arXiv:2304.08067v1 [math.RA] 17 Apr 2023

[1]

李共形代数的共形三重导子与三重同态

SANIA ASIF[1], LIPENG LUO[2], YANYONG HONG[3] 和 ZHIXIANG WU[4]

Abstract. 设 $\mathcal{R}$ 是一个有限维李共形代数。本文首先研究共形导子代数 $CDer(\mathcal{R})$、共形三重导子代数 $CTDer(\mathcal{R})$ 和广义共形三重导子代数 $GCTDer(\mathcal{R})$，主要关注这些导子代数之间的联系。接下来，我们对所有有限单李共形代数上的（广义）共形三重导子代数给出完整分类。特别地，$CTDer(\mathcal{R}) = CDer(\mathcal{R})$，其中 $\mathcal{R}$ 是一个有限单李共形代数。然而，对于 $GCDer(\mathcal{R})$，我们得到了一个与 $CDer(\mathcal{R})$ 密切相关的结论。最后，我们给出李共形代数的三重同态定义。此外，还刻画了所有有限单李共形代数上的三重同态。

1. Introduction

近年来，关于李代数及其推广对象的（广义）导子研究取得了许多重要成果。众所周知，对李代数（广义）导子的研究推动了李代数结构理论的发展。特别是，许多作者研究了非结合代数、李代数、李超代数、李色代数、李三系、Hom李三系和n-Hom Nambu李代数的广义导子，见 [5, 10, 16, 26, 31, 32, 34]。Leger和Lucks研究了李代数及其子代数的广义导子，并在其研究中提出了广义导子代数及其子代数的许多有趣性质。导子的推广形式包括双导子和三重导子。许多作者研究了单广义Witt代数、Block李代数和Schr¨odinger-Virasoro李代数的双导子，见 [6, 19, 24]。

Müller 首次将李代数的三重导子作为导子的推广引入，并称其为前导子。李代数的三重导子类似于结合代数和 Jordan代数的三重导子。不难验证，对于任意李代数，每个导子都是李三重导子，但反之并不总是成立。近年来，许多作者研究了巢代数、TUHF 代数、三角代数、完美李代数和完美李超代数、李色代数以及四元数代数上的李三重导子 [1, 2, 12, 20, 25, 29, 33], 并取得了许多严谨的研究成果。Wang 和 Li 在 [17] 提出了关于交换环上严格上三角矩阵李代数的李三重导子问题。在 [18], 中，Li、Wang 和 Guo 刻画了 $gl(n, \mathcal{R})$ 的广义李三重导子。Herstein 在 [9]提出了若干关于李导子、Jordan导子及结合代数同态的问题。许多作者还提出了结合代数上的一些导子，例如 [3, 9, 23] 中的结合三重导子和 Jordan三重导子。

本文将讨论 Kac 在 [13, 15], 中引入的李共形代数上的共形导子和（广义）共形三重导子。李共形代数是李代数的一种推广。已有研究表明，李共形代数理论与

[1]第二作者为通讯作者。*Date*：投稿日期：2021年2月5日 接受日期：2021年11月19日。
2000 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号：11R52、15A99、17B67、17B10；次分类号：16G30。*Key words and phrases.* 三重导子，三重同态，共形代数。

[14]中满足局部性条件的无限维李代数有着密切联系。Virasoro 李共形代数 Vir 和与李代数 $\mathcal{G}$ 相关联的流李共形代数 $Cur\mathcal{G}$ 是李共形代数的两个重要例子。 [7] 中证明了， Vir 以及所有流李共形代数 $Cur\mathcal{G}$（其中 $\mathcal{G}$ 是有限维单李代数）构成了所有有限单李共形代数。Fan、Hong 和 Su 在 [8]中确定了所有有限单李共形代数的共形导子、共形拟导子和广义共形导子。在 [27, 28], 中，Zhao、Chen 和 Yuan 提出了李共形超代数和 Hom-李共形代数的各种此类导子。本文将对所有有限单李共形代数上的（广义）共形三重导子进行分类。

此外，关于李代数和共形代数同态的研究也很有趣。许多作者研究了同态、反同态、李同态和李三重同态之间的关系。在某些假设下，结合环的李三重同态可以分解为结合代数同态、结合代数反同态、李同态、李三重同态以及一些显然的映射的直和（见 [4, 11, 21]）。 [30, 33] 研究了完美李代数和李超代数的三重同态。在 [4], , Bresar 刻画了与某些结合代数相关的李三重同构。本文介绍李共形代数的三重同态的定义。此外，本文还讨论了所有有限单李共形代数的三重同态。

本文其余部分安排如下。第2节介绍李共形代数的基本定义、记号及一些众所周知的结果。第3节首先介绍李共形代数上（广义）共形三重导子的定义和记号，随后研究这些导子的共形代数结构及其若干性质。第4节对所有单李共形代数上的（广义）共形三重导子进行分类。第5节首先介绍李共形代数的三重同态的定义，随后刻画所有有限单李共形代数的三重同态。

全文中，我们用 $\mathbb{C}$、 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}^+$ 分别表示复数、整数和非负整数的集合。此外，所有向量空间和张量积均定义在 $\mathbb{C}$ 上。在不致混淆的情况下，我们将 $\otimes_{\mathbb{C}}$ 简记为 $\otimes$。

2. PRELIMINARIES

本节回顾李共形代数的一些基本定义、记号及相关结果，以供后续使用。详细介绍可参见 [7, 15]。

定义 2.1. 李共形代数 $\mathcal{R}$是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模，配备一个 $\mathbb{C}$-线性映射，从$\mathcal{R}\otimes\mathcal{R}$ 到 $\mathbb{C}[\lambda]\otimes\mathcal{R}, a\otimes b\mapsto [a_\lambda b]$, 称为 λ-括号，并满足以下公理:

$$[\partial a_\lambda b] = -\lambda[a_\lambda b], \quad [a_\lambda \partial b] = (\partial+\lambda)[a_\lambda b] \quad (conformal\ sesquilinearity), \tag{2.1}$$

$$[a_\lambda b] = -[b_{-\lambda-\partial}a] \quad (skew\text{-}symmetry), \tag{2.2}$$

$$[a_\lambda [b_\mu c]] = [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c] + [b_\mu [a_\lambda c]] \quad (Jacobi\ identity), \tag{2.3}$$

其中 $a, b, c \in \mathcal{R}$。

李共形代数的子代数、理想、商代数和同态的概念显而易见。此外，由于斜对称性，任何左理想或右理想实际上都是双边理想。若李共形代数 $\mathcal{R}$ 作为 $\mathbb{C}[\partial]$-模是有限生成的，则称其为有限的。李共形代数 $\mathcal{R}$的秩记作 rank($\mathcal{R}$)，即其作为 $\mathbb{C}[\partial]$-模的秩。若李共形代数 $\mathcal{R}$ 没有非平凡理想且不是阿贝尔的，则称其为单代数。

Virasoro 共形代数 Vir 和与李代数 $\mathcal{G}$ 相关联的流李共形代数 $Cur\mathcal{G}$ 是李共形代数的两个重要例子。

例 2.2. 共形代数 Vir 是以生成元 L为基的自由 $\mathbb{C}[\partial]$-模，其定义如下

$$Vir = \mathbb{C}[\partial]L, \quad [L_\lambda L] = (\partial + 2\lambda)L.$$

例 2.3. 设 $\mathcal{G}$ 为一个李代数。与 $\mathcal{G}$ 相关联的流李共形代数定义如下

$$Cur\mathcal{G} = \mathbb{C}[\partial] \otimes \mathcal{G}, \quad [a_\lambda b] = [a, b],$$

对所有的 a、$b \in \mathcal{G}$。

文献 [7] 证明了，Vir 以及所有满足 $\mathcal{G}$ 为有限维单李代数的流李共形代数 $Cur\mathcal{G}$ 穷尽了所有有限单李共形代数。本文将对所有有限单李共形代数的共形三重导子和三重同态进行分类。

定义 2.4. $\mathbb{C}[\partial]$-模 $\mathcal{A}$与 $\mathcal{B}$ 之间的共形线性映射是一个 $\mathbb{C}$-线性映射 ϕ_λ:$\mathcal{A} \to \mathbb{C}[\lambda] \otimes \mathcal{B}$，满足以下公理:

$$\phi_\lambda(\partial a) = (\partial + \lambda)\phi_\lambda(a), \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

显然，ϕ_λ 不依赖于不定变量 λ的选取。从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的所有共形线性映射构成的向量空间记为 $Chom(\mathcal{A}, \mathcal{B})$，它可通过 $(\partial\phi)_\lambda(a) = -\lambda\phi_\lambda(a)$ $\forall a \in \mathcal{A}$赋予一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模结构。为方便起见，我们将 $Cend\mathcal{A}$ 记作$Chom(\mathcal{A}, \mathcal{A})$。

定义 2.5. 设 $\mathcal{R}$ 是一个李共形代数。共形线性映射 ϕ_λ: $\mathcal{R} \to \mathbb{C}[\lambda] \otimes \mathcal{R}$ 是 $\mathcal{R}$ 的一个共形导子，当且仅当

$$\phi_\lambda([a_\mu b]) = [\phi_\lambda(a)_{\lambda+\mu} b] + [a_\mu \phi_\lambda(b)], \quad \forall a, b \in \mathcal{R}.$$

由雅可比恒等式可知，不难验证，对于任意 $a \in \mathcal{R}$，由 $ada_\lambda b = [a_\lambda b]$ 定义的映射 ada_λ 对任意 $b \in \mathcal{R}$ 都是 $\mathcal{R}$ 的一个共形导子。所有这类共形导子称为内共形导子。分别用 $CDer(\mathcal{R})$ 和 $CInn(\mathcal{R})$ 表示 $\mathcal{R}$ 的所有共形导子和内共形导子所构成的向量空间。

下面给出一个非内共形导子的重要例子:

例 2.6. 设 $Cur\mathcal{G}$ 是与有限维李代数 $\mathcal{G}$ 相关联的流李共形代数。定义共形线性映射 d^L_λ: $Cur\mathcal{G} \to Cur\mathcal{G}$，使得对任意 $a \in \mathcal{G}$，$d^L_\lambda a = (\partial + \lambda)a$。不难验证，$d^L_\lambda$ 是一个共形导子。

定义 2.7. 设 $\mathcal{R}$ 是一个有限维李共形代数。在 $Cend(\mathcal{R})$ 上的 λ-括号定义为

$$[\phi_\lambda \psi]_\mu a = \phi_\lambda(\psi_{\mu-\lambda} a) - \psi_{\mu-\lambda}(\phi_\lambda a), \quad \forall a \in \mathcal{R},$$

这在 $Cend(\mathcal{R})$ 上定义了李共形代数结构。它称为 $\mathcal{R}$上的一般李共形代数，记作 $gc(\mathcal{R})$。

受上述定义的启发，容易验证，$CDer(\mathcal{R})$ 和 $CInn(\mathcal{R})$ 是 $gc(\mathcal{R})$ 的李共形子代数，其中 $\mathcal{R}$ 是有限维李共形代数。此外，我们有如下塔 $CInn(\mathcal{R}) \subseteq CDer(\mathcal{R}) \subseteq gc(\mathcal{R})$。

3. Conformal triple derivations on Lie conformal algebras

本节首先介绍李共形代数上（广义）共形三重导子的定义和记号。随后，我们研究这些导子的共形代数结构及其一些性质。为方便起见，除非另有说明，本节始终假设 $\mathcal{R}$ 是有限维李共形代数。

定义 3.1. 共形线性映射 $\phi_x \in gc(\mathcal{R})$ 称为$\mathcal{R}$ 的共形三重导子，若其满足以下公理：

$$\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) = [[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c] + [[a_\lambda \phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c] + [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)], \tag{3.1}$$

对任意 a、b、$c \in \mathcal{R}$。

共形线性映射 $\phi_x \in gc(\mathcal{R})$ 称为$\mathcal{R}$ 的广义共形三重导子，若存在 $\mathcal{R}$ 的共形三重导子 τ_x，使得

$$\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) = [[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c] + [[a_\lambda \tau_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c] + [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\tau_x(c)], \tag{3.2}$$

对任意 a、b、$c \in \mathcal{R}$，且称 τ_x 为与 ϕ 相关的共形三重导子 $_x$.

分别用 $CTDer(\mathcal{R})$ 和 $GCTDer(\mathcal{R})$ 表示 $\mathcal{R}$ 的共形三重导子集和广义共形三重导子集。显然，共形三重导子都是广义共形三重导子，即在 (3.2) 中令 $\tau_x = \phi_x$，可得 $CTDer(\mathcal{R}) \subseteq GCTDer(\mathcal{R})$。然而，反过来一般并不成立。

根据上述定义，我们可以立即得到以下结果。

引理 3.2. 对任意 a、b、$c \in \mathcal{R}$，设 $\phi_x \in GCTDer(\mathcal{R})$ 和 τ_x 是与 ϕ_x 相关的共形三重导子。则有

(1) $\phi_x([a_\lambda[b_\mu c]]) = [\phi_x(a)_{\lambda+x}[b_\mu c]] + [a_\lambda[\tau_x(b)_{\mu+x}c]] + [a_\lambda[b_\mu\tau_x(c)]]$,
(2) $(\phi_x - \tau_x)([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) = [[(\phi_x - \tau_x)(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c] = [[a_\lambda(\phi_x - \tau_x)(b)]_{\lambda+\mu+x}c]$
$= [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}(\phi_x - \tau_x)(c)]$,
(3) $(\phi_x - \tau_x)([a_\lambda[b_\mu c]]) = [(\phi_x - \tau_x)(a)_{\lambda+x}[b_\mu c]] = [a_\lambda[(\phi_x - \tau_x)(b)_{\mu+x}c]] = [a_\lambda[b_\mu(\phi_x - \tau_x)(c)]]$.

证明. (1) 由雅可比恒等式可得

$$\begin{aligned}
\phi_x([a_\lambda[b_\mu c]]) =& \phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) + \phi_x([b_\mu[a_\lambda c]]) \\
=& \phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) - \phi_x([[a_\lambda c]_{-\partial-\mu}b]) \\
=& [[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c] + [[a_\lambda\tau_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c] + [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\tau_x(c)] \\
& - [[\phi_x(a)_{\lambda+x}c]_{-\partial-x-\mu+x}b] - [[a_\lambda\tau_x(c)]_{-\partial-x-\mu+x}b] - [[a_\lambda c]_{-\partial-x-\mu}\tau_x(b)] \\
=& [[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c] + [[a_\lambda\tau_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c] + [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\tau_x(c)] \\
& + [b_\mu[\phi_x(a)_{\lambda+x}c]] + [b_\mu[a_\lambda\tau_x(c)]] + [\tau_x(b)_{\mu+x}[a_\lambda c]] \\
=& [\phi_x(a)_{\lambda+x}[b_\mu c]] + [a_\lambda[\tau_x(b)_{\mu+x}c]] + [a_\lambda[b_\mu\tau_x(c)]].
\end{aligned}$$

(2) 由于 τ_x 是与 ϕ_x 相关的共形三重导子，我们推得

$$\begin{aligned}
\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) &= [[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c] + [[a_\lambda\tau_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c] + [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\tau_x(c)] \\
&= [[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c] + \tau_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) - [[\tau_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c].
\end{aligned}$$

也就是说,

$$(\phi_x - \tau_x)([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) = [[(\phi_x - \tau_x)(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c]. \tag{3.3}$$

类似地，由斜对称性和方程 (3.3)，我们可以得到

$$\begin{aligned}(\phi_x-\tau_x)([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) &= -(\phi_x-\tau_x)([[b_{-\lambda-\partial}a]_{\lambda+\mu}c])\\ &= -(\phi_x-\tau_x)([[b_{-\lambda-(-\lambda-\mu)}a]_{\lambda+\mu}c])\\ &= -(\phi_x-\tau_x)([[b_\mu a]_{\lambda+\mu}c])\\ &= -[[(\phi_x-\tau_x)(b)_{\mu+x}a]_{\lambda+\mu+x}c]\\ &= [[a_{-x-\mu-\partial}(\phi_x-\tau_x)(b)]_{\lambda+\mu+x}c]\\ &= [[a_{-x-\mu-(-\lambda-\mu-x)}(\phi_x-\tau_x)(b)]_{\lambda+\mu+x}c]\\ &= [[a_\lambda(\phi_x-\tau_x)(b)]_{\lambda+\mu+x}c].\end{aligned}$$

由斜对称性和雅可比恒等式，我们推得

$$\begin{aligned}(\phi_x-\tau_x)([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) &= (\phi_x-\tau_x)([a_\lambda[b_\mu c]])-(\phi_x-\tau_x)([b_\mu[a_\lambda c]])\\ &= -(\phi_x-\tau_x)([[b_\mu c]_{-\partial-\lambda}a])+(\phi_x-\tau_x)([[a_\lambda c]_{-\partial-\mu}b])\\ &= -[[b_\mu(\phi_x-\tau_x)(c)]_{-\partial-\lambda}a]+[[a_\lambda(\phi_x-\tau_x)(c)]_{-\partial-\mu}b]\\ &= [a_\lambda[b_\mu(\phi_x-\tau_x)(c)]]-[b_\mu[a_\lambda(\phi_x-\tau_x)(c)]]\\ &= [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}(\phi_x-\tau_x)(c)].\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}(\phi_x-\tau_x)([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) &= [[(\phi_x-\tau_x)(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c]=[[a_\lambda(\phi_x-\tau_x)(b)]_{\lambda+\mu+x}c]\\ &= [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}(\phi_x-\tau_x)(c)].\end{aligned}$$

(3) 由(2)立即可得。

证明完毕。 □

注3.3. 受引理 3.2 中(2)的证明启发，我们可以得到如下有趣的结论。设 $\phi_x\in gc(\mathcal{R})$。对于任意 $a,b,c\in\mathcal{R}$，我们有

（1）以下三个等式等价：

(i) $\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])=[[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c]$.
(ii) $\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])=[[a_\lambda\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c]$.
(iii) $\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])=[[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c]=[[a_\lambda\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c]=[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)]$.

（2）以下三个等式也等价：

(i) $[[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c]=[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)]$. (ii) $[[a_\lambda\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c]=[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)]$. (iii) $[[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c]=[[a_\lambda\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c]=[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)]$.

定义 3.4. 共形线性映射 $\phi_x\in gc(\mathcal{R})$ 称为 $\mathcal{R}$ 的共形三重中心，若其满足以下公理：

$$\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])=[[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c], \tag{3.4}$$

对任意 a、b、$c\in\mathcal{R}$。

若共形线性映射 $\phi_x\in gc(\mathcal{R})$ 满足以下等式，则称其为 $\mathcal{R}$ 的共形三重拟中心：

$$[[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c]=[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)], \tag{3.5}$$

对任意 a、b、$c\in\mathcal{R}$。

若共形线性映射 $\phi_x\in gc(\mathcal{R})$ 满足以下等式，则称其为 $\mathcal{R}$ 的中心保形三重导子：

$$\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])=[[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c]=0, \tag{3.6}$$

对于任意 a、b、$c\in\mathcal{R}$。

下文分别用 $TC(\mathcal{R})$、 $TQC(\mathcal{R})$ 和 $ZTDer(\mathcal{R})$ 表示共形三重拟中心、拟中心和中心共形三重导子的集合。显然，由注3.3中的 (1) 可得链式关系 $ZTDer(\mathcal{R}) \subseteq TC(\mathcal{R}) \subseteq TQC(\mathcal{R})$。与通常一样，李共形代数 $\mathcal{R}$ 的中心记为 $Z(\mathcal{R}) = \{a \in \mathcal{R} | [a_\lambda b] = 0, \ \forall b \in \mathcal{R}\}$。对于 $\mathcal{R}$ 的子集 S，记 $C_{\mathcal{R}}(S)$ 为 S 在 $\mathcal{R}$ 中的中心化子。显然，若 $Z(\mathcal{R}) = 0$，则 $ZTDer(\mathcal{R}) = 0$。

注3.5. 受引理 3.2 中 (2) 的结果启发，我们推得，若 $\phi_x \in GCTDer(\mathcal{R})$，且 τ_x 是与 ϕ_x 相关的共形三重导子，则 $\phi_x - \tau_x \in TC(\mathcal{R})$。

众所周知， $CDer(Vir) = CInn(Vir)$（见 [7]）。接下来，我们研究 $ZTDer(Vir)$、 $TC(Vir)$ 和 $TQC(Vir)$ 的刻画。 $CTDer(Vir)$ 和 $GCTDer(Vir)$ 将在第4节中给出（见定理4.8）。

命题3.6. $TQC(Vir) = TC(Vir) = ZTDer(Vir) = 0$。

证明. 对任意 $\phi_x \in TQC(Vir)$，设 $\phi_x(L) = f(\partial, x)L$，其中某个 $f(\partial, x)$ 满足 $\in \mathbb{C}[\partial, x]$。由 (3.5), 我们得到

$$f(-\lambda - x, x)(\lambda + x - \mu)(\partial + 2\lambda + 2\mu + 2x) = f(\partial + \lambda + \mu, x)(\lambda - \mu)(\partial + 2\lambda + 2\mu).$$

显然，通过比较上述方程中 ∂ 的系数，我们可以推出 $f(\partial, x) = 0$。因此，我们有 $TQC(Vir) = 0$。根据上述讨论，我们有链 $ZTDer(Vir) \subseteq TC(Vir) \subseteq TQC(Vir)$。因此，我们推出 $TQC(Vir) = TC(Vir) = ZTDer(Vir) = 0$。□

Fr从现在起，我们研究这些共形三重导子之间的联系 .

命题3.7. $CTDer(\mathcal{R})$ $GCTDer(\mathcal{R})$ 和 $TC(\mathcal{R})$ 是 $gc(\mathcal{R})$ 的李共形子代数。

证明. 不难看出，所有情形的证明都类似。因此，我们只需证明，对于任意 $\phi_x, \psi_x \in CTDer(\mathcal{R})$, $[\phi_x \psi]_y \in CTDer(\mathcal{R})[x]$。

由于 $\phi_x, \psi_x \in CTDer(\mathcal{R})$，我们可以得到

$$\begin{aligned}
\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) &= [[\phi_x(a)_{\lambda+x} b]_{\lambda+\mu+x} c] + [[a_\lambda \phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x} c] + [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} \phi_x(c)], \\
\psi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) &= [[\psi_x(a)_{\lambda+x} b]_{\lambda+\mu+x} c] + [[a_\lambda \psi_x(b)]_{\lambda+\mu+x} c] + [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} \psi_x(c)],
\end{aligned}$$

对任意 $a, b, c \in \mathcal{R}$，此外，我们可以得到

$$\begin{aligned}
&\phi_x \psi_{y-x}([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) \\
&= \phi_x([[\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x} b]_{\lambda+\mu+y-x} c] + [[a_\lambda \psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y-x} c] + [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} \psi_{y-x}(c)]) \\
&= [[\phi_x \psi_{y-x}(a)_{\lambda+y} b]_{\lambda+\mu+y} c] + [[\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x} \phi_x(b)]_{\lambda+\mu+y} c] + [[\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x} b]_{\lambda+\mu+y-x} \phi_x(c)] \\
&\quad + [[\phi_x(a)_{\lambda+x} \psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y} c] + [[a_\lambda \phi_x \psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y} c] + [[a_\lambda \psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y-x} \phi_x(c)] \\
&\quad + [[\phi_x(a)_{\lambda+x} b]_{\lambda+\mu+x} \psi_{y-x}(c)] + [[a_\lambda \phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x} \psi_{y-x}(c)] + [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} \phi_x \psi_{y-x}(c)].
\end{aligned}$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned}
&\psi_{y-x} \phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) \\
&= [[\psi_{y-x} \phi_x(a)_{\lambda+y} b]_{\lambda+\mu+y} c] + [[\phi_x(a)_{\lambda+x} \psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y} c] + [[\phi_x(a)_{\lambda+x} b]_{\lambda+\mu+x} \psi_{y-x}(c)] \\
&\quad + [[\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x} \phi_x(b)]_{\lambda+\mu+y} c] + [[a_\lambda \psi_{y-x} \phi_x(b)]_{\lambda+\mu+y} c] + [[a_\lambda \phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x} \psi_{y-x}(c)] \\
&\quad + [[\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x} b]_{\lambda+\mu+y-x} \phi_x(c)] + [[a_\lambda \psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y-x} \phi_x(c)] + [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} \psi_{y-x} \phi_x(c)].
\end{aligned}$$

因此，我们可以得到

$$[\phi_x \psi]_y([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) = [[[\phi_x \psi]_y(a)_{\lambda+y} b]_{\lambda+\mu+y} c] + [[a_\lambda [\phi_x \psi]_y(b)]_{\lambda+\mu+y} c] + [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} [\phi_x \psi]_y(c)] \ .$$

因此， $[\phi_x \psi]_y \in CTDer(\mathcal{R})[x]$，即 $CTDer(\mathcal{R})$ 是 $gc(\mathcal{R})$ 的李共形子代数。

证明至此完成。 □

命题 根据 3.8, $ZTDer(\mathcal{R})$ 是 $CTDer(\mathcal{R})$ 和 $GCTDer(\mathcal{R})$ 的李共形理想。

证明。显然，我们有塔 $ZTDer(\mathcal{R}) \subseteq CTDer(\mathcal{R}) \subseteq GCTDer(\mathcal{R})$。我们只需证明，对于任意 $\phi_x \in ZTDer(\mathcal{R})$ 和 $\psi_x \in CTDer(\mathcal{R})$，有 $[\phi_x\psi]_y \in ZTDer(\mathcal{R})[x]$。另一种情形的证明类似。

对于任意 a、b、$c \in \mathcal{R}$，我们有

$$\begin{aligned}[[[\phi_x\psi]_y(a)_{\lambda+y}b]_{\lambda+\mu+y}c] =&[[\phi_x\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y}b]_{\lambda+\mu+y}c] - [[\psi_{y-x}\phi_x(a)_{\lambda+y}b]_{\lambda+\mu+y}c]\\ =&0 - (\psi_{y-x}([[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c]) - [[\phi_x(a)_{\lambda+x}\psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y}c]\\ &- [[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}\psi_{y-x}(c)])\\ =&0.\end{aligned}$$

类似地，我们可以得到

$$[\phi_x\psi]_y([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) = 0.$$

因此，我们推得 $[\phi_x\psi]_y \in ZTDer(\mathcal{R})[x]$。

证明至此完成。 □

注 3.9. 众所周知， $gc(\mathcal{R})$ 是一个单李共形代数。因此，若 $GCTDer(\mathcal{R}) = gc(\mathcal{R})$，根据命题 3.8，$ZTDer(\mathcal{R})$ 等于 0 或 $gc(\mathcal{R})$。

命题 3.10. 若 $Z(\mathcal{R}) = 0$，则 $TC(\mathcal{R})$ 和 $TQC(\mathcal{R})$ 是交换李共形代数。特别地，若 $Z(\mathcal{R}) = 0$，则 $TC(\mathcal{R})$ 中心化 $TQC(\mathcal{R})$。

证明. 显然，我们只需证明第一种情形，另一种情形可类似证明。对于任意的 a、b、$c \in \mathcal{R}$、ϕ_x、$\psi_x \in TC(\mathcal{R})$，我们可以推得

$$\begin{aligned}[[\phi_x\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y}b]_{\lambda+\mu+y}c] &= \phi_x([[\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x}b]_{\lambda+\mu+y-x}c])\\ &= \phi_x([[a_\lambda\psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y-x}c])\\ &= [[\phi_x(a)_{\lambda+x}\psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y}c]\\ &= [[\psi_{y-x}\phi_x(a)_{\lambda+y}b]_{\lambda+\mu+y}c].\end{aligned}$$

因此，我们有

$$[[[\phi_x\psi]_y(a)_{\lambda+y}b]_{\lambda+\mu+y}c] = 0.$$

由于 b、c 和 $Z(\mathcal{R}) = 0$ 的任意性，我们可以推得

$$[\phi_x\psi]_y(a) = 0.$$

因此，我们有 $[\phi_x\psi]_y = 0$。

证明到此结束。 □

命题 3.11. 设 $\mathcal{R}$ 是一个李共形代数。那么我们有以下结果 *s:*

(1) $[CTDer(\mathcal{R})_\lambda TC(\mathcal{R})]_\mu \subseteq TC(\mathcal{R})[\lambda]$。(2) $[GCTDer(\mathcal{R})_\lambda TC(\mathcal{R})]_\mu \subseteq TC(\mathcal{R})[\lambda]$。(3) $[CTDer(\mathcal{R})_\lambda TQC(\mathcal{R})]_\mu \subseteq TQC(\mathcal{R})[\lambda]$。

证明。显然，我们只需证明第一种情况，其他情况也可以用类似的方法证明。由于$\phi_x \in CTDer(\mathcal{R})$、$\psi_x \in TC(\mathcal{R})$，对于任意的 a、b、$c \in \mathcal{R}$，我们可以得到

$$\begin{aligned}&[[\phi_x\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y}b]_{\lambda+\mu+y}c]\\ =&\phi_x([[\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x}b]_{\lambda+\mu+y-x}c]) - [[\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x}\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+y}c]\\ &- [[\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x}b]_{\lambda+\mu+y-x}\phi_x(c)]\\ =&\phi_x\psi_{y-x}([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) - \psi_{y-x}([[a_\lambda\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c]) - \psi_{y-x}([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)]).\end{aligned}$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned}&[[\psi_{y-x}\phi_x(a)_{\lambda+y}b]_{\lambda+\mu+y}c]\\=&\psi_{y-x}([[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c])\\=&\psi_{y-x}\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])-\psi_{y-x}([[a_\lambda\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c])-\psi_{y-x}([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)]).\end{aligned}$$

因此，我们可以得到

$$[[[\phi_x\psi]_y(a)_{\lambda+y}b]_{\lambda+\mu+y}c]=[\phi_x\psi]_y([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]).$$

因此，我们有 $[\phi_x\psi]_y\in TC(\mathcal{R})$。

证明完毕。 □

4. Classification of conformal triple derivations on simple Lie conformalalgebras

本节将对所有有限单李共形代数的（广义）共形三重导子进行分类。为方便起见，除非另有说明，本节中我们始终假设 $\mathcal{R}$ 是一个有限单李共形代数。

容易看出， $CDer(\mathcal{R})$ 和 $CInn(\mathcal{R})$ 是 $CTDer(\mathcal{R})$ 的李共形子代数。此外，我们有以下引理。

引理 4.1. $CInn(\mathcal{R})$ 是李共形代数 $CTDer(\mathcal{R})$ 的理想。

证明. 设 $\phi_x\in CTDer(\mathcal{R})$, $a\in\mathcal{R}$。由于 $\mathcal{R}$ 是单李共形代数，因此存在某个有限指标集 I, $J\subseteq\mathbb{Z}^+$ 和 $a^1_{ij},a^2_{ij}\in\mathcal{R}$，使得 $a=\sum_{i\in I,j\in J}\frac{d^i}{d\lambda^i}[a^1_{ij}{}_\lambda a^2_{ij}]|_{\lambda=0}$。对于任意 $b\in\mathcal{R}$，我们有

$$\begin{aligned}[\phi_x ada]_y(b)=&\phi_x ada_{y-x}(b)-ada_{y-x}\phi_x(b)\\=&\phi_x([a_{y-x}b])-[a_{y-x}\phi_x(b)]\\=&\phi_x([(\sum_{i\in I,j\in J}\frac{d^i}{d\lambda^i}[a^1_{ij}{}_\lambda a^2_{ij}]|_{\lambda=0})_{y-x}b])-[(\sum_{i\in I,j\in J}\frac{d^i}{d\lambda^i}[a^1_{ij}{}_\lambda a^2_{ij}]|_{\lambda=0})_{y-x}\phi_x(b)]\\=&\sum_{i\in I,j\in J}\frac{d^i}{d\lambda^i}([[\phi_x(a^1_{ij})_{\lambda+x}a^2_{ij}]_y b]+[[a^1_{ij}{}_\lambda\phi_x(a^2_{ij})]_y b]+[[a^1_{ij}{}_\lambda a^2_{ij}]_{y-x}\phi_x(b)])|_{\lambda=0}\\&-[(\sum_{i\in I,j\in J}\frac{d^i}{d\lambda^i}[a^1_{ij}{}_\lambda a^2_{ij}]|_{\lambda=0})_{y-x}\phi_x(b)]\\=&\sum_{i\in I,j\in J}\frac{d^i}{d\lambda^i}([[\phi_x(a^1_{ij})_{\lambda+x}a^2_{ij}]_y b]+[[a^1_{ij}{}_\lambda\phi_x(a^2_{ij})]_y b])|_{\lambda=0}\\=&ad(\sum_{i\in I,j\in J}\frac{d^i}{d\lambda^i}([\phi_x(a^1_{ij})_{\lambda+x}a^2_{ij}]+[a^1_{ij}{}_\lambda\phi_x(a^2_{ij})])|_{\lambda=0})_y(b).\end{aligned}$$

由 b 的任意性可知， $[\phi_x ada]_y$ 是一个内共形导子。因此， $CInn(\mathcal{R})$ 是李共形代数 $CTDer(\mathcal{R})$ 的理想。□

事实上， $CDer(\mathcal{R})$ 与 $CTDer(\mathcal{R})$ 之间还存在另一种联系，这种联系比上述引理所示的二者之间的关系更强。因此，我们有以下引理。

引理 4.2. 存在一个 $\mathbb{C}$-线性映射 $\delta: CTDer(\mathcal{R})\to CDer(\mathcal{R})$, $\phi_x\mapsto\delta_{\phi_x}$ 使得对所有 $a\in\mathcal{R}$, $\phi_x\in CTDer(\mathcal{R})$，都有 $[\phi_x ada]_y=ad\delta_{\phi_x}(a)_y$。

证明. 根据引理 4.1 的证明，我们定义了一个作用于 $\mathcal{R}$ 上的保形线性自同态 δ_{ϕ_x}，使得对任意 $a = \sum_{i\in I,\ j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}[a^1_{ij\,\lambda}a^2_{ij}]|_{\lambda=0} \in \mathcal{R}$,

$$\delta_{\phi_x}(a) = \sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}([\phi_x(a^1_{ij})_{\lambda+x}a^2_{ij}] + [a^1_{ij\,\lambda}\phi_x(a^2_{ij})])|_{\lambda=0}.$$

首先， $\delta_{\phi_x}(a)$不依赖于 a 的表达式选择。为证明这一点，取

$$A = \sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}([\phi_x(a^1_{ij})_{\lambda+x}a^2_{ij}] + [a^1_{ij\,\lambda}\phi_x(a^2_{ij})])|_{\lambda=0},$$

$$B = \sum_{s\in I', t\in J'} \frac{d^s}{d\lambda^s}([\phi_x(b^1_{st})_{\lambda+x}b^2_{st}] + [b^1_{st\lambda}\phi_x(b^2_{st})])|_{\lambda=0},$$

其中， a 也可以表示为 $a = \sum_{s\in I',\ t\in J'} \frac{d^s}{d\lambda^s}[b^1_{st\lambda}b^2_{st}]|_{\lambda=0}$。由于 $\phi_x \in CTDer(\mathcal{R})$，对于任意 $c \in \mathcal{R}$，我们可以推出

$$[A_{\mu+x}c] = \phi_x([a_\mu c]) - [a_\mu\phi_x(c)] = [B_{\mu+x}c].$$

因此，对于任意 $c \in \mathcal{R}$，有 $[(A-B)_{\mu+x}c] = 0$，即 $A - B \in Z(\mathcal{R})$。显然，由于 $\mathcal{R}$ 是单李共形代数，我们有 $Z(\mathcal{R}) = 0$。于是，得到 $A = B$。因此， δ_{ϕ_x} 是良定义的。此外，由引理 4.1 的证明可立即得出 $[\phi_x ada]_y = ad\delta_{\phi_x}(a)y$。

接下来，我们需要证明 δ_{ϕ_x} 是共形线性映射，即 $\delta_{\phi_x}(\partial a) = (\partial + x)\delta_{\phi_x}(a)$。对于任意 $a = \sum_{i\in I,\ j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}[a^1_{ij\,\lambda}a^2_{ij}]|_{\lambda=0} \in \mathcal{R}$，我们有 $\partial a = \sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}([\partial a^1_{ij\,\lambda}a^2_{ij}] + [a^1_{ij\,\lambda}\partial a^2_{ij}])|_{\lambda=0}$。因此，我们可以得到

$$\begin{aligned}
\delta_{\phi_x}(\partial a) =& \sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}([\phi_x(\partial a^1_{ij})_{\lambda+x}a^2_{ij}] + [\partial a^1_{ij\,\lambda}\phi_x(a^2_{ij})] + [\phi_x(a^1_{ij})_{\lambda+x}\partial a^2_{ij}] + [a^1_{ij\,\lambda}\phi_x(\partial a^2_{ij})])|_{\lambda=0}\\
=& \sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}(-\lambda([\phi_x(a^1_{ij})_{\lambda+x}a^2_{ij}] + [a^1_{ij\,\lambda}\phi_x(a^2_{ij})])\\
&+ (\partial + \lambda + x)([\phi_x(a^1_{ij})_{\lambda+x}a^2_{ij}] + [a^1_{ij\,\lambda}\phi_x(a^2_{ij})]))|_{\lambda=0}\\
=&(\partial + x)\sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}([\phi_x(a^1_{ij})_{\lambda+x}a^2_{ij}] + [a^1_{ij\,\lambda}\phi_x(a^2_{ij})])|_{\lambda=0}\\
=&(\partial + x)\delta_{\phi_x}(a).
\end{aligned}$$

最后，我们证明 δ_{ϕ_x} 是共形导子。根据上述讨论，对于任意 $\phi_x \in CTDer(\mathcal{R})$, $a, b \in \mathcal{R}$，我们有 $[\phi_x ad[a_\lambda b]] = ad\delta_{\phi_x}([a_\lambda b])$。另一方面，我们有

$$\begin{aligned}
[\phi_x ad[a_\lambda b]] &= [\phi_x[ada_\lambda adb]]\\
&= [[\phi_x ada]_{\lambda+x}adb] + [ada_\lambda[\phi_x adb]]\\
&= [ad\delta_{\phi_x}(a)_{\lambda+x}adb] + [ada_\lambda ad\delta_{\phi_x}(b)]\\
&= ad([\delta_{\phi_x}(a)_{\lambda+x}b] + [a_\lambda\delta_{\phi_x}(b)]).
\end{aligned}$$

因此， $ad\delta_{\phi_x}([a_\lambda b]) = ad([\delta_{\phi_x}(a)_{\lambda+x}b] + [a_\lambda\delta_{\phi_x}(b)])$。由于 $Z(\mathcal{R}) = 0$，我们有 $\delta_{\phi_x}([a_\lambda b]) = [\delta_{\phi_x}(a)_{\lambda+x}b] + [a_\lambda\delta_{\phi_x}(b)]$。由 a, b 的任意性，我们可以推出 $\delta_{\phi_x} \in CDer(\mathcal{R})$。

证明至此完成。 □

引理 4.3. $CTDer(\mathcal{R})$ 中 $CInn(\mathcal{R})$ 的中心化子是平凡的，即 $C_{CTDer(\mathcal{R})}(CInn(\mathcal{R})) = 0$。特别地，$CTDer(\mathcal{R})$ 的中心为零。

证明。假设 $\phi_x \in C_{CTDer(\mathcal{R})}(CInn(\mathcal{R}))$。那么对于任意 $a \in \mathcal{R}$，我们有 $[\phi_x ada] = 0$ 。因此，对于任意 $b \in \mathcal{R}$，可得 $\phi_x([a_\lambda b]) - [a_\lambda \phi_x(b)] = [\phi_x ada]_{\lambda+x}(b) = 0$。此外，我们有 $\phi_x([a_\lambda b]) = [a_\lambda \phi_x(b)] = [\phi_x(a)_{\lambda+x} b]$。

一方面，我们有

$$\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) = [[\phi_x(a)_{\lambda+x} b]_{\lambda+\mu+x} c] = [[a_\lambda \phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x} c] = [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} \phi_x(c)],$$

对任意 a、b、$c \in \mathcal{R}$。另一方面，我们有

$$\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) = [[\phi_x(a)_{\lambda+x} b]_{\lambda+\mu+x} c] + [[a_\lambda \phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x} c] + [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} \phi_x(c)],$$

因为 $\phi_x \in CTDer(\mathcal{R})$。因此，我们可以得到

$$\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) = 3\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]).$$

这意味着，对于任意 a、b、$c \in \mathcal{R}$，有 $\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) = 0$。由于 $\mathcal{R}$ 是单李共形代数， $\mathcal{R}$ 中的每个元素都可以表示为 $\sum_{i\in I,\ j\in J,\ k\in K} \frac{d^i}{d\lambda^i}\frac{d^k}{d\mu^k}[[a^1_{ijk}{}_\lambda a^2_{ijk}]_\mu a^3_{ijk}]|_{\lambda=\mu=0}$ 的形式。于是我们推得 $\phi_x = 0$。□

现在，我们通过以下定理介绍本节的主要结果，该定理将给出有限单李共形代数的共形三重导子的分类。

定理 4.4. $CTDer(\mathcal{R}) = CDer(\mathcal{R})$.

证明. 假设 $\phi_x \in CTDer(\mathcal{R})$, $a \in \mathcal{R}$. 根据引理 4.2，我们有 $[\phi_x ada]_y = ad\delta_{\phi_x}(a)y$ and$\delta_{\phi_x} \in CDer(\mathcal{R})$. 此外，对于任意 $b \in \mathcal{R}$，我们有 $ad\delta_{\phi_x}(a)y(b) = [\delta_{\phi_x}(a)_y b] = \delta_{\phi_x}([a_{y-x} b]) - [a_{y-x}\delta_{\phi_x}(b)] = [\delta_{\phi_x} ada]_y(b)$. 由 b 的任意性可推得 $ad\delta_{\phi_x}(a)_y = [\delta_{\phi_x} ada]_y$. 因此，我们有 $[\phi_x ada]_y = [\delta_{\phi_x} ada]_y$，即 $\phi_x - \delta_{\phi_x} \in C_{CTDer(\mathcal{R})}($ $CInn(\mathcal{R}))$. 根据引理 4.3，$\phi_x - \delta_{\phi_x} = 0$，即 $\phi_x = \delta_{\phi_x}$. 因此，定理由引理 4.2 得证。□

在 [7], 中，D'Andrea 和 Kac 给出了所有有限单李共形代数的如下分类。

命题 4.5. 有限单李共形代数同构于 Vir ，或同构于与有限维单李代数 $\mathcal{G}$相关联的流共形代数 $Cur\mathcal{G}$ 。

在 [7] 中还证明了， Vir 上的共形导子以及所有单流李共形代数 $Cur\mathcal{G}$ 上的共形导子如下。

命题 4.6. (1) Vir 的每个共形导子都是内共形导子。

(2) 对于有限维单李代数 $\mathcal{G}$， $Cur\mathcal{G}$ 的每个共形导子都具有 $p(\partial)d^L + d$的形式，其中 d 是内共形导子，而 d^L 如例 2.6 所述。

结合定理 4.4 和上述两个命题，我们立即得到以下结果。

推论 4.7。(1) $CTDer(Vir) = CInn(Vir)$。

(2) $CTDer(Cur\mathcal{G}) = \{\phi_x \in gc(Cur\mathcal{G}) | \phi_x(a) = f(x)(\partial + x)a + d_x(a) \ \ where\ a \in \mathcal{G},\ f(x) \in \mathbb{C}[x]\ and\ d_x \in CInn(Cur\mathcal{G})\}$，其中 $\mathcal{G}$ 是有限维单李代数。

受引理 3.2 和推论 4.7 的启发，我们给出了有限单李共形代数上广义共形三导子的分类。

定理4.8。(1) $GCTDer(Vir) = CTDer(Vir) = CInn(Vir)$。(2) $GCTDer(Cur\mathcal{G}) = \{\phi_x \in gc(Cur\mathcal{G}) | \phi_x(a)$ $= (f(x)\partial + g(x))a + d_x(a) \ \ where\ a \in \mathcal{G},\ f(x)\ g(x) \in \mathbb{C}[x]\ and\ d_x \in CInn(Cur\mathcal{G})\}$，其中 $\mathcal{G}$ 是有限维单李代数。

证明。(1) 由注3.5、命题3.6和推论 4.7可立即得到。

(2) 受注3.5启发，我们只需要求出 $TC(Cur\mathcal{G})$。对于任意 $\phi_x \in TC(Cur\mathcal{G})$，由于 $Cur\mathcal{G}$ 是有限秩自由 $\mathbb{C}[\partial]$-模，我们假设对每个$a \in \mathcal{G}$，都有 $\phi_x(a) = \sum_{i=0}^{n} \partial^i f_x^i(a)$，其中 f_x^i 是从 $\mathcal{G}$到 $\mathcal{G}[x]$的 $\mathbb{C}$-线性映射。根据 (3.4)，对任意 a、b、$c \in \mathcal{G}$，我们得到

$$\sum_{i=0}^{n} \partial^i f_x^i([[a,b],c]) = \sum_{i=0}^{n} (-\lambda - x)^i [[f_x^i(a),b],c].$$

显然，通过比较上述等式中 ∂ 的系数，我们可以推出 $n = 0$。因此，对每个 $a \in \mathcal{G}$，我们令 $\phi_x(a) = f_x(a)$，其中 f_x 是从 $\mathcal{G}$ 到 $\mathcal{G}[x]$的 $\mathbb{C}$-线性映射。根据注3.3中 (1) 的结论 (iii)，我们还有

$$f_x([[a,b],c]) = [[f_x(a),b],c] = [[a,f_x(b)],c] = [[a,b],f_x(c)]. \tag{4.1}$$

由于 $\mathcal{G}$是有限维单李代数，因此 $Z(\mathcal{G}) = 0$。由(4.1)，我们有 $[([f_x(a)\ b] - [a, f_x(b)])\ c] = 0$，对任意 $c \in \mathcal{G}$均成立。因此，我们有

$$[f_x(a), b] = [a, f_x(b)] \tag{4.2}$$

对任意 a、$b \in \mathcal{G}$均成立。假设对于每个 $a \in \mathcal{G}$，都有 $f_x(a) = \sum_{i=0}^{m} x^i f_i(a)$，其中 f_i 是从 $\mathcal{G}$ 到 $\mathcal{G}$ 的 $\mathbb{C}$-线性映射。将 $f_x(a)$代入(4.2)，得到

$$[f_i(a), b] = [a, f_i(b)] \tag{4.3}$$

对所有 $i \in \{0, 1, ..., m\}$均成立。由 [7], 中的引理6.3可推出 $f_i = k_i Id_{\mathcal{G}}$，其中 $k_i \in \mathbb{C}$。因此，对任意 $g(x) \in \mathbb{C}[x]$，我们有 $\phi_x(a) = g(x)a$。

因此，由定理4.8和上述讨论可直接得到(2)。

证明完毕。 □

5. Classfication of triple homomorphisms on simple Lie conformal algebras

本节首先介绍李共形代数的三重同态的定义，然后刻画所有有限单李共形代数的三重同态。

定义 5.1. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是两个李共形代数。称 $\mathbb{C}[\partial]$-模同态 $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 为:

(1) 若满足 $f([a_\lambda b]) = [f(a)_\lambda f(b)]$，对任意 $a, b \in \mathcal{A}$ 均成立，则称为同态。(2) 若满足 $f([a_\lambda b]) = -[f(a)_\lambda f(b)]$，对任意 $a, b \in \mathcal{A}$ 均成立，则称为反同态。(3) 若满足 $f([a_\lambda [b_\mu c]]) = [f(a)_\lambda [f(b)_\mu f(c)]]$，对任意 $a, b, c \in \mathcal{A}$ 均成立，则称为三重同态。

注 5.2. 不难看出，李共形代数的同态和反同态都是三重同态，但反过来并不总是成立。此外，同态与反同态之和也是三重同态。实际上，它们之间还存在其他联系，并非仅仅是包含关系。

注 5.3. 显然，由于李共形代数的斜对称性，以下两个等式等价:

(1) $f([a_\lambda [b_\mu c]]) = [f(a)_\lambda [f(b)_\mu f(c)]]$.
(2) $f([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) = [[f(a)_\lambda f(b)]_{\lambda+\mu} f(c)]$.

设 $\mathcal{A}$ 是一个李共形代数。对于 $\mathcal{A}$ 的子集 S， S 的包络李共形代数按定义是由 S 生成的 $\mathcal{A}$ 的李共形子代数。若一个李共形代数不能写成两个非平凡理想的直和，则称其为不可分解的。

定义 5.4. 设 $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ 是两个李共形代数。若一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模同态 $f: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 满足 $f = f_1 + f_2$，且存在 $f(\mathcal{A})$ 的包络李共形代数中的理想 I_1、I_2，使得 $I_1 \cap I_2 = 0$ 和 $f_1(\mathcal{A}) \subseteq I_1$，$f_2(\mathcal{A}) \subseteq I_2$，则称其为 f_1 和 f_2 的直和。

以下始终假设 $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ 是李共形代数，且 f 是从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$的三重同态。记 E 为 $f(\mathcal{A})$ 的包络李共形代数。此外，我们假设 $\mathcal{A}$ 是有限单李共形代数，而 E 无中心且可分解为不可分解理想的直和。

引理 5.5. 设 $\mathcal{A}$ 是有限单李共形代数，$\mathcal{B}$ 是李共形代数，则存在同态 $\delta_f: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，使得对所有 $a \in \mathcal{A}$，都有 $fada_x = ad\delta_f(a)_x f$。

证明. 与引理 4.1 证明中的讨论类似，由于 $\mathcal{A}$ 是有限单李共形代数，存在某个有限指标集 I、$J \subseteq \mathbb{Z}^+$ 以及 a_{ij}^1、$a_{ij}^2 \in \mathcal{A}$，使得$a = \sum_{i\in I,\ j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}[a_{ij}^1{}_\lambda a_{ij}^2]|_{\lambda=0}$。定义一个 $\mathbb{C}$-线性映射 $\delta_f: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，使得对任意 $a \in \mathcal{A}$，$\delta_f(a) = \sum_{i\in I,\ j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}[f(a_{ij}^1)_\lambda f(a_{ij}^2)]|_{\lambda=0}$。

首先，只需证明 $\delta_f(a)$ 与 a 的表达式无关。为此，我们取

$$A = \sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}[f(a_{ij}^1)_\lambda f(a_{ij}^2)]|_{\lambda=0}, \quad B = \sum_{s\in I', t\in J'} \frac{d^s}{d\lambda^s}[f(b_{st}^1)_\lambda f(b_{st}^2)]|_{\lambda=0},$$

其中 a 也可表示为 $a = \sum_{s\in I',\ t\in J'} \frac{d^s}{d\lambda^s}[b_{st}^1{}_\lambda b_{st}^2]|_{\lambda=0}$。由于 f 是从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的三重同态，对于任意 $c \in \mathcal{A}$，我们可以推得

$$\begin{aligned}
[f(c)_\mu(A-B)] &= [f(c)_\mu \sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}[f(a_{ij}^1)_\lambda f(a_{ij}^2)]|_{\lambda=0}] - [f(c)_\mu \sum_{s\in I', t\in J'} \frac{d^s}{d\lambda^s}[f(b_{st}^1)_\lambda f(b_{st}^2)]|_{\lambda=0}] \\
&= \sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}([f(c)_\mu[f(a_{ij}^1)_\lambda f(a_{ij}^2)]])|_{\lambda=0} - \sum_{s\in I', t\in J'} \frac{d^s}{d\lambda^s}([f(c)_\mu[f(b_{st}^1)_\lambda f(b_{st}^2)]])|_{\lambda=0} \\
&= \sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}(f([c_\mu[a_{ij}^1{}_\lambda a_{ij}^2]]))|_{\lambda=0} - \sum_{s\in I', t\in J'} \frac{d^s}{d\lambda^s}(f([c_\mu[b_{st}^1{}_\lambda b_{st}^2]]))|_{\lambda=0} \\
&= f([c_\mu \sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}([a_{ij}^1{}_\lambda a_{ij}^2])|_{\lambda=0}]) - f([c_\mu \sum_{s\in I', t\in J'} \frac{d^s}{d\lambda^s}([b_{st}^1{}_\lambda b_{st}^2])|_{\lambda=0}]) \\
&= f([c_\mu a]) - f([c_\mu a]) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

因此，$A - B \in Z(E)$。根据假设，我们有 $Z(E) = 0$。由此可得$A = B$。因此，δ_f 是良定义的。

接下来，我们需要证明对于每个 $a \in \mathcal{A}$，都有 $fada_x = ad\delta_f(a)_x f$。对于任意的 a、$b \in \mathcal{A}$，其中$a = \sum_{i\in I,\ j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}[a^1_{ij\lambda}a^2_{ij}]|_{\lambda=0}$，我们有

$$\begin{aligned}
fada_x(b) &= f([a_x b]) \\
&= f([(\sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}[a^1_{ij\lambda}a^2_{ij}]|_{\lambda=0})_x b]) \\
&= \sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}[[f(a^1_{ij})_\lambda f(a^2_{ij})]_x f(b)]|_{\lambda=0} \\
&= [(\sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}[f(a^1_{ij})_\lambda f(a^2_{ij})]|_{\lambda=0})_x f(b)] \\
&= [\delta_f(a)_x f(b)] \\
&= ad\delta_f(a)_x f(b).
\end{aligned}$$

因此，由于 $b \in \mathcal{A}$ 的任意性，对于每个 $a \in \mathcal{A}$，我们得到 $fada_x = ad\delta_f(a)_x f$.

最后，我们证明 δ_f 是一个同态，即 $\delta_f(\partial a) = \partial\delta_f(a)$ 且 $\delta_f([a_\lambda b]) = [\delta_f(a)_\lambda \delta_f(b)]$对任意的 a, $b \in \mathcal{A}$ 都成立。对于任意的 $a = \sum_{i\in I,\ j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}[a^1_{ij\lambda}a^2_{ij}]|_{\lambda=0} \in \mathcal{A}$，我们有 $\partial a = \sum_{i\in I,\ j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}($ $[\partial a^1_{ij\lambda}a^2_{ij}]+[a^1_{ij\lambda}\partial a^2_{ij}])|_{\lambda=0}$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}
\delta_f(\partial a) &= \sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}([f(\partial a^1_{ij})_\lambda f(a^2_{ij})] + [f(a^1_{ij})_\lambda f(\partial a^2_{ij})])|_{\lambda=0} \\
&= \sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}(-\lambda[f(a^1_{ij})_\lambda f(a^2_{ij})] + (\partial+\lambda)[f(a^1_{ij})_\lambda f(a^2_{ij})])|_{\lambda=0} \\
&= \partial \sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}([f(a^1_{ij})_\lambda f(a^2_{ij})])|_{\lambda=0} \\
&= \partial\delta_f(a).
\end{aligned}$$

因此， δ_f是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模同态。对于任意的 a、 b、 $c \in \mathcal{A}$，我们得到

$$\begin{aligned}
&[(\delta_f([a_\lambda b]) - [\delta_f(a)_\lambda \delta_f(b)])_{\lambda+\mu} f(c)] \\
&= [\delta_f([a_\lambda b])_{\lambda+\mu} f(c)] - [\delta_f(a)_\lambda [\delta_f(b)_\mu f(c)]] + [\delta_f(b)_\mu [\delta_f(a)_\lambda f(c)]] \\
&= [[f(a)_\lambda f(b)]_{\lambda+\mu} f(c)] - [\delta_f(a)_\lambda (ad\delta_f(b)_\mu f(c))] + [\delta_f(b)_\mu (ad\delta_f(a)_\lambda f(c))] \\
&= [[f(a)_\lambda f(b)]_{\lambda+\mu} f(c)] - [\delta_f(a)_\lambda (fadb_\mu c)] + [\delta_f(b)_\mu (fada_\lambda c)] \\
&= f([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) - [\delta_f(a)_\lambda f([b_\mu c])] + [\delta_f(b)_\mu f([a_\lambda c])] \\
&= f([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) - ad\delta_f(a)_\lambda f([b_\mu c]) + ad\delta_f(b)_\mu f([a_\lambda c]) \\
&= f([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) - fada_\lambda([b_\mu c]) + fadb_\mu([a_\lambda c]) \\
&= f([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) - f([a_\lambda [b_\mu c]]) + f([b_\mu [a_\lambda c]]) \\
&= f([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c] - [a_\lambda [b_\mu c]] + [b_\mu [a_\lambda c]]) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

由于 c的任意性，我们有 $\delta_f([a_\lambda b]) - [\delta_f(a)_\lambda \delta_f(b)] \in Z(E)[\lambda]$。因此， $\delta_f([a_\lambda b]) = [\delta_f(a)_\lambda \delta_f(b)]$, 因为 E是无中心的。由 a、 $b \in \mathcal{A}$的任意性可知， δ_f是一个同态。证明完毕。□

如下引理表明， E 具有一些良好的性质。

引理 5.6. 记为 $E^+ = Im(f+\delta_f)$ $E^- = Im(f-\delta_f)$。于是得到以下结果 :

(1) E^+ 和 E^- 都是 E 的理想。(2) $[E^+{}_\lambda E^-] = 0$。(3) $E^+ \cap E^- = 0$。

事实上， E 可以分解为理想 E^+ 和 E^-的直和。

证明。（1）显然，我们有 $E^+, E^- \subseteq E$。对于任意 $a, b \in \mathcal{A}$，有

$$\begin{aligned}[(f(a)+\delta_f(a))_\lambda f(b)] &= [f(a)_\lambda f(b)] + ad\delta_f(a)_\lambda f(b)\\ &= \delta_f([a_\lambda b]) + fada_\lambda(b)\\ &= \delta_f([a_\lambda b]) + f([a_\lambda b])\\ &= (f+\delta_f)([a_\lambda b]).\end{aligned}$$

因此， E^+ 是 E的一个理想。同理， E^- 也是 E的一个理想。

（2）对于任意 $a, b, c \in \mathcal{A}$，有

$$\begin{aligned}&[[(f(a)+\delta_f(a))_\lambda (f(b)-\delta_f(b))]_{\lambda+\mu} f(c)]\\ =&[[f(a)_\lambda f(b)]_{\lambda+\mu} f(c)] - [[f(a)_\lambda \delta_f(b)]_{\lambda+\mu} f(c)]\\ &+ [[\delta_f(a)_\lambda f(b)]_{\lambda+\mu} f(c)] - [[\delta_f(a)_\lambda \delta_f(b)]_{\lambda+\mu} f(c)]\\ =&f([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) + [[\delta_f(b)_{-\partial-\lambda} f(a)]_{\lambda+\mu} f(c)] + [[\delta_f(a)_\lambda f(b)]_{\lambda+\mu} f(c)]\\ &- [\delta_f(a)_\lambda [\delta_f(b)_\mu f(c)]] + [\delta_f(b)_\mu [\delta_f(a)_\lambda f(c)]]\\ =&f([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) + [(ad\delta_f(b)_{-\partial-\lambda} f(a))_{\lambda+\mu} f(c)] + [(ad\delta_f(a)_\lambda f(b))_{\lambda+\mu} f(c)]\\ &- [\delta_f(a)_\lambda (ad\delta_f(b)_\mu f(c))] + [\delta_f(b)_\mu (ad\delta_f(a)_\lambda f(c))]\\ =&f([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) + [(fadb_{-\partial-\lambda}(a))_{\lambda+\mu} f(c)] + [(fada_\lambda b)_{\lambda+\mu} f(c)]\\ &- [\delta_f(a)_\lambda (fadb_\mu c)] + [\delta_f(b)_\mu (fada_\lambda c)]\\ =&f([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) + [f([b_{-\partial-\lambda} a])_{\lambda+\mu} f(c)] + [f([a_\lambda b])_{\lambda+\mu} f(c)]\\ &- ad\delta_f(a)_\lambda f([b_\mu c]) + ad\delta_f(b)_\mu f([a_\lambda c])\\ =&f([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) - [f([a_\lambda b])_{\lambda+\mu} f(c)] + [f([a_\lambda b])_{\lambda+\mu} f(c)]\\ &- fada_\lambda([b_\mu c]) + fadb_\mu([a_\lambda c])\\ =&f([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) - f([a_\lambda [b_\mu c]]) + f([b_\mu [a_\lambda c]])\\ =&f([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c] - [a_\lambda [b_\mu c]] + [b_\mu [a_\lambda c]])\\ =&0.\end{aligned}$$

因此， $[(f(a)+\delta_f(a))_\lambda (f(b)-\delta_f(b))] \in Z(E)$。由于 $Z(E)=0$，我们得到 $[(f(a)+\delta_f(a))_\lambda (f(b)-\delta_f(b))] = 0$。

(3) 对任意 $a \in E^+ \cap E^-$，由 (2) 可得 $[a_\lambda E^+] = [a_\lambda E^-] = 0$。因此，对任意 $b \in \mathcal{A}$，有$[a_\lambda (f(b)+\delta_f(b))] = [a_\lambda (f(b)-\delta_f(b))] = 0$。于是， $[a_\lambda f(b)] = 0$，即 $a \in Z(E)$。由于 $Z(E)=0$，我们可以推得 $a=0$。

证明至此完成。 □

我们首先考虑 E 的最简单情形，以研究从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的三重同态。

引理 5.7. 若 E 不可分解，则 f 要么是从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的同态，要么是反同态。

证明. 对任意 $a \in \mathcal{A}$，令 $a^+ = \frac{1}{2}(f(a)+\delta_f(a))$ $a^- = \frac{1}{2}(f(a)-\delta_f(a))$。显然，有$a^+ \in E^+, a^- \in E^-$ 且 $f(a) = a^+ + a^-$。因此， $E \subseteq E^+ + E^-$。由引理 5.6 可得$E = E^+ \oplus E^-$。由于 E 不可分解，因此 E^+ 或 E^- 必有一个为零。若 E^+ 为零，则 f 是反同态。若 E^- 为零，则 f 是同态。

证明至此完成。 □

最后，我们通过以下定理给出本节的主要结果。 .

定理 5.8. 假设 $\mathcal{A}$ 是一个有限单李共形代数，且 E 无中心，并且可分解为不可分解理想的直和。那么， f 要么是从 $\mathcal{A}$到 $\mathcal{B}$的同态或反同态，要么是一个同态与一个反同态的直和。

证明. 显然，只需证明 E 可分解时的定理 5.8。根据假设， E 可写为和 $E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_n$, 其中每个 E_i 都是 E的不可分解理想。由于 E 无中心，根据引理 5.6，每个 E_i 也无中心。

令 p_i 为 E 到 E_i的投影。那么我们有 $f = \sum_{i=1}^{n} p_i f$ ，且 $p_i f$ 是从 $\mathcal{A}$ 到 E_i的三重同态，而 E_i 是 $p_i f(\mathcal{A})$的包络李共形代数，其中$i = 1$、2、...、 n。由于每个 E_i都不可分解，根据引理 5.7，我们推得 $p_i f$要么是从 $\mathcal{A}$ 到 E_i的同态，要么是反同态。设 $I = \{i|p_i f \ is \ a \ homomorphism.\}$ 和 $J = \{j|p_j f \ is \ an \ anti - homomorphism.\}$。设 $E_I = \bigoplus_{i\in I} E_i$ 和 $E_J = \bigoplus_{j\in J} E_j$。令 $f_I = \sum_{i\in I} p_i f$和 $f_J = \sum_{j\in J} p_j f$。不难验证 $E = E_I \oplus E_J$、 $[E_I{}_\lambda E_J] = 0$、$f = f_I + f_J$，其中 f_I 是从 $\mathcal{A}$到 E_I的同态，而 f_J是从$\mathcal{A}$ 到 E_J的反同态。

证明至此完成。 □

声明：本文于2021年被期刊接收。

致谢：本研究得到国家自然科学基金（编号：11871421、12171129）、浙江省自然科学基金（编号：LY20A010022）、杭州师范大学科研基金（编号：2019QDL012）和中央高校基本科研业务费（编号：22120210554）的资助。

References

[1] Asif, S. and Wu, Z. *Generalized Lie triple derivations of Lie color algebras and their subalgebras*, 《Symmetry》, 13(7), （2021）: 1280。[2] Asif, S., Wu, Z. and Munir, M. *On the Lie triple derivations*, Linear Multilinear Algebra。（2021）。[3] Beidar, K. I. and Chebotar, M. A. *On Lie derivations of Lie ideals of prime algebras.*《以色列数学杂志》123（2001）, 131-148。[4] Bresar, M. *Commuting traces of biadditive mappings, commutativity-preserving mappings and Lie mappings.*《美国数学会汇刊》335（1993）, 525-546。[5] Chen, L., Ma, Y. and Ni, L. *Generalized derivations of Lie color algebras.*《数学成果》63（2013）, 923-936。[6] Chen, Z. *Biderivations and linear commuting maps on simple generalized Witt algebras over a field.*《电子线性代数杂志》31（2016）, 1-12。[7] D'Andrea, A. and Kac, V. *Structure theory of finite conformal algebras.*《精选数学》4（1998）, 377-418。[8] Fan, G., Hong, Y. and Su, Y. *Generalized conformal derivations of Lie conformal algebras.*《代数及其应用杂志》18（2019）, 1950175, 16页。[9] Herstein, I. N. *Lie and Jordan structures in simple, associative rings.*《美国数学会通报》67（1961）, 517-531。[10] Hopkins, N. *Generalized derivations of nonassociative algebras.*《Nova 数学、博弈论与代数杂志》5（1996）, 215-224。[11] Jacobson, N. and Rickart, C. E. *Jordan homomorphisms of rings.*《美国数学会汇刊》69（1993）, 479-502。[12] Ji, P. and Wang, L. *Lie triple derivations of TUHF algebras.*《线性代数及其应用》403（2005）, 399-408。[13] Kac, V. *Formal distribution algebras and conformal algebras.* 载于《第12届国际数理物理大会论文集》（ICMP'97）, 布里斯班（International Press Cambridge，1999）, 第80-97页。

[14] Kac, V. *The idea of locality.* 载于《几何、群与代数的物理应用和数学方面》, H.-D. Doebner 等编（世界科学出版社, Singapore, 1997）, 第16-32页。[15] Kac, V.《顶点代数入门》。大学讲座系列第10卷, 第2版（美国数学会, 1998）[16] Leger, G. and Lucks, E. *Generalized derivations of Lie algebras.* 《代数杂志》228（2000）, 165-203。[17] Li, H. and Wang, Y. *Generalized Lie triple derivations of strictly upper triangular matrices over a commutative ring.* **32** 2012 253 262 《数学杂志》（）, -。[18] Li, H., Wang, Y. and Guo, W. *Generalized Lie triple derivations for gl(n,R).* 《国际代数杂志》6（2012）, 37-40。[19] Liu, X., Guo, X. and Zhao, K. *Biderivations of the Block Lie algebras.* 《线性代数及其应用》538（2018）, 43-55。[20] Lu, F. *Lie triple derivations on nest algebras.* 《数学通讯》280（2018）, 882-887。[21] Miers, C. R. *Lie ∗-triple homomorphisms into von Neumann algebras.* 《美国数学会会刊》58（1976）, 169-172。[22] M¨uller, D. *Isometries of bi-invariant pseudo-Riemannian metries on Lie groups.* 《几何学纪事》29（1989）, 65-96。[23] Swain, G. A. *Lie derivations of the skew elements of prime rings with involution.* 《代数杂志》184（1996）, 679-704。[24] Wang, D. and Yu, X. *Biderivations and linear commuting maps on the Schrödinger-Virasoro Lie algebra.* 《代数通讯》41（2013）, 2166-2173。[25] Xiao, Z. and Wei, F. *Lie triple derivations of triangular algebras.* 《线性代数及其应用》437（2012）, 1234-1249。[26] Zhang, R. andZhang Y. *Generalized derivations of Lie superalgebras.* 《代数通讯》38（2010）, 3737-3751。[27] Zhao, J., Chen, L. and Yuan, L. *Deformations and generalized derivations of Lie conformal superalgebras.* 《数学物理杂志》58（2017）, 111702, 17页。[28] Zhao, J., Chen, L. and Yuan, L. *Deformations and generalized derivations of Hom-Lie conformal algebras.* 《中国科学：数学》61（2018）, 797-812。[29] Zhou, J. *Triple derivations of perfect Lie algebras.* 《代数通讯》41（2013）, 1647-1654。[30] Zhou, J. *Triple homomorphisms of perfect Lie algebras.* 《代数通讯》42（2014）, 3724-3730。[31] Zhou, J. and Chen, L. *Generalized derivations of n-Hom-Nambu-Lie algebras.* 《数学进展》47（2018）, 687-705。[32] Zhou, J., Chen, L. and Ma, Y. *Generalized derivations of Lie triple systems.* 《开放数学》14（2016）, 260-271。[33] Zhou, J., Chen, L. and Ma, Y. *Triple derivations and triple homomorphisms of perfect Lie superalgebras.* 《数学探究》（新系列）28（2017）, 436-445。[34] Zhou, J., Chen, L. and Ma, Y. *Generalized derivations of Hom-Lie triple systems.* 《马来西亚数学科学学会通报》41（2018）, 637-656。

[1]Department of Mathematics, Naning University of Information Science and Technology, Nanjing, Jiangsu Province, 210044, PR China.[2]Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai, 200092, PR China.[3]Department of Mathematics, Hangzhou Normal University, Hangzhou, 311121, PR China.[4]Department of Mathematics, Zhejiang University Hangzhou Zhejiang Province 310027 PR , , , , China.
Email address: 111835037@zju.edu.cn*Email address*: [2]luolipeng1101@163.com*Email address*: [3]hongyanyong2008@yahoo.com*Email address*: [4]wzx@zju.edu.cn