arXiv:2304.08170v1 [math.CO] 17 Apr 2023

通过谱不变量研究分解数与子群交换度

SEID KASSAW MUHIE、DANIELE ETTORE OTERA 和 FRANCESCO G. RUSSO

Abstract. 有限群 G 的分解数 $F_2(G)$，是将 $G = HK$ 分解为其子群 H 和 K的乘积的所有可能分解的数量；而 G 的子群交换度 $\mathrm{sd}(G)$，则是随机选取 G 中的两个子群时它们彼此交换的概率。已知 $\mathrm{sd}(G)$可以用 $F_2(G)$表示。记 $\mathrm{L}(G)$ 为 G的子群格，则 G 的子群 $\Gamma_{\mathrm{L}(G)}$ 的非可置换图，是一个顶点集为 $\mathrm{L}(G) \setminus \mathfrak{C}_{\mathrm{L}(G)}(\mathrm{L}(G))$ 的图，其中 $\mathfrak{C}_{\mathrm{L}(G)}(\mathrm{L}(G))$是包含 G的所有可置换子群的 $\mathrm{L}(G)$ 的最小子格；其边则通过连接满足 $XY \neq YX$的两个顶点 X和Y构成。近期，人们研究了 $\Gamma_{\mathrm{L}(G)}$ 的谱性质，并探讨其与 $F_2(G)$及 $\mathrm{sd}(G)$之间的联系。本文给出一个新的组合公式，从而可以用 $\Gamma_{\mathrm{L}(G)}$的邻接矩阵和拉普拉斯矩阵表示 $F_2(G)$，进而表示 $\mathrm{sd}(G)$。

1. Introduction and statement of the main result

本文中我们只关注有限群。群 G 的子群不可置换图 $\Gamma_{\mathrm{L}(G)}$ 是一个由顶点和边组成的无向无权简单图，定义为有序对

$$\Gamma_{\mathrm{L}(G)} = (V(\Gamma_{\mathrm{L}(G)}), E(\Gamma_{\mathrm{L}(G)})), \tag{1.1}$$

其中，$\mathrm{L}(G)$ 表示 G 的子群格，

$$V(\Gamma_{\mathrm{L}(G)}) = \mathrm{L}(G) \setminus \mathfrak{C}_{\mathrm{L}(G)}\big(\mathrm{L}(G)\big), \tag{1.2}$$

$$E(\Gamma_{\mathrm{L}(G)}) = \{(X, Y) \in V(\Gamma_{\mathrm{L}(G)}) \times V(\Gamma_{\mathrm{L}(G)}) \mid X \sim Y \iff XY \neq YX\}, \tag{1.3}$$

并且 $\mathfrak{C}_{\mathrm{L}(G)}(X)$ 是 $\mathrm{L}(G)$ 中所有与 $X \in \mathrm{L}(G)$ 可交换的子群构成的集合。换言之

$$\mathfrak{C}_{\mathrm{L}(G)}(X) = \{Y \in \mathrm{L}(G) \mid XY = YX\}. \tag{1.4}$$

由于交集

$$\bigcap_{X \in \mathrm{L}(G)} \mathfrak{C}_{\mathrm{L}(G)}(X) = \{Y \in \mathrm{L}(G) \mid YX = XY, \quad \forall X \in \mathrm{L}(G)\} \tag{1.5}$$

一般来说并非 $\mathrm{L}(G)$ 的子格，因此我们将考虑 $\mathrm{L}(G)$ 中包含 (1.5) 的最小子格。记作 $\mathfrak{C}_{\mathrm{L}(G)}(\mathrm{L}(G))$，并出现在上文的 (1.2) 中。

子群不可置换图受到格论中一系列研究的启发，这些研究与相关贡献有相似之处 [6, 7, 18]，其中讨论了图和群的组合性质。

在本文中，我们还将利用图的一些谱性质和不变量，来获取相应群的代数性质信息。

日期：2022年12月17日。关键词和短语。子群交换度；分解数；拉普拉斯矩阵；谱；子群不可置换图。数学主题分类（2020年）：主要分类：20D60、05C25、05C07；次要分类：05C15、20K27。

$\Gamma_{\mathrm{L}(G)}$ 的邻接矩阵是一个方阵

$$A(\Gamma_{\mathrm{L}(G)}) = (a_{X,Y})_{X,Y\in V(\Gamma_{\mathrm{L}(G)})}, \quad \text{where} \quad a_{X,Y} = \begin{cases} 1, & \text{if } (X,Y) \in E(\Gamma_{\mathrm{L}(G)}), \\ 0, & \text{if } (X,Y) \notin E(\Gamma_{\mathrm{L}(G)}). \end{cases} \tag{1.6}$$

注意，顶点 X 在（1.1）中的度定义为

$$\deg(X) = \sum_{Y\in V(\Gamma_{\mathrm{L}(G)})} a_{X,Y}. \tag{1.7}$$

由于 $\Gamma_{\mathrm{L}(G)}$ 是一个没有环的无向图， $\Gamma_{\mathrm{L}(G)}$ 的拉普拉斯矩阵为矩阵

$$L(\Gamma_{\mathrm{L}(G)}) = D - A(\Gamma_{\mathrm{L}(G)}), \tag{1.8}$$

其中 $D = \mathrm{diag}(\deg(X_i))$，对所有 $X_i \in V\left(\Gamma_{\mathrm{L}(G)}\right)$ 和 $i = 1, 2, \cdots, m = |V\left(\Gamma_{\mathrm{L}(G)}\right)|$。这些是谱图论中通常考虑的常见概念，参见[4, 5]。
另一方面，我们也关注所谓的G子群交换度，其研究见于 [1, 22, 29]。它表示 G 的两个子群相互交换的概率，即

$$\mathrm{sd}(G) = \frac{|\{(X,Y) \in \mathrm{L}(G) \times \mathrm{L}(G) \mid XY = YX\}|}{|\mathrm{L}(G)|^2}. \tag{1.9}$$

如果从 G 中任意选取的两个子群都相互交换，那么 G称为 拟哈密顿群。Iwasawa 早已对这类群进行了分类（见 [25]）。阿贝尔群当然是拟哈密顿群，而阶为 8 的四元数群 Q_8 是一个满足 $\mathrm{sd}(Q_8) = 1$的非阿贝尔群。显然， G 是拟哈密顿群，当且仅当 $\mathrm{sd}(G) = 1$; 因此， （1.9）衡量一个群距离成为拟哈密顿群还有多远。引入以下集合将会很有用

$$\mathcal{H}(G) = \{H \in \mathrm{L}(G) \mid \mathrm{sd}(H) \neq 1\} \quad \text{and} \quad \mathcal{K}(G) = \{K \in \mathrm{L}(G) \mid \mathrm{sd}(K) = 1\} \tag{1.10}$$

它们显然确定了如下形式的不交并

$$\mathrm{L}(G) = \mathcal{H}(G) \cup \mathcal{K}(G). \tag{1.11}$$

注意，可置换子群是次正规子群，而正规子群当然是可置换的，参见 [25]。在 [19, 定理 1.3、命题 3.2、推论 3.3], 中得到的组合公式揭示了（1.6）、（1.8）和（1.9）之间的重要关系。例如，如果

$$\mathrm{spec}(A(\Gamma_{\mathrm{L}(G)})) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m\} \quad \text{and} \quad \mathrm{spec}(L(\Gamma_{\mathrm{L}(G)})) = \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m\} \tag{1.12}$$

分别表示邻接矩阵和拉普拉斯矩阵的谱，那么 [19, (3.6)]表明，对于满足 $\mathrm{sd}(G) \neq 1$

$$\mathrm{sd}(G) = 1 - \frac{1}{|\mathrm{L}(G)|^2}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^2 = 1 - \frac{1}{|\mathrm{L}(G)|^2}\sum_{i=1}^{m}\sigma_i. \tag{1.13}$$

另一个重　要的群相关量是 G 分解数

$$F_2(G) = |\{(H,K) \in \mathrm{L}(G) \times \mathrm{L}(G) \mid G = HK\}|; \tag{1.14}$$

它表示 G 作为两个子群 H和 K的乘积的所有可能分解的数量。事实上，如果存在 H和 K 这两个 G 的子群，使得 $G = HK$ （见 [15, 24]），那么我们称群 G 具有分解 HK。

我们还从 [25, §1.1] 得知，$\mathrm{L}(G)$ 的一个区间是集合

$$[K/H] = \{Z \in \mathrm{L}(G) \mid H \leq Z \leq K\}, \tag{1.15}$$

其中 $H \leq K$。注意， $[K/H]$ 是 L(G) 的一个子格。根据[21] M¨莫比乌斯函数μ： L(G) $\times$ L(G) $\to \mathbb{Z}$ 递归定义如下:

$$\sum_{Z\in[K/H]} \mu(H,Z) = \begin{cases} 1, & H = K, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1.16}$$

特别地，考虑 $[G/1] =$ L(G) 时， G 的 Möbius 数为 $\mu(G) = \mu(1, G)$。我们的主要结果如下:

定理 1.1. 设 G 是一个满足 sd(G) $\neq 1$ 的群。那么

$$F_2(G) = \Big(\sum_{K\in\mathcal{K}(G)} |\mathrm{L}(K)|^2 \, \mu(K,G) \Big) + \Big(\sum_{H\in\mathcal{H}(G)} \Big(|\mathrm{L}(H)|^2 - \sum_{i=1}^{m} \sigma_i \Big) \mu(H,G) \Big), \tag{1.17}$$

其中 $m = |V(\Gamma_{\mathrm{L}(H)})|$， 且 $\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m\} =$ spec($L(\Gamma_{\mathrm{L}(H)})$)。特别地,

$$\mathrm{sd}(G) = \frac{1}{|\mathrm{L}(G)|^2} \Big(\sum_{S\in \mathrm{L}(G)} \sum_{W\in\mathcal{K}(S)} |\mathrm{L}(W)|^2 \, \mu(W,S) + \sum_{S\in \mathrm{L}(G)} \sum_{U\in\mathcal{H}(S)} \Big(|\mathrm{L}(U)|^2 - \sum_{j=1}^{k} \tau_j \Big) \mu(U,S) \Big), \tag{1.18}$$

其中 $k = |V(\Gamma_{\mathrm{L}(U)})|$， 且 $\{\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_k\} =$ spec($L(\Gamma_{\mathrm{L}(U)})$)。

近期已有研究探讨子群交换度理论[16, 17, 22, 23, 24, 29], 但仅限于 [18, 19] 沿着谱图论相关概念的思路展开[4, 5]。因此，定理1.1 属于 [18, 19] 这一研究方向，并探索了分解数理论的新联系[15, 23, 24]。第 2 节汇总了与主题相关的参考文献中的一般性信息，以及一些关于群的分拆的经典结果。第 3 节给出定理1.1 的证明及其若干应用。

2. Groups with partitions, factorization number and subgroup commutativity degree

为了计算群的子群不可置换图的边数 G，文献 [18, 引理 2.10、定理 31] 给出了涉及子群交换度的组合公式。下面报告一些结果：[18, 19] 如下:

引理 2.1（参见 [19],引理 2.5）。对于群 G ，有

$$2\,|E(\Gamma_{\mathrm{L}(G)})| = |\mathrm{L}(G)|^2\,(1 - \mathrm{sd}(G)). \tag{2.1}$$

该公式表明，如果已知 sd(G)，我们就可以求出 $\Gamma_{\mathrm{L}(G)}$ 中的边数，反之亦然。此外， [19, 命题 3.2]表明， sd(G) 可以用 $\Gamma_{\mathrm{L}(G)}$的谱不变量表示。

引理 2.2（参见 [19], 定理 1.2）。设 G 是一个满足 sd(G) $\neq 1$ 的群。那么，sd(G) 在 $A(\Gamma_{\mathrm{L}(G)})$ 的谱下保持不变。特别地,

$$\mathrm{sd}(G) = 1 - \frac{1}{|\mathrm{L}(G)|^2} \sum_{X,Y\in V(\Gamma_{\mathrm{L}(G)})} a_{X,Y}. \tag{2.2}$$

上述公式使我们能够将一种谱性质的方法与另一种组合性质的方法对应起来（参见 [1, 30, 16, 23]），因为 sd(G) 可以通过 $F_2(G)$ 的公式求得

$$\mathrm{sd}(G) = \frac{1}{|\mathrm{L}(G)|^2} \sum_{H \in \mathrm{L}(G)} F_2(H). \tag{2.3}$$

事实上，(2.3)表明，子群交换度的计算可以归结为分解数的计算。这带来了对 sd(G) 的重要数值计算，借助 $F_2(H)$，因为研究发现，对于若干类群， $F_2(H)$ 可以用高斯三项式整数表示。因此，我们可以将$\Gamma_{\mathrm{L}(G)}$ 的谱不变量与 $F_2(G$联系起来，如下所示。

推论 2.3 (参见[19], 引理 2.6)。 对于群 G ，我们有

$$2\ |E(\Gamma_{\mathrm{L}(G)})| = |\mathrm{L}(G)|^2\ -\ \sum_{H \in \mathrm{L}(G)} F_2(H). \tag{2.4}$$

现在我们介绍群分割理论领域中的一些经典概念，主要参见 [3, 9, 10, 11, 32]。

定义 2.4（参见 [10],定义，第 7.1 节）。给定一个素数 p 和一个群 G,

$$H_p(G) = \langle g \in G \mid g^p \neq 1 \rangle \tag{2.5}$$

是 G的 $Hughes\ subgroup$ 。

根据定义 2.4， $H_p(G)$ 是 G 的最小子群，且 G 的所有元素在该子群之外的阶均为 p。当然，如果 G 的 exp(G) $= p$，那么 $H_p(G) = 1$。此外， $H_p(G)$ 是 G中的特征子群。读者可参阅 [10, 第 7] 章，了解休斯子群及其在具有非平凡分割的群理论中的作用。

定义 2.5（见 [32], 第575页）。若群 G 是 $Hughes\text{-}Thompson type$ 群，且它不是 p-群，并且对于某个素数 p有 $H_p(G) \neq G$ ，则称其为 $Hughes\text{-}Thompson type$ 群。
可以证明，按照定义 2.5 ，这些群具有 $H_p(G)$ 是 $|G$的幂零子群： $H_p(G)| = p$，见 [9]。此处省略定义细节，关于 [14, Definition 8.1, Kapitel V, §8] 的概念，请参阅 $Frobenius\ group$；关于 [14, Bemerkungen 10.15, 10.17, Kapitel II, §10] 的概念，请参阅 $Suzuki\ group$Sz(2^{2n+1})。起初，Baer、Kegel 和 Kontorovich 对具有划分的群进行了分类，而下面的结果归功于 Farrokhi： [3, 9, 11, 32]

定理 2.6（参见[8], 分类定理，第119–120页）。设 G 是一个具有非平凡分划的群。那么 G 同构于以下群中的恰好一个：

(i). S_4；(ii). 一个 p群，满足 $H_p(G) \neq G$；
(iii). 一个休斯-汤普森型群；(iv). 一个
Frobenius群；(v). 当 $p^n \geq 4$时的 PSL(2, p^n)；
(vi). 当 $p^n \geq 5$ 为奇素数幂时的 PGL(2, p^n)；
(vii). Sz(2^{2n+1})。

我们在此回顾定理 2.6，因为大多数具有非平凡分割的群的子群交换度都已计算出来。下面我们进一步详细说明。例如，Farrokhiand Saeedi [23, 24] 在定理 2.6 的 (i)、(v) 和 (vi) 中，完全确定了群的分解数。

命题 2.7 (参见 [24], 定理 2.4)。 射影特殊线性群 $\mathrm{PSL}(2,\ p^n)$ 具有

$$F_2(\mathrm{PSL}(2,p^n)) = \begin{cases} 2|\mathrm{L}(\mathrm{PSL}(2,p^n))| + 2p^n(p^{2n}-1) - 1 & if\ \ p=2\ and\ n>1, \\ 2|\mathrm{L}(\mathrm{PSL}(2,p^n))| + p^n(p^{2n}-1) - 1 & if\ \ p>2, n>1,\ and\ (p^n-1)/2 \\ & is\ odd, but\ p^n \neq 3,7,11,19,23,59, \\ 2|\mathrm{L}(\mathrm{PSL}(2,p^n))| - 1 & if\ \ p>2, n>1,\ and\ (p^n-1)/2 \\ & is\ even, but\ p^n \neq 5,9,29. \end{cases}$$

在其他情形下,

$$F_2(\mathrm{PSL}(2,p^n)) = 17, 27, 237, 1141, 2033, 4935, 17223, 48261, 68799, 780695$$

如果 $p^n = 2$, 则分别为 3、5、7、9、11、19、23、29、59。

当然，我们希望数值计算 $|\mathrm{L}(\mathrm{PSL}(2,\ p^n))|$ 命题 2.7 中的值，这可以通过不同方法实现。例如，Shareshian [27] 计算了 ¨莫比乌斯函数（1.16）对于 PSL(2, p^n的取值，这有助于求出 $|\mathrm{L}(\mathrm{PSL}(2,\ p^n))|$。Dickson 提出了另一种方法：我们可以列出 PSL(2, p^n的所有子群并逐一计数。从历史上看，这是研究 $|\mathrm{L}(\mathrm{PSL}(2,\ p^n))|$的第一种方法。

命题 2.8 (Dickson 定理，参见 [14], Hauptsatz 8.27,Kapitel II, §8)。PSL(2, p^n) 的子群如下:

(i). $p^n(p^n \pm 1)/2$ 阶为 d 的循环子群 C_d，其中 d 是 $(p^n \pm 1)/2$ 的因数；(ii). $p^n($ $p^{2n}-1)/(4d)$ 阶为 $2d$ 的二面体子群 D_{2d}，其中 d 是 $(p^n \pm 1)/2$ 的因数，且 $d > 2$ 和 p^n $(p^{2n}-1)/24$ 二面体子群 D_4；(iii). $p^n(p^{2n}-1)/24$ 交错子群 A_4；(iv). 当 $p^n \equiv 7$ 模 8 时的 $p^n(p^{2n}-1)/24$ 对称子群 S_4；(v). 当 $p^n \equiv \pm 1$ 模 10 时的 $p^n(p^{2n}-1)/60$ 交错子群 A_5；(vi). $p^n(p^{2n}-1)/(p^m(p^{2m}-1))$ 子群 PSL(2, p^n), 其中 m 是 n 的因数；(vii). 当 $m \leq n$ 时的初等阿贝尔群 C_p^m；(viii). $C_p^m \rtimes C_d$，其中 d 同时整除 $(p^n-1)/2$ 和 p^m-1。

一个结果，wh 与命题 2.7类似的结论适用于射影一般线性群 s.

命题 2.9 (参见 [24], 定理 2.5)。 对于任意 $p > 2$ 令 M 为$G = \mathrm{PGL}(2,p^n)$ 中唯一一个与 $\mathrm{PSL}(2,p^n)$同构的子群。如果 $p^n > 29$，则

$$F_2(G) = \begin{cases} 3p^n(p^{2n}-1) + 4|L(G)| - 2|L(M)| - 3 & if\ n\ even\ or\ p \equiv 1 \pmod 4, \\ 4p^n(p^{2n}-1) + 4|L(G)| - 2|L(M)| - 3, & if\ n\ odd\ and\ p \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

在其他情况下,

$$F_2(G) = 177, 1103, 3083, 4919, 15549, 14529, 31093, 58429, 111567, 99527, 144297, 192349$$

分别为 $p^n = 3$、5、7、9、11、13、17、19、23、25、27、29。

本质上，我们可以按照 2.6 中组合数学和数论的方法，计算定理中提及的所有群的分解数 [1, 2, 23, 24],但我们仅聚焦于 PSL(2, p^n) 和 PGL(2, p^n)，以展示我们赋予 $\Gamma_{\mathrm{L}(G)}$ 的谱不变量的重要应用。

根据命题 2.7 和 2.9，要精确计算分解数，应对各子群格的基数进行数值计算。具体细节如下

同样在 [23, 24] 从这个意义上说，核心思想是引入 M¨obius 函数（1.16），这一做法最初由 Hall 提出 [13]。关于 p-群的情形，早已为人所知：

引理 2.10（见[12]）。对于一个阶为 p^n 的 p-群 G，除非 G 是初等阿贝尔群，否则有 $\mu(G) = 0$；若 G 是初等阿贝尔群，则有 $\mu(G) = (-1)^n p^{\binom{n}{2}}$。

对于 在对称群的情形下，Shareshian [26] 和 Pahlings [2 计算了 $\mu(1, S_n)$。 0].

命题 2.11（见 [26], 定理 1.6、1.8、1.10）。

(i). *Let p be a prime. Then $\mu(1, S_p) = (-1)^{p-1}\frac{p!}{2}$.*

(ii). $\mu(1, S_n) = \begin{cases} -n!, & \text{if } n\text{-}1 \text{ is prime and } p=3 \bmod 4, \\ \frac{n!}{2}, & \text{if } n=22, \\ \frac{-n!}{2}, & \text{otherwise}, \end{cases}$

(iii). *Let $n = 2^\alpha$ for an integer $\alpha \geq 1$. Then $\mu(1, S_n) = \frac{-p!}{2}$.*

除对称群外，Shareshian [27] 还计算了射影一般线性群、射影特殊线性群以及铃木群的 $\mu(1, G)$，见 [26, 27]。

3. Proof of the main theorem and some applications

我们的主要结果通过莫比乌斯函数将群的分解数与拉普拉斯矩阵的谱联系起来。

定理的证明*1.1*。 在群中 G 我们总有

$$F_2(G) = \sum_{T \in \mathrm{L}(G)} \mathrm{sd}(T)\ |\mathrm{L}(T)|^2\ \mu(T, G) \tag{3.1}$$

这只是将莫¨比乌斯反演公式应用于（2.3）。

由[18] 可知， $\Gamma_{\mathrm{L}(G)}$ 在 G 为拟哈密顿时是零图。因此，在下文中，我们假设 G 不是拟哈密顿的，并且 K 是G的 sd(K) 的任意子群 $= 1$。因此， $\Gamma_{\mathrm{L}(K)}$ 是零图。同样，我们假设 H 是 G 的 sd(H) $\neq 1$的任意子群。因此， $\Gamma_{\mathrm{L}(H)}$ 存在且不是零图。由引理2.2，对于 $m_T = |V\ (\Gamma_{\mathrm{L}(T)})\ |$

$$\mathrm{sd}(T) = 1 - \frac{1}{|\mathrm{L}(T)|^2} \sum_{i=1}^{m_T} \sigma_i. \tag{3.2}$$

因此我们可以使用（3.1），得到

$$F_2(G) = \sum_{T \in \mathrm{L}(G)} \Big(|\mathrm{L}(T)|^2 - \sum_{i=1}^{m_T} \sigma_i \Big) \mu(T, G). \tag{3.3}$$

但是，如果 $T \in \mathcal{K}(G)$ 满足 (1.11)，那么 $\Gamma_{\mathrm{L}(K)}$ 就是零图，因此我们可以假设每个 $\sigma_i = 0$关于 $L(\Gamma_{\mathrm{L}(K)})$。由此可得

$$F_2(G) = \sum_{K \in \mathcal{K}(G)} \Big(|\mathrm{L}(K)|^2 - \sum_{i=1}^{m_K} \sigma_i \Big) \mu(K, G) + \sum_{H \in \mathcal{H}(G)} \Big(|\mathrm{L}(H)|^2 - \sum_{i=1}^{m_H} \sigma_i \Big) \mu(H, G) \tag{3.4}$$

$$= \sum_{K\in\mathcal{K}(G)} \Big(|\mathrm{L}(K)|^2\mu(K,G)\Big) + \sum_{H\in\mathcal{H}(G)} \Big(|\mathrm{L}(H)|^2 \ - \sum_{i=1}^{m_H}\sigma_i \Big)\mu(H,G),$$

其中 $m_H = m = |V(\Gamma_{\mathrm{L}(H)})|$，如所声称。
根据（2.3）和（3.4），现在考虑任意一个 $S \in \mathrm{L}(G)$ 及其对应的划分 $\mathrm{L}(S) = \mathcal{H}(S) \cup \mathcal{K}(S)$，如同在 G（1.11）中所做的那样。我们得到

$$|\mathrm{L}(G)|^2 \ \mathrm{sd}(G) = \sum_{S\in\mathrm{L}(G)} F_2(S) \tag{3.5}$$

$$= \sum_{S\in\mathrm{L}(G)} \Big(\sum_{W\in\mathcal{K}(S)} |\mathrm{L}(W)|^2 \ \mu(W,S) + \sum_{U\in\mathcal{H}(S)} \Big(|\mathrm{L}(U)|^2 \ - \sum_{j=1}^{k}\tau_j \Big)\mu(U,S)\Big)$$

$$= \sum_{S\in\mathrm{L}(G)} \sum_{W\in\mathcal{K}(S)} |\mathrm{L}(W)|^2 \ \mu(W,S) + \sum_{S\in\mathrm{L}(G)} \sum_{U\in\mathcal{H}(S)} \Big(|\mathrm{L}(U)|^2 \ - \sum_{j=1}^{k}\tau_j \Big)\mu(U,S)$$

与 $\{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_k\} = \mathrm{spec}(L(\Gamma_{\mathrm{L}(U)}))$ 相对应。结论随即得出。 □

当然，我们可以重复定理 1.1的证明，将（3.2）替换为（1.13）中的第一个等式，并使用 $\mathrm{spec}(A(\Gamma_{\mathrm{L}(G)}))$，而不是 $\mathrm{spec}(L(\Gamma_{\mathrm{L}(G)}))$.

推论 3.1。设 G 是一个满足 $\mathrm{sd}(G) \neq 1$ 的群。那么

$$F_2(G) = \Big(\sum_{K\in\mathcal{K}(G)} |\mathrm{L}(K)|^2 \ \mu(K,G)\Big) + \Big(\sum_{H\in\mathcal{H}(G)} \Big(|\mathrm{L}(H)|^2 \ - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^2 \Big)\mu(H,G)\Big), \tag{3.6}$$

其中 $m = |V(\Gamma_{\mathrm{L}(H)})|$ 且 $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\} = \mathrm{spec}(A(\Gamma_{\mathrm{L}(H)}))$。特别地，

$$\mathrm{sd}(G) = \frac{1}{|\mathrm{L}(G)|^2}\Big(\sum_{S\in\mathrm{L}(G)} \sum_{W\in\mathcal{K}(S)} |\mathrm{L}(W)|^2 \ \mu(W,S) + \sum_{S\in\mathrm{L}(G)} \sum_{U\in\mathcal{H}(S)} \Big(|\mathrm{L}(U)|^2 - \sum_{j=1}^{k}\rho_j^2 \Big)\mu(U,S)\Big), \tag{3.7}$$

其中 $k = |V(\Gamma_{\mathrm{L}(U)})|$ 和 $\{\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_k\} = \mathrm{spec}(A(\Gamma_{\mathrm{L}(U)}))$。

我们给出定理 1.1的若干应用，但有必要作一些相关说明。

注 3。 2. 假设要计算 $F_2(G)$，其中 $G = \mathrm{PSL}(2,p^n)$。我们可以按如下步骤进行：(1). 使用命题 2.7 计算 $|\mathrm{L}(G)|$，应用命题 2.8。(2). 应用定理 1.1 的 (1.17)，但为此我们应事先：(a). 确定 (1.17) 中的 $\Gamma_{\mathrm{L}(H)}$ 和 $\mathrm{spec}(L(\Gamma_{\mathrm{L}(H)}))$；(b). 求出 (1.17) 中的 M¨obius 数 $\mu(H,G)$ 和 $\mu(K,G)$。(c). 求出 (1.17) 中的 $|\mathrm{L}(H)|$ 和 $|\mathrm{L}(K)|$。

方法（1）已在[24, 引理 3.2、推论 33]中提出。方法（2）在此首次介绍，显然比方法（1）更难，但有 GAP 等 [31] 软件和 NewGraph [28] 可更好地辅助完成步骤（2a）、（2b）和（2c），因此效率很高。我们简要介绍了用于计算相应子群交换度的类似技巧。

备注 3.3。 假设要计算 $\mathrm{sd}(G)$（其中 $G = \mathrm{PSL}(2,p^n)$）。我们可以按如下步骤进行：(I)。结合命题 2.7 和 2.8 来计算 $F_2(H)$，其中 $H \in \mathrm{L}(G)$ 使用公式（2.3）。

(II)。应用定理 1.1 的（1.18），但为此我们应事先完成以下工作：(a)。确定（1.18）中的 $\Gamma_{\mathrm{L}(U)}$, $L(\Gamma_{\mathrm{L}(U)})$ 和 spec($L(\Gamma_{\mathrm{L}(U)})$)；(b)。求出（1.18）中的 M¨obius 数 $\mu(W,S)$ 和 $\mu(U,S)$。(c)。求出（1.18）中的 $|\mathrm{L}(U)|$ 和 $|\mathrm{L}(W)|$。(III)。计算 $|\mathrm{L}(G)|$ 和 spec($L(\Gamma_{\mathrm{L}(G)})$) 后，应用（1.13）。

方法（I）已用于 [24, 定理 3.4]。方法（II）在此首次提出。方法（III）已在[19]中引入。（II）与（III）之间的差别很微妙：对于小群，我们当然更倾向于采用（III）；但对于 $\mathcal{K}(S)$ 在（1.18）中较大而 $\mathcal{H}(S)$ 较小（反之亦然）的大群，（II）能很快对 sd(G) 作出定性评估。例如，极小非阿贝尔群是指非阿贝尔群，但其所有真子群都是阿贝尔群。在这种情况下，根据定义，有 $\mathcal{K}(M) = \mathrm{L}(M) \setminus \{M\}$ 且 $\mathcal{H}(M) = \{M\}$。因此，此处（II）比（III）更方便。请注意，Redei 对极小非阿贝尔群进行了分类，见 [14, Aufgabe 14, Kapitel III, §5]。以下示例以备注 3.2 和 3.3 的思路阐释定理 1.1。

例 3.4。对称群 S_4 由以下元素生成：$S_4 = \langle a,\ b,\ c \mid a^2 = b^3 = c^4 = abc = 1\rangle$，其中 $a = (12)$, $b = (123)$ 和 $c = (1234)$。众所周知，所有正规子群构成给定群的子群格的一个子格（见 [25]）。换言之，所有正规子群组成的集合 $\mathrm{N}(S_4)$ 是 S_4 的子群格 $\mathrm{L}(S_4$的一个子格，并且有

$$\mathrm{N}(S_4) = \{\{1\}, \langle (12)(34), (13)(24)\rangle, A_4, S_4\}. \tag{3.8}$$

此外，可以验证

$$\mathfrak{C}_{\mathrm{L}(S_4)}(\mathrm{L}(S_4)) = \mathrm{N}(S_4), \tag{3.9}$$

因为我们有

$$\begin{gathered}\mathrm{L}(S_4) = \{\{1\}, \langle (12)\rangle, \langle (13)\rangle, \langle (23)\rangle, \langle (14)\rangle, \langle (24)\rangle, \langle (34)\rangle, \langle (13)(24)\rangle, \langle (14)(23)\rangle, \langle (12)(34)\rangle,\\ \langle (123)\rangle, \langle (124)\rangle, \langle (134)\rangle, \langle (234)\rangle, \langle (1234)\rangle, \langle (1324)\rangle, \langle (1423)\rangle, \langle (12)(34), (13)(24)\rangle, \langle (13), (24)\rangle,\\ \langle (14), (23)\rangle, \langle (12), (34)\rangle, \langle (123), (12)\rangle, \langle (124), (12)\rangle, \langle (134), (13)\rangle, \langle (234), (23)\rangle,\\ \langle (1234), (13)\rangle, \langle (1243), (14)\rangle, \langle (1324), (12)\rangle, A_4, S_4\}.\end{gathered} \tag{3.10}$$

$\mathrm{L}(S_4)$ 中有 30 个元素，它们分为 11 个共轭类和 9 种同构类型。容易验证，$\mathrm{L}(S_4)$ 中有

- 9 个与 C_2 同构的子群；- 4 个与 C_3 同构的子群；- 3 个与 C_4 同构的子群；- 3 个与 $C_2 \times C_2$ 同构的子群；- 4 个与 S_3 同构的子群；- 3 个与 D_4 同构的子群。

特别地，我们发现

$$|V(\Gamma_{\mathrm{L}(S_4)})| = |\mathrm{L}(S_4) \setminus \mathrm{N}(S_4)| = 26. \tag{3.11}$$

现在我们将关注 S_4 的特殊子群。首先，考虑 A_4 及其子群不可置换图 $\Gamma_{\mathrm{L}(A_4)}$。该图有 7 个顶点，即

$$V(\Gamma_{\mathrm{L}(A_4)}) = \{\langle (123)\rangle, \langle (124)\rangle, \langle (134)\rangle, \langle (234)\rangle, \langle (12)(34)\rangle, \langle (14)(23)\rangle, \langle (13)(24)\rangle\}, \tag{3.12}$$

因为

$$\mathfrak{C}_{\mathrm{L}(A_4)}(\mathrm{L}(A_4)) = \mathrm{N}(A_4) = \{\{1\}, \langle (12)(34), (13)(24)\rangle, A_4\} \tag{3.13}$$

以及一个对应的 边的计算可以通过[28], 获得下图 .

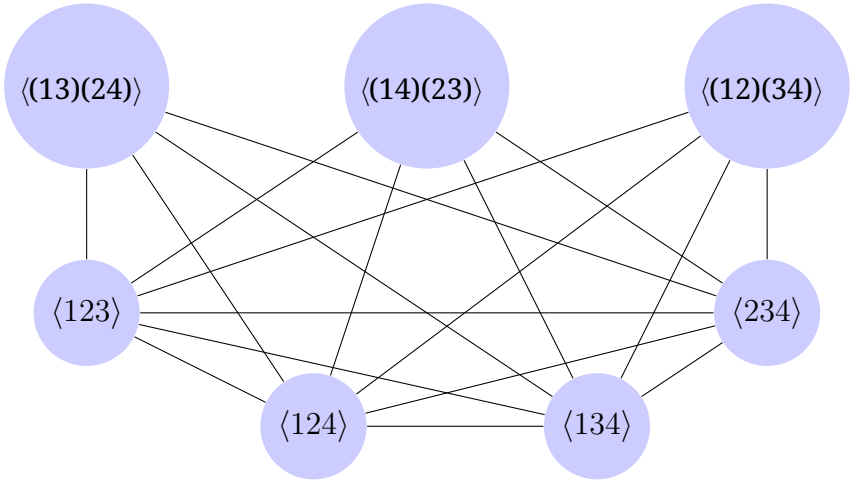


图1：子群 $\Gamma_{\mathrm{L}(A_4)}$ 的不可置换图。

Now 我们描述 $B = \langle (123), (12) \rangle \simeq S_3$ 和 $\Gamma_{\mathrm{L}(B)}$。这里得到一个三角形，因为 e

$$V(\Gamma_{\mathrm{L}(B)}) = \mathrm{L}(B) \setminus \mathfrak{C}_{\mathrm{L}(B)}(\mathrm{L}(B)) = \mathrm{L}(B) \setminus \mathrm{N}(B) = \{\langle (12) \rangle, \langle (13) \rangle, \langle (23) \rangle\} \tag{3.14}$$

再次[28] 有助于计算边。见下文：

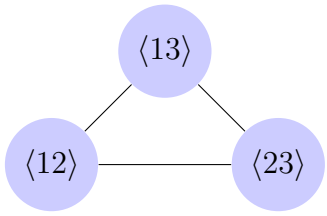


图2： $\Gamma_{\mathrm{L}(B)}$ for $B \simeq S_3$ 的子群不可置换图。

最后，我们考虑 $C = \langle (1234), (13) \rangle \simeq D_4$ ，它有 $\Gamma_{\mathrm{L}(C)}$ ，包含四个顶点和四条边，即

$$V(\Gamma_{\mathrm{L}(C)}) = \mathrm{L}(C) \setminus \mathfrak{C}_{\mathrm{L}(C)}(\mathrm{L}(C)) = \{\langle (13) \rangle, \langle (24) \rangle, \langle (14)(23) \rangle, \langle (12)(34) \rangle\}. \tag{3.15}$$

这又是一个非常简单的情形：图是一个矩形。

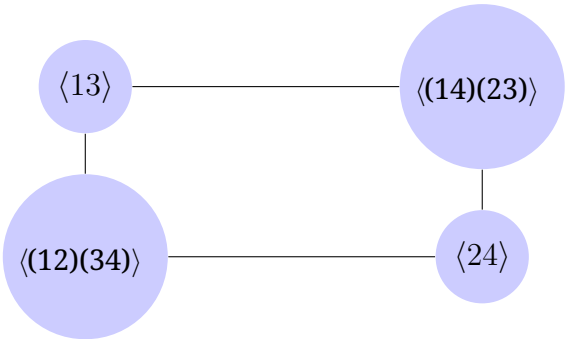


图 3： $\Gamma_{\mathrm{L}(C)}$ 关于 $C \simeq D_4$的子群不可置换图。

根据定理1.1，我们可以按以下方式计算 $F_2(S_4)$:

$$F_2(S_4) = \Big(\sum_{K \in \mathcal{K}(S_4)} |\mathrm{L}(K)|^2 \, \mu(K, S_4) \Big) + \Big(\sum_{H \in \mathcal{H}(S_4)} \Big(\, |\mathrm{L}(H)|^2 \, - \sum_{i=1}^{m} \sigma_i \, \Big) \mu(H, S_4) \Big), \quad (3.16)$$

其中， K 是属于 S_4 的一个子群

$$\mathcal{K}(S_4) = \{\{1\}, \langle 12\rangle, \langle 13\rangle, \langle 23\rangle, \langle 14\rangle, \langle 24\rangle, \langle 34\rangle, \langle (13)(24)\rangle, \langle (14)(23)\rangle, \langle (12)(34)\rangle, \langle 123\rangle, \langle 124\rangle, \langle 134\rangle, \langle 234\rangle, \langle 1234\rangle, \langle 1324\rangle, \langle 1423\rangle, \langle (12)(34), (13)(24)\rangle, \langle (13), (24)\rangle, \langle (14), (23)\rangle, \langle (12), (34)\rangle\}, \quad (3.17)$$

而 H 是属于 S_4 的一个子群

$$\mathcal{H}(S_4) = \{\langle (123), (12)\rangle, \langle (124), (12)\rangle, \langle (134), (13)\rangle, \langle (234), (23)\rangle, \langle (1234), (13)\rangle, \langle (1243), (14)\rangle, \langle (1324), (12)\rangle, A_4, S_4\}. \quad (3.18)$$

现在我们需要求出 $\mu(K, S_4)$和 $\mu(H, S_4)$，对所有 K 和 H而言，但只需针对每个共轭类求出这些值即可。利用引理2.10 和命题2.11 (iii)，可得

$$\mu(\{1\}, S_4) = -n! = -24, \quad \mu(\langle 12\rangle, S_4) = 2, \quad \mu(\langle (13)(24)\rangle, S_4) = 0, \quad \mu(\langle 123\rangle, S_4) = 1,$$
$$\mu(\langle (12)(34), (13)(24)\rangle, S_4) = 3, \quad \mu(\langle (13), (24)\rangle, S_4) = 0, \quad \mu(\langle 1234\rangle, S_4) = 0,$$
$$\mu(\langle (123), (12)\rangle, S_4) = -1, \quad \mu(\langle (1234), (13)\rangle, S_4) = -1, \quad \mu(A_4, S_4) = -1. \quad \mu(S_4, S_4) = 1. \quad (3.19)$$

另一方面，我们可以使用[28], 来求拉普拉斯矩阵$L(\Gamma_{\mathrm{L}(B)})$、 $L(\Gamma_{\mathrm{L}(C)})$和 $L(\Gamma_{\mathrm{S}(A_4)})$的谱，得到

$$\mathrm{spec}(L(\Gamma_{\mathrm{L}(B)})) = \{0, 3, 3\}, \ \mathrm{spec}(L(\Gamma_{\mathrm{L}(C)})) = \{0, 2, 2, 4\}, \ \mathrm{spec}(L(\Gamma_{\mathrm{L}(A_4)})) = \{0, 4, 4, 7, 7, \quad 7, 7\}, \quad (3.20)$$

但我们没有报告不可置换图 $\Gamma_{\mathrm{L}(S_4)}$ 的所有细节，因为这部分技术性很强。这里仅举例说明，

$$\mathrm{spec}(L(\Gamma_{\mathrm{L}(S_4)})) = \{0, 7.22863, 7.60860, 7.60860, 11.39978, 11.39978, 11.72495, 12.01650,$$
$$12.01650, 14, 14.56069, 14.56069, 14.56069, 15.61486, 16.33888, 16.33888, 16.33888,$$
$$17.29890, 17.29890, 18, 20.10043, 20.10043, 20.10043, 20.43156, 20.67622, 20.67622\} \quad (3.21)$$

是拉普拉斯矩阵 $L(\Gamma_{\mathrm{L}}$ 的谱 $_{(S_4)})$.

代入我们在（3.16）中得到的值，可得

$$F_2(S_4) = -24 + 6(2^2)(2) + 3(2^2)(0) + 4(2^2)(1) + (5^2)(3) + 3(4^2)(0) + 3(3^2)(0) + 4(6^2 - 6)(-1)$$
$$+ 3(10^2 - 8)(-1) + (10^2 - 36)(-1) + (30^2 - 378)(1) = 177. \quad (3.22)$$

另请注意，

$$\mu(\{1\}, A_4) = 4, \quad \mu(\langle (13)(24)\rangle, A_4) = 0, \quad \mu(\langle (12)(34), (13)(24)\rangle, A_4) = -1,$$
$$\mu(\langle (123)\rangle, A_4) = -1, \quad \mu(A_4, A_4) = 1, \quad (3.23)$$

通过类似的论证可推出，

$$F_2(A_4) = 4 + 3(2^2)(0) + 4(2^2)(-1) + (5^2)(-1) + (10^2 - 36)(1) = 27. \quad (3.24)$$

通过我们新的计算方法，我们刚刚看到，定理 1.1 展示了一种计算性质的替代方法，用于 F_2 (PGL(2, 3)) 和 F_2(PSL(2, 3))。事实上，PSL(2, 3) $\simeq A_4$ 且 PGL(2, 3) $\simeq S_4$，那么 F_2(PSL(2, 3)) $= F_2(A_4) = 27$ 且 F_2(PGL(2, 3)) $= F_2(S_4) = 177$，这些数值与命题 2.7 和 2.9 中得到的相同。

请注意，Tarnauceanu 提出了一些关于子群交换度的开放问题[29]，而我们在例 3.4 中采用的逻辑，以及定理 1.1 和[28],，或许能带来解决方案。事实上，备注 3.2 和3.3 提出了一种具有普遍意义的方法，可应用于众多群构成的族，并不局限于线性群。我们展示主要结果的另一项应用。

例 3.5. 通过直接计算，若考虑 A_4，则（1.9）的分母等于 100，即 $|\mathrm{L}(A_4)|^2 = 100$，而（1.9）的分子等于 64，因此

$$\mathrm{sd}(A_4) = \frac{16}{25} \tag{3.25}$$

根据 [29,第2510]页。另一方面，我们可以考虑（3.20），并将其代入（3.2）

$$\mathrm{sd}(A_4) = 1 - \frac{\sigma_1 + \ldots + \sigma_7}{|\mathrm{L}(A_4)|^2} = 1 - \frac{36}{100} = \frac{16}{25}. \tag{3.26}$$

此外，容易验证 A_4 是极小非阿贝尔群，因此 $\mathcal{K}(A_4) = \mathrm{L}(A_4) \setminus \{A_4\}$且 $\mathcal{H}(A_4) = \{A_4\}$。现在应用（1.17）可得 $F_2(\{1\}) = 1$, $F_2(\langle(13)(24)\rangle) = F_2(\langle(14)(23)\rangle) = F_2(\langle(12)(34)\rangle) = 3$, $F_2(\langle(123)\rangle) = F_2(\langle(124)\rangle) = F_2(\langle(13)\rangle) = F_2(\langle(234)\rangle) = 3$, $F_2(\langle(12)(34), (13)(24)\rangle) = 15$ 以及 $F_2(A_4) = 27$。因此，利用（1.18）

$$\mathrm{sd}(A_4) = \frac{1 + 7(3) + 15 + 27}{|\mathrm{L}(A_4)|^2} = \frac{16}{25} \tag{3.27}$$

这与通过不同方式在（3.25）和（3.26）中得到的值相同。

当然，我们可以在例 3.5 中重复类似的论证，根据例 S_3 中已有的值，求出 sd(S_4)、sd(D_4) 和 sd(S_4)，但这里我们仅展示 A_4 的情形，以支持注记 3.3 中的 (III) 和 (II)。

最后，我们提出在研究过程中遇到的以下问题：

问题 3.6。 系统研究定理 2.6 中各群的子群不可置换图，为具有非平凡分割的群的子群不可置换图建立相应的谱图论。通过相应子群不可置换图的拉普拉斯矩阵的谱，确定定理 2.6 中所有群的子群交换度。

References

[1] S. Aivazidis，《偶特征域上射影特殊线性群的子群可置换度》，《群论杂志》16（2013年），383–396。2，4，5[2] S. Aivazidis，《单 Suzuki 群的子群可置换度》，《Monath. Math.》176（2015），335–358。5[3] R. Baer，《有限群的分拆》，《Math. Z.》75（1961），333-372。4[4] D. Cvetkovic、P. Rowlinson 和 S. Simic，《图谱理论导论》，伦敦数学会学生读物，第75卷，剑桥大学出版社，2009年。2，3[5] F.R.K. Chung，《谱图论》，CBMS 数学区域会议丛书，第92卷，美国数学学会，普罗维登斯，1997年。2，3[6] P. Devi 和 R. Rajkumar，《若干有限非阿贝尔群子群的可置换图》，《离散数学、算法与应用》8（2016年）1650047。1[7] P. Devi 和 R. Rajkumar，《群的子群可置换图的平面性》，J. Algebra Appl 13（2014年）1350112。1[8] M. Farrokhi，《群的分拆的一些结果》，《帕多瓦大学数学研讨会报告》125（2011年），119–146。4[9] O.H. Kegel，《 H_p群的幂零性》，《Math. Z.》75（1961年），373–376。4

[10] E.I. Khukhro，《幂零群及其自同构》，德·格鲁伊特出版社，柏林，1993年。4[11] P. G. Kontorovich，《具有划分基的群 III》，《数学文集》N. S. 22（64）（1948年），79–100。4[12] P. Hall，《对素数幂阶群理论的贡献》，Proc. London Math. Soc. 36（1933年），29–95。6[13] P. Hall，《群的欧拉函数》，《季刊数学》7（1936年），134–151。6[14] B. Huppert，《有限群 I》，施普林格出版社，柏林，1967年。4，5，8[15] M. W. Liebeck、C. E. Praeger 和 J. Saxl，《有限单群及其自同构群的极大分解》，Mem. Amer. Math. Soc.，86 no. 432（1990年）iv+151第2、3页[16] M.S. Lazorec，《ZM群的概率方面》，Comm. Algebra，47（2018年）541–552。3，4[17] S.K. Muhie 和 F.G. Russo，《任意子群格中子群交换的概率》，Int. J. Group Theory（2020年），数字对象标识符：10.22108/ijgt.2020.122081.1604。3[18] S.K. Muhie、D.E. Otera 和 F.G. Russo，《子群不可置换图》，Bull. Malaysian Math. Sci. Soc.（2021年），数字对象标识符：10.1007/s40840-021-01146-3。1，3，6[19] S.K. Muhie，《子群不可置换图的谱性质》，Trans. Comb. 11 3（2022年），279–292。2，3，4，8[20] H. Pahlings，《有限群的莫比乌斯函数》，Arch. Math.（巴塞尔）60（1993年），7–14。6¨G. C. Rota，《组合理论基础 I：莫比乌斯函数理论》，Z. Wahrsehein- lichkeitstheorie 2（1964年），340–368。3[21] F.G. Russo，《强子群交换度及关于元素与子群交换概率的一些近期问题》，Quaest. Math.，39（2016年），1019–1036。2，3¨F. Saeedi 和 M. Farrokhi，《若干有限群的分解数》，Glasgow Math. J.，54（2012年）345–354。3，4，5，6[22] F. Saeedi 和 M. Farrokhi，《[23] (2,[24])的子群可置换度》，Glasgow Math. J.，55（2013年）581–590。2，3，4，5，6，7，8 PSLR. Schmidt，《群的子群格》，德·格鲁伊特出版社，柏林，1994年。2，8 p^nJ. Shareshian，《对称群子群格的莫比乌斯数》，J. Comb. Theory Ser. A 78（1997年），236–267。6[25] J. W. Shareshian，《有限群子群格的组合性质》，博士论文，新泽西州立大学，新不伦瑞克，1996年。5，6[26] D. Stevanovic、V. Brankov、D. Cvetkovic 和 S. Simic，newGRAPH，软件，在线获取：https://www.mi.sanu.ac.rs/newgraph/ 7，9，10，11¨M. Tˇarnˇauceanu，《有限群的子群交换度》，J. Algebra 321（2009年），2508–2520；补遗 337（2011年），363–368。2，3，11[27] M. Tˇarnˇauceanu，《若干有限[28] 群的分解数》，Ars. Comb.，128（2016年）3–9。4[29] GAP 小组，《GAP——群、算法与编程》，4.4版，在线获取：http://www.gap-system.org，2005年。7[30] G. Zappa，《群的划分及其他覆盖》，Illinois J. Math. 47（2003年），571–580。4

Seid Kassaw Muhie
Department of Mathematics
Woldia University, Woldia, Ethiopia电子邮箱地址：seidkassaw063@gmail.com

Daniele Ettore Otera
Institute of Data Science and Digital Technologies
Vilnius University, Vilnius, Lithuania电子邮箱地址：daniele.otera@mif.vu.lt

Francesco G. Russo
Department of Mathematics and Applied Mathematics
University of Cape Town, Cape Town, South Africa电子邮箱地址：francescog.russo@yahoo.com