P \neq 1.$$

那么， Ψ 与$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上仅有简单极点的微分系统的单值化表示不同构。

例4.27 ([6, 13])。 令 $n = 4$ 和 $\mathscr{S} = \{P_1, P_2, P_3\}$ ，其中 P_i 互不相同，并定义表示 Ψ : $\pi_1($ $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathscr{S}) \to \mathrm{GL}(4, \mathbb{C})$，如下:

$$\mathfrak{M}_{[\gamma_{P_1}]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M}_{[\gamma_{P_2}]} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{M}_{[\gamma_{P_3}]} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

显然，该表示不是不可约的，因为它的像固定了例如由 $(1, 0, 0, 0)^t$ 和 $(0, 1, 0, 0)^t$张成的线性空间。 $\mathfrak{M}_{[\gamma_{P_1}]}$ 就是其自身的若尔当块分解，而 $\mathfrak{M}_{[\gamma_{P_2}]}$的若尔当块分解，以及 $\mathfrak{M}_{[\gamma_{P_3}]}$ 的若尔当块分解，分别为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

容易验证 $\mathfrak{M}_{[\gamma_{P_1}]}\mathfrak{M}_{[\gamma_{P_2}]}\mathfrak{M}_{[\gamma_{P_3}]} = \mathrm{I}_4$。因此，$\mathfrak{M}$ 满足定理 4.26 的所有要求，由此可得，它不同构于 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上某个福克斯型微分系统的单值化表示。

4.3. **Birkhoff 定理**。设

$$\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| > R_0,\ R_0 > 0\}$$

$$\Delta\left(0, \frac{1}{R_0}\right) = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < R_0\}.$$

我们也用 $\mathcal{O}\left(\Delta\left(0, \frac{1}{R_0}\right)\right)$ 表示开圆盘上的全纯函数环

$\Delta\left(0, \frac{1}{R_0}\right)$.

参见 [54, 第 3], 章，我们有如下结论

定理4.28 (G. D. Birkhoff)。 给定一个整数 $k \in \mathbb{Z}$ 和一个矩阵 $\mathcal{A}(\zeta)$ 属于$\mathrm{M}\left(\mathrm{n}\ \mathcal{O}\left(\Delta\left(0, 1\,\mathrm{R}_0\right)\right)\right)$，我们考虑微分系统

$$\frac{dw}{dz} = z^k \mathcal{A}\left(\frac{1}{z}\right) w, \qquad z \in \mathscr{D}, \tag{4.5}$$

其中 w 是一个列向量。那么，存在一个矩阵 $\mathcal{P}(\zeta) \in \mathrm{GL}\left(\mathrm{n}\ \mathcal{O}\left(\Delta\left(0,\ 1\,\mathrm{R}_0\right)\right)\right)$，使得

变换

$$w = \mathcal{P}\left(\frac{1}{z}\right) v$$

将 (4.5) 转化为微分系统

$$\frac{dv}{dz} = z^k \mathcal{B}\left(\frac{1}{z}\right) v \tag{4.6}$$

其矩阵 $\mathcal{B}\left(\frac{1}{z}\right)$ 的元素是关于 $\frac{1}{z}$ 的复常数系数多项式。此外，可以选择这样的 $\mathcal{P}(\zeta)$，使得 $z = 0$ 至多是 (4.6) 的第一类奇点。

定理4.28证明中的主要步骤是 Birkhoff 分解引理，其推论（我们将会看到）是 Grothendieck定理定理3.1。以下结论成立，参见 [9, 引理3.31], [54, 节 3]

引理 4.29 (Birkhoff 分解)。 假设一个矩阵 $\mathcal{T}(z)$ 属于 $\mathrm{GL}(\mathrm{n}\ \mathcal{O}(\mathscr{D}))$，其中

$$\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| > R_0,\ R_0 > 0\}.$$

那么 $\mathcal{T}(z)$ 可以写成如下形式

$$\mathcal{T}(z) = \mathcal{P}\left(\frac{1}{z}\right) \Lambda(z) \mathcal{E}(z) \tag{4.7}$$

其中 *(1)* $\mathcal{P}$（ζ）$\in \mathrm{GL}\left(\mathrm{n}\ \mathcal{O}\left(\Delta\left(0,\ 1\,\mathrm{R}_0\right)\right)\right)$，

$R_0 > 0$. *(2)* $\mathcal{E}$（z）$\in \mathrm{GL}(\mathrm{n}\ \mathcal{O}$（$\mathbb{C}$））. *(3)*

Λ（z）是一个对角矩阵

$$\Lambda(z) = \begin{bmatrix} z^{k_1} & & & \\ & z^{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & z^{k_n} \end{bmatrix},$$

并且 k_1，k_2，...，k_n 都是整数，可以选择它们使得 $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots k_n$。

现在我们回顾下面这个著名引理 [21, 29]

引理 4.30。 设 $\mathscr{V}$ 和 $\mathscr{V}'$ 是黎曼曲面 M 上秩均为 $n > 0$、且具有相同坐标邻域（局部平凡化）的两个全纯向量丛 $\{V_j\}_{j\in J}$。令 g_{ji}、g'_{ji} 表示它们的过渡函数（见定义 *2.3* 的第三个项目）。则 $\mathscr{V}$ 和 $\mathscr{V}'$ 同构，当且仅当存在全纯函数 λ_j： V_j： GL(n $\mathbb{C}$)，对每个 $j \in J$ 定义，并且满足

$$g'_{ji} = \lambda_j(x)^{-1} g_{ji}(x) \lambda_i(x), \qquad x \in V_i \cap V_j.$$

推论 4.31。 *Birkhoff* 分解引理 *4.29* 蕴含 *Grothendieck*定理 *3.1*。

证明。 令 $\mathscr{D}_\infty$表示将 ∞ 添入 $\mathscr{D}$后得到的集合，再加上 $\mathscr{D}_\infty \cup \mathbb{C} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 和 $\mathscr{D}_\infty \cap \mathbb{C} = \mathscr{D}$。令

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathscr{D}_\infty} : \mathscr{D}_\infty &\to \mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{C}) \\ z &\mapsto \mathcal{P}\left(1/z\right)^{-1} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} &\to \mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{C}) \\ z &\mapsto \mathcal{E}\left(z\right). \end{aligned}$$

给定一个矩阵 $\mathcal{T}(z)$，我们可以构造一个定义在黎曼球面上的秩为 n、过渡函数为 $\mathcal{T}(z)$ 的解析向量丛。类似地，给定一个矩阵 $\Lambda(z)$，可以构造另一个定义在黎曼球面上的向量丛，其过渡函数为 $\Lambda(z)$。公式（4.7）断言，利用引理 4.30，这两个向量丛是同构的。由于 $\Lambda(z)$ 是对角矩阵，它给出了向量丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(k_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(k_n)$。因此， $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上的每个向量丛在解析意义下都同构于以下形式的线丛直和

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(k_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(k_n), \quad k_i \in \mathbb{Z}.$$

□

参考文献

[1] *Y. André, F. Baldassarri, M. Cailotto*. 代数簇上微分模的德拉姆上同调。修订版第2版。沙姆：Birkhäuser（2020；Zbl 1437.14029）。[2] *Y. André*，关于Grothendieck-Katz的p曲率猜想及一个Dwork问题。载于：Dwork理论的几何方面。第I卷。柏林：Walter de Gruyter。55–112页（2004；Zbl 1102.12004）。[3] *D. V. Anosov, A. A. Bolibrukh*，《黎曼-希尔伯特问题》。数学论题，第22卷，Springer，1994年。[4] *M. F. Atiyah*，关于Krull-Schmidt定理及其在层上的应用。《法国数学会公报》84，307–317页（1956；Zbl 0072.18101）。[5] *M. F. Atiyah*，椭圆曲线上的向量丛。《伦敦数学会会刊》（第3辑）7，414–452页（1957；Zbl 0084.17305）。[6] *A. Beauville*，黎曼球面上线性微分系统在简单极点处的单值性，摘自 A. Bolibruch []。载于：Bourbaki研讨班。1992/93年卷。报告760–774（1948/49至1992/93年）。巴黎：法国数学会。103–119页（报告第765号）（1993；Zbl 0796.34007）。[7]*F. Beukers, G. Heckman*，超几何函数 ${}_nF_{n-1}$的单值化。《数学发明》95，第2期，325–354页（1989；Zbl 0663.30044）。[8] *G. D. Birkhoff*，常微分线性方程的奇点。《美国数学会汇刊》10，436–470页（1909；JFM 40.0352.02）。[9] *G. D. Birkhoff*，关于解析函数矩阵的一个定理。《Math. Ann.》74，122–133页（1913；JFM 44.0469.02）。

[10] *G. D. Birkhoff*，线性微分方程的广义黎曼问题，以及相关的线性差分方程和 q-差分方程问题。《美国艺术与科学学院院刊》49，521–568页（1913；JFM 44.0391.03）。[11] *A. A. Bolibrukh*，黎曼-希尔伯特问题。《Russ. Math. Surv.》45:2，1–47页。[12] *A A. Bolibruch, S. Malek, C. Mitschi*，关于具有不规则奇点的广义黎曼–希尔伯特问题。《Expo. Math.》24，第3期，235–272页（2006；Zbl 1106.34061）。[13] *A. A. Bolibrukh*，具有可约单值群的福克斯系统与黎曼-希尔伯特问题。《数学讲义》1520，au（1991；Zbl 0796.30038）；译自《全球分析中的非线性算子》，《新全球分析》1991，5–20页（1991）。[14] *T. Bothner*，数学中黎曼-希尔伯特问题的起源。《非线性》34，1–73页（2021）。[15] *J.-B. Bost*，数域上代数叶状结构的代数叶。《高等科学研究所数学出版物》93，161–221页（2001；Zbl 1034.14010）。[16]*D. V. Chudnovsky, G. V. Chudnovsky*，帕德逼近与丢番图几何。《美国国家科学院院刊》82，2212–2216页（1985；Zbl 0577.14034）。[17] *D. V. Chudnovsky, G. V.Chudnovsky*，格罗滕迪克猜想与帕德逼近。《日本学士院纪要》A辑61，87–90页（1985；Zbl 0574.12022）。[18] *D. V. Chudnovsky, G. V.Chudnovsky*，帕德逼近在线性微分方程格罗滕迪克猜想中的应用。数论，纽约研讨会1983–84，《数学讲义》1135，52–100页（1985）。[19] *E. A. Coddington, N. Levinson*，《常微分方程理论》。McGill-Hill图书公司，第XII卷，429页（1955）。[20] *P. Deligne*，《具有正则奇点的微分方程》。《数学讲义》163。柏林-海德堡-纽约：Springer-Verlag。（1970；Zbl 0244.14004）。[21] *O. Forster*。《黎曼曲面讲义》。Bruce Gilligan由德文译出。《数学研究生文本》，第81卷。Springer-Verlag。（1981；Zbl 0475.30002）。[22] *L. Fuchs*。《论变系数线性微分方程理论》。《纯粹与应用数学杂志》66：121–160，1866年。[23] *L. Fuchs*。《补充：关于本刊第66卷所载论文》。《纯粹与应用数学杂志》68：354–385，1868年。[24] *R. Garnier*，论黎曼-希尔伯特问题。《组合数学》8，185–204页（1951；Zbl 0043.29304）。[25]*R. Garnier*，二阶线性微分系统的黎曼问题解。《Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.》（第3辑）43，177–307页（1926；JFM 52.0440.03）。[26] *J. J. Gray*，Fuchs与微分方程理论。《美国数学会公报》，新系列10，1–26页（1984；Zbl 0536.01013）。[27] *P. Griffiths* 和*J.Harris*，《代数几何原理》。第2版。纽约州纽约：John Wiley & Sons Ltd.（1994；Zbl 0836.14001）。[28] *A. Grothendieck*，论黎曼球面上全纯向量丛的分类。《美国数学杂志》79，121–138页（1957；Zbl 0079.17001）。

[29] R. C. Gunning.《黎曼曲面上的向量丛讲义》。数学笔记。普林斯顿大学出版社。V，（1967年，Zbl 0163.31903）。[30]M. Hazewinkel 和 C. F. Martin，《射影直线上代数向量丛的 Grothendieck 定理的简短初等证明》。纯粹与应用代数杂志 25，207–211（1982年；Zbl 0489.14005）。[31] D. Hilbert，《数学问题》，美国数学会通报 8，437–79，1902年。[32] D. Hilbert，《积分方程在函数论问题中的一种应用》，第三届国际数学家大会论文集（莱比锡：Teubner）。[33] D. Hilbert，《线性积分方程一般理论纲要》。哥廷根科学学会通报，数学与自然科学部，307–338（1905年）。[34] N. J. Hitchin、G. B. Segal、R. S. Ward。《可积系统：扭量、环群与黎曼曲面》。牛津大学出版社（2013年；Zbl 1268.37001）。[35] J.-M. Hwang 和 N. Mok，具有不可约约化G结构的单有理射影流形。J. Reine Angew. Math. 490，55–64（1997年；Zbl 0882.22007）。[36]N. M. Katz，《Deligne 关于 Hilbert 第21问题的工作的概述》。希尔伯特问题数学发展，纯粹数学研讨会论文集 28，1974年迪卡尔布，537-557（1976年；Zbl 0347.14010）。[37] N. M. Katz，《若干微分伽罗瓦群的计算》。《数学发明》87，13–61（1987年；Zbl 0609.12025）。[38]N. M. Katz，《微分方程的代数解（p-曲率与霍奇滤过）》。《数学发明》18，1–118（1972年；Zbl 0278.14004）。[39] N. M. Katz，《微分方程算术理论中的一个猜想》。法国数学会公报 110，203–239（1982年；Zbl 0504.12022）。[40] N. M. Katz，《刚性局部系统》。新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社（1996年；Zbl 0864.14013）。[41] V. P. Kostov，$\mathbb{CP}^1$ 上的福克斯线性系统与黎曼–希尔伯特问题，《科学院报告》I辑 315，143–148（1992年）。[42] I. A. Lappo-Danilevsky，《线性微分方程组理论回忆录》I–III（合为一卷）。A. N. Krylov 和 I. M. Vinogradov 作序，1933年。纽约：Chelsea 出版公司，xiv，I：253页，II：208页，III：204页（1953年；Zbl 0051.32301）。[43] A. H. M. Levelt，《超几何函数》。荷兰皇家科学院，论文集，A辑 64，361–372、373–385、386–396、397–403（1961年；Zbl 0124.03602）。[44]N. I. Muskhelishvili，《奇异积分方程》。译自俄文第二版。第3版。格罗宁根：Wolters-Noordhoff 出版社。（1967年；Zbl 0174.16201）。[45]C. Okonek、M. Schneider、H. Spindler，《复射影空间上的向量丛》。附 S. I. Gelfand 撰写的附录。1988年版的修订重印本。巴塞尔：Birkhäuser（2011年；Zbl 1237.14003）。[46] J. Plemelj，《具有给定单值群的黎曼函数族》。Monatsh. Math. Phys. 19，211–245（1908年；JFM 39.0461.01）。[47] J. Plemelj。《黎曼与克莱因意义下的问题》。J. R. M. Radok 编译并翻译。Interscience 纯粹与应用数学专著丛书。16。（1964年；Zbl 0124.28203）。

[48] *J. Plemelj*, 《关于柯西积分表示解析函数的补充定理：论边界值》。Monatsh. Math. Phys. 19，205–10，1908年。[49] *H. Röhrl*, 《线性微分方程理论中的黎曼–希尔伯特问题》。Math. Ann. 133，1–25（1957；Zbl 0088.06001）。[50] *H. Röhrl*, 《黎曼曲面上的全纯纤维丛》。美国数学会通报 68，125–160（1962；Zbl 0106.05502）。[51] *C. Sabbah*, 《等单值变形与 Frobenius 流形》。巴黎：CNRS Éditions；巴黎：EDP Sciences（2002；Zbl 1101.14001）。[52] *L. Sauvage*, 《微分方程组的正则解》。Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (3) 3，391–404（1886；JFM 18.0283.01）。[53]*H. A. Schwarz*, 《关于高斯超几何级数表示其第四元素的代数函数的情形》。J. Reine Angew. Math. 75，292–335（1872；JFM 05.0146.03）。[54] *Y. Sibuya*, 《复域中的线性微分方程：解析延拓问题》。日语原著，由 Yasutaka Sibuya 翻译。普罗维登斯，罗得岛州：美国数学学会（1990；Zbl 1145.34378）。[55] ***M. F. Singer*、*M. van der Put***, 《线性微分方程的伽罗瓦理论》。柏林：Springer（2003；Zbl 1036.12008）。[56] *N. P. Vekua*, 《奇异积分方程组》。俄文原著，由 A. G. Gibbs 和 G. M. Simmons 翻译；格罗宁根，荷兰：P. Noordhoff, （1967；Zbl 0166.09802）。[57] *E. I. Zverovich*, 《黎曼曲面上Hölder类解析函数理论中的边值问题》。Russ. Math. Surv. 26，第1期，117–192（1972；Zbl 0226.30043）。

OUmar Wone，美国加利福尼亚州奥兰治市大学大道一号，邮编 92866，查普曼大学 .
*E*电子邮箱地址：wone@chapman.edu