arXiv:2304.08156v1 [math.GR] 17 Apr 2023

ON 小拓扑熵局部紧群

FRANCESCO G. RUSSO♮ 和 OLWETHU WAKA

Abstract. 我们讨论若干类局部紧群上连续端同态的拓扑熵有限性。首先，我们聚焦于阿贝尔情形，并施加紧生成条件，同时指出纤细群的一种有趣性质。其次，我们去掉阿贝尔条件，考察幂零周期局部紧 p-群（p 素数），并将计算简化为西洛 p-子群的情形。最后，我们研究定义在 $\mathbb{Q}_p$ p-进有理数域上的局部紧海森堡 p-群 $\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)$，其中 n 为任意正整数。

Keywords and Phrases: 拓扑熵；局部紧群；动力系统；西洛 p-子群；纤细群；海森堡 p-群。

Mathematics Subject Classification 2020: 22A05，37B40，54C70。

1. Motivations and Main Results

在本文中，局部紧群始终被假定为拓扑群，其拓扑既是豪斯多夫的又是局部紧的。Hood [14] 提出了一个拓扑熵的概念，其中涉及拓扑空间的一致性这一众所周知的概念。他的定义适用于具有左一致性的拓扑群，因为连续端同态是一致连续的（相对于给定的左一致性）。下面让我们在 [14] 这一语境下，对我们在此需要研究的 Hood 熵作更正式的说明。对于局部紧群 G，我们用 $\mathcal{CT}(G)$ 表示 G的单位元的所有紧邻域的集合，并用 μ 表示 G上的一个左不变 Haar 测度。对于 φ 的连续端同态 G、一个元素 $V \in \mathcal{CT}(G)$ 以及一个 $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,

$$C_n(\varphi, V) = V \cap \varphi^{-1}(V) \cap \ldots \cap \varphi^{-n+1}(V) \in \mathcal{CT}(G) \tag{1.1}$$

定义了 V 的第 n 个 φ-余轨道。 φ 的拓扑熵（按照 Hood 的定义）即

$$\mathsf{h}_{\mathsf{top}}(\varphi) = \sup\left\{ \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{-\log \mu(C_n(\varphi, V))}{n} \right) \;\middle|\; V \in \mathcal{CT}(G) \right\}, \tag{1.2}$$

Adler 等人 [1, 3, 18] 研究了上述概念，着重探讨具有与遍历理论和数学物理相关关系的拓扑结构的动力学性质。

沿着 [7, 8], 的思路，我们可以引入局部紧群 G a 的拓扑熵

$$\mathsf{E}_{\mathsf{top}}(G) = \{\mathsf{h}_{\mathsf{top}}(\varphi) \mid \varphi \in \mathrm{End}(G)\}, \tag{1.3}$$

其中 $\mathrm{End}(G)$ 表示 G 的连续端同态环，而 $\mathrm{Aut}(G)$ 表示 G的连续自同构群。这里我们研究 (1.3) 的基数及其与结构性质的关系，如 [3, 4, 8, 17, 21, 22, 24]中所做的那样。

记作加法群 $\mathbb{Q}$ ̂（有理数）的拓扑对偶（按 Pontryagin 的意义），我们注意到

$$\widehat{\inf}\{\mathsf{E}_{\mathsf{top}}(G) \setminus \{0\} \mid G \text{ 是一个紧群}\} = \inf(\{\mathsf{h}_{\mathsf{top}}(\varphi) \mid \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}^n) \;\; n \in \mathbb{N}\} \setminus \{0\}) \tag{1.4}$$

Yuzvinski 的公式 [24] 表明，可以根据 φ 的特征多项式的解来计算 $\mathsf{h}_{\mathsf{top}}(\varphi)$（见 [16, 24]）。考察局部紧群时，我们还注意到，对于任意 $\psi \in \mathrm{End}(\mathbb{R})$，$\mathsf{h}_{\mathsf{top}}(\psi)$ 都是有限的。事实上，我们还能做得更多：给定 $t \in \mathsf{E}_{\mathsf{top}}(\mathbb{R}) \setminus \{+\infty\}$，我们可以构造 $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R})$，使得 $\mathsf{h}_{\mathsf{top}}(\psi) = t$，见 [3, 23]。

Date: 2023年4月4日♮ 通讯作者。

接下来 [7, 8, 10, 22], 我们引入（对于一个局部紧群 G）

$$\mathfrak{E}_0 = \{G \mid \mathsf{E}_{\mathsf{top}}(G) = \{0\}\} \quad \text{and} \quad \mathfrak{E}_{<\infty} = \{G \mid \mathsf{E}_{\mathsf{top}}(G) = [0, +\infty)\} \tag{1.5}$$

并注意到，文献中已有描述 $\mathfrak{E}_{<\infty}$ 和 $\mathfrak{E}_0$ 中阿贝尔情形的结果。$\mathfrak{E}_0$ 中群的刻画可以表明结构定理的存在。例如，有限阿贝尔群属于 $\mathfrak{E}_0$，并可分解为直积。另一方面，关于 $\mathfrak{E}_{<\infty}$ 和 $\mathfrak{E}_0$ 中的非阿贝尔情形，我们所知甚少。

根据[12, 定义 2.2]，记 $\mathbb{P}$ 为全体素数构成的集合。局部紧群 G 的元素 g 称为 *p-element*，如果序列 g^{p^k} 满足 $k \in \mathbb{N}$，且在 G 中趋于单位元。若局部紧群 G 满足 G 与 ..... 相同，则称其为 *p-group*。

$$G_p = \{g \in G \mid g \text{ is a } p\text{-element}\} = \{g \in G \mid \lim_{k\to\infty} g^{p^k} = 1\}. \tag{1.6}$$

局部紧群 G 的极大 p-子群称为 G 的 *p-Sylow subgroup*。注意，当 G 全不连通时，根据 [12, 引理 2.6], ， G_p 是一个闭子群。按照[12, 13], ，我们用 G_0 表示单位元的连通分支，并称 G 为紧覆盖的，如果对于任意 $x \in G$，总能找到 G 的一个紧子群 C，使得 $x \in C$。根据[12, 第 5], 页， G 的紧元素是指满足 $\overline{\langle g\rangle}$ 紧致的元素 $g \in G$，而集合

$$\mathrm{comp}(G) = \{g \in G \mid g \text{ is a compact element }\} \tag{1.7}$$

见 [12, 命题 1.3、引理 1.6]。例如，当 G 为局部紧阿贝尔群时， $G = \mathsf{comp}(G)$，但一般而言，$\mathsf{comp}(G)$只是 G的一个子集，不一定是子群。注意，在 [2, 7, 8]中，$\mathsf{comp}(G)$记作 $B(G)$；类似地，G_0 记作 $c(G)$。按照 [12, 命题 1.3], ，我们称满足以下条件的局部紧群 G 为周期群： $G_0 = 1$，且对所有 $g \in G$，$\overline{\langle g\rangle}$ 都是紧致的。当然，周期局部紧群是全不连通的，因此其 Sylow$p$-子群是闭的，并且根据 [12, 引理 1.6]，$\mathsf{comp}(G) = G$。

若存在G 的有限子集 X 使得 $G = \overline{\langle X\rangle}$，则称局部紧群 G 是拓扑有限生成的。特别地，若 G 是局部紧 p 群，则它具有有限 p-秩，若

$$\mathrm{rank}_p(G) = \max\{\mathrm{rank}_p(H) \mid H \text{ closed subgroup of } G\} \tag{1.8}$$

是一个正整数，其中下列各量也都是正整数

$$\mathrm{rank}_p(H) = \min\{|Y| \mid Y \subseteq H \text{ and } \overline{\langle Y\rangle} = H\}. \tag{1.9}$$

关于紧 p群，另请参见[19, §2.4]。按照 [12, 13], 的定义，若存在一个紧集 C 使得 $G = \langle C\rangle$，则称 G 局部紧群 *compactlygenerated*。可以举出一些周期局部紧群的例子，它们并非紧生成。也可以举出一些例子，说明“拓扑有限生成群”和“紧生成群”是两个不同的概念。

定理 1.1（参见 [13], 定理 7.57）。每个紧生成局部紧阿贝尔群都同构于直和 $\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{Z}^m \oplus K$，其中 K 是一个紧阿贝尔群， d和 m是两个非负整数。

我们将聚焦于若干特定类别的局部紧阿贝尔群，并考察它们的连续端同态的拓扑熵是否有限；定理 1.1 这类结果对于此项研究至关重要。将 $\mathbb{Z}$ 的可数多个副本的笛卡尔积记为 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid x_i \in \mathbb{Z}\}$，并将 $\mathbb{Z}$的可数多个副本的直和记为 $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid x_i \in \mathbb{Z}$ 和 $x_i = 0$，对于几乎所有 $i\}$ 皆如此。以 $\dim(A)$ 表示紧阿贝尔群 A的维数，也就是根据[13, 定义 8.23]， $\mathbb{Q}\otimes A$ 作为 $\mathbb{Q}$-模的维数。另由[13, 推论 7.58] 可知，有限维连通紧阿贝尔群 A 的特征是它同构于有限个环面 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$的直和。

定义 1.2（参见 [9], 第489页）。若对每个同态 $\alpha : (e_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \longmapsto \alpha((e_i)_{i\in\mathbb{N}}) \in G$，都有 $\alpha((e_i)_{i\in\mathbb{N}}) = 0$ 对几乎所有 i 成立，其中 $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是第 i 个分量等于 1、其他分量均为 0 的序列，则称（离散）无挠阿贝尔群 G 是纤细的。

现在可以表述我们的第一个主要结果：

定理 1.3（第一主定理）。设 G 是一个紧生成局部紧阿贝尔群。采用定理 *1.1*中的记号，以下结论成立：

(a). 若 G 是纤细的，则 $G \in \mathfrak{E}_0$。反之，若 $G \in \mathfrak{E}_0$ 且 $K = 0$，则 G 是纤细的。(b). 假设 K 是连通的。当且仅当存在某些非负整数 d、m、s使得 $G \in \mathfrak{E}_{<\infty}$，才有 $G \simeq \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{T}^s$。

请注意，文献 $\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{T}^s$ 中给出了连续自同构（而非端同态）的拓扑熵计算，见 [18, 第475–476]页。此外，[4, 17] 也给出了连续端同态的拓扑熵计算，但主要针对李群。下面我们考察若干非阿贝尔局部紧群中拓扑熵的有限性，并研究 Sylow p-子群的性质。这是我们的第二个主要结果。

定理 1.4（第二主要定理）。当秩$r(G)$有限时，幂零周期局部紧 p群 G 的连续自同构具有有限拓扑熵。

我们总能在 $\mathfrak{E}_{<\infty}$中找到秩为$r(G) = r$ 的周期局部紧 p群 G，例如考察 p-进整数的加法群的 r 个副本的直和 $G = \mathbb{Z}_p^r$。另一方面，也可以找到幂零类为二且具有有限 p秩的周期局部紧 p群，例如由系数取自 p-进有理数域的上三角 $(n+2)\times(n+2)$矩阵构造的海森堡 p群 $\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)$。这些群既非阿贝尔群，也非紧群，并且具有有限拓扑熵和足够大的有限 p秩。

定理 1.5（第三主定理）。海森堡群 $\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)$ 是一个周期的局部紧非阿贝尔 p-群，其幂零类为 2，且秩$r(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)) = 2n$，其中 n 是任意正整数。此外，$\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)$ 属于 $\mathfrak{E}_{<\infty}$，但不属于 $\mathfrak{E}_0$。

术语和记号均为标准用法，并遵循 [9, 12, 13, 15, 19, 20]。在第 1 节陈述主要结果之后，第 2 节根据 [9, 20]总结纤细群理论；第 3 节根据 [1, 3, 10, 7, 8, 22]总结关于周期局部紧群拓扑熵有限性的一些近期结果。第 4 节致力于构造$\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)$，并证明关于这些群的 p-秩的一些结果。最后，我们在第 5 节给出定理1.3、1.4 和 1.5 的证明。

2. Previous Results on Slender Groups

我们回顾纤细群的性质，这些性质最初由 Nunke、Los 和 Sasiada 指出，参见 [9]。

引理 2.1（参见 [9],第 13 章，第 2 节）。

(i). 纤细群的子群也是纤细群；(ii). 纤细群是无挠的；(iii). $\mathbb{Q}$、$\mathbb{Z}_p$ 和 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 不是纤细群；(iv). 纤细群不可能包含任何与 $\mathbb{Q}$、$\mathbb{Z}_p$或 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$同构的子群；(v). 纤细群的直积也是纤细群。特别地，$\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ 是纤细的；(vi). 若无挠阿贝尔群 G 满足：对于任意同态 $f : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to G$，其像$f(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})$都是离散有限生成阿贝尔群，则该群是纤细的。

由 [12, 13, 15, 19], 可知，我们可以考虑一个周期的局部紧致 p-群 G （不一定是阿贝尔群），其中 k 为正整数，并引入子群

$$\Omega_k(G) = \overline{\langle g \mid g^{p^k} = 1\rangle} \text{ and } \Omega^k(G) = \langle g^{p^k} \mid g \in G\rangle, \tag{2.1}$$

这些子群在 G 中是全不变的，并满足 $G/\Omega_k(G) = \Omega^k(G)$。这使我们还可以引入 o

$$\mathrm{Div}(G) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega^k(G), \tag{2.2}$$

出于多种原因，这一概念很有用。例如，如果 G 是一个（离散）阿贝尔群（不一定是周期的局部紧致 p-群），那么上述 Div(G) 仍然定义良好；若 Div(G) $\supseteq G$，我们称 G 为 *divisible*；若 G 的平凡子群是 G 唯一的可除子群，我们则称 G 为 *reduced*（参见 [13, 附录 1，定义 A1.29]）。

引理 2.2（参见 [13], 推论 8.5）。

对于紧阿贝尔群 G，以下条件等价：

(i). G 是全不连通的；

(ii). Div(G) $= 0$;

(iii). G是一个挠群。

Nunke 和 Sasiada [9, 第 13 章，§2] 证明了纤细群不可能是可除群。读者也可参阅 [20, 练习 4.4。9]他们的结果总结如下。

引理 2.3（见 [9], 引理 2.3，Sasiada 定理）。纤细阿贝尔群必定是约化的。此外，如果该群可数，那么约化这一条件对于该群是纤细群而言既是必要条件，也是充分条件。

按照 [9, 第 1 章 §7] 和 [6, §1], 中的讨论，我们可以考虑阿贝尔群 G以及 G的子群格 L(G) 中的滤子 $\mathcal{F}$。显然， $\mathcal{F}$ 在 G上定义了一个拓扑：规定 $\mathcal{B} = \{U \mid U \in \mathcal{F}\}$ 为 G 单位元处的开邻域基，并且对每个$g \in G$ ，陪集 $g\mathcal{B} = \{gU \mid U \in \mathcal{B}\}$ 构成 $g \in G$处的开邻域基。这个拓扑称为 G 上的线性拓扑（更准确地说，是 G上的线性 $\mathcal{F}$-拓扑）。线性群（按照 Orsatti 和 De Marco 的定义）是带有线性拓扑的阿贝尔群。线性群G 称为完备的，若它是豪斯多夫的，且 G 中的每个柯西网在 G中都有极限。De Marco 和 Orsatti[6] 研究了豪斯多夫线性群：

定义 2.4（见 [6]）。若一个阿贝尔群 G 具有线性、完备、非离散且豪斯多夫的拓扑，则称其属于类 $L\Omega$。若 G 属于类 $L\Omega_1$, ，且其拓扑还是可度量化的，则称其属于 $L\Omega$。

事实上，定义 2.4 中的条件并非总是同时满足；也就是说，存在非豪斯多夫的阿贝尔线性群，也存在不完备的阿贝尔线性群，等等。当然，属于 $L\Omega_1$ 的阿贝尔群也属于 $L\Omega$，但例子表明，反过来并不成立。

定理 2.5 （见 [6], 定理 2.3）。 一个无挠阿贝尔群具有可度量化的线性、完备、非离散拓扑，当且仅当它包含 $\mathbb{Z}_p$ 的一个副本，或者包含 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 作为子群。

注意，所有属于 $L\Omega_1$ 的群均由定理 2.5分类。此外，引理 2.1 表明，$\mathbb{Z}_p$ 和 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 都不是纤细群，因此定理 2.5 推出，如果能够赋予 G 可度量化的线性、完备、非离散拓扑，那么它就不可能是纤细群。下面给出这一结果： G

定理 2.6 （见 [6], De Marco 和 Orsatti）。 设 G 是一个约化无挠阿贝尔群。那么 G 是纤细的，当且仅当 G 不属于 $L\Omega_1$。

根据我们目前所见：

引理 2.7。不存在非平凡的紧阿贝尔纤细群。

证明。 假设 G 是一个紧阿贝尔纤细群。引理 2.3 和引理 2.2(a) 与 (b) 表明 G 是全不连通的。因此 G 根据 [13, 定理 134], ，应为有限群逆极限，也就是有限群的射影极限。有限群逆极限阿贝尔群不是纤细的； $\mathbb{Z}_p$ 是一个反例。由此矛盾可知，不存在非平凡的紧纤细群。□

3. Previous Results for Periodic Locally Compact Groups

对于全不连通的局部紧群 G，van Dantzig [5] 证明了 at

$$\mathcal{U}(G) = \{V \leq G \mid V \text{ compact and open}\} \tag{3.1}$$

包含于 $\mathcal{CT}(G)$ 中，且是局部基。根据 [8, 命题 3.4], 可知

$$\mathsf{h}_{\mathsf{top}}(\varphi) = \sup\left\{ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\log |V : C_n(\varphi, V)|}{n} \right) \;\middle|\; V \in \mathcal{U}(G) \right\}, \tag{3.2}$$

其中 $C_n(\varphi, V) \in \mathcal{U}(G)$，且指标 $|V\colon C_n(\varphi, V)|$ 是有限的。事实上，在这种情况下，集合 $\mathrm{E}_{\mathsf{top}}(G)$ 是实数半轴的一个可数子集。

下面列出一些相关事实。第一个涉及离散群。

注 3.1（参见 [8], 注 2.4）。离散群属于 $\mathfrak{E}_0$。

第二个涉及 p-进整数的加法群。

推论 3.2（见 [8], 推论 2.2）。设 G 是一个局部紧群，且 $\varphi \in \mathrm{End}(G)$。如果$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{CT}(G)$是 G 的一个局部基，并且 $\mathcal{S}$ 由 φ不变子群实现，则 $\mathsf{h}_{\mathsf{top}}(\varphi) = 0$。特别地，这适用于 $\mathbb{Z}_p^n$，因此 $\mathbb{Z}_p^n \in \mathfrak{E}_0$。

连续端同态的拓扑熵计算在某种程度上比连续自同构的计算更困难，但我们对全不连通群已有相关结果。

推论 3.3 (见 [8], 引理 2.3，定理 3.11；见 [10], 推论 1.3)。

设 G 是一个局部紧群，且 $\varphi \in \mathrm{End}(G)$。

(a). 若 H 是 φ不变的 G闭子群，则 $h_{top}(\varphi|_H) \leq h_{top}(\varphi)$；此外，若$H$还是正规子群，则 $h_{top}(\bar{\varphi}_{G/H}) \leq h_{top}(\varphi)$，其中 $\bar{\varphi}_{G/H}\colon G/H \to G/H$由 φ诱导。(b). 若 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{U}(G)$ 是 G 的一个局部基，且对所有 n 和 $V \in \mathcal{S}$， $\varphi^{-n}(V)$ 都是 G 的正规子群，则 $h_{top}(\varphi) = h_{top}(\bar{\varphi}_{G/\text{核}\varphi})$。

(c). 若 G全不连通且 $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$，则 $h_{top}(\varphi) = h_{top}(\varphi|_N) + h_{top}(\bar{\varphi}_{G/N})$，其中$N$ 是 G的闭正规子群。

第三种情况涉及 p-进有理数。用 $|-|_p$ 表示 p-进范数，Yuzvinski公式[16, 24]有助于进行以下计算：

定理 3.4（参见 [16]）。对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{Q}_p^n)$，有

$$h_{top}(\varphi) = \sum_{|\lambda_i|_p > 1} \log |\lambda_i|_p, \tag{3.3}$$

where λ_i （其中 $1 \leq i \leq n$）是 φ 在 $\mathbb{Q}_p$的一个有限扩张中的特征值。特别地， $\mathbb{Q}_p^n \in \mathfrak{E}_{<\infty}$.

进一步的有限性判据与有限 p-秩的概念有关。

定理 3.5（参见[12], 定理 3.97）。局部紧阿贝尔 p-群 G 具有有限 p-秩，当且仅当 $G \simeq \mathbb{Z}_p^\alpha \times \mathbb{Q}_p^\beta \times \mathbb{Z}(p^\infty)^\gamma \times E_p$，其中 α、β、γ、δ 是某些非负整数，且 p 是一个秩为 $r(E_p) = \delta$ 的有限群E_p。特别地，G 属于 $\mathfrak{E}_{<\infty}$，且秩 $r(G) = \alpha + \beta + \gamma + \delta$.。 $\mathfrak{E}_0$ 中 G 的情形由条件 $\beta = 0$ 刻画。

上述结果表明， p-秩在 Pontryagin对偶性下保持不变。事实上，

$$\widehat{G} = (\mathbb{Z}_p^\alpha \times \mathbb{Q}_p^\beta \times \mathbb{Z}(p^\infty)^\gamma \times F_p)^\wedge \cong \mathbb{Z}_p^\gamma \times \mathbb{Q}_p^\beta \times \mathbb{Z}(p^\infty)^\alpha \times F_p, \tag{3.4}$$

因此，$\mathrm{rank}_r(\widehat{G}) = \mathrm{rank}_r(G)$。特别地，可以看出 $\mathbb{Q}_p^\beta \in \mathfrak{E}_{<\infty} \setminus \mathfrak{E}_0$, $\mathbb{R}^d \in \mathfrak{E}_{<\infty} \setminus \mathfrak{E}_0$,$\mathbb{Z}_p^\gamma \in \mathfrak{E}_0$, $F_p \in \mathfrak{E}_0$ 和 $\mathbb{Z}(p^\infty)^\alpha \in \mathfrak{E}_0$。下文将介绍阿贝尔情形下的进一步结果。

定理 3.6（参见 [8], 定理 1.1 和 1.2）。设 G 是一个局部紧阿贝尔群。

(i). 若 G 属于 $\mathfrak{E}_{<\infty}$，则其维数应为有限；(ii). 上述 (i) 的逆命题在 G 为紧致且 G/G_0 属于 $\mathfrak{E}_{<\infty}$时成立；(iii). 若 G 属于 $\mathfrak{E}_0$，则 G 是全不连通的；此外，一个仿射有限群属于 $\mathfrak{E}_0$ 当且仅当它属于 $\mathfrak{E}_{<\infty}$；(iv). 若 G 是周期的，则 G 属于 $\mathfrak{E}_0$ 当且仅当其所有 p-Sylow 子群 G_p 也如此。

在用于证明定理 3.6 的论证中，主要思路是在能够控制拓扑熵有限性的部分中寻找端同态的分解。事实上，我们称局部紧群 G、φ、H 的（加法定理成立）当其具有 G、$\varphi \in \mathrm{End}(G)$以及 φ-不变闭正规子群 N，且 G，如果

$$h_{top}(\varphi) = h_{top}(\varphi|_N) + h_{top}(\bar{\varphi}_{G/N}), \tag{3.5}$$

简而言之，我们记作 $AT(G,\ \varphi,\ N)$ 成立。当然，(3.5) 等价于下图可交换

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\iota} & G & \xrightarrow{\pi} & G/N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi|_N} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\varphi}_{G/N}} & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\iota} & G & \xrightarrow{\pi} & G/N & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{3.6}$$

类似地， $AT(G)$ 成立，若 $AT(G,\ \varphi,\ N)$，这取决于 φ和 N，一般而言，所有 φ和 N都满足。从 [8, 命题 3.6], 可知，若 N是 G的全不变开子群，且 $AT(N)$ 成立，则 $AT(G)$ 也成立。

此时，仔细考察定理 1.1 中紧生成局部紧阿贝尔群的结构非常重要。首先，我们注意到，分解中出现的群要么是紧致的，要么是全不连通的，要么同构于 $\mathbb{R}^d$，其中 d 是某个非负整数。基于这一观察，我们记录如下结果：

引理 3.7 （见 [8], 引理 3.1）。 设 A、 B 是两个局部紧群，它们要么是紧致的，要么是全不连通的，要么同构于 $\mathbb{R}^d$ ，其中 d 是某个非负整数；并且 $f \in \mathrm{End}(A)$、$g \in \mathrm{End}(B)$。考虑带有乘积拓扑的 $A \times B$ 以及 $f \times g \in \mathrm{End}(A \times B)$。则

$$\mathsf{h}_{\mathsf{top}}(f \times g) = \mathsf{h}_{\mathsf{top}}(f) + \mathsf{h}_{\mathsf{top}}(g). \tag{3.7}$$

对于局部紧阿贝尔群，计算上的情况再次十分明了。

定理 3.8（参见 [8], 定理 1.8 和 1.9）。设 G 是一个全不连通局部紧阿贝尔群。那么，对于每个 $\varphi \in \mathrm{End}(G)$，我们有

$$\mathsf{h}_{\mathsf{top}}(\varphi) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \mathsf{h}_{\mathsf{top}}(\varphi_{|G_p}). \tag{3.8}$$

如果 G 还是周期的，那么对于所有 p-西洛子群 G_p， $AT(G)$ 成立当且仅当 $AT(G_p)$ 成立。

定理 3.8 (ii) 表明，加法定理可以归约为关于 p-西洛子群的加法定理。这意味着，只需考察 $\mathfrak{E}_0$ 或 $\mathfrak{E}_{<\infty}$中的西洛 p-子群，就有助于确定 $\mathfrak{E}_0$ 或 $\mathfrak{E}_{<\infty}$中的群。

注 3.9。 对于紧生成局部紧阿贝尔群，定理1.1 表明引理 3.7 可以应用，因此我们有一个加法定理。这有助于将连续端同态的拓扑熵计算，化简为由因子导出的连续端同态的拓扑熵计算。

4. Heisenberg groups on p-adic rationals

作为推论3.2的应用，我们可知，具有局部基 p-群 G Ω {的紧致$^n(G)$ $|n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{U}(G)$ 应属于 $\mathfrak{E}_0$。 请注意，这适用于 $\mathbb{Z}_p^n \times F_p$， 其中 F_p 是有限 p-群。

注 4.1. 形如 $\mathbb{Z}_p \times F_p$ 的群，其中 F_p 是有限非阿贝尔 p-群，是在 $\mathfrak{E}_0$中构造出的最简单的无限幂零紧致 p-群示例之一。参见 [15,第 3 节。1], 若有限 p-群 F_p 满足 $|p^n|$ 且 $n > 3$ ，则称其为极大类，其幂零类为$c = n-1$。它们的构造见 [15, 例 3.1.5]。根据菲廷引理 [15, 引理 1.1.21]，现在 $\mathbb{Z}_p \times F_p$ 的幂零类恰为 n 。这意味着，我们已经在 $\mathfrak{E}_0$中得到了一个无限非阿贝尔紧致 p-群的例子，其幂零类可以任意大。

给定交换含幺拓扑环 R，定义在 R 上的海森堡群是由以下形式的 $(n+2) \times (n+2)$ 矩阵构成的群

$$M(A, B; c) = \left(\begin{array}{c|ccccc} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & c \\ \hline 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_n \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & A & c \\ O & I_n & B \\ 0 & O & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

其中，块 O 全由零组成， I_n 表示单位矩阵 $n \times n$， A 表示 n 元行向量 $(a_1, \dots, a_n)$， B 表示 n 元列向量 $(b_1, \dots, b_n)$。当然，当 $n = 1$ 时，我们得到海森堡群作为矩阵群 3×3 的通常表示。

特别地，矩阵 (4.1) 的系数 m_{ij} 满足

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ if } i = j, \\ 0, \text{ if } i > j, \text{ or } 1 < i < j < n-1. \end{cases} \tag{4.2}$$

注意，$\mathrm{GL}(R^{n+2})$ 是维数为 $n+2$、系数属于 R 的所有可逆矩阵组成的一般线性群，而所有矩阵（4.1）的集合记为 $\mathbb{H}_n(R)$，并赋予由 $R^{(n+2)^2}$ 中的乘积拓扑诱导的乘积拓扑。特别地，可以验证 $\mathbb{H}_n(R)$ 是类为 2 的幂零群，因为其中心

$$Z(\mathbb{H}_n(R)) = \overline{[\mathbb{H}_n(R), \mathbb{H}_n(R)]} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & O & c \\ O & I_n & O \\ 0 & O & 1 \end{pmatrix} \mid c \in R \right\} \tag{4.3}$$

在拓扑同构意义下等同于 $(R,+)$，其中心商群

$$\mathbb{H}_n(R)/Z(\mathbb{H}_n(R)) \cong \underbrace{(R,+)\times(R,+)\times\ldots\times(R,+)}_{2n-\text{times}}, \tag{4.4}$$

在拓扑上同构于 $2n$ 个（R，$+$）。注意，对于 $R=\mathbb{Z}$，或 $\mathbb{Z}_p$，或 $\mathbb{Z}(p)$，（4.4）由以下形式的矩阵拓扑生成 4

$$\left(\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \ldots \left(\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \tag{.5}$$

以及相应的矩阵，其中最后一列由 B 代替 A

$$\left(\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \ldots \left(\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \tag{4.6}$$

特别地，对于 $n=1$，我们将在下文描述非阿贝尔紧 p-群 $\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)$。

参见 [19, 第 2] 章，其中指出 Frattini子群 $\mathrm{Frat}(G)$ 定义为有限群逆极限群所有极大开子群的交。此外，它是 G 的特征子群。有限群逆极限群 G 的元素 g 称为 非生成元，如果它可以从 G 的每个生成集中省略；也就是说，~~每当~~ $G=\langle X,\ g\rangle$，则 $G=\overline{\langle X\rangle}$。特别地，

注 4.2. 有限群逆极限群 G 的所有非生成元组成的集合恰好是 Frat(G)，见 [19, 引理 2.8.1]。此外，[19, 引理 2.8.6] 表明，拓扑有限生成仿射有限群 G 的最小生成元数与 G/Frat(G) 的最小生成元数相同。对于紧 p-群 G，这意味着 rank$_p$(G) =rank$_p$(G/Frat(G))。

例 4.3. 对任意素数 p，考虑一个分离双线性映射

$$\omega:(x,y)\in\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p\to\omega(x,y)\in\mathbb{Z}_p \tag{4.7}$$

以及赋予二元运算的集合 $\mathbb{Z}_p^3$

$$\begin{aligned}\square\ :\ ((x_1,y_1,z_2),(x_2,y_2,z_2))\in\mathbb{Z}_p^3\times\mathbb{Z}_p^3\mapsto(x_1,y_1,z_1)\square(x_2,y_2,z_2)\\ =\ \Big(x_1+x_2,\ \ y_1+y_2,\ \ z_1+z_2+\omega(x_1,y_2)\Big)\in\mathbb{Z}_p^3.\end{aligned} \tag{4.8}$$

参见 [2, 定义 2.1 和 2.2] 中的术语。特别地，$\square$ 不是交换运算，并且 $(\mathbb{Z}_p^3,\square)$ 满足群的代数公理。当然，这种构造取决于 ω，且 $(\mathbb{Z}_p^3,\square)$ 与带有矩阵乘法的 $\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)$ 拓扑同构。$\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)$ 的中心、Frattini子群和导群满足

$$\mathrm{Frat}(\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p))\supseteq Z(\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p))=\{M(0,0;c)\mid c\in\mathbb{Z}_p\}=\overline{[\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p),\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)]}\simeq\mathbb{Z}_p. \tag{4.9}$$

现在我们可以考察 $\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)$ 的拓扑生成元和关系，发现

$$\begin{aligned}\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)=\overline{\langle M(1,0;0),M(0,1;0),M(0,0;1)\mid[M(1,0;0),M(0,1;0)]=M(0,0;1),}\\ \overline{[M(1,0;0),M(0,0;1)]=[M(0,1;0),M(0,0;1)]=I_3\rangle}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

根据备注 4.2，p-秩可以约化为 Frattini 商群，即：

$$\mathrm{rank}_p(\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p))=\mathrm{rank}_p(\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)/\mathrm{Frat}(\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)))=2. \tag{4.11}$$

事实上，对任意紧致 p-群 G，根据 [19, 引理 2.8.7 (c)]，$\mathrm{Frat}(G) = \Omega^1(G)[G,G]$。显然，当 $G = \mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)$ 时，这也成立，因此在 (4.9) 中可以如下计算 $\mathrm{Frat}(\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p))$。现在$[\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)\ \mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)] = Z(\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p))$，并且

$$\Omega^1(\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)) = \begin{pmatrix} 1 & p\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 & p\mathbb{Z}_p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

是紧致的，因此 $\mathrm{Frat}(\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)) = \Omega^1(\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p))Z(\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p))$，因为子群 $\Omega^1(\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p))Z(\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p))$ 是紧致的。因此，$\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)/\mathrm{Frat}(\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)) \cong \mathbb{Z}(p) \times \mathbb{Z}(p)$。这证明了（4.11）中的第二个等式。例 4.3 的适用范围比 $R = \mathbb{Z}_p$ 更广，参见 [11, 定理 2.5 和引理 5.5] 以及 [2, §4]。现在我们来看 $\mathbb{H}_n(\mathbb{Z}_p)$ 和 $\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)$，其中 n 足够大。

引理 4.4。海森堡群 $\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)$ 是一个局部紧致的非阿贝尔 p-群，其幂零类为二，并且

$$\mathrm{rank}_p(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)) = \mathrm{rank}_p(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)/Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))) = 2n.$$

证明。观察（4.1）、（4.2）、（4.3）和（4.4），结合 $R = \mathbb{Q}_p$，显然 $\mathbb{H}_n$（$\mathbb{Q}_p$）是一个局部紧致的非阿贝尔 p-群，其幂零类为二。现在考虑（4.1），并注意到

$$H_1 = Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)) \times K_2 \simeq \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p^n \quad \text{and} \quad K_1 \simeq \mathbb{Q}_p^n. \tag{4.13}$$

此外，H_1 是一个闭正规子群，使得

$$\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p) = H_1 \rtimes K_1 = \{h_1k_1 \mid h_1 \in H_1 \text{ and } k_1 \in K_1\} \tag{4.14}$$

$= \{zk_2k_1 \mid z \in Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))\ \ k_2 \in K_2,\ \ k_1 \in K_1\} = \{[u_2,u_1]k_2k_1 \mid k_2,u_2 \in K_2$和 k_1, $u_1 \in K_1\}$，因为我们有

$$Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)) = \overline{[\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p), \mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)]} = \overline{[K_2, K_1]}. \tag{4.15}$$

因此，$\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)$ 的 p-秩可化为 K_1 的秩加上 K_2 的秩，即：$2n$。 □

引理 4.4可用例 4.3的思路证明，也就是说，注意到

$$\mathrm{Frat}(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)) \supseteq Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)), \tag{4.16}$$

并且商群 $\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{Frat}(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))$ 的 p-秩为 $2n$，但我们给出的是基于海森堡群半直积结构的论证。此外，在此处也可以论证 $\mathrm{Frat}(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)) = \Omega^1(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))[\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)\ \mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)]$，，即使在这种情况下，我们没有紧致$p$-群，而是一个周期的局部紧 p-群。

注 4.5. 考察 [2, 引理 2.4 和定理 2。5], 可以证明 $\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)$ 拥有以下形式的阿贝尔极大子群

$$H_1 = Z(\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)) \oplus \overline{\langle M(1,0;0)\rangle} \simeq {\mathbb{Z}_p}^2 \quad \text{and} \quad H_2 = Z(\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)) \oplus \overline{\langle M(0,1;0)\rangle} \simeq {\mathbb{Z}_p}^2 \tag{4.17}$$

满足以下条件：

$$H_1 \cap H_2 = Z(\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)), \quad H_1 \cap \overline{\langle M(0,1;0)\rangle} = 1, \quad H_2 \cap \overline{\langle M(1,0;0)\rangle} = 1, \tag{4.18}$$

$$\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p) = H_1 \rtimes \overline{\langle M(0,1;0)\rangle} = H_2 \rtimes \overline{\langle M(1,0;0)\rangle} \simeq {\mathbb{Z}_p}^2 \rtimes \mathbb{Z}_p. \tag{4.19}$$

特别地，(4.19) 表明，$\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)$ 中的任意元素都能唯一地写成 H_1 中的一个元素与 $\langle M(0,1;0)\rangle = K_1$ 中的一个元素的乘积；而根据 (4.17)，H_1 中的任意元素也都能唯一地写成 $Z(\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p))$ 中的一个元素与 $\langle M(1,0;0)\rangle = K_2$ 中的一个元素的乘积。在图1中，我们在 $\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)$ 的闭子群格 $\mathcal{SUB}(\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p))$ 中标出了上述子群。从下往上看，第一层是平凡子群；第二层有三个与 $\mathbb{Z}_p$ 同构的子群；第三层有两个与加法群 ${\mathbb{Z}_p}^2$同构的子群；第四层则是整个群。请注意，图1仅展示了可由 (4.19) 直接推出的子群，并未展示 $\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)$ 的全部子群。

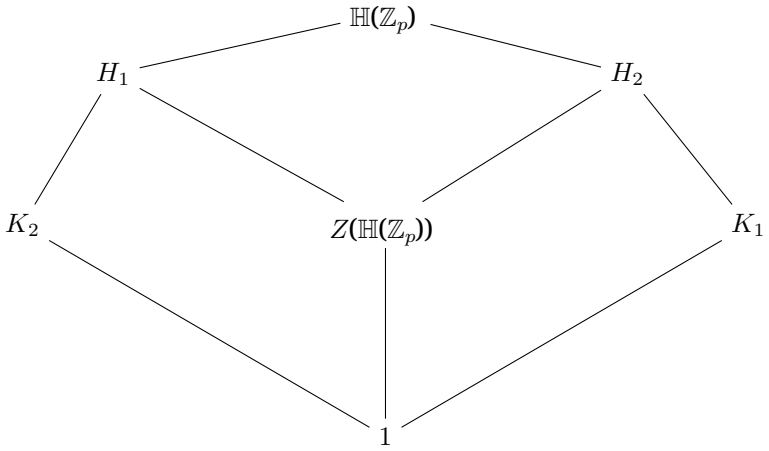

图 1： $\mathcal{SUB}(\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p))$ 中的一些相关子群。

事实上可以看出，给定连续统基数 $\mathfrak{c}$ 并固定 $\xi \in \mathbb{Z}_p$ 后，所有矩阵 $M(a, \xi a;\ t) \in \mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)$ 构成的子集 M_ξ是 $\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)$ 的一个极大阿贝尔子群，当然，这类子群有 $\mathfrak{c}$ 个。

5. 主要定理的证明

定理 1.3 的证明。(a). 若 G 是紧生成局部紧阿贝尔群，则由定理 1.1 可得 $G \cong \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{Z}^m \oplus K$，其中 K 是紧阿贝尔群，且 m、d 是非负整数。进一步假设 G 是纤细的。引理 2.1 表明，纤细群的子群也是纤细的。于是由引理 2.3 可得 $n = 0$，即 $G \simeq \mathbb{Z}^m \oplus K$。由引理 2.7 可得 $K = 0$。因此， $G \simeq \mathbb{Z}^m$; 又由于 $\mathbb{Z}^m \in \mathfrak{C}_0$，结果的第一部分得证。现在假设 $G \in \mathfrak{C}_0$ 且 $G \cong \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{Z}^m$。由于 $\mathbb{R}^d \in \mathfrak{C}_\infty \setminus \mathfrak{C}_0$，根据定理 3.6 (iii)， G 应当是全不连通的，因此 $G \simeq \mathbb{Z}^m$ 是纤细的。至此，结果完全得证。

(b). 由定理 1.1 以及 K 是连通紧阿贝尔群这一假设，可知 $G \simeq \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{Z}^m \oplus K$ 其中 K $\dim(K)$ 最终为无穷大。于是

$$\dim(G) = \dim(\mathbb{R}^d) + \dim(\mathbb{Z}^m) + \dim(K) = d + 0 + \dim(K) \tag{5.1}$$

这表明 $\dim(G) < \infty$ 当且仅当 $\dim(K) < \infty$ 当且仅当对某个非负整数 s 有 $K = \mathbb{T}^s$ ，参见 [13, 推论 8.22 (5)]。由定理 3.6 (i) 可知，若$G \in \mathfrak{C}_{<\infty}$，则 $\dim(G) < \infty$ ，因此 $\dim(K) < \infty$，从而 $G \simeq \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{T}^s$。反过来，假设 $G \simeq \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{T}^s$。我们可以对各项 $\mathbb{R}^d \in \mathfrak{C}_{<\infty}$、$\mathbb{Z}^m \in \mathfrak{C}_0$ 和$\mathbb{T}^s \in \mathfrak{C}_{<\infty}$应用引理 3.7，得出 $G \in \mathfrak{C}_{<\infty}$。注意，拓扑熵的计算是众所周知的，因此我们可以得到 $\mathbb{R}^d \in \mathfrak{C}_{<\infty}$、 $\mathbb{Z}^m \in \mathfrak{C}_0$ 和 $\mathbb{T}^s \in \mathfrak{C}_{<\infty}$，参见 [3, 16, 22]。结论得证。□

定理 *1.4* 的证明。 首先假设 G 的秩为$r_p(G) < \infty$。注意， G 的闭子群和商群仍然是周期的局部紧 p-群。 G的长度为 c的拓扑下中心列具有闭特征 p-子群 $\gamma_i(G)$（其中 $i = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ c$），使得

$$G = \overline{\gamma_1(G)} \geq \overline{\gamma_2(G)} = \overline{[G, G]} \geq \overline{\gamma_3(G)} = \overline{[[G, G], G]} \geq \ldots \geq \overline{\gamma_c(G)} \geq \overline{\gamma_{c+1}(G)} = 1 \tag{5.2}$$

并且对于所有 i，$\overline{\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)}$ 都是局部紧阿贝尔 p 群。还要注意，有限 p 秩的周期局部紧 p 群的闭子群及其商群具有有限 p 秩。这意味着，如果 G 具有有限 p 秩，那么 $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$ 属于定理 3.5 中所述的形式；特别地，$\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$ 的连续自同构具有有限拓扑熵。现在对 c 进行归纳。假设 $c = 1$。那么 G 是一个有限 p 秩的局部紧阿贝尔群，由定理 3.5 可知结论成立，因为在这种情况下， G 的连续自同构应具有有限拓扑熵。假设 $c > 1$ ，且结论对导出长度至多为 $c - 1$ 的所有周期幂零局部紧 p 群均成立。由于 N 是阿贝尔群， $N = \gamma_c(G)$ 的连续自同构具有有限拓扑熵；又由于 G/N 是一个有限 p 秩的局部紧阿贝尔 p 群， G/N 的连续自同构也具有有限拓扑熵。根据全不连通局部紧阿贝尔群的连续自同构加法定理

群（参见 [18, 加法定理 10], 或推论 3.3 (b)），我们得出 $AT(G,\ \varphi,\ N)$ 对每个连续自同构 φ 都成立，其中 G。结论得证。□

定理 *1.5* 的证明。由引理 4.4可知，海森堡群 $\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)$ 是一个周期的、局部紧致的非交换 p群，幂零类为二，秩为$p(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))\ =2n$。因此，我们只需证明 $\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)$ 属于 $\mathfrak{E}_{<\infty}$，但不属于 $\mathfrak{E}_0$。

假设 $n=1$。由 [8, 定理 6.8] 可知，$\mathbb{H}(\mathbb{Q}_p)$ 属于 $\mathfrak{E}_{<\infty}$，但不属于$\mathfrak{E}_0$。那么，$\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)$ 中存在一个子群 S，它作为拓扑群与 $\mathbb{H}(\mathbb{Q}_p)$ 同构；例如，令所有 $i=2$ 均满足条件 $a_i=b_i=0$，3，....., n，即可通过在 (4.1) 中加入该条件来实现 S。这足以说明 $\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)$ 不属于 $\mathfrak{E}_0$，因为它包含一个不属于$\mathfrak{E}_0$ 的子群 S。剩下只需验证 $\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)$ 属于 $\mathfrak{E}_{<\infty}$，为此我们采用 [8, 定理 6.8] 证明中的论证。

考虑 $\varphi\in\mathsf{End}(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))$ 和 $N=\ker\varphi$；我们断言 $\mathsf{h}_{\mathsf{top}}(\varphi)\ <\infty$。

假设 $N\ =1$。我们断言 $\varphi\in\mathsf{Aut}(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))$。由于 $Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))$ 是全不变的，$\varphi_{|Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))}$ 是单射，因此 $\varphi_{|Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))}$ 是 $Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))$ 的连续自同构。特别地，$\varphi^{-1}(Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)))\ =Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))$，因此 $\bar{\varphi}_{|\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)/Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))}$ 在 $\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)/Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))$ 上是单射。事实上，它是 $\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)/Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))\ \simeq\mathbb{Q}_p^{2n}$ 的连续自同构。现在，$\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)$ 是一个全不连通的局部紧群，也可以表示为可数个紧集的并，因此根据开映射定理，φ 是一个连续自同构 [13, 附录 1，练习 EA1.21]。根据推论 3.3 (c)，我们可以对局部紧群的连续自同构应用闭正规子群上的加法定理，由定理 3.5 可知 $\mathsf{h}_{\mathsf{top}}(\varphi)<\infty$，因为 $\mathsf{h}_{\mathsf{top}}(\varphi_{|Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))})\ <\infty$，且 $\mathsf{h}_{\mathsf{top}}(\bar{\varphi}_{\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)/Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))})\ <\infty$。

现在假设 $N\ =\ker\varphi\neq1$。首先证明 $N\cap Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))$ 是非平凡的，然后证明 $Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))\ \subseteq N$。若存在某个 $y\in N\setminus Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))$，则存在 $x\in\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)$ 使得 $[x,y]$ 是非平凡的。这意味着 $N\cap[\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)\ \mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)]$ 是非平凡的，因为$[x,y]\in N$。结论得证，并且 $N\cap Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))$ 是 $Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))$ 的一个非平凡闭子群，因此 $Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))/(N\cap Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)))$ 是挠的，因为它是 $\mathbb{Q}_p$ 的非平凡商群。另一方面，$Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))/(N\cap Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)))\cong\varphi(Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)))$ 是 $\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)$ 的子群（相差连续同构），因此无挠。因此 $Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))/(N\cap Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)))$ 是平凡的，另一个结论 $Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))\ \subseteq N$ 随之得证。由于 N 包含 $Z(\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p))\ =[\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)\ \mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)],$，我们可以根据推论 3.3 (b) 应用加法定理，因此由定理 3.5，$\mathsf{h}_{\mathsf{top}}(\varphi)\ =\mathsf{h}_{\mathsf{top}}(\bar{\varphi}_{\mathbb{H}_n(\mathbb{Q}_p)/N})$ 是有限的。故结论成立。

□

References

[1] R.L. Adler、A.G. Konheim 和 M.H. McAndrew，*Topological entropy*，《美国数学学会汇刊》114（1965）309–319。1、3[2] M. Bonatto 和 D. Dikranjan，广义海森堡群与自对偶性，*Quest. Answ. Gen. Topol.* **37** (2019 89 108 2, 7, 8)，–。R. Bowen，群端同态与齐性空间的熵。[3] *Trans. Amer. Math. Soc.* **153**（1971），401–414。1、3、9[4] A. Caldas 和 M. Patr˜ *Ergodic* ao，局部紧可度量系统的熵及其变分原理，*Theory Dyn. Syst.* **38** 2018 540 565 1, 3 ()，–。[5] *Studien over topologische Algebra*D. van Dantzig，，《学位论文》，阿姆斯特丹 1931 4。G. De Marco 和 A. Orsatti，阿贝尔群上的完备线性拓扑，[6] *Sympos. Math.* **13** (1974 153 161 4)，–。D. [7] Dikranjan 和 M. Sanchis，紧拓扑群中的维数与熵，*J. Math. Anal. Appl.* ()，—。**476** 2019 337 366 1, 2, 3 [8] D. Dikranjan、A. Giordano Bruno 和 F. G. Russo，局部紧阿贝尔群的拓扑熵有限性，*Glasgow Math. J.* **361** (2020 403 442 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10)，—。L. Fuchs，，《Springer》，瑞士 Cham，。[9] *Abelian Groups* 2015 2, 3, 4 [10] A. Giordano Bruno 和 S. Virili，全不连通局部紧群中的拓扑熵，*Ergod.* ()，–。*Theory Dyn. Syst.* **37** 2017 2163 2186 2, 3, 5 [11] ¨ T. Grundhofer 和 M. Stroppel，Verardi群的自同构：环上的小上三角矩阵，*Beitr. Algebra Geom.* **49** (2008 1 31 8)，–。W. Herfort、K. H. Hofmann 和 F. G. Russo，*Periodic Locally Compact Groups*，de Gruyter，2019，柏林。2、3、5 [12] [13] *The Structure of Compact Groups* 2020, 2, 3, 4, 9, 10 K. H. Hofmann 和 S. A. Morris，，《[14] *J. London Math. Soc.* **8** 1974 633 641 de Gruyter》，柏林。B. M. Hood，拓扑熵与一致空间，()，—。1 [15] *The structure of groups of prime power order* C. R. Leedham-Green、S. McKay，，《牛津大学出版社》，牛津，2002。3、6

[16] D. A. Lind 和 T. Ward，solenoid 群的自同构及 p-adic 熵， *Ergod. Theory Dyn. Syst.* **8** （1988），411–419。1、5、9
[17] ˜ 2019 55 80 1, 3 M. Patrao，李群端同态
[18] *Pacific J. Math.* **96** 1981 475
的拓扑熵， *Isr. J. Math.* **234** （），–。J. Peters，局部紧阿贝尔群自同构的熵， （），—488。1、3、10
[19] *Profinite Groups* 2000 2, 3, 7, 8 L. Ribes 和 P. Zalesskii，，《Springer》。D. J. S. Robinson，。
[20] *A Course in the Theory of Groups*
《Springer》， 1996, 3, 4 纽约。K. Schmidt，，《
[21] *Dynamical systems of algebraic origin* ¨ 1995 1
Birkhauser》，巴塞尔，。[22] S. Virili，局部紧阿贝尔
群端同态的熵， *Topology Appl.* **159** （2012），2546—2556。1、2、3、9
[23] *An Introduction to Ergodic Theory* 1969 1 P. Walters，，《Springer》，柏林。S. Yuzvinski，《苏
[24] *Metric properties of endomorphisms of compact groups*
联科学院消息》，数学系列，29（1965）1295–1328（俄文）。英文译本：《美国数学学会译丛》（第2辑）66（1968）63–98。1、5

Francesco G. Russo and Olwethu Waka
Department of Mathematics and Applied Mathematics
University of Cape TownPrivate Bag X1,
Rondebosch 7701Cape Town, South Africa
Emails: francescog.russo@yahoo.comwolwethu@gmail.com