守卫片段的克雷格插值

Balder ten Cate，ILLC，
阿姆斯特丹大学

Jesse Comer，ILLC，阿
姆斯特丹大学

arXiv:2304.08086v1 [cs.LO] 17 Apr 2023

摘要——我们证明，守卫否定片段（GNFO）在一个精确的意义上，是具有克雷格插值性质的守卫片段（GFO）的最小扩展。相比之下，具有克雷格插值性质的二变量片段（FO^2）的最小扩展是完整的一阶逻辑。

一、背景

一阶逻辑的可判定片段 一阶逻辑（FO）的可判定片段研究历史悠久（参见 [11]）。受 Vardi [26]，提出的问题“是什么使模态逻辑具有如此强的可判定性？”以及 Andreka 等人 [1],提出的问题“模态逻辑的运作机制是什么？”启发，过去25年间，人们提出并研究了许多受模态逻辑启发的可判定片段。模态逻辑本身可视为一阶逻辑的一个片段，其量化形式受到限制。以下是其中的几个片段，它们各自以不同方式自然地推广了模态逻辑：二变量片段（FO^2）[24]，、守卫片段（GFO）[1]，以及一元否定片段（UNFO）[14]。随后，人们又发现了这些片段的其他可判定扩展，包括带计数量词的二变量片段（C^2）[17] 以及守卫否定片段（GNFO）[4]。后者可视为 GFO 和 UNFO 的共同推广。计算机科学和人工智能中使用的许多可判定逻辑，包括各种描述逻辑和基于规则的语言，都可以转换为 GNFO 和/或 C^2。从这个意义上说，GNFO 和 C^2 是解释其他逻辑为何可判定的便利工具。人们还研究了 GNFO 的进一步扩展，以将可判定性边界推得更远（例如引入不动点算子和使用团守卫），以及其他正交的可判定片段。这些内容不在本文讨论范围之内。图1总结了本文关注的相关片段。

克雷格插值性质（CIP）理想情况下，一阶逻辑片段不仅在算法上表现良好，在模型论方面也应性质良好。逻辑中一个尤为重要的模型论性质是克雷格插值性质（CIP）。它指出，对于所有公式 φ, ψ，如果 $\varphi \models \psi$，那么就存在一个公式 ϑ，使得 $\varphi \models \vartheta$ 且 $\vartheta \models \psi$，并且 ϑ 中出现的所有非逻辑符号也都同时出现在 φ 和 ψ 中。Craig [16] 于1957年证明，一阶逻辑本身具有这一性质（因此得名）。此后，人们对 Craig 的结果进行了若干推广（例如 [25], [9]），并发现了许多应用（例如 [13], [7], [21]）。虽然这里将 CIP 描述为一种模型论性质，但它也有证明论层面的解释。事实上，有人认为 CIP 是存在良好证明系统 [19] 的标志。

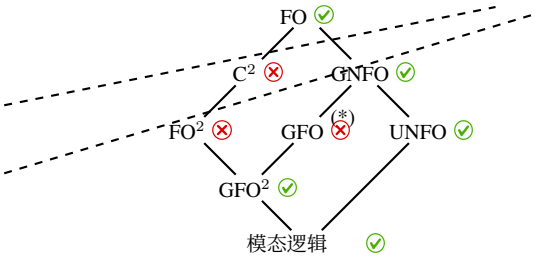

图 1. 具有（）和不具有（）CIP 的一些一阶逻辑可判定片段。标为 (*) 的包含关系仅对句子和自守卫公式成立。

把目光转向前面提到的一阶逻辑的可判定片段，结果发现，尽管 GFO 在许多方面都具有良好的模型论性质 [1]，，它却不满足 CIP [20]。同样，一阶逻辑^2 也不满足 CIP [15]，，尽管 GFO 与一阶逻辑^2 的交集（称为 GFO^2）满足 CIP [20]。C^2 也不满足 CIP（[22, 示例 2] 给出了一个反例）。另一方面，UNFO 和守卫否定一阶逻辑满足 CIP [14], [3]（其不动点扩展也满足 [8], [5]）。事实上，对于 UNFO 和守卫否定一阶逻辑，可以有效地构造插值公式，并且已经为插值公式的大小以及计算它们的计算复杂度建立了紧确界 [6]。图1总结了这些已知结果。注意：我们仅考虑不含常元符号和函数符号的关系签名。部分结果依赖于这一限制。

CIP 失效时该怎么办？ 当一个片段 L 不具备 CIP 时，自然会产生这样一个问题：是否存在一个表达能力更强且具备 CIP 的片段 L'？如果这样的 L' 存在，那么尤其是，对于有效的 L-蕴含，可以在 L'中找到插值公式。这种分析思路有时被称为“修复插值” [2]。我们将在接下来的几节中采用这种“修复”方法。在此之前，先介绍一些处理不具备 CIP 的片段的其他方法。一种方法是弱化 CIP。例如，文献 [20]表明，GFO 满足一种较弱的“模态”形式的克雷格插值。粗略地说，该形式只要求插值公式中出现在非守卫位置的关系符号同时出现在前提和结论中。事实证明，这种对 CIP 的弱化足以蕴含（非投射式的）贝思可定义性，而这正是 CIP 的一个重要应用。另一种近期提出的方法 [22]是开发算法，以检验给定的蕴含是否存在插值公式。也就是说，不再将克雷格插值视为逻辑的一种性质，而是将插值公式是否存在作为针对单个蕴含的算法问题来研究。结果表明，对于 GFO 和 FO^2 [22]，插值公式存在性问题确实是可判定的（尽管其复杂度高于可满足性问题）。

II. 修复一阶逻辑²的插值

二变量片段（FO²）由所有仅包含两个变量的 FO 公式构成，例如 x 和 y；其中允许嵌套量词重复使用同一个变量（如 $\exists xy(R(x,\ y) \wedge \exists x(R(y,\ x)))$），以表达存在一条长度为 2 的路径）。在此语境下，按照惯例，我们只考虑元数至多为 2 的关系。众所周知，FO² 是可判定的 [24]，但不具备 CIP [15]。

定理 II.1。</style>设 L 是任意一个扩展一阶逻辑²、在代换下封闭且具有 CIP 的一阶逻辑片段。那么一阶逻辑 $\preceq_{sent} L$。

这里，我们用 $L_1 \preceq_{sent} L_2$ 表示每个 L_1句子都能在 L_2 中表达；所谓在代换下封闭，是指对于每个包含一个 n元关系符号 R的公式 $\varphi \in L$，以及每个公式 $\psi(x_1, \ldots, x_n) \in L$，$\varphi[\psi/R]$ 都能在 L中表达，其中 $\varphi[\psi/R]$ 由φ得到：将其中每个形如 $R(y_1, \ldots y_n)$ 的子公式替换为$\psi(y_1, \ldots, y_n)$（假设这是安全的代换）。直观来说，如果一个片段具有组合式语法，那么它就在代换下封闭；定理 II.1 中对代换下封闭性的假设旨在确保 L 不仅包含一阶逻辑²，而且也在一阶逻辑²的联结词下封闭（事实上，这就是证明中用到的全部内容）。

定理 II.1 表明，要修复 FO², 的插值，我们必须转向完整的一阶逻辑。特别是，任何在代换下封闭且具有 CIP 的 FO² 扩展（假设语法是有效的）都是不可判定的。证明见附录 A。

III. 修复 GFO 的插值

守卫片段（GFO）允许量词都带有“守卫”的公式。形式上，公式φ 的守卫是一个原子公式 α，其自由变量包含 φ 的所有自由变量。按照 [18]，，我们允许 α 是一个等号。更一般地，我们将 φ的一个 $\exists$-守卫称为一个可能经过存在量化的原子公式 $\exists x\beta$，其自由变量包含 φ的所有自由变量。GFO 的公式由以下文法生成：

$$\varphi := \top \mid R(\overline{x}) \mid x = y \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \exists\overline{x}(\alpha \wedge \varphi),$$

其中，在最后一个子句中，α 是 φ的一个守卫。再次注意，我们不允许常量和函数符号。

在守卫否定片段（GNFO）中，允许任意存在量化，但要求每个否定都带有守卫。更确切地说，GNFO 的公式由以下文法生成：

$$\varphi := \top \mid R(\overline{x}) \mid x = y \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \exists x\varphi \mid \alpha \wedge \neg\varphi,$$

其中，在最后一个子句中，α 是 φ的守卫。

按照惯例，上述定义都是用普通守卫 α来表述的。不过很容易看出，如果允许使用 $\exists$-守卫，这不会以任何方式影响这些逻辑的表达能力（或计算复杂度）。这是因为 $\exists x\beta \wedge \varphi$ 可以等价地写成 $\exists x(\beta \wedge \varphi)$。换言之，$\exists$-守卫与普通守卫同样有效。

我们称一阶公式 为自守卫的，如果它是一个句子，或者具有如下形式：$\alpha \wedge \varphi$，其中 α是 φ的一个 $\exists$-守卫。它已在 [4] 中证明，每个自守卫的守卫一阶逻辑公式都可以用守卫否定一阶逻辑表达。特别地，这适用于所有守卫一阶逻辑句子，以及至多有一个自由变量的守卫一阶逻辑公式（因为任何此类公式都可以等价地写成 $x = x \wedge \varphi$）。因此，通常将守卫否定一阶逻辑视为守卫一阶逻辑的扩展。图1中标记为 (*) 的线体现了这一点。形式上，我们写作 $L_1 \preceq_{sg} L_2$，表示每个自守卫的L_1-公式都可以用 L_2表达；因此，守卫一阶逻辑 $\preceq_{sg}$ 守卫否定一阶逻辑。

守卫片段有其特殊之处：它们对代换并不封闭。例如，$\exists xy(R(x,\ y) \wedge \neg S(x,\ y))$ 属于 GFO，但如果我们用 $x = x \wedge y = y$ 替换 $R(x,\ y)$，就会得到 $\exists xy(x = x \wedge y = y \wedge \neg S(x,\ y))$，它不属于 GFO（甚至无法用守卫否定一阶逻辑表达）。然而，GFO 和守卫否定一阶逻辑对自守卫代换是封闭的：我们可以用自守卫公式统一替换关系。

鉴于这些细微之处，我们现在可以陈述主要结果：

定理 III.1. 设 L是任意一个一阶逻辑片段，满足 1) GFO $\preceq_{sg} L$，2) L在自守卫替换下封闭，3) L在合取和析取下封闭，且 4) L具有 CIP。

那么 GNFO $\preceq L$。

所谓 GNFO $\preceq L$，是指每个守卫否定一阶逻辑公式都等价于一个 L 公式（不仅限于句子，也不仅限于自守卫公式）。

换言之，宽泛地说，守卫否定一阶逻辑是具有 CIP 的 GFO 的最小扩展。定理 III.1 的证明见附录 B。该证明基于与定理 II.1 的证明相似的思路，但论证更为复杂。主要的技术结果是以下命题：

命题 III.2. 设 L 是任意一个具有 CIP、包含所有原子公式且对守卫量化、合取和一元蕴涵封闭的一阶逻辑片段。那么 FO$^{\exists,\ \wedge} \preceq L$。

这里，FO$^{\exists,\ \wedge}$ 表示 FO 的存在合取片段（参见附录）；若对于任意 $\varphi \in L$，只要 α 是 φ的守卫，L就能表示 $\exists x(\alpha \wedge \varphi)$，则称片段 L对守卫量化封闭；若对于任意 $\varphi \in L$，只要 α 是仅含一个自由变量的原子公式，L 就能表示 $\alpha \to \varphi$，则称 L 对一元蕴涵封闭。

我们注意到，为了便于阐述，定理 II.1 和定理 III.1 是用 FO 的片段来表述的。然而，证明中并未以任何实质性的方式用到 L 是 FO 的片段这一假设。也可以像 [12]，[10]那样，使用抽象的逻辑概念来表述这些结果。[12] 证明了，任何扩展 GFO 且具有 CIP 的抽象逻辑都是不可判定的。然而，[12] 假设存在常元符号，并讨论了更强版本的 CIP：插值不仅针对关系符号，也针对常元符号。

致谢： 我们感谢 Jean Jung、Frank Wolter 和 Malvin Gattinger 对论文草稿提出的意见。Balder ten Cate 获得欧盟地平线 2020 项目资助，项目编号为 MSCA-101031081。

参考文献

[1] Hajnal Andr´eka、Istv´an N´emeti 和 Johan van Benthem。模态语言与谓词逻辑的有界片段。《哲学逻辑杂志》，27，1998年6月。[2] Carlos Areces、Patrick Blackburn 和 Maarten Marx。修正量化模态逻辑中的插值定理。《纯粹与应用逻辑年鉴》，124(1):287–299，2003年。[3] Vince B´ar´any、Michael Benedikt 和 Balder ten Cate。重写受限否定查询。载于 MFCS 2013 论文集，第 98–110 页，柏林、海德堡，2013年。Springer Berlin Heidelberg。[4] Vince Barany、Balder ten Cate 和 Luc Segoufin。守卫否定。《ACM会刊》，62(3):22.1–22:26，2015年。[5] Michael Benedikt、Pierre Bourhis 和 Michael Vanden Boom。可判定不动点逻辑中的可定义性与插值。《计算机科学逻辑方法》，第15卷第3期，2019年9月。[6] Michael Benedikt、Balder ten Cate 和 Michael Vanden Boom。守卫逻辑中的有效插值与保守性。ACM计算逻辑汇刊，17(2)，2015年。[7] Michael Benedikt、Julien Leblay、Balder ten Cate 和 Efthymia Tsamoura。从证明生成规划：基于插值的查询重构方法。《数据管理综合讲座》。Morgan & Claypool，2016年。[8] Michael Benedikt、Balder ten Cate 和 Michael Vanden Boom。可判定不动点逻辑中的插值。载于 LICS，第 378–389 页，2015年。[9] Michael Benedikt、Balder ten Cate 和 Efthymia Tsamoura。从证明生成规划。《ACM数据库系统汇刊》，40(4):22:1–22:45，2016年。[10] Johan van Benthem、Balder ten Cate 和 Jouko A. V¨a¨an¨anen。一阶逻辑片段的 Lindstr¨om 定理。《计算机科学逻辑方法》，5(3)，2009年。[11] Egon B¨orger、Erich Gr¨adel 和 Yuri Gurevich。《经典判定问题》。《数学逻辑展望》。Springer，1997年。[12] Balder ten Cate。扩展模态语言的插值。《符号逻辑杂志》，70(1):223–234，2005年。[13] Balder ten Cate、Enrico Franconi 和 Inanc, Seylan。表达力丰富的描述逻辑中的贝思可定义性。《人工智能研究杂志》，48(1):347–414，2013年10月。[14] Balder ten Cate 和 Luc Segoufin。一元否定。《计算机科学逻辑方法》，第9卷第3期，2013年9月。[15] Stephen D. Comer。不具有 amalgamation 性质的类。《太平洋数学杂志》，28:309–318，1969年。[16] William Craig。Herbrand-Gentzen定理在联系模型论与证明论方面的三种用途。《符号逻辑杂志》，22(3):269–285，1957年。[17] Erich Graedel、Martin Otto 和 Eric Rosen。带计数的二变量逻辑是可判定的。载于 LICS 1997 论文集，第306页，1997年。[18] Erich Gr¨adel。守卫的约束能力。《符号逻辑杂志》，64(4):1719–1742，1999年。[19] Eva Hoogland。可定义性与插值：模型论研究。博士论文，阿姆斯特丹大学，2000年。[20] Eva Hoogland 和 Maarten Marx。守卫片段中的插值与可定义性。《Studia Logica》，70(3):373–409，2002年。[21] Jean Christoph Jung、Carsten Lutz、Hadrien Pulcini 和 Frank Wolter。使用受限签名的描述逻辑概念区分数据示例。载于 KR 2021 论文集，第 390–399 页，2021年。[22] Jean Christoph Jung 和 Frank Wolter。没有贝思与 Craig：守卫片段和二变量片段中的定义与插值式。载于 LICS 2021 论文集，第 1–14 页。IEEE计算机学会，2021年7月。[23] Emil Kiero´nski。具有等价关系或传递关系的守卫片段研究成果。载于《计算机科学逻辑》，《计算机科学讲义》第3634卷，第309–324页。Springer出版社，2005年。[24] Michael Mortimer。关于含两个变量的语言。《数学逻辑季刊》，21:135–140，1975年。[25] Martin Otto。一个插值定理。《符号逻辑通报》，6(4):447–462，2000年。[26] Moshe Y. Vardi。为什么模态逻辑如此稳健地可判定？载于 N. Immerman 和 Ph. G. Kolaitis 编，《描述复杂性与有限模型》，DIMACS 第31卷，第149–183页，1996年。

附录 A 定理 II.1 的证明

以下若干证明会用到二阶逻辑，并对谓词进行量化。这些二阶量词的取值范围是结构论域的完整幂集。

定理 II.1。设 L 是任意一个扩展一阶逻辑 [2], 的一阶逻辑片段，它对代换封闭，且具有 CIP。那么一阶逻辑 $\preceq_{sent} L$。

证明。以下证明采用了与 [12] 中类似的策略，以说明每一种扩展了含差分算子的模态语言的抽象模态语言都具有完整的一阶逻辑表达能力。

我们将通过公式归纳证明：对于每个一阶逻辑公式 $\phi(x_1 \ldots, x_n)$，都存在一个在扩展签名上的句子 $\psi \in L$，该签名包含额外的一元谓词P_1，……，P_n，且该句子等价于

$$\exists x_1 \ldots x_n((\bigwedge_{i=1\ldots n} P_i(x_i) \wedge \forall y(P_i(y) \to y = x_i)) \wedge \phi(x_1, \ldots, x_n)).$$

换言之，ψ 是一个句子，表达的是：在将其自由变量赋值为某个由唯一满足 P_i 谓词的元素构成的元组后，ϕ 成立。若 $n = 0$（即 ϕ 是一个句子），则 ψ 等价于 ϕ，由此可知 $FO \preceq_{sent} L$。

归纳的基本情形显然成立（请回想，我们只考虑元数至多为 2 的关系）。布尔联结词对应的归纳步骤也显然成立（利用对代换的封闭性）。事实上，论证中唯一非平凡的部分是存在量词对应的归纳步骤。设 $\phi(x_1、\ldots\ldots、x_n)$具有如下形式：$\exists x_{n+1}\phi'(x_1 \ldots、x_n、x_{n+1})$。根据归纳假设，存在一个 L句子 ψ，它定义在带有额外一元谓词$P_1、\ldots\ldots、P_{n+1}$的签名上，这些谓词对应于 $\phi'(x_1、\ldots\ldots、x_n、x_{n+1})$。现在，令 ψ' 由 ψ 得到，方法是将P_{n+1} 的每一次出现都替换为某个新的一元谓词 P' P'。此外，令

$$\begin{aligned}\gamma(x) &:= \psi \wedge P_{n+1}(x),\\ \chi(x) &:= (P'(x) \wedge \forall y(P'(y) \to y = x)) \to \psi'.\end{aligned}$$

（其中 x 是我们可用的两个变量之一；选哪一个都无关紧要）。由对代换封闭可知，二者都可以写成一个 L-公式。于是

$$\gamma(x) \models \chi(x).$$

设 $\theta(x) \in L$ 是一个插值公式。由对代换封闭可知，$\exists x\theta(x)$ 也可以用 L 表示。我们断言，这个句子满足我们的断言所要求的条件。

要看出这一点，首先注意到，由于 P_{n+1} 仅出现在前件中，而 P' 仅出现在后件中，以下二阶蕴含同样成立：

$$\exists P_{n+1}\gamma(x) \models \vartheta(x) \models \forall P'\chi(x).$$

不难看出，$\exists P_{n+1}\gamma(x)$ 和 $\forall P'\chi(x)$ 等价。事实上，在结构 M 中，

当且仅当存在赋值 g使得 M', $g \models \phi$时，二者均成立；其中 M' 是 M 的扩张，在该结构中 P_{n+1} 表示单元素集合$\{g(x_{n+1})\}$。

由此可知， $\vartheta(x)$ 介于二者之间，因此也等价于 $\exists P_{n+1}\gamma(x)$。所以， $\exists x\vartheta(x)$ 等价于 $\exists x\exists P_{n+1}\gamma(x)$，而后者等价于 $\exists P_{n+1}\psi$；显然， $\exists P_{n+1}\psi$ 满足我们的主张所要求的条件。□

这进一步推出了不可判定性，但需要满足一个较弱的附加条件：如果存在一个可计算函数，对任意两个公式 ϕ, $\psi \in L$ 都能生成一个公式$\chi \in L$，使得 χ 等价于 $\phi \wedge \psi$，那么我们就称一阶逻辑的片段 L 在合取下有效封闭。

推论 A.1. 设 L 是任意一个扩展 FO^2, 、在代换下封闭且具有 CIP 的一阶逻辑片段。此外，假设 L 在合取下有效封闭。那么， L 的可满足性问题是不可判定的。

证明. 已知，含有两个传递关系的 FO^2- 公式的可满足性问题是不可判定的 [23]。该问题可如下归约到 L 的可满足性问题：设 ϕ 是任意一个包含二元关系符号 R_1 和 R_2（也可能包含其他关系符号）的 FO^2-公式。那么， ϕ 在 R_1 和 R_2 均为传递关系的结构上可满足，当且仅当 $\phi \wedge \psi$ 可满足；其中， ψ 是一个表达 R_1 和 R_2 为传递关系的（固定的） L-句子。注意，根据定理 II.1，这样的句子 ψ 确实存在。由于L 在合取下有效封闭，因此这是一个有效归约。

□

附录 B 定理 III.2 的证明

我们假定读者熟悉合取查询（CQs）和合取查询的并（UCQs）。GNFO 的一个重要替代刻画是：它是能够表达所有合取查询的并（UCQ），且在守卫否定 [4]下封闭的逻辑。这一点在下列等价的 GNFO 语法中得到了明确说明：

$$\varphi := R(\overline{x}) \mid x = y \mid \alpha \wedge \neg\varphi \mid q[\varphi_1/R_1, \ldots, \varphi_n/R_n],$$

其中， q是一个 UCQ，其关系符号为 R_1、.....、 R_n；而φ_1、.....、 φ_n 是具有适当数量自由变量、并由同一递归语法生成的自守卫公式。我们将此称为 GNFO 的 UCQ 语法。

论证的主要目标是证明，我们的抽象逻辑 L 能够表达所有正存在公式，由此很容易推出 L 能够表达 GNFO 的 UCQ 语法中的所有公式。

定义 B.1. 我们用 FO$^{\exists,\ \wedge}$ 表示一阶逻辑中仅包含存在量化和合取的片段：

$$\varphi := R(x_1, \ldots, x_k) \mid x = y \mid \varphi \wedge \varphi \mid \exists x\varphi.$$

定义 B.2. 令 φ 为一阶逻辑$^{\exists\ \wedge}$的一个公式，令 $y = y_1, \ldots, y_n$ 为一个由互异变量组成的元组，并令 $P = P_1, \ldots, P_n$ 为长度相同的一元谓词元组。则 BIND$_{y\mapsto P}(\varphi)$ 按如下方式递归定义：

$$\begin{aligned}
\mathsf{BIND}_{\overline{y}\mapsto\overline{P}}(\alpha) &= \exists\overline{y}'(\alpha \wedge \textstyle\bigwedge_{1\le i\le n, y_i\in \mathrm{free}(\alpha)} P_i(u_i)) \\
\mathsf{BIND}_{\overline{y}\mapsto\overline{P}}(\phi \wedge \psi) &= \mathsf{BIND}_{\overline{y}\mapsto\overline{P}}(\phi) \wedge \mathsf{BIND}_{\overline{y}\mapsto\overline{P}}(\psi) \\
\mathsf{BIND}_{\overline{y}\mapsto\overline{P}}(\exists z\psi) &= \exists z(\mathsf{BIND}_{\overline{y}\mapsto\overline{P}}(\psi)),
\end{aligned}$$

其中， α 是一个原子事实（可能是等号）， y' 是将 y限制在 α中出现的变量上所得的结果。如果y 中没有变量出现在 α 中，则将 BIND$_{y\mapsto P}(\alpha)$ 简单地理解为 α。

备注 B.3。对于、 、， BIND $_{y_1\ \ldots\ y_n}^{y\mapsto P}\ \varphi$ $\varphi\ \setminus\{y_1,\ldots,y_n\}$ y= ( ) 的自由变量恰好是 free( )。这说明了我们使用“BIND”一词的合理性。

命题 B.4。对于所有 FO$^{\exists,\ \wedge}$-公式 φ ，以及所有 x， y 和 P, Q，如果 x 和 y 不相交，则

$$\mathsf{BIND}_{\overline{xy}\mapsto\overline{PQ}}(\varphi) \equiv \mathsf{BIND}_{\overline{x}\mapsto\overline{P}}(\mathsf{BIND}_{\overline{y}\mapsto\overline{Q}}(\varphi)).$$

定义 B.5。如果 φ 的自由变量均不在 φ中以约束形式出现，并且 φ 不包含针对同一变量的两个量词，则称公式 φ 是干净的。

命题 B.6。对于每个干净的 FO$^{\exists,\ \wedge}$-公式 φ，对于每个互异变量的元组 $y = y_1$、.....、 y_n（其中每个$y_i \in$ 都是 free(φ)），以及每个一元谓词元组$P = P_1$、.....、 P_n，都有

$$\Big(\bigwedge_{i=1\ldots n} P_i(y_i)\Big) \models \varphi \to \mathsf{BIND}_{\overline{y}\mapsto\overline{P}}(\varphi).$$

证明。通过对 φ 进行归纳来证明。更准确地说，归纳假设指出，对于每个模型 M 和变量赋值 g，如果 M, $g \models \bigwedge_{i=1\ldots n} P_i(y_i)$ 且 $M, g \models \varphi$，那么 $M, g \models$ BIND$_{y\mapsto P}(\varphi)$。□

命题 B.7。对于每个干净的一阶逻辑$^{\exists,\wedge}$-公式 $\varphi(x, y)$，其中 $\overline{y} = y_1, \ldots, y_n$均与 x 不同；以及每个由 n 个一元谓词组成的元组 $P = P_1, \ldots, P_n$，这些谓词均未出现在 φ 中，我们有

$$\exists x\varphi(x, \overline{y}) \equiv \forall\overline{P}\Big(\Big(\bigwedge_{i=1\ldots n} P_i(y_i)\Big) \to \exists x\mathsf{BIND}_{\overline{y}\mapsto\overline{P}}(\varphi(x, \overline{y}))\Big).$$

证明。
从左到右的蕴含可由命题 B.6 得出：假设 $M, g \models \exists x\varphi(x, y) \wedge \bigwedge_{i=1\ldots n} P_i(y_i)$。那么，对于某个 $b \in M$，有 $M, g[x/b] \models \varphi(x, y) \wedge \bigwedge_{i=1\ldots n} P_i(y_i)$。于是，根据命题 B. 6 $M\ g[x/b] \models$ $_{y\mapsto P}\ \varphi\ x\ y$ $M\ g \models$, , BIND ((,)), $^{\exists x}$ 因此 ,BIND$^{x}_{y\mapsto P}(\varphi(, y))$。

对于反向蕴含，假设 $M, g \models \forall P(\bigwedge_i P_i(y_i) \to \exists x$BIND $_{y\mapsto P}(\varphi(x, y))$。令 M' 为结构 M 的扩张，其中每个一元谓词符号 P_i 都解释为 $\{g(y_i)\}$。那么，根据二阶量词语义，我们有 $M', g \models \exists x$BIND$_{y\mapsto P}(\varphi(x, y))$，因此对于某个 $b \in M$，有 $M', g[x/b] \models$ BIND$_{y\mapsto P}(\varphi(x, y))$。为完成证明，只需证明 $M', g[x/b] \models \varphi(x, y)$（因为这也意味着 $M, g[x/b] \models \varphi(x, y)$）。

对于任何包含变量 $y_i \in y$ 的约束出现的子公式，该变量的任何见证 y_i 也必定属于 P_i（根据 BIND$_{y\mapsto P}(\varphi(x,\ y))$ 的构造，以及 $\varphi(x,\ y)$ 是干净的这一假设）。由于每个 P_i

都是单元素集合，这意味着任何子公式中 y_i 的每个见证都是 $g(y_i)$。由此可得，对于 $\varphi(x, y)$ 中出现的每个原子公式 α，都有 $M, g[y'/a'] \models \alpha$，其中 y' 是 α 中出现的 y 的变量元组。通过简单的子公式归纳，我们便得到 $M \models \varphi(b, a)$，从而完成证明。 □

引理 B.8. 设 L 是任意一个能够表达原子事实，且在守卫量化、合取和一元蕴涵下封闭的一阶逻辑片段。如果 L 能够表达 $\varphi \in$ 一阶逻辑$_{\exists, \wedge}$及其所有子公式，那么 L 能够表达 $\mathsf{BIND}_{\overline{y} \mapsto \overline{P}}(\varphi)$。

证明。
我们对一阶逻辑$_{\exists, \wedge}$-公式 φ 的复杂度作强归纳法，证明该命题成立。

基本情形
若 φ 是一个原子事实且 $y = y_1 \ldots, y_n$，那么

$$\mathsf{BIND}_{\overline{y} \mapsto \overline{P}}(\varphi) = \exists \overline{y}(\varphi \wedge \bigwedge_{1 \le i \le n, y_i \in \mathrm{free}(\alpha)} P_i(y_i)),$$

根据对合取和守卫量化的封闭性，L 可以表达这一点。

归纳步骤
假设 $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$。由于 L 能够表达 φ 及其所有子公式，因此也能够表达 ψ_1、ψ_2 及其所有子公式。根据归纳假设，L 能够表达 $\mathsf{BIND}_{\overline{y} \mapsto P}(\psi_1)$ 和 $\mathsf{BIND}_{\overline{y} \mapsto P}(\psi_2)$。再根据合取封闭性，$L$ 能够表达 $\mathsf{BIND}_{\overline{y} \mapsto P}(\varphi) = \mathsf{BIND}_{\overline{y} \mapsto P}(\psi_1) \wedge \mathsf{BIND}_{\overline{y} \mapsto P}(\psi_2)$。

接下来，假设 $\varphi(x, y) \equiv \exists z \psi(x, y, z)$。我们需要证明 L 能够表达 $\mathsf{BIND}_{\overline{y} \mapsto P}(\varphi(x, y))$，根据定义，这与 $\exists z(\mathsf{BIND}_{\overline{y} \mapsto P}(\psi(x, y, z)))$ 相同。

由于 L 能够表达 φ 及其所有子公式，因此也能够表达 ψ 及其所有子公式。接着，根据归纳假设，L 能够表达 $\mathsf{BIND}_{\overline{y} \mapsto P}(\psi)$，也能够表达 $\mathsf{BIND}_{\overline{xy} \mapsto QP}(\psi)$。根据对合取和守卫量化的封闭性，可知 L能够表达

$$\gamma(\overline{x}) := \exists z(G(\overline{x}, z) \wedge \mathsf{BIND}_{\overline{y} \mapsto \overline{P}}(\psi))$$

and

$$\exists z(z = z \wedge \mathsf{BIND}_{\overline{xy} \mapsto \overline{QP}}(\psi)),$$

其中，G 是一个新鲜的关系符号，不出现在 ψ中。接着，根据对一元蕴含的封闭性，我们有 L 也能够表达

$$\chi(\overline{x}) := \big(\bigwedge_i Q_i(x_i)\big) \to \exists z(z = z \wedge \mathsf{BIND}_{\overline{xy} \mapsto \overline{QP}}(\psi)).$$

断言： $\gamma(\overline{x}) \models \chi(\overline{x})$

论断的证明：根据命题 B.4,

$$\mathsf{BIND}_{\overline{xy} \mapsto \overline{QP}}(\psi) \equiv \mathsf{BIND}_{\overline{x} \mapsto \overline{Q}}(\mathsf{BIND}_{\overline{y} \mapsto \overline{P}}(\psi)) \quad (1)$$

因此，根据命题 B.6,

$$\mathsf{BIND}_{\overline{y} \mapsto \overline{P}}(\psi) \models \big(\bigwedge_i Q_i(x_i)\big) \to \mathsf{BIND}_{\overline{xy} \mapsto \overline{QP}}(\psi),$$

由此可得

$$\exists z(\mathsf{BIND}_{\overline{y} \mapsto \overline{P}}(\psi)) \models \big(\bigwedge_i Q_i(x_i)\big) \to \exists z \mathsf{BIND}_{\overline{xy} \mapsto \overline{QP}}(\psi),$$

（因为 z 与 x_i不同），因此 $\gamma(x) \models \chi(x)$成立。至此，断言得证。

由于 L 能够表达 $\gamma(x)$和 $\overline{\chi}(x)$，根据克雷格插值性质，L 能够表达某个 Craig 插值式 $\vartheta(x)$。由于 G 和 Q_i 谓词不出现在 φ中，它们也不出现在 $\vartheta(x)$中，因此，以下二阶蕴含成立:

$$\exists G \gamma(\overline{x}) \models \vartheta(\overline{x}) \models \forall P \chi(\overline{x}).$$

容易看出，$\exists G \gamma(x) \equiv \exists z \mathsf{BIND}_{\overline{y} \mapsto P}(\psi)$。类似地，由命题 B.7 和方程 (1) 可得，$\forall P \chi(x) \equiv \exists z \mathsf{BIND}_{\overline{y} \mapsto P}(\psi))$。因此

$$\exists z \mathsf{BIND}_{\overline{y} \mapsto \overline{P}}(\psi) \models \vartheta(\overline{x}) \models \exists z \mathsf{BIND}_{\overline{y} \mapsto \overline{P}}(\psi)$$

因此，$\vartheta(x) \equiv \exists z \mathsf{BIND}_{\overline{y} \mapsto P}(\psi)$。特别地，这意味着 $\exists z \mathsf{BIND}_{\overline{y} \mapsto P}(\psi)$可在 L 中表达。 □

现在我们可以证明命题 III.2，下面重述该命题。

命题 III.2。设 L 是任意一个具有 CIP、包含所有原子公式，且对守卫量化、合取和一元蕴涵封闭的一阶逻辑片段。那么 $\mathrm{FO}^{\exists, \wedge} \preceq L$。

证明。
对一阶逻辑 $\mathrm{FO}^{\exists, \wedge}$ 的公式 φ 采用强归纳法。基本情形显然成立，因为 L 能表达所有原子公式。对于归纳步骤，若 $\varphi := \psi_1 \wedge \psi_2$，则根据归纳假设，$L$ 能表达 ψ_1 和 ψ_2，因此由对合取封闭可知，L 能表达 φ。现在假设 $\varphi(y) := \exists x(\psi(x, y))$。根据归纳假设以及对守卫量化封闭，$L$ 能表达

$$\gamma(\overline{y}) := \exists x(G(x, \overline{y}) \wedge \psi).$$

此外，根据引理 B.8，我们有 L 可以表达 $\mathsf{BIND}_{\overline{y} \mapsto P}(\psi)$，因此，根据对守卫量化和一元蕴含的封闭性，$L$ 可以表达

$$\chi(\overline{y}) := \big(\bigwedge_i P_i(y_i)\big) \to \exists x(x = x \wedge \mathsf{BIND}_{\overline{y} \mapsto \overline{P}}(\psi)).$$

Claim: $\gamma(\overline{y}) \models \chi(\overline{y})$.

主张的证明：显然，$\gamma(y) \models \exists x \psi$。此外，根据命题 B.6，$\psi \models (\bigwedge_i P_i(y_i)) \mapsto \mathsf{BIND}_{\overline{y} \mapsto P}(\psi)$，由此可得 $\exists x \psi \models \chi(y)$（因为变量 x与 y_1、.....、y_n不同）。因此，$\gamma(y) \models \chi(y)$。

设 $\vartheta(y)$ 是 $\gamma(y) \models \chi(y)$ 在 L 中的任意一个插值公式。由于 G和 P 中的谓词未出现在 ψ中，以下二阶蕴涵均成立：

$$\exists G \exists x(G(x,\overline{y}) \wedge \psi) \models \vartheta(\overline{y}) \models \forall \overline{P}((\bigwedge_i P_i(y_i)) \rightarrow \exists x \mathsf{BIND}_{\overline{y} \mapsto \overline{P}}(\psi)).$$

很容易看出

$$\exists G \exists x(G(x,\overline{y}) \wedge \psi) \equiv \exists x \psi.$$

此外，根据引理 B.7，

$$\psi \equiv \forall \overline{P}((\bigwedge_i P_i(y_i)) \rightarrow \mathsf{BIND}_{\overline{y} \mapsto \overline{P}}(\psi)).$$

由此可得

$$\exists x \psi \equiv \forall \overline{P}((\bigwedge_i P_i(y_i)) \rightarrow \exists x \mathsf{BIND}_{\overline{y} \mapsto \overline{P}}(\psi))$$

（因为 x 与 $y_1, \ldots, y_n$ 不同）。

因此， $\vartheta(y) \equiv \varphi(y)$，故证毕。 □

现在我们可以证明主要结果了。

定理 III.1。设 L 是满足以下条件的一阶逻辑片段：1) GFO $\preceq_{sg} L$；2) L 对自守卫替换封闭；3) L 对合取和析取封闭；4) L 具有 CIP。

则 GNFO $\preceq L$。

证明。

由于 L 能表达自守卫守卫一阶公式，因此它能够表达形如 $\exists x \beta$ 的公式，其中 β 是一个原子公式。因此，根据对自守卫替换的封闭性，我们有 L 对守卫量化封闭。此外， L 能表达任意形如 $\alpha \wedge \neg \beta$ 的自守卫公式，其中 α 和 β 是满足 $free(\alpha) = free(\beta)$ 的原子公式。于是，对于任意可在 L 中表达且满足 $free(\varphi) \subseteq free(\beta)$ 的公式 φ ， $\alpha \wedge \varphi$ 是一个自守卫公式。因此，根据自守卫替换， L 也能表达 $\alpha \wedge \neg(\alpha \wedge \varphi)$，它等价于 $\alpha \wedge \neg \varphi$；所以 L 对守卫否定封闭。若 L 能表达 φ，那么根据对守卫否定和析取的封闭性，它也能表达 $(x = x \wedge \neg P(x)) \vee \varphi$，这等价于 $P(x) \rightarrow \varphi$。因此， L 对一元蕴含封闭。于是，根据定理 III.2， L 能表达一阶逻辑 $FO^{\exists, \wedge}$ 中的所有公式。然后，由于能够表达析取，L 能表达所有合取查询的并。根据 GNFO 的合取查询并语法，通过对自守卫替换的封闭性，结论立即成立。

□