arXiv:2304.08064v1 [cs.LO] 17 Apr 2023

有限信息密度原理

Pablo Arrighi*和 Gilles Dowek†

摘要

以计算方式描述宇宙定律的可能性，似乎与一项信息密度有上限的原理相关。这一原理与信息传播有限速度原理互为对偶，已在物理学中得到探讨，并且与一个古老的观点相关：我们无法以无限精度测量某个量。它在经典物理学和量子物理学中有不同的形式。

1 为什么是元胞自动机?

Stephen Wolfram 在 [Wol02] 中提出，元胞自动机可能是一种研究宇宙定律的有效形式体系。这一论点可视为三个更基本原理的推论，而这三个原理隐含于元胞自动机这一概念的定义之中。

要定义元胞自动机，我们必须将空间划分为无限多个相同的元胞，从而离散化空间，例如划分为立方体。我们还必须将时间离散化，并以固定的时间间隔观察宇宙。接下来有三个假设

1. 每个元胞的状态空间是有限的,

2. 在给定时间步，一个元胞的状态空间只取决于上一个时间步中有限个邻居的状态,

*里昂高等师范学院、LIP，意大利大道46号，邮编69008，里昂，法国；以及格勒诺布尔大学、LIG，化学街220号，邮编38400 SMH，法国，parrighi@imag.fr。

†INRIA，意大利大道23号，CS 81321，邮编75214，巴黎 Cedex 13，法国，gilles.dowek@inria.fr。

3. 所有元胞的状态空间都相同，而且演化在任何地点、任何时间都以相同的方式进行。

假设 (3.) 是对物理学中一个著名原理——时空均匀性——的重新表述。假设 (2.) 也是如此，它是对信息传播速度有界这一原理的重新表述。相比之下，假设 (1.) 似乎表达了一个新观点：信息密度也有上限。这一原理可以表述为：空间中的有界区域能够存储的信息量是有限的。它也可以表述为：空间中有界区域的状态空间的基数是有限的，因为存储信息量等于该基数的对数。

元胞自动机的定义中还包含其他假设，例如时空是绝对且被动的：元胞之间的邻域关系不会像它们的状态那样演化。可以弱化这些假设，例如得到因果网络 [Wol02]，或因果图动力学 [AD12]。

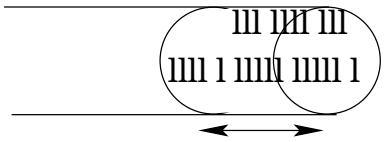
信息传播有限速度与信息有限密度这两个理念之间存在历史上的差异。自狭义相对论提出以来，前者一直明确地作为物理学的一项原理，我们甚至知道速度上限。后者似乎尚未得到同等程度的确立。不过，它并非全然新颖，因为 Robin Gandy 在 [Gan80], 中阐述了全部三项原理（1）、（2）和（3）；而 Jacob Bekenstein 也阐述了信息密度有界这一原理——尽管贝肯斯坦界限制的并非信息量本身，而是球体中所含信息量与能量的比值 [Bek81] 。

2 两个对偶原理

速度有界原理与信息密度有界原理发挥着对偶作用。

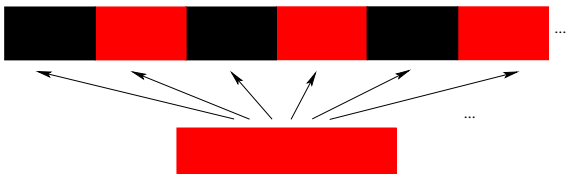
例如，导线在给定时间 t 内能够输出的信息量 I，受限于截面为 S、长度为 l的圆柱体中所含的信息量；其中 l 是信息在时间 t内能够传播的距离。

如果信息具有有限速度，那么 l 有界；此外，如果信息具有有限密度，信息量 I 也有界。因此，我们需要这两条原理来证明导线的信息流是

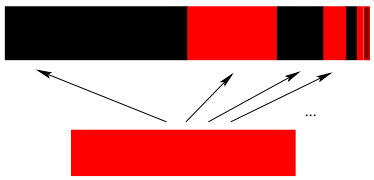


有界的。如果其中一条原理不成立，就很容易构造出信息流无界的导线。

一个更复杂的例子是，无法建造一台无限并行计算机，即由无限数量的处理器组成、并与一台公共服务器通信的机器。如果信息密度有上限，那么每台机器的尺寸就有下限；有些机器必然离服务器任意远。而且，如果信息传播速度也有限，那么有些机器就远到无法及时与服务器通信。同样，如果这两条原理中的任意一条不成立，就很容易建造一台无限并行计算机：要么让尺寸相同的处理器以无限快的速度与服务器通信，要么让尺寸任意小的

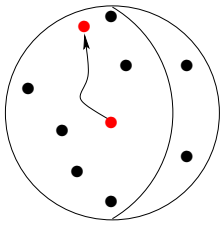


机器（尺寸依次为 1、1/2、1/4、1/8、1/16，……）位于距服务器有限的距离内。



似乎甚至可以将这两条原理概括为一条：在给定时间内，一条信息只能在一个空间中传播，而这个空间本身只能容纳有限量的信息。

最后，这两项原则彼此可比，且都不同于第三项原则：时空均匀性。事实上，“物理定律”这一概念本身就预设了后者。例如，假设某条定律只在



巴黎有效，在波士顿却不适用，那么它就算不上什么定律。“定律”一词本身就包含普适性的概念。

但是另外两条原则呢？事实证明，即使没有这些原则，也仍然可以发展出相当完善的物理学。不过，物理定律适用性的概念，仍然是信息传播有限速度原理和信息密度有界原理的基础。如果某条定律违反了信息传播有限速度原理，那么，为了确定一秒钟后某个物理系统的新状态，就可能需要查看数量无上限的邻居。这显然不切实际，除非可以忽略远处的影响因素。

同理，如果某条定律违反了信息有限密度原理，那么，要确定某个物理系统的新状态，就需要使用对邻居状态的描述，而其中可能包含数量无上限的信息。同样，这样的定律几乎不具备适用性，除非能够以某种方式对这些信息进行取整。

3 牛顿物理学

众所周知，牛顿物理学与信息传播有限速度原理相矛盾。蜜蜂每飞行半厘米，就会瞬间改变遥远星系中的引力场。直到有了广义相对论，我们才懂得如何控制蜜蜂飞行所带来的影响。

牛顿物理学不仅与有限速度原理相矛盾，也与有限信息密度原理相矛盾，因为例如卡尺两爪之间的距离是用一个实数来测量的。因此，假如我们设想有无限量的信息，例如用一个由 0 和 1 组成的无限序列来表示，就可以把这个无限序列看作一个实数的各位数字，并将卡尺两爪置于这一精确距离，从而在有限体积中记录无限量的信息。

当然，我们从小就被教导说，这种想法毫无道理，卡尺两爪之间的距离只能以有限精度来确定：三位或四位数字。令人惊讶的是，尽管时空均匀性已被确立为物理学原理，这种关于物理量总是以有限精度确定的论点却从未获得物理学原理的地位。然而，这一论点或许很早就体现了信息有限密度这一思想。

4 有限密度与叠加原理

有限信息密度原理似乎受到量子理论及其叠加原理的挑战。事实上，无论一个空间区域是否有界，只要它的状态空间包含两个状态$\mathbf{u}$和$\mathbf{v}$，就必须也包含它们的所有线性组合 $\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{v}$（相差一个归一化因子）。因此，状态空间是无限的，而有限密度原理不能被表述为：有界空间区域的状态集合是有限的。

这些复振幅 λ 和 μ 可以与概率相比较，但这种比较有其局限。事实上，由于概率是正实数，它们相加只能产生建设性干涉，使事件发生的可能性增大。相比之下，振幅是复数，因此也可以彼此相减，即产生相消干涉，使事件发生的可能性增大或减小，有时甚至变得不可能。

这就是为什么当两个不同的情景以叠加态出现时，我们不能简单地把它们看作宇宙中可能发生的两条互不相互作用的分支：这些振幅不能忽略。这使得在将有限密度原理推广到量子理论时，叠加原理成为一个难题。

然而，状态空间无穷大，并不意味着测量这一区域的状态时，可能结果的数量本身也是无穷的，因为在量子理论中，我们无法测量系统的状态，只能测量其中一个可观测量。因此，信息密度有界原理的另一种表述是：在任意给定的时间点，对一个有界区域进行的每次投影测量，都只能产生有限个可能结果。这一要求意味着，有界空间区域的状态空间是一个有限维向量空间。

这为信息有限密度原理提供了一种很好的量子表述，而且这种表述不要求实际进行任何形式的测量。

5 有限信息密度原理与关联

此外，在量子情形中还会出现另一个问题，即“关联”；在此语境下也称为“纠缠”。要理解什么是纠缠，必须再次运用叠加原理，但这一次是将其应用于成对的系统。例如，如果系统 A 和B 可以处于**uu**态，也就是说二者都处于**u**态；或者处于**vv**态，也就是说二者都处于**v**态，那么状态 λ**(uu)** $+ \mu$**(vv)**也是允许的。这种纠缠态对应于两个整体上截然不同、处处不同的情景的叠加。借助我们对通常概率的理解，可以直观地把握这种纠缠态的含义。在概率论中，人们普遍知道，仅仅了解各个系统的边缘概率，并不意味着就了解了联合概率分布。例如，爱丽丝和鲍勃各自的盒子里都有一半概率装着蓝球、一半概率装着红球，但也可能是他们的盒子经过特殊准备，使得两个球的颜色总是相同。状态 λ**(uu)** $+ \mu$**(vv)**讲述的是同样的情形，只不过涉及的不是概率，而是振幅。

这是一个问题，因为信息传播速度有界原理在这方面似乎非常薄弱：毕竟，它只说每个单独系统的状态由其邻居的状态决定，却没有说明各个状态之间的纠缠是如何决定的。再以概率作类比：信息传播速度有界原理告诉我们，爱丽丝在她的盒子里找到红球或蓝球的概率由局部决定；但她找到的球与鲍勃的球颜色相同的概率又如何呢?

幸运的是，在关联能否通过局部方式确定这一问题上，量子理论比概率论更容易处理。事实上，研究已经表明，尽管信息传播速度有界原理在概率元胞自动机的情形下远远不够 [AFNT11],但令人惊讶的是，在量子元胞

自动机 [ANW11]的情形下，它足以使演化能够描述为局部函数的复合，这些函数将邻域映射到邻域，也就是说，它们是从一个有限维向量空间到其自身的函数。换句话说，在量子情形下，任何遵循信息传播速度有界原理的演化，都必然表现为将门电路作用于系统及其邻居。因此，关联可以得到“驯服”，而全局演化也可以分解为从有限维向量空间到其自身的函数。

6 可计算的量子宇宙

然而，从有限集合转向向量空间，即使是有限维向量空间，也是一个巨大的跨越，而且这样做可能会失去将宇宙描述为元胞自动机所带来的许多优势。事实上，元胞具有有限状态空间 S 的主要优势在于，元胞自动机的局部演化函数——也就是一个从 S^n 到 S 的函数，其中 n 是一个元胞的邻居数量——是一个从有限集合到有限集合的函数。这种函数可以通过一张列出定义域中每个元素对应像的表来描述，而且总是可计算的。这一点是元胞自动机的可计算性的关键，也因此构成了这样一种观点的关键：如果宇宙可以描述为元胞自动机，那么宇宙就是可计算的。这种关于可计算的宇宙的观点——即物理丘奇-图灵论题——是 Robin Gandy 和 Stephen Wolfram 两人的主要目标之一。

幸运的是，量子理论的另一项特征可以修复叠加原理造成的损害。根据量子理论，量子元胞自动机的这些局部函数不能是任意一个从邻域映射到邻域的函数，而必须是线性的。从有限维向量空间映射到另一个有限维向量空间的函数中，线性函数要少得多。特别是，任何这样的线性函数都可以用一个矩阵来描述，而矩阵乘法归结为加法和乘法，这些都是可计算的运算。因此，如果按照下文所述，以适当的方式选取标量，所有这类函数都是可计算的。这样一来，无限性便受到有限维性和线性的约束，而这一版本的有限信息密度原理足以证明宇宙是可计算的。

7 标量

当我们说标量的加法和乘法是可计算的时，需要稍微谨慎一些，因为标量是复数，而可计算性通常是针对自然数定义的。

可计算性可以从自然数扩展到实数和复数 [Wei00]，但此时情况有所不同。不仅从复数到复数的函数可能是可计算的，也可能是不可计算的，复数本身也可能是可计算的或不可计算的。因此，尽管乘法是可计算的，但乘以一个固定标量可能是不可计算的，前提是该固定标量不可计算。

Michael Nielsen 注意到，如果有一个过程构造出叠加态 $\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}$，其中 λ 和 μ 是不可计算数，那么这种情况本身就可能导致不可计算性，因为可以通过重复测量对该状态进行层析，并以不断提高的精度从状态中提取出 λ。

因此，物理系统有两种方式来编码无限量的信息：要么拥有无限维状态空间，要么在一个标量中编码无限量的信息，这与牛顿物理学中可以将无限量的信息编码在一个距离中的方式完全相同。

要表达有限密度原理，似乎仅将元胞的状态空间限制为有限维向量空间还不够，我们还必须将标量限制在一个更小的集合中，这就为物理学家提出了一个有趣的问题：量子理论中可用作标量的域有哪些?

通过对信息有限密度作出这一精确表述，我们可以形式化地证明，物理丘奇-图灵论题是我们提到的三个假设的推论：时空均匀性、信息传播速度有界和信息密度有界 [AD11]。

一些科学家，例如 David Deutsch [Deu85]，主张将物理丘奇-图灵论题视为物理学的一项原理。另一些科学家，例如 Michael Nielsen [Nie97]，则主张从物理学更为根本的原理推导出这一论题。与 Robin Gandy 一样，我们选择从这三项基本原理出发。这种方法的一个优点是，只要给出明确的界限，这三项原理便可证伪。因此，从逻辑角度来看，它们只是纯粹的全称公式，而物理丘奇-图灵论题本身的逻辑形式则复杂得多 $\forall\exists\forall$，即：对于所有物理系统 m，都存在一个可计算的函数 f

使得对于任意初始状态 x， m 的演化都会从 x 到达 $f(x)$。

8 结论：元胞自动机与量子元胞自动机

说宇宙是可计算的，因此可以用任何计算模型（例如元胞自动机）来模拟，是一回事；寻求以保空间的方式精确模拟物理系统，则是另一回事。追求这一更具挑战性的目标，促使我们探究如何对一个有界空间区域的状态空间进行建模。在经典情形下，假设这个状态空间是有限的就足够了；但在量子情形下，还必须进一步将其限定为定义在合理数域上的有限维向量空间。事实上，看来用经典元胞自动机模拟量子系统，不仅会导致指数级的速度下降，还无法保留系统的几何结构。这也为费曼提出用量子元胞自动机对量子系统建模的主张提供了依据。元胞自动机模型的这一量子扩展，展现了它的活力与稳健性。

参考文献

[AD11] P. Arrighi 和 G. Dowek。物理丘奇-图灵论题与量子理论原理。《国际计算机科学基础杂志》，即将出版。，2011年。[AD12] P. Arrighi 和 G. Dowek。因果图动力学。预印本 arXiv:1202.1098，2012年。[AFNT11] P. Arrighi、R. Fargetton、V. Nesme 和 E. Thierry。将因果性原理应用于概率元胞自动机的公理化。载于《*CiE 2011*会议录》，索非亚，*2011*年*6*月，*LNCS*。预印本 *arXiv:1102.0860*。，第6735卷，第1–10页，2011年。[ANW11] P. Arrighi、V. Nesme 和 R. Werner。幺正性加上因果性蕴含局域化（完整版）。《计算机与系统科学杂志》，77(2):372–378，2011年。[Bek81] J. D. 贝肯斯坦。有限系统熵能比的普适上限。《物理评论*D*》，23:287–298，1981年。

[Deu85] D. Deutsch。量子理论、丘奇－图灵原理与通用量子计算机。《伦敦皇家学会会刊。*A*辑：数学与物理科学（*1934—1990*）》，400(1818):97–117，1985年。[Gan80] R. Gandy。丘奇论题与机制原理。载于《克莱尼研讨会》，阿姆斯特丹，1980年。北荷兰出版公司。[Nie97] M. A. Nielsen。可计算函数、量子测量与量子动力学。《物理评论快报》，79(15):2915–2918，1997年10月。[Wei00] K. Weihrauch。《可计算分析：导论》。施普林格出版社，2000年。[Wol02] S. Wolfram。《一种新科学》。*Wolfram Media Inc.*，2002年。