arXiv:2304.08084v2 [math.GR] 1 Sep 2023

# 群的前缀幺半群与特殊逆幺半群的右单位

IGOR DOLINKA [1] 和 ROBERT D. GRAY[2]

Abstract. 前缀幺半群是有限呈示群的一个有限生成子幺半群，由其定义关系词的前缀生成。Guba（1997年）以及Ivanov、Margolis和Meakin（2001年）的重要结果表明，某些单关系幺半群和逆幺半群的字问题，可以归约为求解某些单关系群的前缀幺半群中的成员问题。受此启发，本文研究有限呈示群的前缀幺半群类。我们对这一类幺半群给出了完整描述。该族中的所有幺半群都是有限生成、递归呈示且可嵌入群的。我们的结果表明，并非每个有限生成、递归呈示且可嵌入群的幺半群都是前缀幺半群；但对于任意这样的幺半群，若与一个适当选取的有限秩自由幺半群作自由积，所得幺半群便是前缀幺半群。反过来，我们证明每个前缀幺半群都能以这种方式得到。此外，我们表明，能够作为前缀幺半群的单位群出现的群，恰好是有限生成递归可呈示群；而能够作为前缀幺半群的 Sch¨utzenberger 群出现的群，恰好是有限呈示群的递归可枚举子群。我们还得到一个类似结果，对特殊逆幺半群的右单位幺半群的 Sch¨utzenberger 群进行了分类。我们还给出了一些例子，说明某些右消去幺半群可以作为有限呈特殊逆幺半群的右单位幺半群出现，并证明并非所有右消去递归呈示幺半群都属于这一类。

## 1. Introduction

本文的主要主题源于组合代数与半群理论中一个历史悠久且至关重要的未解问题周边优美的代数理论：单关系幺半群的字问题。Magnus [21] 关于所有单关系群的字问题均为算法可判定的经典结果，以及该结果所蕴含的方法 [20] ，是组合群论 [19]的基石之一。另一方面，单关系幺半群的字问题是否可判定，一直是众多研究者严肃攻关的问题，其中尤以 Adian [1] 及其学生的工作最为著名。关于这一引人入胜课题的详尽历史回顾，请参阅综述 [29] 。

关于单关系幺半群的字问题，已有一些显著的部分性突破；其中最引人注目的或许是特殊单关系幺半群的情形，

2020 *Mathematics Subject Classification.* 20M05；20F05，20M18。*Key words and phrases.* 前缀幺半群；右单位；特殊逆幺半群；希格曼嵌入定理；Sch¨utzenberger 群。[1]塞尔维亚诺维萨德大学数学与信息学系，Trg Dositeja Obradovi´ca 4，21101 诺维萨德，塞尔维亚。*Email address:* dockie@dmi.uns.ac.rs。[2]英格兰诺里奇 NR4 7TJ 东英吉利大学数学学院。*Email address:* Robert.D.Gray@uea.ac.uk。

即形如 $\mathsf{Mon}\langle A \mid w = 1\rangle$ 的幺半群，其字问题总是可判定的。Adjan [1] 证明了这一结果，他还指出，这些单关系幺半群具有若干其他良好的代数性质。例如，他证明了单关系特殊幺半群 $M$ 的单位群是一个单关系群。后来，Makanin [22]将这一结果推广，证明对于任意特殊幺半群 $M$，也就是说，对于由形如 $w_i = 1$、$i \in I$的定义关系给出的幺半群，相应的单位群可以用不多于原始呈示 $M$中的关系数来定义。此外，特殊幺半群 $M$ 的所有极大子群都必须与其单位群同构 [23], ，而右单位子幺半群（右可逆元素）总是单位群与自由幺半群的自由积（当 $M$ 为有限呈示的时，其秩有限）。另请参阅 Lallement[17] 和 Zhang [34, 35]的相关研究。

如今我们知道，得益于Adian和Oganessian [2], ，幺半群的一般单关系问题可归约为以下形式的情形：$\mathsf{Mon}\langle a, b \mid aub = ava\rangle$ 和$\mathsf{Mon}\langle a, b \mid aub = a\rangle$，其中 $u$, $v \in \{a, b\}^*$ 是任意的字。这些约化情形中的所有幺半群都是右消去的，这促使Ivanov、Margolis和Meakin[15] 将另一类代数结构引入讨论：逆幺半群，更准确地说是特殊逆幺半群，其由形如$\mathsf{Inv}\langle A \mid w_i = 1\,(i \in I)\rangle$的呈示给出。通过将一个右消去的单关系幺半群嵌入一个单关系特殊逆幺半群，他们证明了（普通）单关系幺半群的字问题可归约为单关系特殊逆幺半群的字问题。然而，令人意外的是，本文第二作者最近在 [8] 证明，存在字问题不可判定的单关系特殊逆幺半群。尽管如此，这并不影响 [15], 提出的方法，因为那里给出的归约总会产生一个约化（尽管不是循环约化的）关系词，而[8]中构造的关系词则必然是非约化的。

群的前缀幺半群与特殊逆幺半群的右单位子幺半群（即右可逆元素）之间的联系，源于这样一个事实：从特殊逆幺半群 $T = \mathsf{Inv}\langle A \mid w_i = 1\,(i \in I)\rangle$ 到其极大群像 $G = \mathsf{Gp}\langle A \mid w_i = 1\,(i \in I)\rangle$ 的自然满同态，将 $T$ 的右单位子幺半群 $R$ 满射到相对于此呈示的 $G$ 的前缀幺半群。这里，前缀幺半群 $P$ 是由 $G$ 中所有可由关系词 $w_i\,(i \in I)$ 的前缀表示的元素生成的子幺半群。一般而言，这个从 $R$ 到 $P$ 的同态不是单射，但当 $T$ 是一个 $E$-幺正逆幺半群时则是单射。幺正性有许多等价定义，但就我们的目的而言，以下表述最为合适：若从 $T$ 到其最大群像 $G = \mathsf{Gp}\langle A \mid w_i = 1\,(i \in I)\rangle$ 的自然同态中，$G$ 的单位元的原像只有 $T$ 的幂等元，则 $T = \mathsf{Inv}\langle A \mid w_i = 1\,(i \in I)\rangle$ 是 $E$-幺正的。现在，[15] 的另一项重要结果表明，当 $T = \mathsf{Inv}\langle A \mid w_i = 1\,(i \in I)\rangle$ 是 $E$-幺正的，且 $\mathsf{Gp}\langle A \mid w_i = 1\,(i \in I)\rangle$ 的字问题可判定时，$T$ 的字问题的可判定性可归约为 $G$ 的前缀幺半群的成员问题。同一篇论文还证明，当 $w$ 是循环约化字时，$\mathsf{Inv}\langle A \mid w = 1\rangle$ 是 $E$-幺正的，因此在这种情况下，字问题可归约为相应单关系群的前缀成员问题。多位作者研究过单关系群的前缀成员问题，例如文献 [16, 25], ，最近本文作者也在文献 [7] 中进行了研究。群的前缀幺半群之间的密切联系

以及上述特殊逆幺半群的右单位，意味着同时并行研究这两类对象是很自然的。

研究特殊逆幺半群的右单位还有进一步的动机：主要的不可判定性结果 [8] 是通过构造特殊逆幺半群得到的，在这些幺半群中，右单位子幺半群的成员问题是不可判定的。此外，Guba [11]的重要工作凸显了研究前缀幺半群的意义。如上所述，对于形如 $\mathsf{Mon}\langle a, b \mid a = aub\rangle$ 的幺半群，其字问题仍未解决。由 Guba[11] 的结果可知，形如 $\mathsf{Mon}\langle a, b \mid a = aub\rangle$,$u \in \{a, b\}^*$ 的单关系幺半群的字问题可归约为形如 $\mathsf{Gp}\langle x, y, C \mid xUyx^{-1} = 1\rangle$ 的单关系群中的前缀成员问题，其中 $x \neq y$, $C$ 是有限字母表， $U$ 是 $\{x, y\} \cup C$ 上的一个正字。这类单关系群表示的前缀成员问题仍未解决。

为简洁起见，本文中“前缀幺半群”一词始终指与某个有限呈示群的前缀幺半群同构的幺半群；“RU-幺半群”则指与某个有限呈特殊逆幺半群的右单位子幺半群同构的幺半群。本文将探讨以下四个问题：

(1) 哪些幺半群是前缀幺半群？(2) 哪些幺半群是 RU-幺半群？
(3) 这些幺半群的单位群可以是什么？(4) 这些幺半群的 Sch¨utzenberger 群可以是什么？

对于前缀幺半群，我们将对这些问题给出完整答案，也就是说，在这一情形下回答问题 (1)、(3) 和 (4)。根据定义，前缀幺半群都是有限生成、递归呈示且可嵌入群的。因此，自然会想知道问题 (1) 的答案是否恰好是有限生成、递归呈示且可嵌入群的幺半群这一类。事实并非如此。我们的结果将表明，并非每个有限生成、递归呈示且可嵌入群的幺半群都是前缀幺半群；但对每个这样的幺半群，若与一个适当选取的有限秩自由幺半群作自由积，就能得到一个前缀幺半群。反过来，我们证明每个前缀幺半群都以这种方式得到，从而回答问题 (1)；见定理 3.6。关于前缀幺半群的子群，由于任何可嵌入群的幺半群（更一般地说，任何右消去幺半群）至多只有一个幂等元，即单位元，因此前缀幺半群唯一的极大子群就是它的单位群。我们将通过证明（见定理 4.3）前缀幺半群的单位群恰好构成有限生成递归呈示群这一类，来回答关于前缀幺半群的问题 (3)。（根据希格曼嵌入定理 [12], ，这恰好是所有有限呈示群的有限生成子群所构成的类。）由于没有其他子群，半群理论为我们提供了任意幺半群中“隐藏”的群结构，即所谓的 Sch ¨utzenberger 群（将在下一节中给出精确定义）；它们将极大子群的概念推广到半群的所有（包括非正则）$\mathscr{D}$-类。我们将在定理 4.5 中回答关于前缀幺半群的问题 (4)，并证明所有前缀幺半群的 Sch¨utzenberger 群恰好构成有限呈示群的递归可枚举子群这一类。

RU-幺半群的结构比前缀幺半群更复杂。文献 [10] 研究了 RU-幺半群，并证明单关系

特殊逆幺半群的右单位幺半群未必是有限呈示的，也未必能分解为单位群与自由幺半群的自由积（非逆特殊幺半群则具有这种分解）。根据定义，所有 RU-幺半群都是右消去且递归呈示的。我们将看到，并非每个右消去的递归可呈幺半群都是 RU-幺半群。反过来，我们将确定一大类确实都能作为 RU-幺半群出现的幺半群，称为有限 RC 呈示幺半群。尽管 RU-幺半群的完整描述问题仍未解决，我们成功对其 Sch¨utzenberger 群进行了分类。关于 RU-幺半群的单位群，这一问题已在近期论文 [9, 定理 4.1] 中得到解答：其中证明，有限呈示逆幺半群的单位群恰好是有限生成递归呈示群。由于特殊逆幺半群 $M$ 的右单位 $U$ 的单位群，等于其右单位子幺半群 $R$ 的单位群，因此由 [9, 定理 4.1] 可知，RU-幺半群的单位群恰好是有限生成递归呈示群。由此，该结果回答了 RU-幺半群的第（3）个问题。在最后一个主要结果（定理 5.6）中，我们通过证明所有前缀幺半群的 Sch¨utzenberger 群构成的类，恰好是有限呈示群的递归可枚举子群类，回答了 RU-幺半群的第（4）个问题。因此，尽管前缀幺半群与 RU-幺半群通常是截然不同的幺半群类，但在单位群和 Sch¨utzenberger 群层面上，它们可能呈现的行为是一致的。

除引言外，本文还分为四节：第一节为预备部分，汇集所需的概念与预备知识；接下来的两节分别讨论前缀幺半群及其相关群的刻画；最后一节讨论 RU-幺半群。

## 2. Preliminaries

**2.1.** 呈示、前缀幺半群、RU-幺半群。在研究幺半群、逆幺半群和群及其呈示时，我们将关注表示其生成集（有限或无限）的字母表，例如幺半群情形中的 $A$，以及逆幺半群和群情形中的“加倍字母表” $\overline{A} = A \cup A^{-1}$。为了表示这些结构中的元素，我们使用这些字母表上的字。自由幺半群 $A^*$ 由 $A$上的所有字（字母的有限序列）组成。以 $A$ 为基础的自由群 $FG(A)$定义在 $\overline{A}^*$ 的一个子集上，其元素称为约化字：这类字不含任何形如 $aa^{-1}$ 和 $a^{-1}a$的子字，其中 $a \in A$。每个字 $w \in \overline{A}^*$ 都有其约化形式 $\mathsf{red}(w)$，它通过不断删除上述形式的子字得到；字的约化形式是唯一的，因为可以证明这一过程具有合流性。因此，在 $FG(A)$中，$u \cdot v = \mathsf{red}(uv)$。对于任意字母 $a \in A$，我们定义 $(a^{-1})^{-1} = a$，继而对任意字 $a_1 \dots a_k \in \overline{A}^*$，定义 $(a_1 \dots a_k)^{-1} = a_k^{-1} \dots a_1^{-1}$。采用这一记号，若 $w$ 是约化字，则 $w^{-1}$ 是自由群中表示 $w$的逆元的唯一约化字。最后，自由逆幺半群 $FIM(A)$ 是自由幺半群 $\overline{A}^*$ 关于所谓 Wagner 同余的商，该同余由所有 $u$、$v \in \overline{A}^*$对应的数对 $(uu^{-1}u, u)$ 和 $(uu^{-1}vv^{-1}, vv^{-1}uu^{-1})$ 生成。Munn [27]（另见 Scheiblich [31]）给出了 $FIM(A)$ 一种优美的几何描述：其元素表示为 $FG(A)$ 的凯莱图中的有限连通双根子图，这也解释了这类图为何称为 Munn 树。

组合代数通过用呈示表示代数结构来研究它们：将其表示为相应自由结构关于某些同余的商，而这些同余由写成“定义关系”（或关系词）的生成对给出。因此，对于幺半群，我们写作 $M = \mathrm{Mon}\langle A \mid u_i = v_i (i \in I)\rangle$，若 $M \cong A^*/\theta$，其中 $\theta$ 是自由幺半群 $A^*$ 上的同余，由字对集合 $\{(u_i, v_i) : i \in I\}$生成。类似地，$T = \mathrm{Inv}\langle A \mid u_i = v_i (i \in I)\rangle$ 定义为自由逆幺半群 $FIM(A)$ 关于 $FIM(A)$ 上同余的商，该同余由字对集合 $\{(u_i, v_i) : i \in I\}$生成。最后，对于群 $G$，若 $G \cong FG(A)/N$，其中 $N$是 $FG(A)$ 的正规子群，并由字 $w_i$, $i \in I$ （作为正规子群）生成，我们就写作 $G = \mathrm{Gp}\langle A \mid w_i = 1 (i \in I)\rangle$（严格来说，应由字 $\mathrm{red}(w_i)$ 生成，因为某些 $w_i$ 可能不是约化字）。有限呈示幺半群、逆幺半群或群，指的是存在一个生成元有限且定义关系有限的呈示的幺半群、逆幺半群或群。容易证明，一个群作为群是有限呈示的，当且仅当它作为幺半群是有限呈示的，当且仅当它作为逆幺半群是有限呈示的。有趣的是，幺半群与逆幺半群之间并非如此，因为即使自由逆幺半群作为幺半群也不是有限呈示的；见 [32]。

一般而言，对于结构 $S$（无论是幺半群、逆幺半群还是群）中由字 $w$ （取自合适的字母表）表示的元素，该结构由呈示 $\langle A \mid \Re\rangle$ 给出，我们记作 $[w]_S$。

关于组合群论（例如自由积和 HNN 扩张）的更多背景知识，请参阅 [19]。

定义 2.1。设 $G$ 是一个有限呈示群。若存在 $G$的一个有限呈示，

$$G = \mathrm{Gp}\langle A \mid w_i = 1 \ (i \in I)\rangle,$$

使得 $M$ 同构于 $G$ 中由所有满足以下条件的元素 $[p]_G$生成的子幺半群：字 $p$ 是某个 $w_i$ 的前缀，其中 $i \in I$。若 $M$ 是某个有限呈示群中的前缀幺半群，我们就简称其为前缀幺半群。请注意，一个群可能有多个前缀幺半群，因为此定义取决于呈示，而不只是它所定义的群；改变给定群的呈示后，可能会得到不同的前缀幺半群（见例 2.3）。对于固定的群表示，我们称其为该群相对于该表示的前缀幺半群。

注 2.2。需要注意的是，由于我们经常要考虑由相同生成元和关系词给出的群表示与逆幺半群表示，因此这里不假设群表示中出现的关系字是循环约化的，甚至不假设它们是约化的。此外，在考虑那些最终定义出群的逆幺半群表示时，我们不一定假设表示中包含关系 $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ for $a \in A$；由某个字母表示的元素可逆这一事实，可能会以完全不同的方式证明，例如通过推导出某些字 $u$、$v \in \overline{A}^*$ 满足形式为 $au = va = 1$ 的关系。

例 2.3。以下例子取自 [15, 第 90], 页，说明前缀幺半群可能取决于群的呈示方式。该群表示的前缀幺半群

$$G = \mathrm{Gp}\langle a, b \mid aba = 1\rangle$$

由 $\{a, ab\} = \{a, a^{-1}\}$ 生成；由于在该群中有 $b = a^{-2}$，它就是整个群 $G$。另一方面，该呈示的前缀幺半群

$$G = \mathrm{Gp}\langle a, b \,|\, aab = 1\rangle$$

由 $\{a, a^2\}$ 生成，因此等于由 $\{a\}$ 生成的 $G$ 的子幺半群。由于 $b = a^{-2}$，这个生成元是冗余的，将其消去后可见 $G$ 同构于由 $\{a\}$ 生成的无限循环群。因此，在后一种情况下，前缀幺半群同构于无限单生成幺半群 $\{a^i : i \geq 0\}$。因此，$G$ 的这两个不同呈示产生了两个不同的前缀幺半群。

显然，所有前缀幺半群都是有限生成且可嵌入群的。因此，自然会提出以下一般性问题。

问题 2.4. 哪些有限生成的可嵌入群的幺半群可以作为前缀幺半群出现?

定义 2.5. 设 $M$ 是一个有限呈特殊逆幺半群，

$$M = \mathrm{Inv}\langle A \,|\, w_i = 1 \ (i \in I)\rangle.$$

我们将 $M$ 的右单位子幺半群 $R = \{m \in M : mm^{-1} = 1\}$ 称为 $M$ 的 RU-幺半群。如果幺半群 $T$ 同构于某个有限呈特殊逆幺半群的 RU-幺半群，则称 $T$ 为 RU-幺半群。

由 [15, 命题 4.2] 的证明中的论证可知，$M = \mathrm{Inv}\langle A \,|\, w_i = 1 (i \in I)\rangle$ 的 RU- 幺半群由所有可表示为定义关系词 $w_i, i \in I$ 的前缀 $p$ 的元素 $[p]_M$ 所生成。当然，特殊逆幺半群 $M$ 的 RU- 幺半群并不取决于 $M$ 的呈示选择，但不同的特殊呈示选择可能会为由定义关系词的前缀给出的幺半群产生不同的有限生成集。由于 RU- 幺半群按定义是有限呈示的特殊逆幺半群的 RU- 幺半群，因此定义关系词的前缀集合是有限的，故所有 RU-幺半群都是有限生成的，而且很容易看出它们必然是右消去的。事实上，若 $a, b, c$ 是任意幺半群的右单位，那么选取满足 $cx = 1$ 的元素 $x$，我们就会发现，若 $ac = bc$，则 $a = acx = bcx = b$。因此，我们立刻得到一个与前面问题类似的问题。

问题 2.6. 哪些有限生成的右消去幺半群是 RU-幺半群?

2.2. 格林关系与 Sch¨utzenberger 群。研究半群结构最基本的工具，是称为格林关系的五种等价关系。其中前三种关系 $\mathscr{R}$、$\mathscr{L}$、$\mathscr{J}$ 根据半群元素所生成的右、左或双边主理想对元素进行分类。由于本文只讨论幺半群，因此这里只给出幺半群的定义。所以，在幺半群 $S$ 中，我们有以下定义：

$$a \,\mathscr{R}\, b \Leftrightarrow aS = bS, \quad a \,\mathscr{L}\, b \Leftrightarrow Sa = Sb, \quad a \,\mathscr{J}\, b \Leftrightarrow SaS = SbS.$$

此外，$\mathscr{H} = \mathscr{R} \cap \mathscr{L}$和 $\mathscr{D} = \mathscr{R} \vee \mathscr{L}$，这恰好就是 $\mathscr{R} \circ \mathscr{L}$，因为可以证明 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{L}$ 可交换。若对某个 $x \in S$，$a \in S$ 满足 $a = axa$，则称其为正则的。就正则性而言，$\mathscr{D}$-类具有排他性：一个 $\mathscr{D}$-类中的元素要么全都正则，要么一个也不正则。在前一种情况下，每个 $\mathscr{R}$-类和每个$\mathscr{L}$-类都至少包含一个幂等元。包含幂等元的 $\mathscr{H}$-类是幺半群的极大子群；反过来，每个极大子群都以这种方式

产生。在给定的 $\mathscr{D}$-类中，群 $\mathscr{H}$-类彼此同构；因此，可以自然地为每个正则 $\mathscr{D}$-类关联一个群。另外请注意，根据 $\mathscr{R}$ 的定义，在任意幺半群 $M$中，元素 $m$ 属于 $M$ 中 1 的$\mathscr{R}$-类，当且仅当 $m$ 是右可逆的。特别地，特殊逆幺半群的 RU-幺半群等于该幺半群中 1 的 $\mathscr{R}$-类。

尽管非正则 $\mathscr{D}$-类不含幂等元，因此也不含任何子群，但它们具有一种由 Sch ¨utzenberger 群这一概念所蕴含的“隐含”群结构。具体而言，设 $H$ 是幺半群 $S$ 中一个 $\mathscr{D}$- 类 $D$ 内的 $\mathscr{H}$- 类。首先定义 $H$ 的右稳定子，

$$\mathrm{Stab}(H) = \{s \in S : Hs \subseteq H\}.$$

那么，如果 $s$ ∈属于 Stab($H$)，可以证明，与元素 $s$对应的右平移 $\rho_s : a \mapsto as$ ($a \in S$) 限制在集合 $H$ 上时是一个置换。不难看出，Stab($H$) 是 $S$ 的子幺半群；在 Stab($H$) 上定义等价关系 $\sigma$，使得 $(s,t) \in \sigma$ 当且仅当 $\rho_s|_H = \rho_t|_H$，则 $\sigma$ 是一个同余，且商 Stab($H$)/$\sigma$ 是一个群。这就是 $H$的右 Sch ¨utzenberger 群 Γ($H$)。类似地，我们可以定义一个 $\mathscr{H}$-类的左 Sch ¨utzenberger 群，但可以证明它总是与右 Schützenberger 群同构。这个群有$|H|$ 个元素，同一 $\mathscr{D}$-类中各个 $\mathscr{H}$-类的 Sch ¨utzenberger 群彼此同构。不出所料，来自正则 $\mathscr{D}$-类的 $\mathscr{H}$-类$H$ 的 Sch ¨utzenberger 群，恰好与该类中包含的极大子群同构；特别地，如果 $\mathscr{H}$-类 $H$ 是一个群，那么 Γ($H$)≅ $H$。

关于半群理论的更多背景知识，请参阅 [6, 14], ；关于逆半群的具体背景知识，请参阅 [18, 30]。

2.3. 递归可枚举性与希格曼嵌入定理。若自然数集 $A \subseteq \mathbb{N}$ 是某个一元（原始）递归函数的像，即对于某个原始递归函数 $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，有 $A = \{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}\}$，则称其为递归可枚举的（简称 r.e.）。借助有限字母表上所有字的某些标准枚举，递归可枚举的概念也可以推广到语言（进而推广到词元组的集合）。图灵的主要成果之一 [33, 24] 表明，递归可枚举语言恰好就是图灵机的语言：语言 $L \subseteq \Sigma^*$ 是递归可枚举的，当且仅当存在一台图灵机 $\mathcal{M}$，使得 $L(\mathcal{M}) = L$；这意味着，对于任意输入字 $w \in L$， $\mathcal{M}$ 都会停机并接受；而如果 $w \notin L$，那么 $\mathcal{M}$ 要么停机并拒绝该字，要么永远运行下去。实际上，这正是我们在全文中采用的语言为递归可枚举的判据，现代理论计算机科学中也普遍如此 [13]。

现在，我们称有限生成群 $G$ 是递归呈示的，当且仅当

$$G = \mathrm{Gp}\langle A \,|\, w_i = 1 \ (i \in I)\rangle$$

其中 $A$ 是有限集，且 $\{w_i : i \in I\}$ 是 $\overline{A} = A \cup A^{-1}$ 上的递归可枚举语言。同样，若幺半群 $M$ 满足

$$M = \mathrm{Mon}\langle A \,|\, u_i = v_i \ (i \in I)\rangle$$

对于有限集 $A$ 和递归可枚举子集 $\{(u_i, v_i) : i \in I\}$，其中 $A^* \times A^*$,

定理 2.7（希格曼嵌入定理 [12]）。有限生成群可以嵌入有限呈示群，当且仅当它是递归呈示的。

事实上，半群/幺半群和逆半群/逆幺半群也有与前述定理相对应的结果，分别由 Murskiˇı [28]和 Belyaev 得出

[3], 因此，一个有限生成的（逆）幺半群能够嵌入某个有限呈示的（逆）幺半群，当且仅当它是递归呈示的。

设 $G = \mathsf{Gp}\langle A \mid w_i = 1\,(i \in I)\rangle$ 是一个有限呈示群，并且 $L \subseteq \overline{A}^*$ 是一个递归可枚举语言，满足 $H = \{[w]_G : \ w \in L\}$ 是 $G$ 的子群。于是我们称 $H$ 是 $G$ 的递归可枚举子群。不难看出， $G$ 的任何有限生成子群都是递归可枚举的：若此类子群的生成元可由字 $u_1$、.....、$u_k \in \overline{A}^*$ 表示，那么语言（有理语言） $L = \{u_1, \ldots, u_k\}^*$ 足以说明这一点。因此，根据希格曼定理，任何有限生成的递归可呈示群都可实现为某个有限呈示群的递归可枚举子群。事实上，虽然这里不会用到这一点，但更一般地，由 [12, 定理 1] 的推论可知，任何不一定是有限生成的递归可呈示群，都同构于某个有限呈示群的递归可枚举子群。

## 3. A characterisation of prefix monoids

根据定义，前缀幺半群是有限呈示群的有限生成子幺半群。因此，我们首先要仔细考察这类幺半群。事实证明，以下结论成立。

命题 3.1. 一个有限生成幺半群可嵌入有限呈示群，当且仅当它可嵌入群且是递归呈示的。

为证明这一点，我们使用一个常被称为众所周知的结果的辅助结果（例如 [5, 26, 29] 中的说法）。该结果的证明可见 [4, 命题 0.9.1], ，而其中又用到了 [6, 构造 12.3]。

引理 3.2. 如果幺半群 $M = \mathsf{Mon}\langle A \mid \mathfrak{R}\rangle$ 可嵌入群，那么它可嵌入具有相同呈示的群 $G = \mathsf{Gp}\langle A \mid \mathfrak{R}\rangle$。

命题 3.1 的证明. ($\Rightarrow$) 假设 $M$ 可嵌入有限呈示群$G$。那么 $G$ 作为幺半群也有有限呈示。现在由 Murskiĭ 的希格曼嵌入定理的半群/幺半群版本 [28]，结论即可得出。

($\Leftarrow$) 假设 $M = \mathsf{Mon}\langle A \mid u_i = v_i\,(i \in I)\rangle$ 是可嵌入群的，且 $\{(u_i, v_i) : i \in I\}$ 是 $A^* \times A^*$的递归可枚举子集。根据前一个引理， $M$可嵌入到具有相同呈示的群$G$中，这与 $\mathsf{Gp}\langle A \mid u_i v_i^{-1} = 1\,(i \in I)\rangle$ 相同，其中$\{u_i v_i^{-1} : \ i \in I\}$ 现在是 $\overline{A}$上的递归可枚举语言。于是，根据希格曼嵌入定理， $G$ 又可嵌入到一个有限呈示群中，因此$M$也可以。□

推论 3.3. 任意前缀幺半群都是可嵌入群的递归呈示幺半群。

前一个推论立即引出一个问题：哪些可嵌入群的递归呈示幺半群可以成为前缀幺半群？或许全部都可以？我们通过迅速考察一个特殊情形来否定这一点：前缀幺半群（某个有限呈示群的前缀幺半群）本身是一个群。

引理 3.4. 如果一个群是前缀幺半群，那么它就是有限呈示的。

证明。假设 $G = \mathsf{Gp}\langle A \mid w_i = 1\,(i \in I)\rangle$ 是一个有限呈示群，其前缀幺半群 $P$ 也是一个群。设 $a \in \overline{A}$ 是某个 $w_i$ 中出现的任意字母，因此 $w_i = w' a w''$。那么 $[w']_G$ 和 $[w'a]_G$ 都是 $G$ 中 $w_i$ 的前缀的取值，因此

它们属于 $P$ 的生成集。然而，假设 $P$ 是一个群，这意味着 $[w']_G^{-1} \in P$，因此

$$[a]_G = [w']_G^{-1}[w'a]_G \in P,$$

以及 $[a]_G^{-1} \in P$。由此我们得出， $P$与由子集 $B \subseteq A$ 生成的 $G$ 的子群相同，其中 $A$ 中出现在关系词 $w_i$, $i \in I$里的所有字母都属于该子集。但由于 $G = \mathsf{Gp}\langle B \mid w_i = 1\,(i \in I)\rangle * FG(A \setminus B)$，因此不难看出$P = \mathsf{Gp}\langle B \mid w_i = 1\,(i \in I)\rangle$，所以 $P$是有限呈示的。□

事实上，逆命题也成立，不过我们将其作为下述关于可嵌入群的幺半群的更一般结果的一部分来证明。

命题 3.5. 每个可嵌入群的有限呈示幺半群都可表示为一个前缀幺半群。

证明。设 $M = \mathsf{Mon}\langle A \mid u_i = v_i\,(i \in I)\rangle$ 是一个可嵌入群的有限呈示幺半群。根据引理 3.2， $M$通过由 $A$ 上的恒等映射诱导的同态嵌入群 $G = \mathsf{Gp}\langle A \mid u_i = v_i\,(i \in I)\rangle$。然而，下述也构成了 $G$的一个呈示：

$$\mathrm{Gp}\langle A \mid u_i v_i^{-1} = 1\ (i \in I),\ aa^{-1} = 1\ (a \in A)\rangle.$$

现在，基于这一呈示计算前缀幺半群 $P$ 的生成集 $G$，会得到字 $u_i$ 的前缀，即形如 $u_i p$ 的字，其中 $p$ 是 $v_i^{-1}$ 的前缀，以及各个字母 $a \in A$。不过，在第一种情况下，注意若 $v_i^{-1} = pq$，那么 $v_i = q^{-1}p^{-1}$ 且 $[u_i p]_G = [q^{-1}]_G$，因此确实， $P$ 由 $G$ 中对应于字 $u_i$ 的前缀、$v_i$（$i \in I$）以及字母 $a \in A$ 所生成。由于 $u_i$ 和 $v_i$ 都是正词（不含字母的逆元），我们得出， $P$ 是由 $\{[a]_G$ 生成的 $G$ 的子幺半群：$a \in A\}$，它与 $M$ 同构。□

命题 3.5 表明，所有可嵌入群的有限呈示幺半群都可作为前缀幺半群出现。相比之下，引理 3.4 表明，并非所有可嵌入群的递归呈示幺半群都能作为前缀幺半群出现（例如，非有限递归呈示群）。不过，我们现在将看到，将这样的幺半群与一个秩足够大的自由幺半群作自由积，便可得到一个前缀幺半群。这引出了下述结果对前缀幺半群的完整刻画。

令 $\Sigma_k^*$ 表示秩为 $k$ 的自由幺半群。

定理 3.6. 对于每个可嵌入群的递归呈示幺半群 $M$，存在一个自然数 $\mu_M$，使得 $M * \Sigma_k^*$ 是前缀幺半群，当且仅当 $k \geq \mu_M$。此外，在同构意义下，所有前缀幺半群构成的类等于

$$\{M * \Sigma_k^* \colon M \text{ 是可嵌入群的递归呈示幺半群，且 } k \geq \mu_M\}.$$

证明。首先注意，若 $G$ 是一个包含有限生成幺半群 $M$ 的有限呈示群，则存在一个有限呈示

$$\mathrm{Gp}\langle A \mid w_i = 1\ (i \in I)\rangle$$

使得 $M$ 同构于由某个子集 $B \subseteq A$ 生成的自身子幺半群的 $G$。因此，实际上，我们可以将 $M = \mathsf{Mon}\langle [b]_G$ 识别为： $b \in B\rangle$。我们首先证明，存在某个有限集 $C$ 以及 $G * FG_2$ 的一个呈示，其中 $G * FG_2$ 是自由积

$G$ 与一个秩为 2 的自由群，使得 $M*C^*$ 同构于所讨论的 $G*FG_2$ 的呈示的前缀幺半群。

我们要据以描述前缀幺半群的 $K=G*FG_2$ 呈示如下：

$$\mathrm{Gp}\langle A,s,t \mid sw_is^{-1}=1\ (i\in I),\ tbt^{-1}tb^{-1}t^{-1}=1\ (b\in B)\rangle.$$

所需的前缀幺半群 $P$ 由 $G$ 中由字 $sp$ 表示的元素生成，其中 $p$ 是某个 $i\in I$ 的 $w_i$ 的（可能为空的）前缀；此外还由 $t$、$tb$、$tbt^{-1}$（$b\in B$）生成。令 $P_1$ 表示由 $\{[t]_K,[tb]_K,[tbt^{-1}]_K$ 在 $P$ 中生成的子幺半群：$b\in B\}$；令 $P_2$ 表示由 $\{[sp]_K$ 生成的子幺半群：$p\in \mathrm{pref}(w_i)\ \ i\in I\}$。我们断言：

(1) $P_1\cong M*\{[t]_K\}^*$；(2) $P_2$ 是有限秩自由幺半群；(3) $P\cong P_1*P_2$。

对于 (1)，首先注意到，$P_1$ 中第二类生成元是多余的，因为对所有 $b\in B$，都有 $[tb]_K=[tbt^{-1}]_K[t]_K$。因此，$P_1$ 是由 $[t]_K$ 和 $\{[tbt^{-1}]_K$ 在 $K$ 中生成的子幺半群：$b\in B\}$。现在，$P_1$ 同构于 $[t]_K^{-1}P_1[t]_K$，后者是由 $\{[b]_G$ 在 $K$ 中生成的子幺半群：$b\in B\}$ 和 $[t]_K$；根据自由积的正规形定理 [19, 定理 IV.1.2] 应用于群 $K$，这个幺半群同构于 $M*\{[t]_K\}^*$。此处注意，$P_1$ 的所有元素都具有 $[tm_1\dots tm_kt^{-1}]_K$ 的形式，其中某个 $k\geq 1$ 和 $m_1$，……，$m_k\in B^*$。

为证明 (2)，我们断言 $P_2$ 是以 $\{[sp]_K$ 为基的自由幺半群：$p\in\mathrm{pref}(w_i)\ \ i\in I\}$。事实上，如果

$$[sp_1]_K\dots[sp_m]_K=[sp_1\dots sp_m]_K=[sq_1\dots sq_r]_K=[sq_1]_K\dots[sq_r]_K$$

在 $P_2$ 中成立（因而也在 $K$中成立），那么再次由自由积的正规形定理可知，对于所有 $1\leq k\leq m$，必有 $m=r$ 和 $[p_k]_G=[q_k]_G$，因此 $[sp_k]_K=[sq_k]_K$ 对于$1\leq k\leq m$成立，于是 $P_2$ 的生成元之间不存在非平凡的等式。

最后，对于 (3)，首先注意到 $P_1\cup P_2$ 生成 $P$。此外，根据前两段已经得到的观察，我们知道，$P_1$中所有元素相对于 $K$的约化形式，要么属于 $[t^{u_1}m_1\dots t^{u_k}m_k]_K$这一类型，要么属于 $[t^{u_1}m_1\dots t^{u_k}m_kt^{-1}]_K$这一类型，其中某个 $u_j\geq 1$以及字 $m_1$、……、$m_k\in B^*$满足：对于所有 $1\leq j\leq k$，$[m_j]_G\neq 1$。类似地，$P_2$ 中所有元素的约化形式都属于 $[s^{v_1}p_1\dots s^{v_l}p_l]_K$这一类型，其中某个 $v_j\geq 1$以及字 $p_1$、……、$p_l\in\overline{A}^*$（具体而言，这些字都是关系词 $w_i$、$i\in I$的非空前缀）满足：对于所有 $1\leq j\leq l$，$[p_j]_G\neq 1$。因此，若我们有一个等式

$$[\alpha_1\beta_1\dots\alpha_m\beta_m]_K=[\gamma_1\delta_1\dots\gamma_n\delta_n]_K$$

其中，$[\alpha_q]_K$、$[\gamma_r]_K\in P_1$、$[\beta_q]_K$、$[\delta_r]_K\in P_2$（$1\leq q\leq m$、$1\leq r\leq n$）均非平凡，但 $[\alpha_1]_K$、$[\beta_m]_K$、$[\gamma_1]_K$、$[\delta_n]_K$中可能有些例外；而字$\alpha_q$、$\beta_q$、$\gamma_q$和 $\delta_q$ 均属于上述针对 $P_1$ 和 $P_2$ 所描述的约化形式。

由于每个字 $\alpha_q,\gamma_r$ 都以 $t$ 开头，并以 $B$ 中的一个字母或 $t^{-1}$ 结尾，而每个字 $\beta_q,\delta_r$ 都以 $s$ 开头，并以 $A$ 中的一个字母结尾，因此，关于自由积 $K$ 而言，字 $\alpha_1\beta_1\dots\alpha_m\beta_m$ 和 $\gamma_1\delta_1\dots\gamma_n\delta_n$ 都已经是约化形式。这便得到 $K$ 中如下类型的约化形式等式：

$$[x_1y_1\dots x_\sigma y_\sigma]_K=[x'_1y'_1\dots x'_\tau y'_\tau]_K,$$

其中 $\alpha_1\beta_1\dots\alpha_m\beta_m = x_1y_1\dots x_\sigma y_\sigma$ 和 $\gamma_1\delta_1\dots\gamma_n\delta_n = x'_1y'_1\dots x'_\tau y'_\tau$，且每个 $x_j, x'_j$ 都是 $t$ 的幂、 $s$ 的幂，或某个 $v \geq 1$ 对应的 $t^{-1}s^v$ 形式；每个 $y_j, y'_j$ 都是关于 $\overline{A}$ 的一个字，表示群 $G$ 的非平凡元素（对于紧接在 $t$ 的幂之后出现的字，它们实际上是来自 $B^*$ 的字）。再次运用自由积的正规形定理，我们得出 $\sigma = \tau$，并且对于所有 $1 \leq j \leq \sigma$， $x_j = x'_j$ 和 $[y_j]_G = [y'_j]_G$。但结合字等式 $\alpha_1\beta_1\dots\alpha_m\beta_m = x_1y_1\dots x_\sigma y_\sigma$ 和 $\gamma_1\delta_1\dots\gamma_n\delta_n = x'_1y'_1\dots x'_\tau y'_\tau$，可知 $m = n$, $[\alpha_q]_K = [\gamma_q]_K$，且对于所有 $1 \leq q \leq m$, $[\beta_q]_K = [\delta_q]_K$。这足以证明 $P$ 是 $P_1$ 与 $P_2$ 的自由积。

在证明的其余部分，假设对于某个 $k$, $M*\Sigma_k^*$ 是有限呈示群 $L = \mathrm{Gp}\langle X \mid \mathfrak{R}\rangle$ 中的一个前缀幺半群。设 $y$ 是一个不属于 $X$ 的符号，并考虑群

$$L' = \mathrm{Gp}\langle X, y \mid \mathfrak{R},\ yy^{-1} = 1\rangle.$$

我们有 $L' \cong L * FG(y)$。那么，给定呈示 $L'$ 的前缀幺半群由所考虑的呈示 $L$ 的前缀幺半群以及由字母 $y$ 表示的元素生成。因此， $L'$ 的前缀幺半群与 $M*\Sigma_k^**\{y\}^* \cong M*\Sigma_{k+1}^*$ 同构。于是，若 $\mu_M$ 是使 $M*\Sigma_k^*$ 成为（某个有限呈示群的）前缀幺半群的 $k$ 的最小值，则对于所有更大的 $k$ 值， $M * \Sigma_k^*$ 都是前缀幺半群。由此可知，定理第一句中的断言成立。

反之，给定任意一个作为前缀幺半群出现的可嵌入群的递归呈示幺半群 $M$，我们有 $\mu_M = 0$，因此 $M \cong M * \Sigma_0^*$ 属于定理陈述中的类。□

注 3.7。在前一个结果的证明第一部分中出现的有限集 $C$ 的大小，上界为 1 加上定义有限呈示群 $G$ 所需的关系词长度之和，从而 $M$ 的生成集包含于 $G$ 的生成集中。更确切地说， $|C| - 1$ 实际上是群 $G$ 中由关系词的所有前缀表示的不同元素的数量。

## 4. Groups of units and Schützenberger groups of prefix monoids

鉴于本节的目标，即分别刻画前缀幺半群中作为单位群和 Sch¨utzenberger 群出现的群类，我们首先记录关于可嵌入群的幺半群的若干基本事实。实际上，其中一些辅助结果的适用范围还扩展到更广的（右、左）消去幺半群类。

命题 4.1. 设 $M$ 是一个具有 $x$ 和 $y \in M$ 的幺半群，并设 $U$ 为其单位群。

(1) 若 $M$ 是右消去的，则 $x \mathscr{L} y$ 当且仅当存在某个 $u \in U$ 使得 $y = ux$。因此， $L_x = Ux$。(2) 若 $M$ 是左消去的，则 $x \mathscr{R} y$ 当且仅当存在某个 $u \in U$ 使得 $y = xu$。因此， $R_x = xU$。(3) 若 $M$ 是消去的，则 $H_x = Ux \cap xU$ 且 $D_x = UxU$。(4) 若 $M$ 是群 $G$ 的子幺半群，则 $H_x$ 的 Sch ¨ utzenberger 群与 $U \cap x^{-1}Ux$ 同构。

证明。(1) $x \mathscr{L} y$ 当且仅当存在某些 $u, v \in M$，使得 $y = ux$ 且 $x = vy$。但此时 $x = vux$，由 $M$ 的右消去性可知 $vu = 1$。类似地，

$y = uvy$推出 $uv = 1$，因此 $u, v$必定是 $M$的单位元。(2) 与 (1) 对偶，而 (3) 由 (1) 和 (2) 得出。

现在假设 $M$ 是群 $G$ 的子幺半群；我们来计算 $H_x$ 的右 Sch¨u-tzenberger 群。事实上， $m \in M$ 从右稳定 $H_x$ 当且仅当 $H_x m \subseteq H_x$。特别地， $xm \mathscr{R} x$，由 (2) 可推出 $m \in U$。此外，必有 $xm \mathscr{L} x$，因此对某个 $u \in U$，有 $xm = ux$。这在 $G$ 中推出 $m = x^{-1}ux \in x^{-1}Ux$。反过来，假设 $m \in U \cap x^{-1}Ux$ 可推出 $xm \in xU \cap xx^{-1}Ux = xU \cap Ux = H_x$。由于 $xm \in H_x$，根据 Green 引理 [14] 可得 $H_x m = H_x$。因此，Stab($H_x$) $= U \cap x^{-1}Ux$。然而， $H_x$ 的（右）Sch¨utzenberger 群此时必与其右稳定子一致，因为 $M$ 的左消去性意味着其每个元素都必须在 $H_x$ 上诱导不同的置换。□

命题4.2. 设 $M$ 是右（或左）消去幺半群， $U$ 是其单位群。

(1) $M \setminus U$ 是 $M$的一个理想。因此，如果 $M$ 是有限生成的（分别为递归呈示的），那么 $U$也是。(2) $M$ 的每个 Sch ¨utzenberger 群都嵌入 $U$。(3) 如果 $M$ 是递归呈示的，那么 $M$ 的每个 Sch ¨utzenberger 群都是某个有限呈示群的递归可枚举子群。

证明. 我们只考虑 $M$ 是右消去的情形；左消去的情形是对偶的。

(1) 假设 $x$、 $y \in M$满足 $xy \in U$。那么，对某个$z \in M$，有 $xyz = zxy = 1$。因此， $yzxy = y$；由右消去性可知 $yzx = 1$。于是， $zx$ 是 $y$的一个逆元，而 $yz$ 是 $x$的一个逆元，因此 $x$、 $y \in U$。所以，若 $a$、 $b \in M$中任一个不属于 $U$，则可得 $ab \in M \setminus U$，这表明 $M \setminus U$是$M$的一个理想。

现在，若 $X \subseteq M$ 是 $M$ 的任意生成集，则可知 $X \cap U$ 必定是 $U$ 的一个（幺半群）生成集：事实上，上一段表明，若对于 $u \in U$，存在某个 $x_1$ 使得 $u = x_1 \dots x_n$，....., $x_n \in X$，那么实际上必有 $x_1$，....., $x_n \in X \cap U$。因此，若 $X$ 是有限的（这证明了 $M$ 是有限生成的），那么 $X \cap U$ 也是有限的，于是 $U$ 是一个有限生成群。

最后，假设 $M$ 是递归呈示的。正如刚才所示，这意味着群 $U$ 是有限生成的，并且它连同整个 $M$ 一起嵌入有限呈示幺半群 [28] 中。因此，作为幺半群， $U$ 是递归呈示的，记作 $U = \mathbf{Mon}\langle A \mid u_i = v_i (i \in I)\rangle$。由于 $U$ 是一个群，群表示 Gp $\langle A \mid u_i v_i^{-1} = 1 (i \in I)\rangle$ 也定义了 $U$。这里， $\{u_i v_i^{-1}\colon \ i \in I\}$ 是递归可枚举语言，这表明 $U$ 是一个递归可呈示群。

(2) 这里我们用到了这样一个事实（在预备部分中已经提到）： $\mathscr{H}$-类的（右）Sch¨utzenberger 群与该 $\mathscr{H}$-类的左 Sch¨utzenberger 群同构。由于 $M$ 是右消去的，若 $H$ 是 $M$ 的一个 $\mathscr{H}$-类，则条件 $uH = H$ （对某个 $u \in M$），根据命题 4.1 (1)，意味着 $u$ 是 $M$ 的一个单位。此外，若 $u' \neq u$ 也是 $M$ 的一个单位，那么对于任意 $h \in H$，由于右消去性质，我们有 $uh \neq u'h$。因此， $H$ 的左稳定子中的每个元素 $u$ 都会（通过左平移 $\lambda_u\colon h \mapsto uh, h \in H$）在 $H$ 上诱导一个不同的置换，这表明它与 $H$ 的左 Sch¨utzenberger 群相同，并嵌入到 $U$ 中。

(3) 设 $H$ 是 $M = \mathbf{Mon}\langle A \mid u_i = v_i (i \in I)\rangle$ 的一个 $\mathscr{H}$-类。根据 (2)，Sch¨ utzenberger 群 $K$ 嵌入 $U$ 中。根据 (1)，单位群 $U$ 是递归呈示的，记为 $U = \mathbf{Gp}\langle A \cap U \mid \mathfrak{R}\rangle$，因此它嵌入某个有限呈示群中。

结合这两个事实，我们得到 $K$ 是某个有限呈示群 $G = \mathrm{Gp}\langle B \mid \mathfrak{R}' \rangle$ 的子群；在这个意义上，我们旨在证明 $K$ 是某个有限呈示群的递归可枚举子群。

假设对于某个 $x \in M$，有 $H = H_x$，并令 $w \in A^*$ 为任意满足 $[w]_M = x$ 的字。此外，由于 $U$ 嵌入了 $G$，存在一个映射，将每个字母 $a \in A \cap U$ 映射到一个字 $w_a \in \overline{B}^*$，从而得到上一段中的嵌入 $U \to G$，使得对于所有 $a_1$，……，$a_m \in A \cap U$，$[a_1 \dots a_m]_U$ 都映射为 $[w_{a_1} \dots w_{a_m}]_G$。现在注意，对于 $u \in A^*$，$[u]_M \in K$ 当且仅当 $[u]_M$ 是 $M$ 的单位，并且存在字 $p$、$q \in A^*$，使得 $[uw]_M = [wp]_M$ 且 $[wpq]_M = [w]_M$。后两个等式保证了 $[u]_M x \mathscr{R} x$，因此 $[u]_M x \mathscr{H} x$（由命题 4.1 (1)，我们已假定 $[u]_M x \mathscr{L} x$），而根据 Green 引理（例如参见 [14, 引理 2.2.1 及其对偶引理 2.2.2]），条件 $[u]_M x \in H_x = H$ 等价于 $[u]_M H = H$。

因此，只要构造一个图灵机 $\mathcal{M}$，使其在输入 $u \in A^*$ 时停机，当且仅当字 $u$ 具有上一段所述的性质，便可证明 (3)；因为这样一来，语言

$$\{w_{a_1} \dots w_{a_m} : a_1 \dots a_m \in L(\mathcal{M})\} \subseteq \overline{B}^*,$$

其中的字表示在所考虑的嵌入 $U \to G$ 下 $K$ 的像中的元素，显然是递归可枚举的。更具体地说，$\mathcal{M}$ 应当“检测”满足下列等式的字 $u \in A^*$

$$[uv]_M = [vu]_M = 1, \quad [uw]_M = [wp]_M, \quad [wpq]_M = [w]_M$$

对某些 $v$、$p$、$q \in A^*$ 成立。

由于 $M$ 是递归可呈幺半群，其字问题，即集合 $\{(u, v) \in A^* \times A^* : [u]_M = [v]_M\}$，众所周知是递归可枚举的。（对于群，这已包含在 Higman [12]，的结果中；对于幺半群，则是 Murskiĭ [28] 的工作的推论。）因此，存在一台图灵机 $\mathcal{M}_M$，其语言就是 $M$ 的字问题。使用对 $\overline{A}$ 上所有字的三元组进行标准枚举中的一种，得到 $\overline{A}^* \times \overline{A}^* \times \overline{A}^* = \{(v_n, p_n, q_n) : n \in \mathbb{N}\}$。接着，使用机器 $\mathcal{M}_M$ 的可数无穷多个副本 $\mathcal{M}_n$、$n \in \mathbb{N}$，并分别将输入 $(uv_i, 1)$、$(v_i u, 1)$、$(uw, wp_i)$ 和 $(wp_i q_i, w)$ 输入机器 $\mathcal{M}_{4i}$、$\mathcal{M}_{4i+1}$、$\mathcal{M}_{4i+2}$、$\mathcal{M}_{4i+3}$、$i \in \mathbb{N}$，使得所得机器先执行机器 $\mathcal{M}_0$ 的第一步，再执行机器 $\mathcal{M}_1$ 的第一步和机器 $\mathcal{M}_0$ 的第二步，依此类推。这样的机器 $\mathcal{M}$ 将停机并给出肯定答复，当且仅当字 $u$ 在 $M$ 中表示 $K$ 的一个元素，即所需的 Schützenberger 群 $H$。□

定理 4.3. 一个群是某个前缀幺半群的单位群，当且仅当它是递归可呈示群。

证明. 根据前一命题的 (1)，显然任何前缀幺半群的单位群都是递归可呈示的。

反之，设 $G = \mathrm{Gp}\langle A \mid \mathfrak{R} \rangle$ 是一个递归可呈示群。那么 $G = \mathrm{Mon}\langle A \cup A' \mid \mathfrak{R}', aa' = a'a = 1 \, (a \in A) \rangle$ 是 $G$ 的一个幺半群呈示，其中 $A'$ 是 $A$ 的一个双射副本，与 $A$ 不相交；由 $\mathfrak{R}'$ 得到的关系，是将 $\mathfrak{R}$ 中的每个 $a^{-1}$ 替换为 $a'$, $a \in A$ 而得到的。这表明，作为幺半群，$G$ 是递归呈示的。根据定理 3.6，存在一个整数 $k \geq 0$，使得 $G * \Sigma_k^*$ 是一个前缀幺半群。还需指出，$G$ 是 $G * \Sigma_k^*$ 的单位群。□

研究各类可嵌入群的有限生成幺半群中的 Sch¨utzenberger 群，所需的主要技术工具如下。

定理 4.4. 设 $\mathcal{K}$ 是一类可嵌入群的递归呈示幺半群，使得对于任意可嵌入群的递归呈示幺半群 $M$ 以及任意嵌入 $\alpha : M \to \Gamma$ 到有限呈示群 $\Gamma$ 中，都存在 $N_M \in \mathcal{K}$、有限呈示群 $\Gamma_1$、幺半群嵌入 $\beta : M \to N_M$ 和 $\alpha' : N_M \to \Gamma_1$，以及群嵌入 $\beta' : \Gamma \to \Gamma_1$，使得下图可交换:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\beta} & N_M \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha'} \\ \Gamma & \xrightarrow[\beta']{} & \Gamma_1 \end{array}$$

并且，$\beta\restriction_{U_M}$ 在 $M$ 的单位群上的限制是 $U_M$ 与 $U_{N_M}$（$N_M$ 的单位群）之间的同构。

那么，对于任意作为有限呈示群的递归可枚举子群的群 $K$，存在一个幺半群 $S \in \mathcal{K}$，使得 $K$ 同构于 $S$ 的某个 $\mathscr{H}$- 类的 Sch ¨u-tzenberger 群。

证明。设 $H_1 = \mathsf{Gp}\langle A \,|\, \mathfrak{R}\rangle$ 是一个有限呈示群，使得 $K$ 嵌入到 $H_1$ 中，且该嵌入的像 $K_1 = \{[w]_{H_1} : \ w \in L\}$（其中 $L$ 是某个递归可枚举语言）是 $H_1$ 的递归可枚举子群。根据 [9, 引理 5.2]，存在一个有限呈示群，其中包含两个共轭子群，它们都同构于 $H_1$，且其交集同构于 $K_1 \cong K$。具体而言，令 $G_0$ 为 $H_1$ 关于稳定字母 $t$ 的 HNN 扩张，该稳定字母将 $K_1$ 的每个元素共轭到其自身。该群的一个呈示为 $\mathsf{Gp}\langle A, t \,|\, \mathfrak{R} \cup \mathfrak{R}_0\rangle$，其中 $\mathfrak{R}_0 = \{t^{-1}wtw^{-1} : \ w \in L\}$。这里 $\mathfrak{R}_0$ 显然是递归可枚举语言，因此 $G_0$ 是有限生成且递归呈示的。根据希格曼嵌入定理，它嵌入到某个有限呈示群 $G$ 中。在 $G$ 内，我们有 $H_2 = [t]_G^{-1} H_1 [t]_G \cong H_1$ 和 $H_1 \cap H_2 = K_1$。

现在令 $M$ 为由 $H_1$ 和 $[t]_G$生成的 $G$ 的子幺半群。这是 $G$（一个有限呈示群）的有限生成子幺半群，因此 $M$ 是一个可嵌入群的递归呈示幺半群。$M$ 的一个生成集为 $\{[a]_G, [a]_G^{-1} : \ a \in A\} \cup \{[t]_G\}$。我们暂且停下来分析 $M$的单位群。事实上，对于一个字$w \in (\overline{A} \cup \{t\})^*$，$[w]_G$在 $M$中可逆，当且仅当 $[w]_G, [w]_G^{-1} \in M$。令 $w$ 为这样一个字。那么我们可以写成

$$[w]_G = [h_0 t h_1 t \dots t h_\ell]_G$$

其中 $\ell \geq 0$ 为某个元素，$h_i \in \overline{A}^*$、$0 \leq i \leq \ell$为一些字，且满足 $[h_i]_G \in H_1$。注意，字 $h_0 t h_1 t \dots t h_\ell$关于 $G_0$ 的 HNN扩张结构已经是约化形式（见 [19, 第181]页）。因此，

$$[w]_G^{-1} = [h_\ell^{-1} t^{-1} \dots t^{-1} h_1^{-1} t^{-1} h_0^{-1}]_G.$$

右边的字也已经是约化形式。不过，条件 $[w]_G^{-1} \in M$ 以及 $M$ 的定义本身表明，必定存在字$h'_0$、$h'_1$、.....、$h'_p \in \overline{A}^*$，使得对于所有 $0 \leq j \leq p$，都有 $[h'_j]_G \in H_1$

$$[h_\ell^{-1} t^{-1} \dots t^{-1} h_1^{-1} t^{-1} h_0^{-1}]_G = [h'_0 t h'_1 t \dots t h'_p]_G.$$

现在这是 HNN扩张 $G_0$ 中两个约化形式的等式，根据 [7,引理 6.2]，除非 $\ell = p = 0$ 且 $[h_0']_G = [h_0]_G^{-1} \in H_1$，否则这是不可能的。另一方面，显然 $H_1$ 的任意元素都是 $M$中的单位，因此 $U_M = H_1$。

接下来，从 $M$ 及其到 $G$的包含映射开始。根据定理的条件，存在一个幺半群 $S = N_M \in \mathcal{K}$、一个有限呈示群 $G_1$ 以及嵌入 $\phi, \psi, \xi$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi} & S \\ {\scriptstyle\subseteq}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ G & \xrightarrow[\xi]{} & G_1 \end{array}$$

可交换，而 $\phi$ 的相应限制诱导了单位群 $U_M$ 与 $U_S$之间的同构。根据命题 4.1 (4)， $H_{[t]_G}$ 的 Sch¨utzenberger 群与 $U_M \cap [t]_G^{-1} U_M [t]_G = H_1 \cap H_2 \cong K$同构。将命题 4.1 (4)应用于 $S$中的 $H_{\mathbf{t}}$，其中 $\mathbf{t} = [t]_G\phi$，可得 $H_{\mathbf{t}}$ 的 Sch¨utzenberger 群与

$$U_S\psi \cap (\mathbf{t}^{-1} U_S \mathbf{t})\psi.$$

然而，由于 $U_S = U_M\phi$和 $\phi\psi = \xi\restriction_M$，后一个群恰为 $K_1\xi$，即 $K$的一个同构副本。□

定理 4.5. 前缀幺半群的 Sch ¨utzenberger 群恰好是有限呈示群的递归可枚举子群。

证明. (⇒) 根据推论 3.3，若 $M$ 是前缀幺半群，则它可嵌入群（因而是右消去的），且是递归呈示的。因此，根据命题4.2 (3)， $M$ 的每个 Sch¨utzenberger 群都是有限呈示群的递归可枚举子群。

(⇐) 在定理 4.4 中，将 $\mathcal{K}$ 设为前缀幺半群类。定理 3.6 证明的第一部分表明，对于任意可嵌入群的递归呈示幺半群 $M$ 以及任意将其嵌入 $M \to G$ 有限呈示群 $G$的嵌入，都存在一个有限集 $C$，使得 $M * C^*$ 同构于 $G * FG_2$中的某个前缀幺半群。由于 $M * C^*$的单位群与 $M$的单位群相同，自然嵌入$M \to M*C^*$、 $M*C^*$与定理 3.6 证明中所述的 $G_1 = G*FG_2$的某个前缀幺半群之间的同构，以及由下式定义的群嵌入 $G \to G_1$

$$g \mapsto [t]_{G_1} g [t]_{G_1}^{-1}$$

对于所有 $g \in G$，它们都为应用定理 4.4 提供了所需的全部参数。由此可得，有限呈示群的任意递归可枚举子群都可作为某个前缀幺半群的 Sch¨utzenberger 群出现。□

## 5. On RU-monoids

在前两节中，我们研究了前缀幺半群，给出了哪些幺半群可以成为前缀幺半群的刻画，并研究了它们的单位群和 Sch¨utzenberger 群。本节首先汇集一些关于有限呈特殊逆幺半群的右单位子幺半群的基本事实；如上所述，我们称这类子幺半群为 RU-幺半群。随后，我们将刻画作为 RU-幺半群的 Sch¨utzenberger 群出现的群。前缀幺半群都可嵌入群，而对于 RU-幺半群，我们则需要研究范围更广的右消去幺半群类。

引理 5.1. 每个 RU-幺半群都是右消去的递归可呈幺半群。

证明。首先，每个 RU-幺半群 $R$ 都是有限生成的，具体而言，它由有限呈特殊逆幺半群 $I = \mathrm{Inv}\langle A \mid \mathfrak{R}\rangle$ 的呈示中所有关系词的前缀所表示的元素生成；该逆幺半群的右单位幺半群同构于 $R$。然而，作为幺半群，$I \cong \overline{A}^*/\theta_{\mathfrak{R}}$，其中 $\theta_{\mathfrak{R}}$是包含 $\mathfrak{R}$ 和 Wagner 同余的自由幺半群 $\overline{A}^*$ 上的最小同余。由此可知，$I$ 作为幺半群是递归可呈的，因此它（连同 $R$）可嵌入某个有限呈示幺半群 $M$。因此，$R$ 是递归可呈幺半群。□

与前缀幺半群的情形类似，在前一个引理之后随即出现的首要问题是：所有右消去的递归可呈幺半群是否都能表示为 RU-幺半群。（我们很快会看到，通过呈示定义右消去幺半群有两种方法。）答案是否定的：具体而言，存在一个与引理 3.4 平行的结果。

引理 5.2. 若有限呈特殊逆幺半群 $M = \mathrm{Inv}\langle A \mid w_i = 1\,(i \in I)\rangle$ 的右单位幺半群 $R$ 是一个群，则它是有限呈示的。

证明. 首先，回顾一下，$R$ 是 $M$ 的子幺半群，由其所有形如 $[p]_M$ 的元素生成，其中 $p$ 是字 $w_i$, $i \in I$ 的一个前缀。令 $a \in \overline{A}$ 为出现在某个 $w_i$ 中的任意字母，于是 $w_i = w'aw''$。与引理 3.4 的证明类似，我们有 $[w']_M$ 和 $[w'a]_M$ 都是 $M$ 中 $w_i$ 的前缀的取值，因此它们属于 $R$。由于 $R$ 是一个群，$[w']_M^{-1} \in R$。因此，$[w']_M^{-1}$ 是 $M$ 的一个右单位，所以 $[w']_M^{-1}[w']_M = 1$。由此我们可以得出

$$[a]_M = [w']_M^{-1}[w'a]_M \in R,$$

因此，对于出现在某个 $w_i$ 中的任意字母 $a \in A$，$[a]_M$ 是 $M$ 的单位。若 $A' \subseteq A$ 表示所有这类字母组成的集合，则特殊逆幺半群 $\mathrm{Inv}\langle A' \mid w_i = 1\,(i \in I)\rangle$ 是一个群，并且与具有相同呈示的群 $G = \mathrm{Gp}\langle A' \mid w_i = 1\,(i \in I)\rangle$ 重合。现在，$M \cong G * FIM(A \setminus A')$，其中这个自由积是在逆幺半群范畴中取的，由此立即可得 $R \cong G$，所以 $R$ 是一个有限呈示群。□

这个引理的逆命题也成立，因为任意有限呈示群都可以作为特殊逆幺半群有限呈示（对所有生成元 $a$ 添加关系 $aa^{-1} = 1$ 和 $a^{-1}a = 1$），并且以这种方式看待时，它就是自身的右单位幺半群。

现在，在研究右消去幺半群时，另有一种呈示类型值得在此背景下加以考虑。具体而言，由于右消去幺半群构成一个拟簇（由蕴含式 $xz = yz \Rightarrow x = y$ 定义），因此对于任意幺半群 $M$ 及其任意一个同余族 $\{\rho_i : i \in I\}$，只要 $M/\rho_i$ 是右消去的，该族的交 $\rho$ 便仍是 $M$ 的一个同余，且 $M/\rho$ 是右消去的。基于此，与最大群像（例如逆幺半群的最大群像）类似，幺半群存在最大右消去像。特别地，若 $M = \mathrm{Mon}\langle A \mid \mathfrak{R}\rangle$，则这个最大右消去像记作 $\mathrm{MonRC}\langle A \mid \mathfrak{R}\rangle$，定义为 $A^*/\mathfrak{R}^{\mathrm{RC}}$，其中 $\mathfrak{R}^{\mathrm{RC}}$ 是 $A^*$ 的所有满足 $\sigma \supseteq \mathfrak{R}$ 且 $A^*/\sigma$ 为右消去的同余 $\sigma$ 的交。因此，一个幺半群

$M = \mathsf{Mon}\langle A \mid u_i = v_i (i \in I)\rangle$ 是右消去的（存在一些可推出这一性质的条件，参见例如 [1]），当且仅当 $\mathsf{Mon}\langle A \mid u_i = v_i (i \in I)\rangle = \mathsf{MonRC}\langle A \mid u_i = v_i (i \in I)\rangle$。

当 $A$、$\mathfrak{R}$ 均为有限集时，$M = \mathsf{MonRC}\langle A \mid \mathfrak{R}\rangle$ 称为有限 RC 呈示的。前述备注表明，若有限呈示幺半群 $\mathsf{Mon}\langle A \mid \mathfrak{R}\rangle$恰好是右消去的，则它也是有限 RC 呈示的；然而，反过来一般并不成立（参见 [5] 及其中提及的参考文献）。因此，有限 RC 呈示的（右消去）幺半群构成的类，严格大于有限呈示且右消去的幺半群所构成的类。下面的结果将前一类纳入我们的讨论范围。

定理 5.3. 每个有限 RC 呈示幺半群 $T = \mathsf{MonRC}\langle A \mid u_i = v_i (i \in I)\rangle$都是 RU-幺半群。

证明. 先定义一个有限呈特殊逆幺半群

$$M_T = \mathrm{Inv}\langle A \mid aa^{-1} = 1 \ (a \in A),\ u_i v_i^{-1} = 1 \ (i \in I)\rangle.$$

我们断言，其右单位幺半群与 $T$同构。注意，逆幺半群 $M_T$也可由 $\mathrm{Inv}\langle A \mid aa^{-1} = 1 (a \in A)\ \ u_i = v_i (i \in I)\rangle$表示：在假设所有字母 $a \in A$ 都表示右单位的条件下，等式 $u_i v_i^{-1} = 1$ 与 $u_i = v_i$ 等价；这是利用如下事实得到的：若一个字 $w \in \overline{A}^*$ 和一个逆幺半群 $K$ 满足 $[w]_K$ 是 $K$ 的右单位，则 $[w]_K = [\mathsf{red}(w)]_K$，例如参见 [8,推论 3.2]。

我们仿照 [15, 定理 2.2]中的论证。具体而言，$T$是一个右消去幺半群，因此适用 [6, 定理 1.22]：$T$ 同构于其逆包 $IH(T)$的右单位幺半群，其中$T$是由 $T$ 上的右平移 $\rho_t$, $t \in T$ 生成的部分双射逆幺半群（由于 $T$ 是右消去的，每个 $\rho_t$ 都必定是 $T$上的单射变换，其像为左理想$Tt$）。对于所有 $i \in I$，$[u_i]_{IH(T)}$和 $[v_i]_{IH(T)}$都是逆幺半群 $IH(T)$的右单位，因此 $[u_i v_i^{-1}]_{IH(T)} = 1$属于这个逆幺半群。于是，存在一个满射逆幺半群同态 $\mu : M_T \to IH(T)$，它扩展了映射 $[a]_{M_T} \mapsto \rho_a$, $a \in A$；此外，还存在一个自然的满射对合幺半群同态 $\nu : \overline{A}^* \to M_T$。记 $T' = A^*\nu$，它是由所有 $a \in A$对应的 $[a]_{M_T}$ 生成的 $M_T$的子幺半群。这恰好是其 $M_T$的右单位幺半群的生成集，因此这个幺半群必定是 $T'$。然而，$T'\mu$正是 $IH(T)$的右单位幺半群（后者同构于 $T$）。但对所有 $i \in I$，我们有$[u_i]_{M_T} = [v_i]_{M_T}$；又由于 $u_i, v_i \in A^*$，这意味着 $[u_i]_{T'} = [v_i]_{T'}$。由于 $T'$是右消去的（因为它是一个 RU-幺半群），它是 $T$的同态像，这迫使$\mu \restriction_{T'}$ 成为幺半群同构。因此，$T$ 是一个 RU-幺半群。□

推论 5.4. 所有可嵌入群的有限呈示幺半群都是 RU-幺半群。

然而，正如前一个定理所示，RU-幺半群并不局限于可嵌入群的幺半群；例如，其右单位

$$M = \mathrm{Inv}\langle a, b, c \mid aa^{-1} = bb^{-1} = cc^{-1} = 1,\ abc^{-1}a^{-1} = 1\rangle$$

是一个不可嵌入群的右消去幺半群。事实上，上述证明告诉我们，实际上 $M = \mathrm{Inv}\langle a, b, c \mid aa^{-1} = bb^{-1} = cc^{-1} = 1,\ ab = ac\rangle$。现在，在 $M$ 的右单位幺半群 $R$ 中，显然必有 $[ab]_M = [ac]_M$，但肯定没有 $[b]_M = [c]_M$（事实上，$R = \mathsf{MonRC}\langle a, b, c \mid ab = ac\rangle$），这与 $R$ 可嵌入群相矛盾。

由于逆幺半群的每个单位自动都是右单位，因此逆幺半群 $M$ 的 RU-幺半群的单位群与 $M$ 的单位群相同；因此，正如引言中所述， [9, 定理 4.1] 表明，所有 RU-幺半群的单位群所构成的类，恰好就是递归呈示群的类。

在本文的最终结果中，我们将描述 RU-幺半群的 Sch ¨utzenberger 群。为此，我们回顾 [10, Section 6] 中的一种构造，以及该文中的几个相关结果，这些结果将在下文中用到。设 $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ 是一个有限字母表，且 $Q$ 和 $W$ 是 $\overline{A}^*$ 的两个子集，其中 $W = \{w_1, \ldots, w_k\}$ 有限且 $Q = \{r_i : \quad i \in I\}$，其中 $I$ 含有一个指定指标 1。此外，设 $t$ 是一个不属于 $\overline{A}$ 的字母。令 $K_Q = \mathrm{Gp}\langle A \mid r_i = 1 (i \in I)\rangle$。对于任意一列字 $u_1$、.....、$u_m \in \overline{A}^*$，我们定义

$$e(u_1, u_2, \ldots, u_m) = u_1 u_1^{-1} u_2 u_2^{-1} \ldots u_m u_m^{-1}.$$

现在我们定义特殊逆幺半群

$$M_{Q,W} = \mathrm{Inv}\langle A, t \mid fr_1 = 1,\ r_i = 1\ (i \in I \setminus \{1\})\rangle$$

其中

$$f = e(a_1, \ldots, a_n, tw_1t^{-1}, \ldots, tw_kt^{-1}, a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1}).$$

如 [10], 中所述， [8, Lemma 3.3] 中证明了，$M_{Q,\ W}$ 等于由生成集 $A \cup \{t\}$ 和以下定义关系所确定的幺半群

$$\begin{aligned} r_i &= 1 && (i \in I),\\ aa^{-1} &= a^{-1}a = 1 && (a \in A),\\ tw_jt^{-1}tw_j^{-1}t^{-1} &= 1 && (1 \le j \le k). \end{aligned}$$

我们将用到 [10] 中的以下结果。

命题 5.5（[10,定理 6.3]）。采用上述记号和定义，我们有以下结论。

(1) 设 $T_W$ 是由 $\{[w_j]_{K_Q}$ 在群 $K_Q$ 中生成的子幺半群： $1 \le j \le k\}$。$M_{Q,W}$ 的右单位子幺半群同构于群 $G_Q = K_Q * FG(t)$ 中由以下元素生成的子幺半群

$$\{[t]_{G_Q}\} \cup K_Q \cup [t]_{G_Q} T_W [t]_{G_Q}^{-1}.$$

(2) $M_{Q,W}$ 的单位群同构于 $G_Q$ 中由以下元素生成的子群 $U$

$$K_Q \cup \{[twt^{-1}]_{G_Q} : \ w \in W'\},$$

其中， $W' \subseteq W$ 由所有满足字 $tw_jt^{-1}$ 表示 $M_{Q,W}$ 的一个单位的 $w_j \in W$ 组成。此外， $U$ 由其子群 $K_Q$ 和 $[t]_{G_Q} H_{W'} [t]_{G_Q}^{-1}$ 生成，其中 $H_{W'}$ 是 $K_Q$ 中由 $\{[w]_{K_Q}$ 生成的子群： $w \in W'\}$，并且事实上同构于这些子群的自由积。

前一命题的第 (1) 项恰好是 [10], 中的定理 6.3 (iii)，而第 (2) 项则可在同一定理第 (v) 部分的证明中找到。

定理 5.6。RU-幺半群的 Sch ¨utzenberger 群恰好是有限呈示群的递归可枚举子群。

证明。（⇒）根据引理 5.1，若 $M$ 是 RU-幺半群，则它是右消去且递归呈示的（作为幺半群）。因此，根据命题4.2 (3)， $M$ 的每个 Sch¨utzenberger 群都是有限呈示群的递归可枚举子群。

(⇐) 我们论证的初始设置与定理 4.4 证明开头相同。具体而言，设 $K$ 是一个群，它是某个有限呈示群的递归可枚举子群。设 $H_1 = \mathsf{Gp}\langle B \mid \mathfrak{R}_1\rangle$ 是有限呈示群，$L$ 是递归可枚举语言，并且 $K_1 = \{[w]_{H_1} : \ w \in L\}$ 是 $H_1$ 的一个子群，同构于 $K$。令 $G_0$ 为 $H_1$ 的 HNN 扩张，此处以 $z$ 作为稳定字母（字母 $t$ 将在本证明中另作他用），使 $K_1$ 的每个元素共轭到其自身。由定理 4.4 可知，$G_0$ 是递归呈示群，因此它嵌入某个有限呈示群 $G = \mathsf{Gp}\langle A \mid \mathfrak{R}\rangle$。这里可以假设 $B \subseteq A$ 和 $z \in A \setminus B$，从而 $G$ 中由 $\{[b]_G$ 生成的子群: $b \in B\}$，等于 $G$ 中 $H_1$ 的嵌入副本 $H$。

记住在本定理陈述之前刚刚引入的记号，考虑特殊逆幺半群 $M = M_{\mathfrak{R},W}$，其中 $W = B \cup B^{-1} \cup \{z\}$（因此，来自 $W$ 的所有字长度均为 1）。根据命题 5.5 (1)，我们有， $M$ 的右单位幺半群同构于自由积 $P = G * FG(t)$ 的子幺半群 $R$，其生成元为

$$\{[t]_P\} \cup \{[a]_P, [a]_P^{-1} : \ a \in A\} \cup [t]_P T_W [t]_P^{-1},$$

其中， $T_W$ 是由 $\{[z]_G\} \cup \{[b]_G, [b]_G^{-1}$ 生成的 $G$ 的子幺半群: $b \in B\}$（换言之，由 $[z]_G$ 和 $H$生成）。

此外，命题 5.5 的第 (2) 项表明， $M$ 的单位群同构于由以下元素生成的 $P$ 的子群 $U$：

$$\{[a]_P : \ a \in A\} \cup \{[tbt^{-1}]_P : \ b \in B\},$$

其中， $U$是 $G$与 $P$的子群 $[t]_P H [t]_P^{-1}$ 的自由积。这是以下事实的结果：对于所有 $b \in B$，字 $tbt^{-1}$ 表示 $M$ 的一个单位，而 $tzt^{-1}$ 则不是（尽管它确实表示一个右单位），正如我们现在将要证明的。事实上，根据命题 5.5 陈述之前紧接着显示的方程， $B \cup B^{-1} \subseteq W$ 这一事实意味着 $[(tbt^{-1})(tb^{-1}t^{-1})]_M = [(tb^{-1}t^{-1})(tbt^{-1})]_M = 1$ 成立，这表明 $[tbt^{-1}]_M$，并且 $[tb^{-1}t^{-1}]_M$ 也是 $M$的一个单位。另一方面，为了导出矛盾，假设 $tzt^{-1}$ 表示 $M$的一个单位。那么， $[tzt^{-1}]_P$ 是 $R$的一个单位，从而 $[tz^{-1}t^{-1}]_P \in R$。记住上文给出的 $R$ 的生成集，可知存在字 $w_0$、$w_1$、.....、$w_n \in \overline{A}^*$，其中某个 $n \geq 2$ 以及 $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$、$1 \leq i \leq n$使得

$$[tz^{-1}t^{-1}]_P = [w_0 t^{\varepsilon_1} w_1 t^{\varepsilon_2} w_2 \dots w_{m-1} t^{\varepsilon_m} w_m]_P$$

成立，其中任意两个连续的 $\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}$ 都不等于 $-1$；当$\varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1}$时，我们有 $[w_i]_G \neq 1$；当 $\varepsilon_i = 1$ 和 $\varepsilon_{i+1} = -1$时，我们有 $w_i \in W^*$。根据应用于 $P$的自由积正规形定理，只有在 $n = 2, \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = -1, [w_0]_G = [w_2]_G = 1$ 且

$$[z^{-1}]_G = [w_1]_G,$$

由上述条件可推出 $w_1 \in W^*$。然而，后一个等式中涉及的两个元素实际上都属于由 $[z]_G$ 和 $H$ 生成的 $G$ 的子群 $G_1$，它是 $G_0$ 的一个同构副本。因此我们得到 $[z^{-1}]_{G_0} = [w_1]_{G_0}$，但是

根据 Britton引理（另见 [19, 定理 IV.2.1]），将其应用于 HNN 扩张 $G_0$，这是不可能的，因为字 $w_1$ 中只能出现字母 $z$，不能出现其逆元 $z^{-1}$。这是一个矛盾，因此 $[tzt^{-1}]_M$ 不是 $M$ 的单位。

现在考虑元素 $[tzt^{-1}]_P$ 在（可嵌入群的）幺半群 $R$ 中的 $\mathscr{H}$-类的 Sch¨utzenberger 群；该群与 $M$ 的 RU-幺半群同构。根据命题 4.1 (4)，此群同构于

$$U \cap [tz^{-1}t^{-1}]_P U [tzt^{-1}]_P.$$

再次利用自由积的正规形定理，我们得出，表示 $U$ 中某个元素的典型字具有如下形式

$$u_1 t v_1 t^{-1} u_2 t v_2 t^{-1} \dots u_m t v_m t^{-1} u_{m+1}$$

其中，字 $u_1$、.....、$u_{m+1} \in \overline{A}^*$、$v_1 \dots$、$v_m \in \overline{B}^*$ 均非空，但 $u_1$ 和 $u_m$ 可能为空。因此，$[tz^{-1}t^{-1}]_P U [tzt^{-1}]_P$ 中的元素可由如下形式的字表示

$$tz^{-1}t^{-1}u_1 t v_1 t^{-1} u_2 t v_2 t^{-1} \dots u_m t v_m t^{-1} u_{m+1} t z t^{-1},$$

且满足与上文相同的条件（注意，例如，若 $u_1$ 为空，则前一个字的前缀 $tz^{-1}t^{-1}u_1 t v_1 t^{-1}$ 会约化为 $tz^{-1}v_1 t^{-1}$）。因此，第三次应用正规形定理后，我们得出：元素 $U$ 属于 $P$ 的共轭子群 $[tz^{-1}t^{-1}]_P U [tzt^{-1}]_P$，当且仅当 $u_1$、$u_{m+1}$ 为空，并且存在字 $u_2$、$u'_2$、.....、$u_m$、$u'_m \in \overline{A}^*$ 以及 $v_1$、$v'_1$、.....、$v_m$、$v'_m \in \overline{B}^*$，使得

$$[tv_1 t^{-1} u_2 t v_2 t^{-1} \dots u_m t v_m t^{-1}]_P = [tz^{-1} v'_1 t^{-1} u'_2 t v'_2 t^{-1} \dots u'_m t v'_m z t^{-1}]_P.$$

若 $m \geq 2$，则后一个条件等价于等式 $[u_i]_G = [u'_i]_G$ 对所有$2 \leq i \leq m$，$[v_i]_G = [v'_i]_G$ 对所有 $2 \leq i \leq m-1$，$[v_1]_G = [z^{-1}v'_1]_G$ 以及 $[v_m]_G = [v'_m z]_G$ 同时成立。这意味着 $[z]_G = [v'_1 v_1^{-1}]_G = [(v'_m)^{-1} v_m]_G \in H$，矛盾。因此，$m = 1$。在这种情况下，前一个条件化简为

$$[tv_1 t^{-1}]_P = [tz^{-1} v'_1 z t^{-1}]_P,$$

另一方面，对于任何满足 $[v_1]_G = [z^{-1}v'_1 z]_G$ 的字 $v_1, v'_1 \in \overline{B}^*$，该条件都成立。由此我们立即得出

$$U \cap [tz^{-1}t^{-1}]_P U [tzt^{-1}]_P \cong H \cap [z^{-1}]_G H [z]_G \cong K_1.$$

因此，我们得到所考察的 $M$ 的 Sch¨utzenberger 群与 $K$ 同构，证明完毕。□

致谢。第一作者的研究得到塞尔维亚科学院和艺术学院个人资助项目 F-121“组合半群与群论问题”的支持。第二作者的研究得到 EPSRC 奖学金项目 EP/V032003/1“无限群、幺半群与逆半群的算法、拓扑和几何方面”的支持。

## References

[1] S. I. Adjan, 《群与半群的定义关系与算法问题》（俄文）， *Trudy Mat. Inst. Steklov.* **85** （1966），123页。[

2] S. I. Adyan, G . U. Oganesyan, 《单关系半群的字问题与整除问题》（俄文）， *Mat. Zametki* **41** （1987），412–421页。

[3] V. Yu. Belyaev, 递归定义的逆半群在有限表示半群中的嵌入性（俄文）， *Sibirsk. Mat. Zh.* **25** (1984), 50–54.

[4] A. J. Cain, *Presentations of Subsemigroups of Groups*, 博士论文, 圣安德鲁斯大学, 2005年。[5] A. J. Cain、E. F. Robertson、N. Ruˇskuc, 有限 Rees 指数子半群及其扩张的消去型与 Malcev 表示, *J. Austral. Math. Soc.* **84** (2008), 39–61。[6] A. H. Clifford、G. B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, *Vol. I & II*, 数学综述丛书第7卷, 美国数学学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 1961年和1967年。[7] I. Dolinka、R. D. Gray, 单关系群的前缀成员问题新结果, *Trans. Amer. Math. Soc.* **374** (2021), 4309–4358。[8] R. D. Gray, 通过单关系群的直角阿廷子群证明单关系逆幺半群的字问题不可判定, *Invent. Math.* **219** (2020), 987–1008。[9] R. D. Gray、M. Kambites, 有限呈特殊逆幺半群的群 $\mathcal{H}$ *sub-* 类, , *mitted* 2212 04204 arXiv: . .[10]R. D. Gray、N. Ruˇskuc, 特殊单关系逆幺半群的单位元, *submitted*, arXiv: 2103.02995。[11] V. S. Guba, 论单定义关系半群的字问题与字整除问题之间的关系（俄文）, *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* **61** (6) (1997), 27–58。[12] G. Higman, 有限呈示群的子群, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **262** (1961), 455–475。[13] J. E. Hopcroft、R. Motwani、J. D. Ullman, *Introduction to Automata Theory Languages and* , , (第 *Computation* 2 2001 nd 版), Addison-Wesley, 波士顿, 。[14] J. M. Howie, *Fundamentals of Semigroup Theory*, 伦敦数学学会专著第12卷, Clarendon出版社, 牛津, 1995年。[15] S. V. Ivanov、S. W. Margolis、J. C. Meakin, 论单关系逆幺半群与单关系群, *J. Pure Appl. Algebra* **159** (2001), 83–111。[16] A. Juh´asz, 某些单关系群中前缀幺半群成员问题的解答, *Semigroup Forum* **89** (2014), 479–490。[17] G. Lallement, 论由单个关系呈示的幺半群, *J. Algebra* **32** (1974), 370–388。[18] M. V. Lawson, *Inverse Semigroups: The Theory of Partial Symmetries*, 世界科学出版社, 新加坡, 1998年。[19] R. C. Lyndon、P. E. Schupp, *Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag, 柏林, 1977年。[20] W. Magnus, ¨论具有一个定义关系的不连续群。(自由定理), *J. reine angew. Math.* **163** (1930), 141–165。[21] W. Magnus, 具有一个定义关系的群的恒等 ¨ ¨ *Math. Ann.* 问题, ( ), – **106** 1932 295 307 。[22] G. S. Makanin, 论有限定义半群的恒等问题（俄文）, *Dokl.* ( ), – 。 *Akad. Nauk SSSR* **171** 1966 285 287 [23] A. Malheiro, 编码子幺半群的完备重写系统, *Internat. J. Algebra Com-* ( ), – 。 *put.* **15** 2005 207 216 [24] A. I. Mal'cev: *Algorithms and Recursive Functions* (俄文), 科学出版社, 莫斯科, 1965年。[英文译本: Wolters-Noordhoff, 格罗宁根, 1970年。[25] S. W. Margolis、J. C. Meakin、Z. ˇSuni´k, 群与幺半群的子幺半群畸变函数及成员问题, 载于: *Geometric Methods in Group Theory*, 第109–129页, 当代数学, 第372卷, 美国数学学会, 2005年。[26] J. Meakin, 群与半群: 联系与对比, 载于: *Groups St Andrews 2005*, *Vol. 2* 357 400, 340, , 第–页, 伦敦数学学会讲义丛书, 第卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2007年。[27] W. D. Munn, 自由逆半群, *Proc. London Math. Soc. (3)* **29** (1974), 385–404。[28] V. L. Murski˘ı, 具有可枚举定义关系集的半群同构嵌入有限呈示半群（俄文）, *Mat. Zametki* **1** (1967), 217–224。[29] C.-F. Nyberg Brodda, 单关系幺半群的字问题: 综述, *Semigroup Forum* **103** 2021 297 355 ( ), – 。

[30] M. Petrich, *Inverse Semigroups*, Wiley, 1984年。[31] H. E. Scheiblich, 自由逆半群, *Proc. Amer. Math. Soc.* **38** (1973), 1–7。[32] B. M. Schein, 自由逆半群不是有限可表示的, *Acta Math. Acad. Sci.* ( ), – 。 *Hungar.* **26** 1975 41 52

[33] A. M. Turing, 《论可计算数及其在判定问题中的应用》, *Proc. London Math. Soc.* **42** (1936), 230–265。勘误: *ibid.* **43** (1937), 544–546。[34] L. Zhang, 《阿德扬定理的一个简短证明》, *Proc. Amer. Math. Soc.* **116** (1992), 1–3。[35] L. Zhang, 《将重写方法应用于特殊幺半群》, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* ( ), –。

**112** 1992 495 505