arXiv:2304.08108v1 [physics.optics] 17 Apr 2023

时变介质、相对论与时间之箭

Matias Koivurova[1, 2, *] Charles W. Robson[2], 和 Marco Ornigotti[2]

[1] *Tampere Institute for Advanced Study, Tampere University, 33100 Tampere, Finland and*

[2] *Faculty of Engineering and Natural Sciences, Tampere University, 33720 Tampere, Finland*（日期: 2023年4月18日）

我们研究时变波动学的意义，并展示当波的速度随时间变化时，标准波动方程会如何被修正。特别是，我们证明，当存在恒定的参考速度时，经历纵向加速的波具有明显的相对论特性。此外，加速波动方程仅允许随时间向前传播的解，这些解在材料界面处连续。随后，我们考察电磁波这一特殊情形，发现亚伯拉罕–闵可夫斯基争议是由相对论效应引起的，而光动量实际上在不同介质之间守恒。此外，我们证明，当波沿测地线运动时，加速波守恒能量，并展示了两个示例解。最后，我们简要讨论加速波动方程在时间之箭背景下所起的作用。

I. 引言

近年来，时变介质已成为波动力学中的一种新范式，尤其是在电磁辐射领域 [1]。这是由于高度非线性材料的出现，例如近零介电常数（ENZ）介质；在特定条件下，这类介质的介电函数可能发生幅度大、速度快的调制。研究表明，时变介质能够产生一系列有趣的效应，例如时间散射[2], 时间晶体 [3–5], 光子时间晶体 [6, 7], 以及抗反射时变涂层 [8], , 等等。迄今为止，人们忽略了这样一点：当物质的性质发生变化时，在其中传播的波会经历纵向加速。无论讨论的是哪种类型的波，这一点都成立。

光速或许是自然界最重要的常数。它支配着微观与宏观世界的物理学，为相对论划定边界 [9], , 并且与大量可观测量直接相关 [10–12]。在现代物理学的框架下，通常将光速视为严格恒定的数值 [13]。然而，我们每天都会遇到光速变化的情形：每当光与物质相互作用时，它似乎都会减速。显然，这并非真空光速发生了改变，但尽管如此，它仍是一项重要性质。

然而，这带来了一个问题：尽管电磁波显然会经历纵向加速，但这类加速波并非标准波动方程的解，尽管它们是麦克斯韦方程组的解。由此可见，同样的问题显然存在于所有波动理论中，无论是电磁波还是机械波。在本文中，我们考察波传播速度变化所带来的影响，并推导适用于这种情况的一般波动方程。此处的讨论适用于自由空间以及任何介质中的传播。我们首先推导任意加速波的波动方程，并给出其一般解。这些解具有时间的优先方向，从而确立了微观时间箭头。随后，我们将重点转向电磁波这一特殊情况，并表明速度变化的电磁波会经历相对论效应。此外，当波沿测地线传播时，其能量和动量守恒。这对光子学领域一场延续已久的争论具有重要意义。接着，我们考虑弯曲时空几何；在这种几何中，波在传播过程中会获得能量。

II. 加速波方程

对于光滑函数，微分具有交换性，即迭代求导的结果不取决于各阶导数的运算顺序。因此，在一组光滑函数上与一阶微分算子相乘，在相当一般的意义下是完全合理的 [14]。为简单起见，以下我们仅考虑作用于二次可微函数的微分算子；在这种情况下，高阶导数可能未定义，但与微分算子相乘仍然有效。

A. 推导与一般解

为简单起见，我们考虑 1+1维运动，同时假设以下计算可以推广到三个空间坐标。设函数 f 存在于时空网格 (x,t) 上，使得 $f \equiv f(x,t)$。利用三重乘积法则，我们可以写成 [15]

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\Big|_x \left(\frac{\partial x}{\partial f}\right)\Big|_t \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)\Big|_f = -1. \tag{1}$$

* matias.koivurova@tuni.fi

由于我们考虑的是运动，第三个偏导数可以解释为函数 f 在网格上的速度倒数，即

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\Big|_f = c, \tag{2}$$

我们可以将其代入式（1），而不失一般性。

此外，若假设函数 $g = \partial x/\partial f$ 在给定定义域 $D = \{g \in C^1 : g(f) \neq 0\}$ 上足够光滑，那么它的性质良好；特别是，其逆函数 $g^{-1} = \partial f/\partial x$ 存在且性质也良好。接着，我们可以在式（1）两边乘以 cg^{-1}，并将所有项移至左边，得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x,t) = 0, \tag{3}$$

这里为简洁起见，省略了竖直求值线。此外，若在两边乘以$\partial/\partial t - c\partial/\partial x$，并假设 c 为常数，便可得到熟悉的波动方程

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}, \tag{4}$$

这表明函数 f 是某种波。在早期的研究中，最后这一步是反过来进行的，从而得到单向波动方程（式（3），参见例如文献 [16]）。

读者应注意，到目前为止，上述推导并未提供关于场 f 性质的任何信息；这类信息必须从其他途径推断（例如，从麦克斯韦方程组中）。值得注意的是，推导出标准波动方程所需的唯一假设是：波速在任何地点、任何时刻都保持恒定。

现在来考虑波速随时间变化的情况，即令 $c \equiv c(t)$。上述处理由此得出加速波的波动方程

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = c(t)^2 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} - \dot{c}(t)\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}, \tag{5}$$

其中，$\dot{c} = \partial c/\partial t$ 是波 f 的加速度。请注意，该式不显式依赖位置 x；仅考虑时间依赖，便足以量化传播波的空间变化。

现在来分析式（5）。若对波进行空间傅里叶变换，定义为 $\tilde{f}(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\exp(ikx)dx$，其中 $k = \omega/c_0$ 是波数，ω 是角频率，而 c_0 是某个恒定的参考速度，则可得到如下形式的方程：

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}(k,t)}{\partial t^2} = -\Omega^2(t)\tilde{f}(k,t), \tag{6}$$

其中 $\Omega^2(t) = k^2c(t)^2 - ik\dot{c}(t)$。该方程类似于一个频率随时间变化的谐振子，分析这种谐振子通常需要使用不变量或其他复杂的数学工具 [17–20]。然而，在当前情形下，$\Omega(t)$ 取决于波的速度和加速度，因此存在一个形式如下的简单平面波解

$$\tilde{f}(k,t) \propto \exp\left[{}^{+}_{(-)}\, i\frac{\omega}{c_0}\int c(t)dt\right], \tag{7}$$

其中，仅当 $\int c(t)dt < 0$（或 $\omega < 0$）时，才允许取负号。也就是说，解的符号必须为正。将式（7）代入式（6）即可看出这一点。

有趣的是，现在我们可以通过将参考速度 c_0 设为真空光速，并将速度变化写成对该速度的调制，从而直接类比相对论；令 $c(t) = c_0 n(t)$，其中 $n(t) \in [0,1]$。作此选择后，我们立即发现，式（7）中的积分与广义相对论中的固有时 类似 [13]。具体而言$t' = \int \sqrt{g_{tt}}\, dt$，其中 g_{tt} 是度规的时间分量，$g_{\mu\nu}$ 刻画了波所经历的弯曲时空，并据此计算时间。因此，$n(t) \equiv \sqrt{g_{tt}}$，我们可以将时间 t 认定为静止观察者测量的坐标时间 。这两个时间之比定义了时间膨胀。

回到空间域，我们可以将通解写成沿空间轴正向和负向传播的波的叠加，

$$f(x,t) = A\exp(i\omega t' - ikx) + B\exp(i\omega t' + ikx), \tag{8}$$

其中振幅 A 和 B 取决于具体的解。为简单起见，我们简要考察不同参考系中的空间坐标，并令 $n(t) = n$ 为常数。一般而言，常数 n 在度规号差为正号占优的类闵可夫斯基时空中定义一条测地线[9]。在静止参考系中，我们有 $dx/dt = c(t)$，使得波的前沿位于 $x = \int c(t)dt = c_0 t'$，其中 $t' = tn$。若将两边乘以 k，可得 $kx = \omega t'$。对于一位以实验室时间描述动力学的静止观察者，关系式 $kx' = \omega t$ 必须成立，由此得到 $x' = x/n$。换言之，波在静止参考系中会发生长度收缩。由此不难看出，当不存在引力效应时，函数 $n(t)$将化为狭义相对论中的洛伦兹因子 $\gamma(t) = [1 - c(t)/c_0]^{-1/2}$。

上述推理表明，不仅物质会受到相对论效应的影响，波也会受到影响。具体而言，以接近光速的显著比例运动的波会受到狭义相对论效应的影响，而纵向加速波则会受到广义相对论效应的影响，这让人联想到《引力》。需要强调的是，这些考量适用于所有波，无论它们属于电磁波还是机械波。

B. 时间之箭

让我们简要回顾一下对时间的认识。在日常经验中，时间似乎总是具有一种优先方向。也就是说，时间总是流向未来，远离过去。然而，这种情况并没有确切的理由。正如阿瑟·爱丁顿爵士所写的 [21]：“让我们任意画出一支箭。如果沿着箭头前进，我们发现世界状态中的随机成分越来越多，那么箭头就指向未来；如果随机成分减少，箭头就指向过去。这是物理学所知的唯一差别。”爱丁顿由此创造了“时间之箭”这一术语，并明确将其与热力学第二定律联系起来。迄今为止，这是对时间存在优先方向的最佳解释。尽管如此，这只不过是对宏观物体行为的观察，并非真正的自然定律。

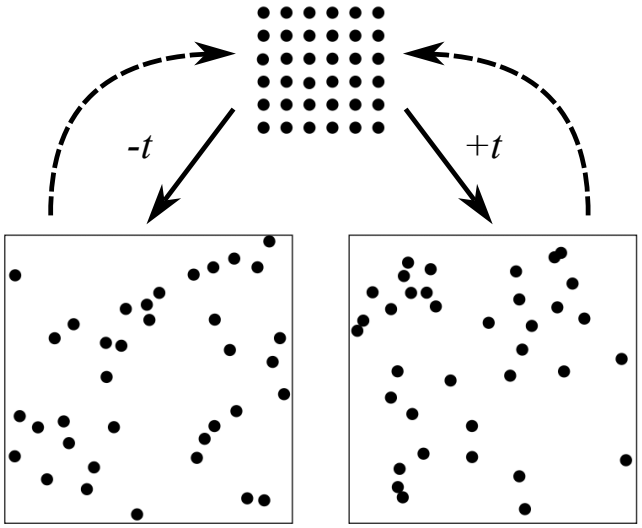


图1. 盒子中一组排斥粒子的示意图。无论微观时间箭头指向正 *or* 时间还是负时间，无序（因此熵）都会增加。虚线箭头表示一次时间反演，它会使无序减少，直到粒子恢复到初始构型。

要理解其中缘由，可以考虑一群排斥粒子，它们处于高度有序的构型中，并位于一个有界区域内，随后向正时间或负时间演化。这种情形在图1中作了示意图。无论是哪种情况，总熵都会增加。然而，如果在演化过程中的任意时刻将时间反演（图1中的虚线），熵就会减少，直到粒子回到最初高度有序的构型，然后熵又开始增加。因此，熵的增加是宏观时间之箭的标志，却无法告诉我们微观时间的方向（参考文献 [21], , 第79页），也无法解释时间为何不能反演（参考文献 [21]„ 第93–94页）。

在此，我们将阐明这些问题。一个极其重要的观察是，当波经历纵向加速时，方程（5）只允许**向正时间方向**传播的解，如方程（7）所示。此外，只有当 $\dot{c}(t) = 0$ 时，才允许沿时间轴反射（即真正的时间反演），但任何反射过程都必然引起加速。因此，波必然经历正时间，而正时间无法反演。请注意，这不同于例如在电磁时变介质背景下的参考文献 [22–27] 中讨论的时间反射。这种术语上的歧义值得加以探讨。

在电磁波的研究背景下，时变介质至少自 20 世纪 50 年代起就已得到研究 [1, 2],但“时间折射”这一术语直到最近才被引入——不久前 [22, 23]。现有文献中可以找到多项关于时空效应的研究，其中常明确使用“时间反射”或“时间折射”这一术语 [22–25]。然而，这通常并非指沿时间维度发生的反射或折射，而是指由于材料属性随时间变化而引起的空间反射 $x \to -x$。例如，文献 [23, 24], 研究了块体材料物理属性发生突然而均匀变化的情形，并详细讨论了时间反射和时间折射的属性。

这是“时间反射”一词最常见的用法，按照文献中引入该术语时的含义，这种用法完全成立。在本研究中，我们讨论的是一种相对于时间原点、沿时间维度发生的反射这一数学过程，即 $t \to -t$，同时保持空间坐标不变。这对任意波而言都构成了真正的时间反演，是一个截然不同的概念。事实上，如果一个波的时间能够被精确反演，它就会以一种能够反转传播方向并消除任何衍射效应的方式传播。

此外，需要指出的是，利用光束进行时间反演的研究已成功开展[26]。这一方法通过彭德里（Pendry）的四波混频法实现 [27], : 在频率为 ω 的探测光束上诱导 -2ω ，使其频率偏移至 $-\omega$，即沿频率轴反射 $\omega \to -\omega$。由于平面波的时间依赖形式为 $\exp(i\omega t)$，这会产生类似于时间反演的效果。我们的理论结果与此并不矛盾，因为即使在这类实验中，时间仍然向前流逝。

我们所报告的解所具有的时间不对称性，实际上是关于微观时间之箭的首个理论成果。换言之，我们找到了一个合理的解释，说明时间为何具有优先方向，至少从波动力学的角度来看是如此。此外，我们还表明，时间不可逆转有一个合理的理论依据，因此熵必然在所有情况下增加，这也为宏观时间箭头提供了重要补充。由于加速波动方程具有普适性，这一结论似乎适用于广泛的情形。

III. 加速电磁波

为了进一步了解加速波动方程及其解，我们需要选择要研究的波的类型。电磁场是纵向加速波的一个重要特例，因为它们默认以真空光速传播，而我们只能使其减速。这会带来一些违背直觉的性质，我们将在后文详细讨论。对于电磁辐射，上述方程中的 $c(t)$表示光速，而 f 表示电场（或磁场）。对于电磁波，相对于真空光速的调制更自然的写法是$c(t) = c_0/n(t)$，因此 $n(t) \in [1, \infty]$，并且可以将其解释为折射率。原则上，n 也可以取更低的值，但要使这类情况具有物理意义，就需要存在色散。

现在，我们可以将电场 $f(x,t)$ 的固有时间定义为 $t' = \int n(t)^{-1} dt$，即电磁波所经历的时间。电磁波参考系中的时间概念似乎并不成立，因为光子沿零测地线运动。然而，固有时间仍有明确的定义，因为电磁波在传播过程中仍会累积相位，而相位取决于时间。请注意，一般而言，常数 $n(t) = n$ 在度规号差为正号占优的类闵可夫斯基时空中定义一条测地线 [9], ，但其特征是具有有效光速 $c = c_0/n$。当$n = 1$取特定值时，即波在真空中传播时，便得到通常的闵可夫斯基时空 $c = c_0$ 。换言之，加速度 $\dot{c}(t)$ 实际上会在电场的运动参考系中诱导出一个非定常度规 $g_{\mu\nu}$ 。在这样的参考系中，场 $f(x,t)$ 的动力学表现为场在弯曲背景中演化。然而，外部观察者测量到的时间为 t，并会像往常一样，将 $f(x,t)$ 的动力学描述为发生在平直时空中。

如果我们再次考察波在$x = c_0 t'$处的前沿，此时固有时间为 $t' = t/n$，就会发现电磁波经历的是时间收缩，而不是时间膨胀。这是因为我们正在使波减速，使其速度低于通常速度；这与上文讨论的机械波加速恰好相反。按照机械波情形的相同步骤，等式两边乘以 k，得到 $kx = \omega t'$。对于以实验室时间描述动力学的静止观察者，我们得到 $x' = xn$ ，因此波会发生长度膨胀。同样，这完全是由于我们使波减速；正加速度则会导致通常的长度收缩。不过，这种效应通常会被并入波数，因此我们可以定义$k' = kn$。这正是传统光学和光子学中采用的关系。

请注意，当从外部观察者的角度来看波速等于真空光速时，固有时间对应于实验室时间，并且式（5）中的加速度项为零，因此上述推理归结为通常的波动方程和一个平面波解。

A. 能量和动量守恒

接下来，我们简要考察静止观察者所观测到的纵向加速波携带的能量和动量。我们可以通过坡印廷矢量$\mathbf{S}$求得能流，而平均能量密度只需将 $S = |\mathbf{S}|$ 除以波速即可。此外，对整个波所占据的体积内的平均能量密度进行积分，即可得到总能量 E；在本例中，其形式为

$$E = w \int_{x_0}^{x_1} \frac{S}{c(t)} dx, \tag{9}$$

其中， w 是沿横向维度积分所得的常数，坐标（x_0, x_1）定义了该体积的长度。这两个空间坐标可以用固有时间表示为$x_0 = c_0 t'_0$和 $x_1 = c_0 t'_1$。因此，进行积分可得 $E = wSn(t)\Delta t'$，其中 $\Delta t' = t'_1 - t'_0$ 可以取为常数。如果 $n(t)$定义了一条测地线，那么对于 n的任意常数值，上述关系可得 $E = wS\Delta t$，因此能量守恒。然而，在弯曲时空中通常并非如此，这是广义相对论中的一个著名结论 [34]。

众所周知，电磁波的动量等于其能量除以相速度，因此能量守恒立即意味着动量守恒。我们也可以从平面波解中看出这一点：无论波经历何种纵向加速，波数 k 在波的运动参考系中始终保持不变。由于波数与波所携带的动量直接相关，我们可以得出结论：纵向加速波的动量是守恒量。更确切地说，它是一个洛伦兹协变标量，因此在洛伦兹变换下保持不变。

B. 亚伯拉罕–闵可夫斯基争议

动量守恒对光子学中历史最悠久的基本问题之一有着直接影响：进入电介质的光子具有怎样的动量？历史上对此存在两种相互竞争的观点，因此这一问题被称为亚伯拉罕–闵可夫斯基争议 [28–32]。

让我们首先将平面波解应用于穿过介电界面的电磁波。在这里，光速会在时间 $t = 0$ 从某个初始值 c_0 突然变为另一个值，我们可以

写作

$$n(t)^{-1} = \frac{1}{n_1} + \frac{n_1 - 1}{n_1[1 + \exp(2tm)]}, \tag{10}$$

其中 m 是一个自由参数。当 m 足够大时，这实质上是对赫维赛德阶跃函数的平滑近似。这里， n_1 是一个比例因子，表示光速在 $t = 0$之后发生的变化，即 $c(t > 0) = c_0/n_1$，并且我们取 n_1 等于材料的折射率。对 t积分，可得固有时间为

$$t' = \frac{t}{n_1} - \frac{n_1 - 1}{n_1} \frac{\ln[1 + \exp(-2tm)]}{2m}. \tag{11}$$

这确保了在 $t = 0$之前，波的时间像在自由空间中一样流逝（$t' = t$）；而进入介质后，固有时间变为 $t' = t/n_1$。图2展示了上述情形，其中 $\omega = 20$、 $n_1 = 3$、$c_0 = 1$的振幅系数是用菲涅耳方程计算的。为清晰起见，时间参考系中未显示反射波。

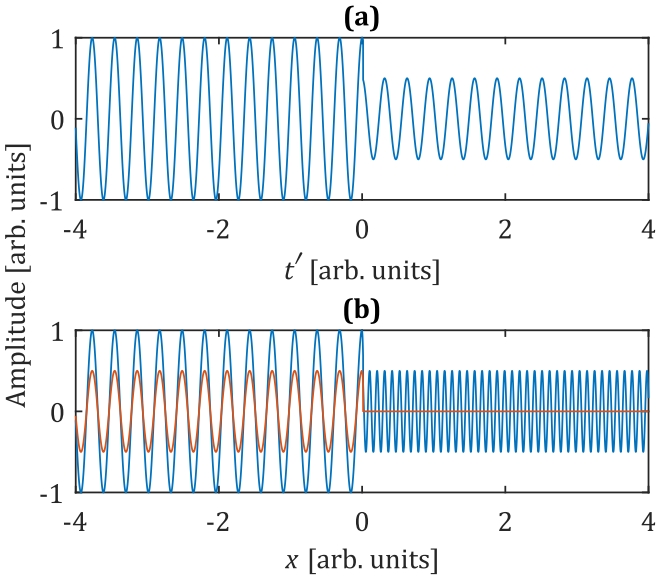


图2. 加速波方程的平面波解：(a) 在波的时间参考系中；(b) 在静止观察者的空间参考系中。蓝色表示入射波，红色表示反射波。

从图2可以看出，在我们的处理方法中，平滑、连续的电场穿过介电界面，这与通过电磁边界条件定义分段连续电场的标准表述等效（至少在这个简单情形下）。事实上，看来我们可以用加速波来重新表述光学和光子学中的许多问题，从而摒弃介电界面。此外，在当前框架下，对波的性质的解释变得更加直观；如果我们坚持采用固有时间描述，由于 ω 和 k 均为常数，能量和动量都守恒。相反，如果我们认为时间应始终取自外部观察者的参考系，那么变化就可以转移到频率上，使得 $\omega' = \omega/n_1$。若坚持这种解释，我们就不得不选择介质内的新波长以守恒能量。然而，这样一来动量便不再守恒，从而引发了著名的亚伯拉罕–闵可夫斯基争议。

C. 时变介质

作为本研究的第二个例子，我们考察无序光子时间晶体 [6, 7], ，它是时变介质的典型实例。我们研究这一特殊情形，是因为其物理过程受加速波动方程支配。无序光子时间晶体定义为介电函数随时间发生突变且随机变化的介质。迄今为止，对光子时间晶体的研究采用的是对介电常数进行离散时间调制。文献 [6] 的作者通过数值模拟表明，当介电函数的调制足够快且足够强时，在无序光子时间晶体中传播的脉冲会呈现速度指数下降的特征，而脉冲的总能量则呈指数增长。文献 [7], 进一步证实了这一结果，这也是我们接下来要研究的情形。

在此，我们认为，整个争议都源于相对论效应；事实上，只要在正确的参考系中考察，这根本就不是问题。确实，对于 $n_1\lambda$和λ/n_1 两种情况，都可以提出令人信服且同样正确的论证。然而，两者都没有触及问题的根源：波长表面上的变化（因而动量也随之变化）是一种相对论效应，而波的动量实际上并未改变。我们的发现得到了文献 [33]中近期提出的启发式论证的支持。与此前解决这一争议的方法不同，本文的形式体系无需区分材料动量和光学动量，大大简化了物理图像。

众所周知，电磁波在材料内部相速度减慢的微观解释，在于各原子中的电荷受到扰动。当电磁场在材料内部振荡时，电荷会以相同的频率来回加速。这种加速会使电荷以相同的频率辐射出自身的电磁波，但通常会有相位延迟，因为电荷的运动可能与驱动波不同相。在介质内部传播的总电磁波，是介质中所有波的叠加；由于其中一些波与驱动波不同相，因此总波会减慢。这种效应可由折射率直接量化。

类似地，在光子时间晶体中，每当波遇到介电函数的变化，就会发生反射和折射。如果介电函数的调制足够快，各个波就会相互重叠。此时，总波再次成为材料中所有波的叠加。持续以足够快的速度对介电函数进行时间调制，会使越来越多的波（通常彼此不同相）在材料内部重叠。这将导致总波减慢，同时振幅增大。因此，无序光子时间晶体的效应可以被视为有效折射率增大的结果。

在我们的研究中，我们不考虑导致波呈指数减速的底层机制。相反，我们只假设存在某种材料，其中会发生这种情况，然后展示在这种情况下加速波动方程的解如何变化。我们的解析解也可以用于模拟离散调制的情形；这种情形只需将大量类似图2所示的波叠加即可。虽然适用于离散情形，但我们的结果也可以视为连续极限，即每个调制段的长度 L 趋于无穷小，也就是说 $L \to 0$。事实上，我们的方法能够为此前采用不连续（或分段连续）方法处理的问题提供连续解，例如光入射到两种介质的界面时。

接下来，令 $c(t)$ 取指数衰减的形式，使得 $c(t) = c_0 \exp(-t/\tau)$，其中 τ 为衰减半衰期。对于这一特定情形，我们可以将平面波解写成如下形式

$$f(t) = \exp\left[i\omega\tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right], \qquad (12)$$

为简洁起见，我们省略了空间依赖项。请注意，我们选用了式（7）中的负号，因为在这种情况下，波的固有时间带有负号。利用式（9），我们得到$E \propto \exp(t/\tau)$。换言之，弯曲时空会导致波违反能量守恒，这正如预期的那样。

由于加速波动方程是线性的，我们可以将叠加积分写成如下形式

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\Omega^2}\right] \times \exp\left[i\omega\tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \exp(-i\omega t_0) d\omega, \qquad (13)$$

这对应于一个谱宽为 Ω、中心频率为 ω_0，且在时域中位于 t_0 的高斯脉冲。计算该积分可得如下形式的时域脉冲

$$f(t) = \Omega \exp\left[-\frac{(t'-t_0')^2}{2T'^2}\right] \exp\left(i\omega_0' t'\right), \qquad (14)$$

其中，指数缩放后的脉冲参数如下：$T' = \exp(t/2\tau)/\Omega$、$t' = \tau\exp(-t/2\tau)$、$\omega_0' = \omega_0 \exp(-t/2\tau)$ 和 $t_0' = t_0 \exp(t/2\tau)$。换言之，式（13）定义了从频域 ω 到指数缩放时域 t' 的傅里叶变换。此外，式（14）描述了共动参考系中初始为高斯形状的脉冲。随着脉冲向正时间移动，其振幅、峰值位置、宽度和中心频率都会同步变化，尽管波本身并不会感受到这种变化。图 3 展示了外部观察者在空间参考系中看到的脉冲解强度，其中 $\tau = 12$、$T = 3$，且初始振幅为 1。

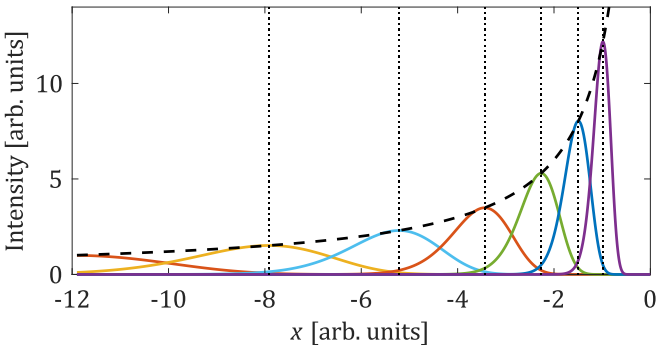


图3. 从外部观察者的参考系来看，加速波动方程的脉冲解对应于波速呈指数下降的情形。虚线表示振幅的演变，点线则标示出等时间间隔的峰值位置。脉冲沿正空间方向传播时会逐渐变短，并且永远不会到达 $x = 0$，因为这需要无限长的传播时间。

如图3所示，脉冲速度减慢、能量增加，并且变得更短。除脉冲变短之外，这些结果与早期研究相符。因此，无序光子时间晶体似乎是研究弯曲时空中波动力学的潜在模拟系统。这一点从实验角度来看尤其有趣，因为已有研究提出，可以通过用超短脉冲照射ENZ介质，在实验室环境中制备此类晶体 [6]。

尽管本研究完全属于理论探讨，但探讨如何切实开展此类实验仍然很有意义。显然，正文中的第一个例子非常简单，因为它对应的是一个简单的介电界面。然而，第二个例子就没那么直接了。

正如参考文献[6], 的补充材料中所讨论的，通过考虑无线电波，可以大大简化这一问题。在这一频段，频率较低且时间周期较长，因此相对容易对信号进行时间调制，从而在实验中也能观察到这些效应。此类实验已通过调制传输线的电容实现。由于无线电波和光都是

电磁波，因此可以预期，这种简化系统的实验结果可直接应用于光学频率。然而，实验实现必然要复杂得多。

同样，正如参考文献[6], 的补充材料中所述，光学范围内的实验基于非线性近零介电常数（ENZ）材料。ENZ材料的介电常数实部接近于零。由于这类材料具有很强的非线性响应，用频率远高于其等离子体频率的超短光学脉冲照射时，其性质可以发生显著改变。在这种情况下，超短泵浦脉冲会被吸收，激发大量电子进入导带，从而改变自由电荷密度。在ENZ波长处，这会使折射率发生可达约1的变化。由于这类材料的响应时间仅为几飞秒，因此只需以适当方式调控泵浦脉冲，使其引起所需的折射率涨落，便可在实验中展示无序光子时间晶体。

尽管介电函数的虚部可能导致显著损耗，使得 ENZ 材料必须足够薄，才能观察到相关效应。此外，超短脉冲可能对 ENZ 材料造成严重的光学损伤，从而限制这种方法的适用性。尽管如此，非线性 ENZ 材料仍是通过实验实现无序光子时间晶体的最有希望的候选材料。

IV. 讨论与结论

总而言之，在这项工作中，我们推导出了纵向加速波的波动方程。这一新颖的加速波动方程适用于机械波和电磁波，或许能引起更广泛的物理学界的兴趣。随后，我们将重点放在电磁波上，尤其关注光速偏离其真空值而发生调制的情形。在我们考察的情况中，这种调制对应于折射率的简单变化，或光速呈指数下降的无序光子时间晶体。我们不考虑光速大于真空值的情形。在分析中，我们发现了加速波的若干重要特征。首先，加速波动方程的解处处连续。这与光子学的通常表述截然不同；在通常表述中，材料界面必须通过连续性条件来处理。其次，此类波会受到相对论效应的影响，并且与亚伯拉罕–闵可夫斯基争议有着明确关联：如果存在恒定的参考速度 c_0，那么当波沿测地线传播时，其能量和动量守恒（即使跨越材料界面也是如此）。第三，脉冲在无序光子时间晶体中传播时能量呈指数增长，这是由于脉冲所经历的时空弯曲所致，并可能为广义相对论提供实验检验。

最后，加速波动方程只允许沿正时间方向传播的解。这是一种非常特殊的不对称性，此前只有在弱相互作用力 [35] 的背景下才发现过。这可能对时间之箭产生重要影响：由于加速波动方程具有普适性，所有光都应遵循它。这甚至可能包括力载体光子，因为任何已知的波动方程都无法描述它们。如果确实如此，那么通过虚光子传递的力无法进行时间反演，并且具有优先的时间方向。需要强调的是，这是一个全新的结果，与热力学时间之箭不同。

未来有几个可能的研究方向。值得将加速波动方程推广到 $3+1$ 维，并刻画其解，这可能有助于解决模拟问题。此外，可以开展实验测试，以验证本文提出的一些发现，尤其是关于无序光子时间晶体的发现。通过适当设计弯曲时空，或许能够产生短而强的脉冲。此外，研究光在接近黑洞事件视界时于当前形式体系下的行为，也会很有意义。

致谢

作者感谢芬兰科学院旗舰计划（PREIN-决议 320165）提供的经费支持。

[1] E. Galiffi、R. Tirole、S. Yin、H. Li、S. Vezzoli、P. A. Huidobro、M. G. Silveirinha、R. Sapienza、A. Al`u 和 J. B. Pendry，时变介质光子学，Adv. Photon. **4**，014002（2022）。[2] F. R. Morgenthaler，电磁波的速度调制，IRE Trans. Microwave Theory Tech.，**6**，167–172（1958）。[3] K. Sacha，建模时间的自发破缺——平移对称性，《物理评论A》，91 (3)，033617 (2015年)。[4] D. V. Else、B. Bauer 和 C. Nayak，《Floquet 时间晶体》，《物理评论快报》，**117**，090402 (2016)。[5] N. Y. Yao、A. C. Potter、I.-D. Potirniche 和 A. Vishwanath，《离散时间晶体：刚性、临界性与实现》，《物理评论快报》，**118**，030401 (2017年)。[6] Y. Sharabi、E. Lustig 和 M. Segev，《无序光子

学时间晶体》，《物理评论快报》**126**，163902 (2021年)。[7] R. Carminati、H. Chen、R. Pierrat 和 B. Shapiro，《随机时变介质中波的普适统计》，《物理评论快报》**127**，094101 (2021年)。[8] V. Pacheco-Pe˜na 和 N. Engheta，《抗反射时域涂层》，《光学》**7**，323–331 (2020)。[9] A. O. Barut，《电动力学与场和粒子的经典理论》（Dover，1981）。[10] K. Huang，《自然界的基本力——规范场的故事》（世界科学出版社，2007）。[11] J. D. Jackson，《经典电动力学》第三版（Wiley，1998）。[12] K. S. Mendelson，《故事》，*c*《美国物理学杂志》**74**，995 (2006)。[13] L. D. Landau 和 E. M. Lifshitz，《场的经典理论》（Butterworth-Heinemann，1975）。[14] M. Nakahara，《几何学、拓扑学与物理学》第二版（泰勒与弗朗西斯出版集团，2003）。[15] A. H. Carter，《经典与统计热力学》（普伦蒂斯霍尔，2001）。[16] D. A. Angus，《单向波动方程：用于地震体波现象建模的全波形工具》，《地球物理学调查》**35**，359–393 (2014年)。[17] H. R. Lewis，《具有含时谐振子型哈密顿量的经典与量子系统》，《物理评论快报》**18**，510 (1967)。[18] D. C. Khandekar 和 S. V. Lawande，《含时谐振子在有无奇异摄动情况下的精确传播子》，《数学物理杂志》16，384–388 (1975)。[19] C. J. Eliezer 和 A. Gray，《关于含时谐振子的一则短论》，《工业与应用数学学会应用数学杂志》**30** 463–468 (1976)。[20] C. W. Robson、Y. Tamashevich、T. T. Rantala 和 M. Ornigotti，《路径积分：从量子力学到光子学》，《APL光子学》**6**，071103 (2021年)。[21] A. Eddington，《物理世界的本质》（剑桥大学出版社）（1929）。[22] J T Mendon¸ca 和 P K Shukla，《时间折射与时间反射：两个基本概念》，《物理学会会刊》**65** 160 (2002)。[23] Y. Xiao、D. N. Maywar 和 G. P. Agrawal，《电磁波在时间边界处的反射与透射》，《光学快报》**39**，574–577（2014年）。[24] B. W. Plansinis、W. R. Donaldson 和 G. P. Agrawal，《光束反射与折射的时间类比是什么？》，Phys. Rev. Lett. **115**，183901（2015年）。[25] G. A. Menendez 和 B. Maes，《石墨烯等离激元在时间不连续面处的时间反射与折射》，《光学快报》**42**，5006–5009（2017年）。[26] S. Vezzoli、V. Bruno、C. DeVault、T. Roger、V. M. Shalaev、A. Boltasseva、M. Ferrera、M. Clerici、A. Dubietis 和 D. Faccio，《时变近零介电常数介质中的光学时间反演》，《物理评论快报》**120**，043902（2018年）。[27] J. Pendry，《时间反演与负折射》，《科学》**322**，71（2008年）。[28] H. Minkowski，H.，《运动物体中电磁过程的基本方程》，哥廷根科学学会通讯，数学与物理学部：**53**，111（1908年）。[29] M. Abraham，M.，《运动物体的电动力学》，巴勒莫数学学会会刊，**28**，1（1909年）。[30] S. Barnett，《亚伯拉罕–闵可夫斯基困境的解决》，《物理评论快报》**104**，070401（2010年）。[31] D. F. Nelson，《动量、伪动量与波动量：迈向解决闵可夫斯基–亚伯拉罕争论》，Phys. Rev. A **44**，3985（1991年）。[32] K. T. McDonald，《亚伯拉罕–闵可夫斯基争论参考书目》https://physics.princeton.edu/ /~mcdonald/examples/ambib.pdf（2017年）。[33] G. Feng、J. Huang，《亚伯拉罕–闵可夫斯基争论的启发式解决方案》，《欧洲物理学杂志 Plus》**136**，520（2021年）。[34] C. W. Misner、K. Thorne、J. A. Wheeler 和 D. I. Kaiser，《引力》（普林斯顿大学出版社，2017年）；[35] M. E. Peskin 和 D. V. Schroeder，《量子场论导论》（CRC出版社，2018年）。