arXiv:2304.08077v1 [cs.LO] 17 Apr 2023

带公开宣告的信念Łukasiewicz逻辑

Doratossadat Dastgheib*, Hadi Farahani†

2023年4月18日

摘要

本文提出 Lukasiewicz逻辑的一个信念扩展 B L$^+$ ，并证明相对于所引入的相应语义，该逻辑是可靠且完备的。此外，我们为信念Łukasiewicz逻辑 B L$^+$ 加入公开宣告，并提出逻辑 D L。作为应用，我们使用 D L 和公开宣告对泥孩谜题的一个模糊版本进行建模。最后，我们定义 D L 与 B L$^+$ 之间的翻译，并证明 D L 的可靠性和完备性定理。

1 引言

动力系统用于描述系统随时间的演化。动态逻辑用于验证和刻画动力系统的某些性质。例如，命题动态逻辑（PDL）描述程序的某些性质，例如比较各种编程结构的表达能力[21, 26, 27, 48]。近期的一些研究甚至提出了若干微分动态逻辑，用于研究动力系统的性质 [39, 40]。

由于知识与信念会随时间变化，这些系统的动态变化十分重要。“认知逻辑”一词最初在[51] 中被用作模态逻辑的一个类别，指由逻辑学家研究的认知模式。关于知识与信念这两种模态的首个精确定义由 Hintikka 提出 [28] ；当讨论信念而非知识算子时，他使用了“信念逻辑”这一术语。此后，在计算机科学家和博弈论学家的帮助下，相关研究不断开展[2, 4, 20, 34]。此外，该领域还在许多跨学科领域得到发展，例如经济学 [43]、计算机安全 [42], 、多智能体系统 [22, 49], 和社会科学 [19, 37]。

认知动态逻辑不仅描述信息如何随时间变化，认知模态还使我们能够对信息本身进行推理。 [41] 作为这一领域的先驱之一，定义了一种关于公开宣告的逻辑，用以说明在公开宣告一个命题后主体的知识将如何变化。 [35] 提出了公开宣告逻辑的 Gentzen 系统，其中甚至允许进行虚假的宣告。 [32, 33, 46, 47] 研究了动态信念逻辑和信念修正。 [29]将 Aucher 的动态信念修正（见[1]）扩展到了模糊环境。 [11, 12, 13] 发展了一些比公开宣告更复杂的动作。此外， [15, 31] 研究了一些动态认知逻辑，其中可更新的是可及关系，而非可能状态。

由于知识与信念并非随时间保持静态，且具有一定程度的模糊性，因此从模糊视角对其进行解释似乎是恰当的。 [5, 6, 7, 8], 提出了 G¨odel 模糊逻辑的一些模态扩展；此外， [24, 25, 50]还引入了 Lukasiewicz逻辑和乘积模糊逻辑的一些模态扩展。

[36] 提出了一种多值模态命题演算，并给出了证明真值公式的判定程序。在 [44] 中提出了一种四值动态认知逻辑，随后通过分析树系统证明了其可靠性和完备性。在 [16] 中提出了一种动态 n值 Lukasiewicz逻辑 ID L$_n$ ，并通过提出一种基于克里普克的语义，研究了 ID L$_n$ 在免疫系统中的一些应用。一种法证动态 n 值卢卡西维茨逻辑及其对应的法证动态 MV$_n$-代数已经

*d_dastgheib@sbu.ac.ir
†h_farahani@sbu.ac.ir

提出于 [18]。在 [17] 中提出了一种动态命题逻辑的Lukasiewicz扩展；在 [30, 45]中提出了该扩展，同时定义了相应的动态MV代数。文中探讨了G¨odel模态逻辑中公开宣告的若干可能定义 [38]。在 [3] 中提出了一种带公开宣告的模糊认知逻辑，其中引入了模糊转移和模糊命题，使得相应的语义基于G¨odel代数定义。此外，在**B**-**L** 中提出了一种基于伪经典信念的模糊Lukasiewicz逻辑的信念扩展 [10]。

本文首先提出公理系统 B L$^+$ ，它是 [10] 中引入的 B L 的扩展；其语言是在 B L 的语言基础上增加了一个新算子 $\succeq$ ，用于比较公式的模糊有效性与一个固定值。当公式 $\varphi \succeq g$ 的有效性至少为 g 时，公式 φ 有效，其中 g$\in [0,1]$。通过在语言中加入这个算子，我们为给定公式的真值程度赋予一个明确的值，并直观地判断公式是否具有所需的模糊值。因此，包含 $\succeq$ 的公式可以视为经典公式。我们还证明了 B L$^+$ 的可靠性定理和完备性定理。

随后，我们在 B L$^+$ 上引入动态信念逻辑 D L。该逻辑是信念Łukasiewicz逻辑的扩展，并配备了一个公共公告算子。我们假设每个公开宣告都为真，并且明确地向我们提供有关某个公式的信息。接着，我们使用该逻辑对泥孩谜题的模糊版本进行建模。此外，我们定义了从 D L 到 B L$^+$ 的翻译，并证明了 D L 的可靠性定理和完备性定理。

2 修正的信念卢卡斯iewicz逻辑

本节首先回顾本文中会用到的命题模糊Łukasiewicz逻辑的一些公理和性质（详见 [23] ）。接着，回顾 [10] 中的一些定义，以提出修正的信念Łukasiewicz逻辑 B L$^+$ ，并证明它相对于所需语义是可靠且完备的。

命题Łukasiewicz逻辑是模糊基本逻辑 BL 的扩展，包含双重否定公理 $\neg\neg\varphi \to \varphi$。以下命题在Łukasiewicz逻辑中有效:

$$\begin{array}{llll} (A1) & (\varphi \,\&\, \psi) \to \varphi & (A2) & (\varphi \,\&\, \psi) \to (\psi \,\&\, \varphi) \\ (Ł0) & \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi & (Ł1) & (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi) \\ (Ł2) & ((\varphi_1 \to \psi_1) \,\&\, (\varphi_2 \to \psi_2)) \to ((\varphi_1 \,\&\, \varphi_2) \to (\psi_1 \,\&\, \psi_2)) & & \end{array}$$

本文中，我们分别用 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{A}$表示原子命题集和主体集，并用记号 $\bot$ 表示始终取值为 0 的原子命题。

在 [10], 中，研究者提出了模糊Łukasiewicz逻辑的两类信念扩展。一类配备了伪经典信念，其性质与经典信念类似；另一类则基于一种称为怀疑信念的新型信念概念。下文将使用一个新算子 $\succeq$ 扩展伪经典信念的语言，该算子用于比较给定公式的模糊有效性与某个固定值，从而帮助我们判断公式是否具有所需的模糊值。对于一个数 g$\in [0,1]$，当 φ 的有效性至少为 g 时，公式 $\varphi \succeq g$ 有效。

定义。修正的信念卢卡斯iewicz逻辑的语言记作 D LL$^+$ ，其巴科斯-诺尔范式定义如下:

$$\varphi ::= \bot \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \succeq g \mid \varphi \,\&\, \varphi \mid \varphi \to \varphi \mid B_a\varphi$$

其中， $p \in \mathcal{P}$、 $a \in \mathcal{A}$和 $g \in [0,1]$ 是有理数。本文中凡是使用 $g \in [0,1]$的地方，均表示 g 是区间 $[0,1]$内的有理数。其他常用连接词 $\vee$、 $\wedge$ 和 $\trianglerighteq$ 的定义与 Lukasiewicz逻辑中的定义类似。◀

下面给出文献 [10]中提出的信念卢卡斯iewicz逻辑模型的定义。

定义。信念卢卡斯iewicz逻辑模型（简称 D LL-模型）是一个元组 $\mathfrak{M} = (S, {}^{r_{a_{|a\in\mathcal{A}}}}, \pi)$ ，其中 S 是包含该模型各状态的集合， ${}^{r_{a_{|a\in\mathcal{A}}}}\colon S \times S \to [0,1]$ 是不可区分函数， $\pi\colon S \times \mathcal{P} \to [0,1]$ 是赋值函数，用于为每个状态中的每个命题赋值。

设 $\mathfrak{M} = (S, {}^{r_{a_{|a\in\mathcal{A}}}}, \pi)$ 是一个 D LL-模型。对于每个属于 D LL$^+$ 的公式 φ 和每个状态 $s \in S$，我们将 $V(s,\varphi)$ 记作一个扩展赋值函数，其递归定义如下。为简单起见

我们用 $V_s(\varphi)$ 代替 $V(s,\varphi)$，并在需要强调模型时使用上标 $\mathfrak{M}$，例如 $V^{\mathfrak{M}}$。

$$
\begin{aligned}
&V_s^{\mathfrak{M}}(p) = \pi(s,p) \ \ \forall p \in \mathcal{P},\\
&V_s^{\mathfrak{M}}(\neg\varphi) = 1 - V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi),\\
&V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi \succeq g) = \begin{cases} 1 & V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi) \geq g \\ 0 & V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi) < g, \end{cases}\\
&V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi \,\&\, \psi) = \max\{0, V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi) + V_s^{\mathfrak{M}}(\psi) - 1\},\\
&V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi \to \psi) = \min\{1, 1 - V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi) + V_s^{\mathfrak{M}}(\psi)\},\\
&V_s^{\mathfrak{M}}(B_a\varphi) = \inf_{s' \in S} \max\{1 - r_a(s,s'), V_{s'}^{\mathfrak{M}}(\varphi)\},
\end{aligned}
$$

◀

注记 2.1. 请注意，公式 $\varphi \succeq g$ 取清晰值，其取值幅度等于给定公式的真值

定义. 设 φ 是一个公式，$\mathfrak{M} = (S, {}^{r_{a|a\in\mathcal{A}}}, \pi)$ 是一个 D LL-模型，且 $s \in S$。若 $V_s(\varphi) = 1$，则称φ 在带指定点的模型 $(\mathfrak{M}, s)$ 中有效，并记作 $(\mathfrak{M}, s) \vDash \varphi$。若对所有 $s \in S$，都有 $(\mathfrak{M}, s) \vDash \varphi$，则称其为 $\mathfrak{M}$-有效，并用 $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ 表示。若对于模型类$\mathcal{M}$中的所有模型 $\mathfrak{M}$，公式都是 $\mathfrak{M}$-有效的，则记作 $\mathcal{M} \vDash \varphi$，并称其为 $\mathcal{M}$-有效。若对所有模型 $\mathfrak{M}$ 都有 $\mathfrak{M} \vDash \varphi$，则使用记号 $\vDash \varphi$，并称 φ 为有效公式。◀

命题 2.1. 以下陈述均有效。

- $(\varphi \,\&\, \psi) \succeq g \to (\varphi \succeq g \,\&\, \psi \succeq g)$
- $(\varphi \succeq g \,\&\, \psi \succeq g') \to (\varphi \succeq g'' \,\&\, \psi \succeq g') \qquad s.\ t. \quad g \geq g''$

类似于**B**-**L** 中所述的 [10], 我们引入以下公理系统**B**-$\mathbf{L}^+$，其中 φ 和 ψ 是**D**-$\mathbf{LL}^+$-公式:

(L_B0) 命题 Lukasiewicz逻辑中所有重言式的实例

(L_B1) $(B\varphi \,\&\, B(\varphi \to \psi)) \to (B\psi)$

(L_B2) $\neg B \bot$

(L_g0) $(\varphi$与$\psi) \succeq g \to (\varphi \succeq g$与$\psi \succeq g)$

(L_g1) $(\varphi \succeq g \,\&\, \psi \succeq g') \to (\varphi \succeq g'' \,\&\, \psi \succeq g')$ 使得 $g \geq g''$

$$(\mathrm{R_{MP}}) \ \frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}$$

$$(\mathrm{R_B}) \ \frac{\varphi}{B\varphi}$$

$$(\mathrm{R_G}) \ \frac{\varphi}{\varphi \succeq g}$$

正如我们所见，B L 与 B L^+ 的区别在于公理 (L_g0) 和 (L_g1)，以及推理规则 ($\mathrm{R_G}$)。

引理 2.1. 推理规则 (R_{MP})、(R_B) 和 (R_G) 在语义上是可容许的，也就是说，如果 (R_{MP})、(R_B) 或 (R_G) 的前提有效，那么它们的结论也有效。

证明。根据定义，这显而易见。 □

Th定理 2.1。（可靠性）设 $\mathcal{M}$ 为一类 D LL-模型。若 $\vdash_{B\text{-}L^+} \varphi$，则 $\mathcal{M} \vDash \varphi$.

证明。利用 [10], 命题 2.1 和引理 2.1，即可直接得到证明。 □

定义。若 D LL$^+$ 公式 φ 满足 $\nvdash_{\mathbf{B\text{-}L}^+} \neg\varphi$，则称其为 B L$^+$-一致的。有限集合 $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ 若满足 $\varphi_1 \& \cdots \& \varphi_n$ 为 B L$^+$-一致，则称其为 B L$^+$-一致。D LL$^+$ 的无限集合 Γ 若其所有有限子集都是 B L$^+$-一致的，则称其为 B L$^+$-一致。若 Γ 满足以下条件，则称 Γ 为极大且 B L$^+$-一致集:

1. Γ 是 B L$^+$-一致集。
2. 对所有 D LL$^+$ 公式 $\psi \notin \Gamma$，集合 $\Gamma \cup \{\psi\}$ 不满足 B L$^+$-一致性。

◀

下文中，引理 2.2、引理 2.3 和定理2.2 的证明与[10]第 3 节中的证明类似。

引理 2.2。设 B L$^+$ 是一个公理系统。我们有

(i) 每个 B L$^+$-相容的 D LL$^+$-公式集合 Φ 都可以扩展为一个极大 B L$^+$-相容集。

(ii) 若 Φ 是一个极大 B L$^+$-相容集，则对于任意 D LL$^+$-公式 φ 和 ψ:

1. $\varphi\& \psi \in \Phi$ 当且仅当 $\varphi \in \Phi$ 和 $\psi \in \Phi$,
2. 若 $\varphi \in \Phi$ 和 $\varphi \to \psi \in \Phi$，则 $\psi \in \Phi$，3. 若 $\vdash_{\boldsymbol{B\text{-}L}^+} \varphi$，则 $\varphi \in \Phi$，4. $\varphi \in \Phi$ 或 $\neg\varphi \in \Phi$。

证明。证明与 [10]中的引理 3.4 的证明类似。 □

引理 2.3。设 $\Gamma = \{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ 是一个公式集合，则 $\Gamma \vdash_{\boldsymbol{B\text{-}L}^+} \varphi_1 \& \cdots \& \varphi_n$.

证明。证明与 [10]中的引理 3.5 的证明类似。 □

定理 2.2. 设 Φ 是一个 B L$^+$-一致的 D LL$^+$-公式集，且 φ 是一个 D LL$^+$-公式，使得$\Phi \nvdash_{\boldsymbol{B\text{-}L}^+} \varphi$。若 $\Phi^* = \Phi \cup \{\neg\varphi\}$，则 Φ^* 是 B L$^+$-一致的。

证明。证明与 [10] 中定理 3.2 的证明类似。 □

定理 2.3. 设 Φ 是一个 B L$^+$-一致集，且 $\Phi \vdash_{\boldsymbol{B\text{-}L}^+} \varphi$，其中 φ 是一个 D LL$^+$-公式。那么存在一个 D LL-模型 $\mathfrak{M}$ 和一个状态 s，使得 $V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi) = 1$。

证明。我们只需稍微修改 [10] 中定理 3.3 的证明。需要证明，对于以下典范模型 $\mathfrak{M}^c = (S^c, r^c, \pi^c)$，以及每个极大且 B L$^+$-一致的集合 Φ^*，都有:

$$\varphi \in \Phi^* \iff V_{s_{\Phi^*}}^{\mathfrak{M}^c}(\varphi) = 1. \tag{2.1}$$

其中，典范模型 $\mathfrak{M}^c$ 定义如下:

$$S^c = \left\{ s_{\Phi^*} \;\middle|\; \begin{array}{l} \Phi^* \text{是一个极大且 B L}^+\text{-一致的集合，包含一个极大 B L-一致集 } \Phi \text{ 以及所有形如 } \varphi \succeq g \\ \text{的公式，其中 } \varphi \in \Phi,\ g \in (0, 1] \end{array} \right\},$$

$$r^c(s_\Phi, s_\Psi) = \begin{cases} 1 & \Phi \backslash B \subseteq \Psi \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}; \qquad \Phi \backslash B \overset{def}{=} \{\varphi \mid B\varphi \in \Phi\},$$

$$\pi^c(s_\Phi, p) = \begin{cases} 1 & p \in \Phi \\ 0 & p \notin \Phi \end{cases}; \qquad p \in \mathcal{P}.$$

对 φ的复杂度进行归纳，我们证明命题（2.1）成立。只需检查 $\varphi = \psi \succeq g$这一情形，因为其他情形的证明与 [10] 中的定理 3.3 的证明类似。

对于“⇒”方向，若 $\psi \succeq g \in \Phi^*$，则根据 S^c 的定义，存在一个极大且 B L-一致的集合 Φ，使得 $\psi \in \Phi \subseteq \Phi^*$，因此 $\psi \in \Phi^*$，故由归纳假设可得 $V^{\mathfrak{M}^c}_{s_{\Phi^*}}(\psi) = 1$。于是$V^{\mathfrak{M}^c}_{s_{\Phi^*}}(\psi) \geq g$，这意味着 $V^{\mathfrak{M}^c}_{s_{\Phi^*}}(\psi \succeq g) = 1$。对于另一方向，假设 $V^{\mathfrak{M}^c}_{s_{\Phi^*}}(\psi \succeq g) = 1$。因此 $V^{\mathfrak{M}^c}_{s_{\Phi^*}}(\psi) \geq g$。由于典范模型中的所有公式都取清晰值，且根据定义有 $g \in (0, 1],$，我们得到 $V^{\mathfrak{M}^c}_{s_{\Phi^*}}(\psi) = 1$。因此，由归纳假设可得 $\psi \in \Phi^*$，于是根据 Φ^* 的定义和极大性以及 $(\mathrm{R_G})$，可得 $\psi \succeq g \in \Phi^*$。 □

注意， S^c 典范模型的状态集 $\mathfrak{M}^c$ 由定理 2.3 的证明中定义，根据下述引理可知其非空。

引理 2.4. 若 Φ 是 B L$^+$-一致的，则 $\{\varphi \succeq g \mid \varphi \in \Phi,\ g \in (0, 1]\}$ 也是 B L$^+$-一致的。

证明。反设 Φ 是 B L$^+$-一致的，但 $\Gamma = \{\varphi \succeq g \mid \varphi \in \Phi,\ g \in (0, 1]\}$ 不是 B L$^+$-一致的。因此，根据定义，存在一个有限子集 $\{\varphi_1 \succeq g_1, \cdots, \varphi_n \succeq g_n\} \subseteq \Gamma$ 使得

$$\vdash_{\mathbf{B\L}^+} \neg(\varphi_1 \succeq g_1 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n \succeq g_n). \tag{2.2}$$

令 $g_0 = \max\{g_1, \cdots, g_n\}$ 和 $\Gamma' = \{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$。根据 $\mathbf{B}$-$\mathbf{L}^+$-一致性， Γ' 以及引理 2.3 可得:

(1)	$\Gamma' \vdash_{\mathbf{B}\text{-}\mathbf{L}^+} \varphi_1 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n$	
(2)	$\Gamma' \vdash_{\mathbf{B}\text{-}\mathbf{L}^+} (\varphi_1 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n) \succeq g_0$	(R_G)
(3)	$\Gamma' \vdash_{\mathbf{B\L}^+} ((\varphi_1 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n) \succeq g_0) \to (\varphi_1 \succeq g_0 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n \succeq g_0)$	$(\mathrm{L}_g 0)$
(4)	$\Gamma' \vdash_{\mathbf{B}\text{-}\mathbf{L}^+} \varphi_1 \succeq g_0 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n \succeq g_0$	$(2), (3), (R_{MP})$
(5)	$\Gamma' \vdash_{\mathbf{B}\text{-}\mathbf{L}^+} (\varphi_1 \succeq g_0 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n \succeq g_0) \to (\varphi_1 \succeq g_1 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n \succeq g_0)$	$(\mathrm{L}_g 1)$
(6)	$\Gamma' \vdash_{\mathbf{B}\text{-}\mathbf{L}^+} (\varphi_1 \succeq g_1 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n \succeq g_0)$	$(4), (5), (R_{MP})$
⋮		
(i)	$\Gamma' \vdash_{\mathbf{B}\text{-}\mathbf{L}^+} (\varphi_1 \succeq g_1 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n \succeq g_n)$	similar to (5),(6) steps

这与 $\Gamma' \vdash_{\mathbf{B}\text{-}\mathbf{L}^+} \neg(\varphi_1 \succeq g_1 \,\&\, \cdots \,\&\, \varphi_n \succeq g_n)$ 矛盾。因此该陈述成立。 □

定理 2.4. 若 $\vDash \varphi$，则 $\vdash_{B\text{-}L^+} \varphi$。

证明。 反设 $\nvdash_{\mathbf{B}\text{-}\mathbf{L}^+} \varphi$。根据定理 2.2，集合 $\{\neg\varphi\}$ 是 $\mathbf{B}$-$\mathbf{L}^+$-一致的。根据引理 2.2 ， 存在一个极大且 $\mathbf{B}$-$\mathbf{L}^+$-一致的集合 Φ^* ， 它包含 $\{\neg\varphi\}$，因此根据定理 2.3 ， 存在一个模型 $\mathfrak{M}$ 和状态 s ， 使得 $V^{\mathfrak{M}}_s(\neg\varphi) = 1$ ， 这与$\vDash \varphi$.矛盾 □

3 带有公开宣告的动态信念Łukasiewicz逻辑

本节提出信念Łukasiewicz逻辑的一个动态版本。我们用一个新的算子 $[\varphi \succeq g]\psi$ 扩展语言 D LL$^+$ ， 用于公开宣告。我们还提出一个公理系统 D L，并证明其可靠性和完备性。

定义。

动态信念Łukasiewicz逻辑的语言记作 DD LL，由以下巴科斯-诺尔范式定义。DD LL 有一个新的公式 $[\varphi \succeq g]\varphi$，其中 φ 是 D LL$^+$-公式。

$$\varphi ::= \bot \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \succeq g \mid \varphi \,\&\, \varphi \mid \varphi \to \varphi \mid B_a\varphi \mid [\varphi \succeq g]\varphi$$

此外，我们还使用记号 $\varphi \leftrightarrow \psi$ 表示公式 $\varphi \to \psi \,\&\, \psi \to \varphi$。我们将新公式$[\varphi \succeq g]\psi$ 读作 在公开宣告 $\varphi \succeq g$ 之后， ψ 成立（见例 3.1）。◀

我们首先给出更新模型的定义。更新模型说明公开宣告$\varphi \succeq g$ 如何影响模型 $\mathfrak{M}$的状态。请注意，我们假设公共公告都是真的，即只会宣告真实的命题，没有人会说谎。

定义。（更新模型）设 $\mathfrak{M} = (S, {}^{r_{a|a\in\mathcal{A}}}, \pi)$是一个 D LL-模型。 $\mathfrak{M}$ 在宣告 $\varphi \succeq g$ 后的更新模型记作 $\mathfrak{M}^{\varphi\succeq g} = (S^{\varphi\succeq g}, r^{\varphi\succeq g}_{a|_{a\in\mathcal{A}}}, \pi^{\varphi\succeq g})$，定义如下：

$$
\begin{aligned}
&S^{\varphi\succeq g} = \{s \mid s \in S^{\mathfrak{M}}, V^{\mathfrak{M}}_s(\varphi \succeq g) = 1\},\\
&r^{\varphi\succeq g}_a(s,s') = r^{\mathfrak{M}}_a(s,s'), \qquad \forall s,s' \in S^{\varphi\succeq g},\\
&\pi^{\varphi\succeq g}(s,p) = \pi^{\mathfrak{M}}(s,p), \qquad \forall s \in S^{\varphi\succeq g},\ p \in \mathcal{P}.
\end{aligned}
$$

这里我们定义 $[\varphi \succeq g]\psi$的赋值函数；其他情形的定义与上一节相同。

$$
V^{\mathfrak{M}}_s([\varphi \succeq g]\psi) = \begin{cases} 1 & V_s(\varphi \succeq g) = 0 \\ V^{\mathfrak{M}^{\varphi\succeq g}}(\psi) & otherwise. \end{cases}
$$

◀

接下 来我们用公共公告对泥孩谜题的模糊版本进行建模 .

3.1 示例（模糊泥孩）

在传统的泥孩谜题中，一群孩子在户外玩耍，其中一些孩子弄脏了，额头上可能沾有泥巴。孩子们只能看见其他孩子是否弄脏了，却看不见自己额头上是否有泥巴。在 [9] 有人提出了泥孩谜题的模糊版本，并使用认知 G¨模态逻辑对其进行建模。为了考虑不同状态之间的模糊关系，他们假设主体存在视觉障碍，并提出了与主体额头上泥巴量相对应的区分标准。

这里我们给出这个模糊泥孩谜题的一个动态简化版本。假设有三个孩子：Alice、Bob 和 Cath。模型的每个状态都是一个元组（m_a， m_b， m_c），其中 m_a， m_b和 m_c 分别取值于 $[0,1]$，表示 Alice、Bob 和 Cath 额头上的泥巴量。因此，所有可能状态的数量是无限的。为了观察一些公告对模型的影响，我们将一般模型限制为图 3.1-**I** 中所示的若干状态。Alice、Bob 和 Cath 的可及关系分别用红色、绿色和蓝色数字表示，并假设该模型具有自反性和对称性。例如， r_c（s_1， s_2） $= 0.95$ 表示 Cath 能稍微辨别出 Bob 有一点脏（例如 V_{s_1}（m_b） $= 0.1$），或者脏得稍微多一点（例如V_{s_2}（m_b） $= 0.2$）。

假设父亲公开宣布至少有一个孩子的额头非常泥泞。例如，他公开宣布 $[\neg$（$\neg m_a \,\&\, \neg m_b \,\&\, \neg m_c$） $\succeq 0.8]$。状态 s_1 中， m_a、 m_b 和 m_c的值小于 0。8 将在更新后的模型中被移除（图3.1-**II**）。此外，假设第一次公告之后，孩子们没有反应，因此父亲再次公开宣布前述内容，作为第二次公告。这样，可能世界就缩减为四种状态（图3.1-**III**）。接下来，我们可以看到 Cath 在开始时、第一次公告后以及第二次公告后对自己泥泞状态的信念：

$$
\begin{aligned}
&V^{\mathfrak{M}^{\mathbf{I}}}_{s_3}(B_c m_c) =\\
&\quad \inf\{\max\{0,0.9\}, \max\{0.05,0.2\}, \max\{1,0.9\}, \max\{1,0.9\}\} = 0.2,\\
&V^{\mathfrak{M}^{\mathbf{II}}}_{s_3}([\neg(\neg m_a \,\&\, \neg m_b \,\&\, \neg m_c) \succeq 0.8] B_c m_c) = 0.2,\\
&V^{\mathfrak{M}^{\mathbf{III}}}_{s_3}([\neg(\neg m_a \,\&\, \neg m_b \,\&\, \neg m_c) \succeq 0.8][\neg(\neg m_a \,\&\, \neg m_b \,\&\, \neg m_c) \succeq 0.8] B_c m_c) =\\
&\quad \inf\{\max\{0,0.9\}, \max\{1,0.9\}\} = 0.9.
\end{aligned}
$$

上述计算表明，在第二次公告之后，Cath 几乎可以确定自己处于泥泞状态。

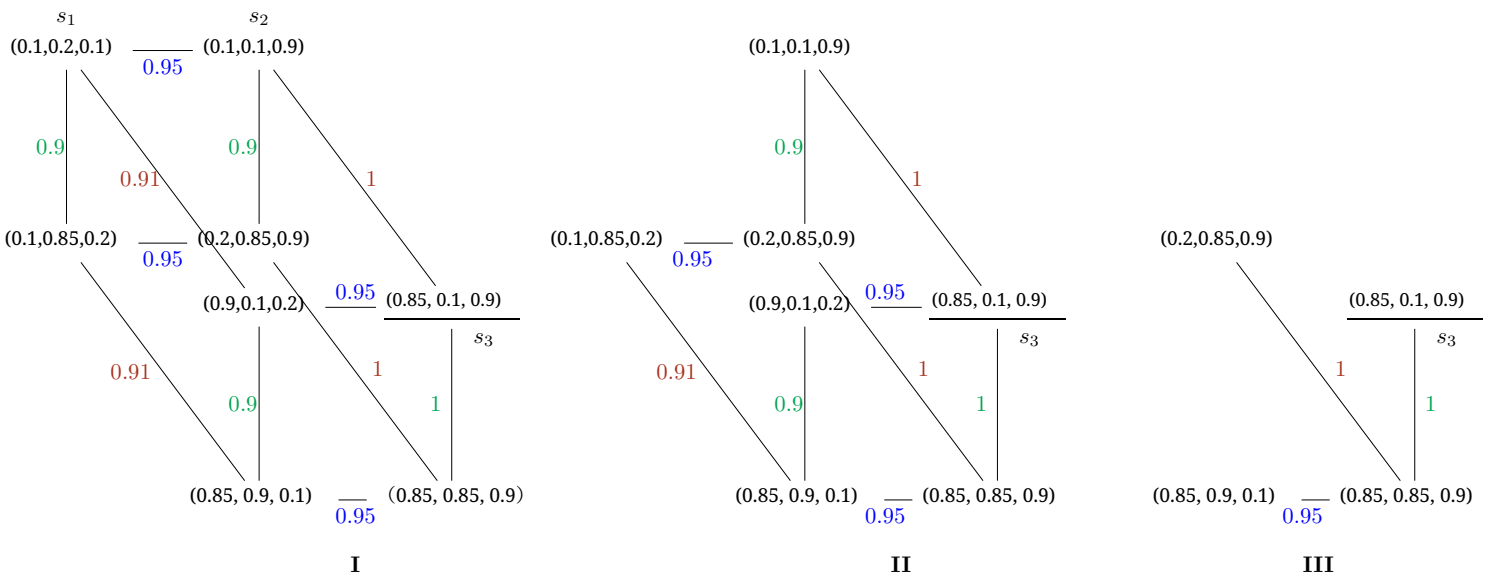


图1：模糊泥孩童示例（现实世界中的状态以带下划线的形式显示）

3.2 可靠性与完备性

本节提出一个公理系统 D L，并证明它是可靠的。随后，我们定义 B L$^+$ 与 D L 之间的翻译，并用它来证明完备性定理。

命题 3.1. 以下模式均有效。

1. $[\varphi \succeq g]p \leftrightarrow ((\varphi \succeq g) \rightarrow p)$ 2. $[\varphi \succeq g]\neg\psi \leftrightarrow ((\varphi \succeq g) \rightarrow \neg[\varphi \succeq g]\psi)$ 3. $[\varphi \succeq g](\psi \,\&\, \chi) \leftrightarrow ([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, [\varphi \succeq g]\chi)$
4. $[\varphi \succeq g](\psi \rightarrow \chi) \leftrightarrow [\varphi \succeq g]\neg(\psi \,\&\, \neg\chi)$
5. $[\varphi \succeq g]B_a\psi \leftrightarrow ((\varphi \succeq g) \rightarrow B_a[\varphi \succeq g]\psi)$

证明。我们证明，对于任意 D LL-模型 $\mathfrak{M} = (S, {}^{r_a}{}_{|a\in\mathcal{A}}, \pi)$ 和任意状态 $s \in S$，每个模式都是有效的。

(1)：我们证明 $V_s([\varphi \succeq g]p \rightarrow ((\varphi \succeq g) \rightarrow p)) = 1$。若 $V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi \succeq g) = 0$，则有

$$V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]p \rightarrow (\varphi \succeq g \rightarrow p)) =$$
$$\min\{1, 1 - V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]p) + V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi \succeq g \rightarrow p)\} =$$
$$\min\{1, 1 - 1 + 1\} = 1$$

因此，假设 $V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi \succeq g) = 1$。在这种情况下，我们有 $V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]p) = V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi\succeq g}}(p) = V_s^{\mathfrak{M}}(p)$，并且 $V_s^{\mathfrak{M}}((\varphi \succeq g) \rightarrow p) = V_s^{\mathfrak{M}}(p)$，因此 $V_s([\varphi \succeq g]p \rightarrow ((\varphi \succeq g) \rightarrow p)) = 1$。通过类似的论证，可以证明$V_s(((\varphi \succeq g) \rightarrow p) \rightarrow [\varphi \succeq g]p) = 1$。

(2)：设 $V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi\succeq g}}(\varphi \succeq g) = 1$。我们有

$$
\begin{aligned}
&V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]\neg\psi \to ((\varphi \succeq g) \to \neg[\varphi \succeq g]\psi)) = \\
&\min\{1, 1 - V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]\neg\psi) + V_s^{\mathfrak{M}}((\varphi \succeq g) \to \neg[\varphi \succeq g]\psi)\} = \\
&\min\{1, 1 - V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi\succeq g}}(\neg\psi) + V_s^{\mathfrak{M}}(\neg[\varphi \succeq g]\psi)\} = \\
&\min\{1, 1 - 1 + V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi\succeq g}}(\psi) + 1 - V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]\psi)\} = \\
&\min\{1, 1 - 1 + V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi\succeq g}}(\psi) + 1 - V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi\succeq g}}(\psi)\} = 1.
\end{aligned}
$$

若 $V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi\succeq g}}(\varphi \succeq g) = 0$，显然可得该陈述。逆向部分可通过类似的讨论证明。

(3)：假设 $V_s^{\mathfrak{M}}(\varphi \succeq g) = 1$，另一种情况显然成立。我们有：

$$
\begin{aligned}
&V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, \chi \to ([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, [\varphi \succeq g]\chi)) = \\
&\min\{1, 1 - V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, \chi) + V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, [\varphi \succeq g]\chi)\} = \\
&\min\{1, 1 - V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi\succeq g}}(\psi \,\&\, \chi) + \max\{0, V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]\psi) + V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]\chi) - 1\}\} = \\
&\min\{1, 1 - \max\{0, V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi\succeq g}}(\psi) + V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi\succeq g}}(\chi) - 1\} + \max\{0, V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi\succeq g}}(\psi) + V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi\succeq g}}(\chi) - 1\}\} = 1.
\end{aligned}
$$

$V_s^{\mathfrak{M}}(([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, [\varphi \succeq g]\chi) \to [\varphi \succeq g]\psi \,\&\, \chi) = 1$ 的推导类似。

(4)：容易验证 $V_s(\psi \to \chi) = V_s(\neg(\psi \,\&\, \neg\chi))$。因此该陈述成立。(5)：设 $V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi\succeq g}}(\varphi \succeq g) = 1$。我们有：

$$
\begin{aligned}
&V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]B_a\psi \to ((\varphi \succeq g) \to B_a[\varphi \succeq g]\psi)) = \\
&\min\{1, 1 - V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]B_a\psi) + V_s^{\mathfrak{M}}((\varphi \succeq g) \to B_a[\varphi \succeq g]\psi)\} = \\
&\min\{1, 1 - V_s^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]B_a\psi) + V_s^{\mathfrak{M}}(B_a[\varphi \succeq g]\psi)\} = \\
&\min\{1, 1 - V_s^{\mathfrak{M}^{\varphi\succeq g}}(B_a\psi) + V_s^{\mathfrak{M}}(B_a[\varphi \succeq g]\psi)\} = \\
&\min\{1, 1 - \inf_{s'\in S^{\varphi\succeq g}} \max\{1 - r_a^{\varphi\succeq g}(s, s'), V_{s'}^{\mathfrak{M}^{\varphi\succeq g}}(\psi)\} + \inf_{s''\in S^{\mathfrak{M}}} \max\{1 - r_a^{\mathfrak{M}}(s, s''), V_{s''}^{\mathfrak{M}}([\varphi \succeq g]\psi)\}\} = \\
&\min\{1, 1 - \inf_{s'\in S^{\varphi\succeq g}} \max\{1 - r_a^{\varphi\succeq g}(s, s'), V_{s'}^{\mathfrak{M}^{\varphi\succeq g}}(\psi)\} + \inf_{s''\in S^{\mathfrak{M}}} \max\{1 - r_a^{\mathfrak{M}}(s, s''), V_{s''}^{\mathfrak{M}^{\varphi\succeq g}}(\psi)\}\} = 1
\end{aligned}
$$

注意，最后一个陈述是由以下事实推出的：当 $V_{s''}^{\mathfrak{M}^{\varphi\succeq g}}(\psi) = 1$ 时，对于满足 $V_{s'}(\varphi \succeq g) = 0$ 的状态 s''，我们有

$$
\inf_{s'\in S^{\varphi\succeq g}} \max\{1 - r_a^{\varphi\succeq g}(s, s'), V_{s'}^{\mathfrak{M}^{\varphi\succeq g}}(\psi)\} = \inf_{s''\in S^{\mathfrak{M}}} \max\{1 - r_a^{\mathfrak{M}}(s, s''), V_{s''}^{\mathfrak{M}^{\varphi\succeq g}}(\psi)\}.
$$

$V_s^{\mathfrak{M}}(((\varphi \succeq g) \to B_a[\varphi \succeq g]\psi) \to [\varphi \succeq g]B_a\psi) = 1$ 有类似的论证。 □

定义。设 φ、ψ 和 χ 为 DD LL-公式，且 $a \in \mathcal{A}$。以下动态卢卡西维茨公理系统 D L 是信念 Łukasiewicz逻辑 B L^+的扩展。

(L_D0) 信念Łukasiewicz逻辑 B L^+的所有重言式。

(L_D1) $[\varphi \succeq g]p \leftrightarrow ((\varphi \succeq g) \to p)$ (L_D2)
$[\varphi \succeq g]\neg\psi \leftrightarrow ((\varphi \succeq g) \to \neg[\varphi \succeq g]\psi)$ (L_D3)
$[\varphi \succeq g](\psi \,\&\, \chi) \leftrightarrow ([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, [\varphi \succeq g]\chi)$ (L_D4) $[\varphi \succeq g](\psi \to \chi) \leftrightarrow [\varphi \succeq g]\neg(\psi \,\&\, \neg\chi)$

(L_D5) $[\varphi \succeq g]B_a\psi \leftrightarrow$ ($(\varphi \succeq g)$ $\rightarrow B_a[\varphi \succeq g]\psi)$

◀

定理 3.1。（可靠性）
公理系统 D L 是可靠的，即如果 DD LL-公式 φ 可在 D L 中证明，那么它在所有 D LL-模型中都有效。

证明。 这是命题 3.1的直接结论。 □

为了证明完备性定理，我们遵循 Ditmarsch 在 [14] 中关于公开宣告的方法。

定义。设 φ、ψ 和 χ 为 DD LL-公式。DD LL 语言与 D LL 语言之间的翻译是一个函数 t : DD LL $\rightarrow$ D LL，其递归定义如下:

$$\begin{aligned}
&\forall p \in \mathcal{P} \quad t(p) = p, && t(\neg\varphi) = \neg t(\varphi),\\
&t(\varphi \,\&\, \psi) = t(\varphi) \,\&\, t(\psi), && t(\varphi \rightarrow \psi) = t(\neg(\varphi \,\&\, \neg\psi)),\\
&t(B_a\varphi) = B_a t(\varphi), && t([\varphi \succeq g]p) = t(\varphi \succeq g \rightarrow p),\\
&t([\varphi \succeq g]\neg\psi) = t(\varphi \succeq g \rightarrow \neg[\varphi \succeq g]\psi), && t([\varphi \succeq g](\psi \,\&\, \chi)) = t([\varphi \succeq \psi] \,\&\, [\varphi \succeq g]\chi),\\
&t([\varphi \succeq g](\psi \rightarrow \chi)) = t([\varphi \succeq g]\neg(\psi \,\&\, \neg\chi)) && t([\varphi \succeq g]B_a\psi) = t(\varphi \succeq g \rightarrow B_a[\varphi \succeq g]\psi).
\end{aligned}$$

DD LL-公式的复杂度由函数 c : DD LL $\rightarrow \mathbb{N}$ 定义如下:

$$\begin{aligned}
&c(p) = 1, && c(\neg\varphi) = 1 + c(\varphi), && c(\varphi \succeq g) = 1 + c(\varphi),\\
&c(\varphi \,\&\, \psi) = 1 + \max\{c(\varphi), c(\psi)\}, && c(\varphi \rightarrow \psi) = 3 + \max\{c(\varphi), c(\psi)\}, && c(B_a\varphi) = 1 + c(\varphi)\\
&c([\varphi \succeq g]\psi) = (5 + c(\varphi))c(\psi)
\end{aligned}$$

◀

引理 3.1. 对于 DD LL 中的所有 φ、ψ 和 χ，有:

1. 若 φ 是 ψ 的子公式，则 $c(\psi) \geq c(\varphi)$。
2. $c([\varphi \succeq g]p) > c((\varphi \succeq g) \rightarrow p)$ 3. $c([\varphi \succeq g]\neg\psi) > c((\varphi \succeq g) \rightarrow \neg[\varphi \succeq g]\psi)$ 4. $c([\varphi \succeq g](\psi \,\&\, \chi)) > c([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, [\varphi \succeq g]\chi)$ 5. $c([\varphi \succeq g](\psi \rightarrow \chi)) > c([\varphi \succeq g]\neg(\psi \,\&\, \neg\chi))$ 6. $c([\varphi \succeq g]B_a\psi) > c(\varphi \succeq g \rightarrow B_a[\varphi \succeq g]\psi)$

证明。 **(1):** 根据定义，显然 3.1。

(2): 根据定义，我们有 $c([\varphi \succeq g]p) = (5 + c(\varphi))c(p)$，这等于 $5 + c(\varphi)$。此外，我们有 $c(\varphi \succeq g \rightarrow p) = 3 +$ 最大值$\{c(\varphi \succeq g)\ c(p)\} = 4 + c(\varphi)$。因此，显然 $c([\varphi \succeq g]p) > c((\varphi \succeq p) \rightarrow p)$。

(3): 我们有:

$$\begin{aligned}
c([\varphi \succeq g]\neg\psi) &= (5 + c(\varphi))(1 + c(\psi))\\
&= 5 + c(\varphi) + 5c(\psi) + c(\varphi)c(\psi), \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c((\varphi \succeq g) \rightarrow \neg[\varphi \succeq g]\psi) &= 3 + \max\{c(\varphi \succeq g), c(\neg[\varphi \succeq g]\psi)\}\\
&= 4 + c([\varphi \succeq g]\psi)\\
&= 4 + (5 + c(\varphi))c(\psi)\\
&= 4 + 5c(\psi) + c(\varphi)c(\psi) \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

不难看出，3.1 大于 3.2。

(4)：不失一般性，令 $c(\psi) > c(\chi)$。我们有：

$$\begin{aligned} c([\varphi \succeq g](\psi \,\&\, \chi)) &= (5 + c(\varphi))(1 + \max\{c(\psi), c(\chi)\}) \\ &= 5 + c(\varphi) + 5c(\psi) + c(\varphi)c(\psi) \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} c([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, [\varphi \succeq g]\chi) &= 1 + \max\{c([\varphi \succeq g]\psi), c([\varphi \succeq g]\chi)\} \\ &= 1 + \max\{(5 + c(\varphi))c(\psi), (5 + c(\varphi)c(\chi))\} \\ &= 1 + 5c(\psi) + c(\varphi)c(\psi) \end{aligned} \tag{3.4}$$

由 3.3、3.4 很容易验证 $c([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, \chi) > c([\varphi \succeq g]\psi \,\&\, [\varphi \succeq g]\chi)$

(5)：不失一般性，设 $c(\psi) > c(\chi)$。我们有：

$$\begin{aligned} c([\varphi \succeq \chi](\psi \to \chi)) &= (5 + c(\varphi))(3 + \max\{c(\psi), c(\chi)\}) \\ &= (5 + c(\varphi))(3 + c(\psi)) \\ &= 15 + 5c(\psi) + 3c(\varphi) + c(\varphi)c(\psi) \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} c([\varphi \succeq g]\neg(\psi \,\&\, \neg\chi)) &= (5 + c(\varphi))(2 + \max\{c(\psi), 1 + c(\chi)\}) \\ &= (5 + c(\varphi))(2 + c(\psi)) \\ &= 10 + 5c(\psi) + 2c(\varphi) + c(\varphi)c(\psi) \end{aligned} \tag{3.6}$$

可以看出 3.5 大于 3.6，因此该陈述成立。

(6)：我们有：

$$\begin{aligned} c([\varphi \succeq g]B_a\psi) &= (5 + c(\varphi))(1 + c(\psi)) \\ &= 5 + c(\varphi) + 5c(\psi) + c(\varphi)c(\psi) \\ &> 4 + 5c(\psi) + c(\varphi)c(\psi) \\ &> 3 + (1 + (5 + c(\varphi))c(\psi)) \\ &\geq 3 + c(B_a[\varphi \succeq g]\psi) \\ &= 3 + \max\{c(\varphi \succeq g), c(B_a[\varphi \succeq g]\psi)\} \\ &= c((\varphi \succeq g) \to B_a[\varphi \succeq g]\psi) \end{aligned}$$

□

引理 3.2. 对于 DD LL 中的所有公式 φ，我们有 $\vdash_{D\text{-}L} \varphi \leftrightarrow t(\varphi)$。

证明。设 φ 是一个 DD LL-公式。通过对 $c(\varphi)$ 进行归纳法来证明。基例为 $\varphi = p$，其中 $p \in \mathcal{P}$。显然，$\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} p \leftrightarrow p$。因此，假设 $c(\varphi) = n$，且对于所有满足 $c(\psi) < n$ 的 ψ，该陈述均成立。我们分以下几种情况讨论：

- 情形 $\neg\varphi$：根据引理 3.1 第 1 项，我们有 $c(\neg\varphi) > c(\varphi)$。因此，根据归纳假设，我们有 $\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} \varphi \leftrightarrow t(\varphi)$。进而，通过以下推导，我们有 $\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} \neg\varphi \leftrightarrow \neg t(\varphi)$；又由于$t(\neg\varphi) = \neg t(\varphi)$，故 $\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} \neg\varphi \leftrightarrow t(\neg\varphi)$。

(1) $(\varphi \to \psi)$ & $(\psi \to \varphi)$ 归纳假设，其中 $\psi = t(\varphi)$，以及 $\leftrightarrow$ 的定义(2) $(\varphi \to \psi)$ & $(\psi \to \varphi) \to (\varphi \to \psi)$ $(A1)$ (3) $(\varphi \to \psi)$ & $(\psi \to \varphi) \to (\psi \to \varphi)$ $(A2)$, $(A1)$ (4) $(\varphi \to \psi)$ (1), (2), (R_{MP}) (5) $(\psi \to \varphi)$ (6) $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ 定理 ($\mathrm{L}uka.$) (7) $(\psi \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$ 定理 ($\mathrm{L}uka.$) (8) $(\neg\psi \to \neg\varphi)$ (4), (6), (R_{MP}) (9) $(\neg\varphi \to \neg\psi)$ (5), (7), (R_{MP}) (10) $(\neg\psi \to \neg\varphi)$ & $(\neg\varphi \to \neg\psi)$ (8), (9), 与 2.3 类似 (1), (3), (R_{MP})

• 情形 $\varphi\,\&\,\psi$：根据引理 3.1 的第 1 项，我们有 $c(\varphi\,\&\,\psi) \geq c(\varphi)$ 和 $c(\varphi\,\&\,\psi) \geq c(\psi)$。因此，根据归纳假设，我们有$\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} \varphi \leftrightarrow t(\varphi)$ 和 $\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} \psi \leftrightarrow t(\psi)$。现在，通过以下步骤可得 $\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} (\varphi\,\&\,\psi) \leftrightarrow (t(\varphi)\,\&\,t(\psi))$:

(1) $(\varphi \to t(\varphi))\,\&\,(t(\varphi) \to \varphi)$ 归纳假设 (2) $((\psi \to t(\psi))\,\&\,(t(\psi) \to \psi))$ 归纳假设 $(A1)$ $(A1)$ (3) $(\varphi \to t(\varphi))\,\&\,(t(\varphi) \to \varphi) \to (\varphi \to t(\varphi))$ (4) $(\psi \to t(\psi))\,\&\,(t(\psi) \to \psi) \to (\psi \to t(\psi))$ (5) $\varphi \to t(\varphi)$ (1), (3), (R_{MP}) (6) $\psi \to t(\psi)$ (2), (4), (R_{MP}) (7) $((\varphi \to t(\varphi))\,\&\,(\psi \to t(\psi))) \to ((\varphi\,\&\,\psi) \to (t(\varphi)\,\&\,t(\psi)))$ ($\mathrm{L}2$) (8) $(\varphi \to t(\varphi))\,\&\,(\psi \to t(\psi))$ (5), (6), 类似于 2.3 (9) $(\varphi\,\&\,\psi) \to (t(\varphi)\,\&\,t(\psi))$ (7), (8), (R_{MP}) (10) $(t(\varphi)\,\&\,t(\psi)) \to (\varphi\,\&\,\psi)$ 与 (9) 有类似的推导 (11) $((\varphi\,\&\,\psi) \to (t(\varphi)\,\&\,t(\psi)))\,\&\,((t(\varphi)\,\&\,t(\psi)) \to (\varphi\,\&\,\psi))$ (9), (10), 类似于 2.3

因此，根据翻译定义，简单可得$\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} \varphi\,\&\,\psi \leftrightarrow t(\varphi\,\&\,\psi)$。

• 情况 $\varphi \to \psi$：由引理 3.1 可得 $c(\varphi \to \psi) > c(\varphi)$ 和 $c(\varphi \to \psi) > c(\psi)$。因此，根据归纳假设，我们有$\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} \varphi \leftrightarrow t(\varphi)$ 和 $\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} \psi \leftrightarrow t(\psi)$。仿照前一种情况的证明$\neg\varphi$，可得 $\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} \neg\psi \leftrightarrow \neg t(\psi)$。因此，我们有:

(1)	$(\varphi \to t(\varphi))\,\&\,(t(\varphi) \to \varphi)$	ind. hypothesis
(2)	$((\neg\psi \to \neg t(\psi))\,\&\,(\neg t(\psi) \to \neg\psi))$	deduced from ind. hypothesis
(3)	$(\varphi \to t(\varphi))\,\&\,(t(\varphi) \to \varphi) \to (\varphi \to t(\varphi))$	$(A1)$
(4)	$(\neg\psi \to \neg t(\psi))\,\&\,(\neg t(\psi) \to \neg\psi) \to (\neg\psi \to \neg t(\psi))$	$(A1)$
(5)	$\varphi \to t(\varphi)$	$(1), (3), (R_{MP})$
(6)	$\neg\psi \to \neg t(\psi)$	$(2), (4), (R_{MP})$
(7)	$((\varphi \to t(\varphi))\,\&\,(\neg\psi \to \neg t(\psi))) \to ((\varphi\,\&\,\neg\psi) \to (t(\varphi)\,\&\,\neg t(\psi)))$	$(\mathrm{L}2)$
(8)	$(\varphi \to t(\varphi))\,\&\,(\neg\psi \to \neg t(\psi))$	(5), (6), similar to 2.3
(9)	$(\varphi\,\&\,\neg\psi) \to (t(\varphi)\,\&\,\neg t(\psi))$	$(7), (8), (R_{MP})$
(10)	$(t(\varphi)\,\&\,\neg t(\psi)) \to (\varphi\,\&\,\neg\psi)$	has a similar deduction as (9)
(11)	$((\varphi\,\&\,\neg\psi) \to (t(\varphi)\,\&\,\neg t(\psi))) \to (\neg(t(\varphi)\,\&\,\neg t(\psi)) \to \neg(\varphi\,\&\,\neg\psi))$	theorem(Łuka.)
(12)	$((t(\varphi)\,\&\,\neg t(\psi)) \to (\varphi\,\&\,\neg\psi)) \to (\neg(\varphi\,\&\,\neg\psi) \to \neg(t(\varphi)\,\&\,\neg t(\psi)))$	theorem(Łuka.)
(13)	$\neg(t(\varphi)\,\&\,\neg t(\psi)) \to \neg(\varphi\,\&\,\neg\psi)$	$(9), (11), (R_{MP})$
(14)	$\neg(\varphi\,\&\,\neg\psi) \to \neg(t(\varphi)\,\&\,\neg t(\psi))$	$(10), (12), (R_{MP})$
(15)	$(\neg(\varphi\,\&\,\neg\psi) \to \neg(t(\varphi)\,\&\,\neg t(\psi)))\,\&\,(\neg(t(\varphi)\,\&\,\neg t(\psi)) \to \neg(\varphi\,\&\,\neg\psi))$	(13), (14), similar to 2.3

因此，我们有$\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} \neg(\varphi\,\&\,\neg\psi) \leftrightarrow \neg(t(\varphi)\,\&\,\neg t(\psi))$；根据定义，我们有$\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} \neg(\varphi\,\&\,\neg\psi) \leftrightarrow t(\neg(\varphi\,\&\,\neg\psi))$。同时，在 Lukasiewicz逻辑中，我们有$\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} (\varphi \to \psi) \leftrightarrow \neg(\varphi\,\&\,\neg\psi)$。因此，我们有$\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} (\varphi \to \psi) \leftrightarrow t(\neg(\varphi\,\&\,\neg\psi))$，进而根据转换定义可得$\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} (\varphi \to \psi) \leftrightarrow t(\psi \to \varphi)$，如所求。

• 情形 $[\varphi \succeq g]p$：由引理 3.1 第 2 项可得 $c([\varphi \succeq g]p) > c((\varphi \succeq g) \to p)$。因此，根据归纳假设可得 $\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} ((\varphi \succeq g) \to p) \leftrightarrow t((\varphi \succeq g) \to p)$，而 $\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} ((\varphi \succeq g) \to p) \leftrightarrow t([\varphi \succeq g]p)$ 由翻译定义得到，继而由 (L_D1) 可直接推出 $\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} ([\varphi \succeq g]p) \leftrightarrow t([\varphi \succeq g]p)$。

• 情形 $[\varphi \succeq g]\neg\psi$：由引理 3.1 第 3 项可得 $c([\varphi \succeq g]\neg\psi) > c((\varphi \succeq g \to \neg[\varphi \succeq g]\psi))$。因此，根据归纳假设可得 $\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} ((\varphi \succeq g) \to \neg[\varphi \succeq g]\psi) \leftrightarrow t((\varphi \succeq g) \to \neg[\varphi \succeq g]\psi)$。于是，利用翻译定义可得 $\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} ((\varphi \succeq g) \to \neg[\varphi \succeq g]\psi) \leftrightarrow t([\varphi \succeq g]\neg\psi)$。继而由 (L_D2) 得到 $\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} ([\varphi \succeq g]\neg\psi) \leftrightarrow t([\varphi \succeq g]\neg\psi)$。

• 情形 $[\varphi \succeq g](\psi\,\&\,\chi)$：根据引理 3.1 第 4 项，我们有 $c([\varphi \succeq g](\psi\,\&\,\chi)) \geq c([\varphi \succeq g]\psi\,\&\,[\varphi \succeq g]\chi)$。因此，根据归纳假设，我们有 $\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} ([\varphi \succeq g]\psi\,\&\,[\varphi \succeq g]\chi) \leftrightarrow t([\varphi \succeq g]\psi\,\&\,[\varphi \succeq g]\chi)$；类似于前面的情形，利用 (L_D3) 和翻译定义，可得 $\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} [\varphi \succeq g]\psi\,\&\,\chi \leftrightarrow t([\varphi \succeq g]\psi\,\&\,\chi)$。

• 情形 $[\varphi \succeq g](\psi \to \chi)$：根据引理 3.1 第 5 项，我们有 $c([\varphi \succeq g](\psi \to \chi)) > c([\varphi \succeq g]\neg(\psi \& \neg\chi))$。因此，根据归纳假设，我们有 $\vdash$D L $[\varphi \succeq g]\neg(\psi \& \neg\chi) \leftrightarrow t([\varphi \succeq g]\neg(\psi \& \neg\chi))$。由 (L$_D$4) 可得 $\vdash$D L $[\varphi \succeq g](\psi \to \chi) \leftrightarrow t([\varphi \succeq g]\neg(\neg\psi \& \chi))$，因此根据 $t([\varphi \succeq g]\neg(\psi \& \neg\chi))$ 的翻译定义，我们有 $\vdash$D L $[\varphi \succeq g]\psi \to \chi \leftrightarrow t([\varphi \succeq g](\psi \to \chi))$。

• 情形 $[\varphi \succeq g]B_a\psi$：根据引理 3.1 第 6 项，我们有 $c([\varphi \succeq g]B_a\psi) > c((\varphi \succeq g) \to B_a[\varphi \succeq g]\psi)$。因此，根据归纳假设，我们有 $\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} ((\varphi \succeq g) \to B_a[\varphi \succeq g]\psi) \leftrightarrow t((\varphi \succeq g) \to B_a[\varphi \succeq g]\psi)$。同样，按照前面几种情形，使用 (L$_D$5) 以及 $t([\varphi \succeq g]B_a\psi)$ 的翻译定义，我们得到$\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} [\varphi \succeq g]B_a\psi \leftrightarrow t([\varphi \succeq g]B_a\psi)$。

□

定理 3.2。（完备性）

对于 DD LL 中的每个公式 φ， $\vDash \varphi$ 蕴含$\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} \varphi$。

证明。假设 $\vDash \varphi$。根据翻译定义，我们有 $\vDash t(\varphi)$。因此，根据 B L$^+$ 的完备性，我们有$\vdash_{\mathbf{B\text{-}L}^+} t(\varphi)$。由于 B L$^+$ 是 D L 的一个片段，我们有$\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} t(\varphi)$。此外，根据引理 3.2 ，我们有$\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} \varphi \leftrightarrow t(\varphi)$。于是，由$\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} \varphi \leftrightarrow t(\varphi)$ 和$\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} t(\varphi)$，我们可以得出结论：$\vdash_{\mathbf{D\text{-}L}} \varphi$。 □

4 结论

本文通过定义一个新的算子 $\succeq$，提出了 $\mathbf{B\text{-}L}^+$，即带有伪经典信念的信念Łukasiewicz逻辑的扩展，该伪经典信念定义于[10]。我们证明了 $\mathbf{B\text{-}L}^+$ 相对于 D LL-模型类是可靠且完备的。此外，我们为 $\mathbf{B\text{-}L}^+$ 的语言配备了一个公共公告算子$[. \succeq g]$，并引入了信念Łukasiewicz逻辑的动态扩展 $\mathbf{D\text{-}L}$ 。最后，我们证明了$\mathbf{D\text{-}L}$是可靠且完备的。

参考文献

[1] G. Aucher，《更新逻辑与信念修正的综合系统》。载于《智能体与多智能体系统》，《智能体与多智能体系统》。3371(132)，1-18（2006）。[2] R. Aumann，《交互式认识论 I：知识》。《国际博弈论杂志》28，263-300（1999）。[3]M. Benevides，A. Madeira，M. A. Martins，《带公开宣告的分级认识逻辑》，《逻辑与代数编程方法杂志》，第125卷（2022年）。https://doi.org/10.1016/j.jlamp.2021.100732。[4] G. Bonanno 和 P. Battigalli，《关于信念、知识与博弈论认识论基础的最新成果》。《经济学研究》53(2)，149-225（1999）。[5] X. Caicedo，G. Metcalfe，R. O. Rodriguez 和 J. Rogger，《Gödel模态逻辑的有限模型性质》，载于：L. Libkin、U. Kohlenbach、R. de Queiroz（编），《逻辑、语言、信息与计算》。WoLLIC（2013）226-237。《计算机科学讲义》，第8071卷。柏林、海德堡：施普林格。https://doi.org/10.1007/978-3-642-39992-3_20[6] X. Caicedo，R. O. Rodriguez，《一种Gödel模态逻辑》，载于《逻辑、可计算性与随机性》（2004），全文电子版 arXiv:0903.2767。[7] X. Caicedo，R. O. Rodriguez，《标准Gödel模态逻辑》，Studia Logica 94（2010）189-214。[8] X. Caicedo，R. O. Rodriguez，《 *[0,1]*值克里普克框架上的双模态Gödel逻辑》，《逻辑与计算杂志》25（2012）37-55。https://doi.org/10.1093/logcom/exs036[9] D. Dastgheib，H. Farahani，A. H. Sharafi，R. A. Borzooei，《Gödel逻辑的一些认识扩展》，https://arxiv.org/abs/1605.03828（2020）。

[10]D. Dastgheib，H. Farahani，《Lukasiewicz逻辑的信念扩展》（2022年）https://arxiv.org/abs/2111.08564[11] H. van Ditmarsch，《知识博弈逻辑：展示一张牌》。载于：E. Postma 和 M. Gyssens（编），《BNAIC 99论文集》（1999年）。[12] H. van Ditmarsch，《知识博弈》。《经济研究公报》53:4（2001年）[13]H. van Ditmarsch，W. van der Hoek，B. Kooi，《并发动态认知逻辑》。载于：Hendricks, V.F.、Jørgensen, K.F.、Pedersen, S.A.（编），《知识贡献者》。Synthese丛书，第322卷（2003年）。[14] H. van Ditmarsch，W. van der Hoek，B. Kooi，《动态认知逻辑》。施普林格·荷兰。doi: 10.1007/978-1-4020-5839-4（2008年）XI,296[15] H. van Ditmarsch，W. van der Hoek，B. Kooi，Louwe B. Kuijer，《任意箭头更新逻辑》。《人工智能》，爱思唯尔242（2017年）80-106[16] A. Di Nola，R. Grigolia，N. Mitskevich，G. Vitale，《动态Lukasiewicz逻辑及其在免疫系统中的应用》。https://doi.org/10.1007/s00500-021-05955-3《软计算》（2021年）25:9773-9780[17] A. Di Nola，R. Grigolia，G. Vitale，《动态Lukasiewicz逻辑与动态MV代数》。《国际近似推理杂志》124（2020年）103–110[18] A. Di Nola，R. Grigolia，《法证动态Lukasiewicz逻辑》。《模糊集与系统汇刊》（2022年）。[19] H. Gintis，《理性的界限：博弈论与行为科学的统一》。普林斯顿大学出版社（2009年）。[20] R. Fagin，J. Halpern，Y. Moses 和 M. Vardi，《关于知识的推理》。麻省理工学院出版社（1995年）。[21] M. J. Fischer，《正则程序的命题动态逻辑》。《计算机与系统科学杂志》18，194-211（1979年）[22] J. Halpern 和 Y. Moses，《分布式环境中的知识与共同知识》。《美国计算机协会杂志》37(3)，549-587（1990年）。[23] P. H¨ajek，《模糊逻辑元数学》（施普林格·荷兰，1998年）。[24] G. Hansoul，B. Teheux，《多值Lukasiewicz模态系统与关系语义的完备性结果》（2006年）。arXiv:math.LO/0612542v1[25] G. Hansoul 和 B. Teheux，《为Lukasiewicz逻辑扩展模态：关系语义的代数方法》，Studia Logica，101(3)（2013年）505-545。[26] D. Harel，《一阶动态逻辑》，《计算机科学讲义》丛书（LNCS，第68卷）之一（1979年）。[27] D. Harel，D. Kozen，J. Tiuryn，《动态逻辑》。剑桥：麻省理工学院出版社（2000年）。[28] J. Hintikka，《知识与信念：这两个概念的逻辑导论》。康奈尔大学出版社，伊萨卡，纽约（1962年），x 179页。《符号逻辑杂志》29(3)，132-134。[29] X. Jing，X. Luo 和 Y. Zhang，《模糊动态信念逻辑系统》。《国际智能系统杂志》29：687-711（2014年）。https://doi.org/10.1002/int.21652[30] D. Kozen，《无 ∗自由PDL模型的表示定理》，载于：de Bakker, J.、van Leeuwen, J.（编），《自动机、语言与编程》（1980年）。

[31] L. B. Kuijer，《含共同知识的任意箭头更新逻辑》既非递归可枚举，也非余递归可枚举。载于：第十六届理性与知识理论方面会议论文集，TARK（2017年）。https://doi.org/10.4204/EPTCS.251.27 [32] S. Lindstr¨om 和 W. Rabinowicz。内省主体的信念改变（1999年）。[33] S. Lindstr¨om 和 W. Rabinowicz。《无限制DDL：面向内省主体的动态信念逻辑》。Erkenntnis，50：353–385（1999年）。[34] J.-J. Meyer 和 W. van der Hoek，《人工智能与计算机科学的认识逻辑》。剑桥大学出版社（1995年）。[35] S. Negri 和 P. Maffezioli，《公共公告逻辑的证明论视角》。逻辑与科学哲学（即将出版）。[36]P. Ostermann，《多值模态命题演算》。《数学逻辑季刊》。https://doi.org/10.1002/malq.19880340411（1988年）[37] R. Parikh，《社会软件》。《Synthese》132，187-211（2002年）。[38]N. Pischke，《标准哥德尔模态逻辑中的公开宣告札记》（2021年）。https://arxiv.org/abs/1707.05872[39] A. Platzer，《动力系统逻辑》，2012年第27届IEEE年度计算机科学逻辑研讨会，第13-24页，doi：10.1109/LICS.2012.13。（2012年）。[40] A. Platzer，《动力系统的动态逻辑》，https://arxiv.org/pdf/1205.4788（2012年）。[41] J. Plaza，《公共通信逻辑》。载于M. L. Emrich、M. S. Pfeifer、M. Hadzikadic 和 Z.W. Ras（编），《第四届智能系统方法论国际研讨会论文集》（1989年）https://doi.org/10.1007/s11229-007-9168-7[42] R. Ramanujam 和 S. Suresh，《判定安全协议的知识属性》。载于《理性与知识理论方面会议论文集》，219-235（2005年）。[43] L. Samuelson，《经济分析中的知识建模》。《经济文献杂志》57，367-403（2004年）。[44] Y. D. Santos，《四值动态认识逻辑》。《逻辑、语言与信息杂志》。https://doi.org/10.1007/s10849-020-09313-8（2020年）29：451-489[45] K. Segerberg，《程序模态逻辑中的一个完备性定理》，Not. Am. Math. Soc. 24 (6)（1977年）。[46] K. Segerberg。《默认逻辑即动态信念逻辑》。《Erkenntnis》，50：333–352（1999年）。[47] K. Segerberg。《信念逻辑中的两种传统：将二者结合起来》。载于：H.J. Ohlbach 和 U. Reyle（编），《逻辑、语言与推理》（1999年）。[48] B. Teheux，《含错误的搜索博弈的命题动态逻辑》。《应用逻辑杂志》（2014年）。[49] W. van der Hoek 和 M. Wooldridge，《合作、知识与时间：交替时间时序认识逻辑及其应用》。《Studia Logica》75(1)，125-157（2003年）。[50] A. Vidal、F. Esteva、L. Godo，《乘积模糊逻辑的模态扩展》。《逻辑与计算杂志》27(1)（2017年）299-336。https://doi.org/10.1093/logcom/exv046[51] G. H. von Wright，《一篇关于模型逻辑的论文》。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹（1951年）。