arXiv:2304.08218v2 [math.RT] 9 Oct 2024

$\mathrm{GL}_2(D)$ 局部代数表示的整性

SANTOSH NADIMPALLI 和 MIHIR SHETH

ABSTRACT. Emerton 的 Jacquet 模理论为局部解析表示中的整结构存在性提供了必要条件。对于泛不可约局部代数表示的整性，人们也预期这些条件是充分的。本文证明了，对于 $\mathrm{GL}_2(D)$ 的某些驯分歧局部代数表示，Emerton 的条件是充分的，其中 D 是一个 p-进除代数。

1. INTRODUCTION

设 p 是一个素数， F 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张，其剩余域为 $\mathbb{F}_q$，一致化元为 ϖ_F；再设 E 是 F 的一个足够大的有限扩张。令 G 为 F 上某个连通约化群的有理点群， $\pi = \pi_{sm} \otimes \pi_{alg}$ 为该群在 E 上的一个不可约局部代数表示。 π 中存在 G- 不变格或 G- 整结构这一问题，对 p-进 Langlands 纲领具有根本意义。

Emerton 根据局部代数表示的 Jacquet 模的指数，给出了存在整结构的必要条件。设 $P = M_P N_P \subseteq G$ 为一个抛物子群，其模特征为 δ_P，并令 J_P 表示 Emerton 的局部解析 Jacquet 模函子。若 π 具有一个 G-整结构，那么对于 G 的每个抛物子群 P 以及满足 $\mathrm{Hom}_{Z(M_P)}(\chi, J_P(\pi)) \neq 0$ 的 χ，

$$(\delta_P^{-1}\chi)(z) \text{ is integral in } E, \tag{1.1}$$

对所有 $z \in Z(M_P)^+$ 均成立，其中 $Z(M_P)^+$ 是 Levi 因子 M_P [Eme06, 引理 4.4.2] 的中心 $Z(M_P)$ 中的收缩幺半群。出现在 $J_P(\pi)$ 中的 $Z(M_P)$ 的特征 χ 称为指数。人们预期，当 π_{sm} 是一般的时，条件 (1.1) 对于 π 中存在整结构也充分。对于 $G = \mathrm{GL}_n(F)$，这等价于 Breuil-Schneider 猜想（见 Hu [Hu09]）。注意，对于 $P = G$，条件 (1.1) 表示 π 的中心特征是整的。当 π 具有整中心特征且 π_{sm} 本质平方可积时，对于真抛物子群 P，Jacquet 模 $J_P(\pi)$ 总是满足条件 (1.1)。在这种情况下，Sorensen 利用整体方法证明，中心特征的整性足以保证 π 具有整结构 [Sor13]。另一方面，当 π_{sm} 是主系列表示时，Jacquet 模不再是简单的，因此需要对 π 施加进一步条件，而证明这些条件的充分性并不容易。现有结果仅为部分结果；即使对于 $\mathrm{GL}_2(F)$，当 π_{sm} 是非分歧主系列且 π_{alg} 的权较小时 [DI13, Ass21]，或者当 $\pi = \pi_{sm}$ 是温和分歧主系列时 [Vig08]，也仅有部分结果。对于一般的分裂约化群和 $F = \mathbb{Q}_p$，Große-Kl¨onne 在某些技术性假设下，为非分歧光滑主系列表示构造了整结构 [GeK14]。

本文中，我们考虑非拟分裂群 $G = \mathrm{GL}_2(D)$，其中 D 是一个维数为 d^2 的中心 F 除代数，并证明，对于 G 的某些温和分歧的不可约局部代数表示，条件 (1.1) 足以保证整结构的存在。下面具体说明，对于具有整结构的 $G = \mathrm{GL}_2(D)$ 表示，条件 (1.1) 的具体形式。令 $B = TN$ 为 G 中由上三角矩阵组成的极小抛物子群。对于 $z = \left(\begin{smallmatrix} \varpi_F & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in Z(T)^+$，有 $\delta_B(z) = q^{-d^2}$。记 $\pi(\underline{\lambda})$ 为 $\mathrm{GL}_{2d}(F)$ 的最高权为 $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{2d})$ 的不可约代数表示，记 $\chi(\underline{\lambda})$ 为其对角环面上的特征 $(t_1, \ldots, t_{2d}) \mapsto t_1^{\lambda_1} \ldots t_{2d}^{\lambda_{2d}}$。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 11F70, 22E50。

如果 $\pi = \mathrm{Ind}_B^G(\tau_1 \otimes \tau_2) \otimes \pi(\underline{\lambda})$ 是一个局部代数主系列表示，那么

$$J_B(\pi) \cong (\mathrm{Ind}_B^G(\tau_1 \otimes \tau_2))_N \otimes \pi(\underline{\lambda})^N$$

and

$$(\mathrm{Ind}_B^G(\tau_1 \otimes \tau_2))_N^{ss} \cong (\tau_1 \otimes \tau_2) \oplus ((\tau_2 \otimes \tau_1) \otimes \delta_B).$$

将表示的中心特征记为 $\omega_?$， $J_B(\pi)$ 的指数 χ 为

$$(\omega_{\tau_1} \otimes \omega_{\tau_2})\chi(\underline{\lambda}) \text{ and } (\omega_{\tau_2} \otimes \omega_{\tau_1})\delta_B\chi(\underline{\lambda}).$$

因此，若 π 具有整结构，则 (1.1) 表明

$$\begin{aligned}(\omega_{\tau_1}\omega_{\tau_2})(\varpi_F)\varpi_F^{\sum_{i=1}^{2d}\lambda_i} &\text{is an integral unit (the integrality of } \omega_\pi\text{), and}\\ q^{d^2}\omega_{\tau_1}(\varpi_F)\varpi_F^{\sum_{i=1}^{d}\lambda_i} &\text{ and } \omega_{\tau_2}(\varpi_F)\varpi_F^{\sum_{i=1}^{d}\lambda_i} \text{ are integral in } E. \end{aligned} \tag{1.2}$$

我们的第一个主要结果表明，若光滑主系列 $\mathrm{Ind}_B^G(\tau_1 \otimes \tau_2)$ 是温和分歧的，且 $\pi(\underline{\lambda})$ 是平凡的，即 $\underline{\lambda} = \underline{0}$，则条件 (1.2) 足以保证 π 中存在整结构：

定理 A（定理 3.1）。Emerton 的整性条件 (1.2) 足以保证 G 的光滑温和分歧主系列表示 $\mathrm{Ind}_B^G(\tau_1 \otimes \tau_2)$ 中存在整结构。

我们指出，定理 A 并不要求主系列 $\mathrm{Ind}_B^G(\tau_1 \otimes \tau_2)$ 不可约。然而，对于与非平凡代数表示张量积得到的可约主系列，条件 (1.2) 不再充分（参见 [Vig08] 的勘误）。

形如 $\mathrm{Ind}_B^G((\tau \otimes \tau) \otimes \delta_B^{\frac{d-a}{2d}})$ 的主系列是可约的，其唯一不可约商为 $\mathrm{St}(\tau)$，唯一不可约子模为 $\mathrm{Sp}(\tau)$。这里， a 是确定不可约 $D^\times$ 表示 τ 的 Jacquet-Langlands 提升的片段长度。若 $\pi = \mathrm{St}(\tau) \otimes \pi(\underline{\lambda})$（分别地，$\mathrm{Sp}(\tau) \otimes \pi(\underline{\lambda})$），则

$$J_B(\pi) \cong ((\tau \otimes \tau) \otimes \delta_B^{\frac{d+a}{2d}}) \otimes \pi(\underline{\lambda})^N \quad (\text{resp. } ((\tau \otimes \tau) \otimes \delta_B^{\frac{d-a}{2d}}) \otimes \pi(\underline{\lambda})^N).$$

$^{d+a}$ $^{d-a}$在 $J_B(\pi)$ 中，指数 χ 为 $(\omega_\tau \otimes \omega_\tau)\delta_B^{\frac{}{2d}}\chi(\underline{\lambda})$（分别地，$(\omega_\tau \otimes \omega_\tau)\delta_B^{\frac{}{2d}}\chi(\underline{\lambda})$）。因此，若 π具有整结构，则 (1.1) 表明

$$\begin{aligned}&\omega_\tau^2(\varpi_F)\varpi_F^{\sum_{i=1}^{2d}\lambda_i} \text{ is an integral unit and } q^{\frac{d(d-a)}{2}}\omega_\tau(\varpi_F)\varpi_F^{\sum_{i=1}^{d}\lambda_i}\\ &(\text{resp. } q^{\frac{d(d+a)}{2}}\omega_\tau(\varpi_F)\varpi_F^{\sum_{i=1}^{d}\lambda_i}) \text{ is integral in } E.\end{aligned} \tag{1.3}$$

(1.3) 的第一部分，即 ω_π 的整性，意味着 $\mathrm{val}_E(\omega_\tau(\varpi_F)) = \frac{-1}{2}\sum_{i=1}^{2d}\lambda_i$。因此 $\mathrm{val}_E(\omega_\tau(\varpi_F)) + \sum_{i=1}^{d}\lambda_i = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{d}\lambda_i - \sum_{i=d+1}^{2d}\lambda_i) \geq 0$。由于 $d - a \geq 0$，我们看到 (1.3) 的第二部分是多余的，因为它可由第一部分推出。因此，在这种情况下，猜想 ω_π 的整性足以保证 π 存在整结构。当 $\mathrm{St}(\tau)$（分别地，$\mathrm{Sp}(\tau)$）温和分歧且 $\pi(\underline{\lambda})$ 平凡时，由定理 3.1 可得充分性：

定理 A 的推论（定理 3.3）。具有整中心特征的温和分歧斯坦伯格表示 $\mathrm{St}(\tau)$ 存在整结构。具有整中心特征的温和分歧 Speh 表示 $\mathrm{Sp}(\tau)$ 存在整结构。

我们的第二个主要结果表明，对于某些具有非平凡 $\pi(\underline{\lambda})$ 的局部代数表示 $\pi = \mathrm{St}(\tau) \otimes \pi(\underline{\lambda})$（分别为 $\mathrm{Sp}(\tau) \otimes \pi(\underline{\lambda})$），$\omega_\pi$ 的整性是充分的：

定理 B（定理 4.6 和定理 4.7）。

(1) 设 τ 是 $D^\times$ 的一个维数为 ≤ 2 的光滑绝对不可约温和分歧表示。那么， G 的局部代数 Steinberg 表示 $\pi = \mathrm{St}(\tau) \otimes \pi(\underline{\lambda})$ 若具有整中心特征，则存在整结构。(2) 设 D 是四元数除法代数， τ 是 $D^\times$ 的一个维数为 2 的光滑绝对不可约温和分歧表示。那么， G 的局部代数 Speh 表示 $\mathrm{Sp}(\tau) \otimes (\mathrm{Sym}^1 E^4 \otimes \det^{-\frac{1}{4}})$ 存在整结构。

尽管定理 B 的第 (1) 部分可由 [Sor13 推出，但定理 A 和定理 B 的证明与该文献中的证明不同，完全是局部的。我们沿用 Vign´eras[Vig08] 和 Hu [Hu21] 的方法，这些方法基于 G 的 Bruhat–Tits 树上的系数系统（或图表）理论。核心思想是将局部代数表示 π 实现为其不动点系统的零阶同调群。于是，在 π 中寻找整结构的问题，就转化为在相应的不动点有限维向量空间系统中寻找格系的问题。当 π_{sm} 在更小的紧开子群下存在不变向量，且 π_{alg} 非平凡时，分析会更加复杂。例如，定理 B 第 (2) 部分的整性证明涉及一些繁琐的格计算，而整结构是在“之”字形格序列的第二次迭代中得到的。对于定理 B 的第 (1) 部分，Hu 论证的推广使我们能够在关于 $\dim_E(\tau)$ 的一个强假设下处理任意非平凡的 π_{alg}（无需明确处理 π_{alg}）；这一假设是必要的（参见引理 4.4 (ii)）。

定理 B 第 (2) 部分中局部代数 Speh 表示的整性是一个有趣的现象，并且与 Speh 表示的一般性有关。注意，当且仅当 τ 是一个特征时，Speh 表示 $\mathrm{Sp}(\tau)$ 才是有限维的（因而是一维的）。如定理 B 第 (2) 部分中的情形，无限维的 $\mathrm{Sp}(\tau)$ 具有非退化 Whittaker 模型，因此是一般的（参见 [GMF23，推论 8.3 和注记 8.4 (2)]，或 [PR00，定理 3.1]）。一维 Speh 表示与非平凡不可约代数表示的张量积绝不会是整的。然而，我们预期，具有整中心特征的局部代数一般 Speh 表示是整的。光滑部分的一般性在 Breuil-Schneider 猜想的表述中也很重要；该猜想预言 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的局部代数表示存在整结构 [BS07，第 16] 页。由于 $\mathrm{GL}_2(D)$ 的任意无限维光滑不可约表示都是一般的，我们的研究表明，Emerton 的整性条件 (1.1) 足以保证 $\mathrm{GL}_2(D)$ 的任意无限维不可约局部代数表示具有整性。我们希望在未来的工作中统一处理这一问题。

文章结构如下：§2 中，我们讨论 Vign´eras 关于 $\mathrm{GL}_2(D)$ 表示的整性判据。§3 中，我们运用这一判据证明，Emerton 的整性条件足以保证光滑温和分歧主系列表示的整性。§4 讨论光滑部分为 Steinberg 表示或 Speh 表示的 $\mathrm{GL}_2(D)$ 局部代数表示的整性。我们证明，对于某些局部代数 Steinberg 表示，Emerton 条件是充分的。最后，我们通过一个无限维整局部代数 Speh 表示的例子，阐明局部代数表示的整性与其光滑部分的一般性之间的联系。

致谢。我们感谢匿名审稿人对本文早期版本提出的若干有益意见。在本研究期间，第一作者获得印度政府的 DST-INSPIRE研究资助，第二作者获得班加罗尔印度科学研究所的 Raman 博士后奖学金。两位作者均谨此感谢所获支持。

记号与约定：

设 F 是特征为 0 的非阿基米德局部域，其剩余域 $\mathbb{F}_q$ 的特征为 p。设 D 是指标为 d 的中心 F-除代数。令 $\mathcal{O}_F \subseteq F$ 和 $\mathcal{O}_D \subseteq D$ 分别表示相应的赋值环。固定素元 $\varpi_F \in \mathcal{O}_F$ 和 $\varpi_D \in \mathcal{O}_D$。对于 d 的因子 d'，令 $F_{d'}$ 表示 F 的 d' 次非分歧扩张，并将其视为 D 的子域。令 $|\cdot|_F$ 和 $|\cdot|$ 分别表示 F 和 D 上的标准化非阿基米德绝对值，使得 $|\varpi_F|_F = q^{-1}$ 且 $|\varpi_D| = q^{-d}$。我们有 $|\cdot| := |\cdot|_F^d \circ \mathrm{Nrd}$，其中 $\mathrm{Nrd} : D \to F$ 是约化范数。注意 $|\varpi_F| = q^{-d^2}$。

令 G 为矩阵代数 $\mathrm{M}_2(D)$ 中的可逆元群 $\mathrm{GL}_2(D)$，$K = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_D)$，并令 $I \subseteq K$ 表示标准伊wahori子群。我们将 $D^\times$ 视为以对角方式嵌入其中的 G 的子群。令 $\mathfrak{K}_0$、$\mathfrak{K}_1 \subseteq G$ 分别为稳定 G 的 Bruhat-Tits 树的标准顶点和标准边的子群。注意到 $\mathfrak{K}_0 = K\varpi_D^{\mathbb{Z}}$，且 $\mathfrak{K}_1$ 由 I

以及矩阵 $t = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \varpi_D & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 生成。群 K 和 I 分别具有由 pro-p 子群构成的滤过 $K(n)$ 和 $I(n)$，其中 $n \geq 1$，且 $K(n) = \left(\begin{smallmatrix} 1+\varpi_D^n\mathcal{O}_D & \varpi_D^n\mathcal{O}_D \\ \varpi_D^n\mathcal{O}_D & 1+\varpi_D^n\mathcal{O}_D \end{smallmatrix}\right)$ 和 $I(n) = \left(\begin{smallmatrix} 1+\varpi_D^n\mathcal{O}_D & \varpi_D^{n-1}\mathcal{O}_D \\ \varpi_D^n\mathcal{O}_D & 1+\varpi_D^n\mathcal{O}_D \end{smallmatrix}\right)$。子群 $I(1) \subseteq I$ 是标准 pro-p-伊wahori子群。对于所有 $n \geq 1$，群 $\mathfrak{K}_0$ 和 $\mathfrak{K}_1$ 分别是 G 中 $K(n)$ 和 $I(n)$ 的正规化子。令 $B \subseteq G$ 为上三角矩阵子群（标准极小抛物子群），$N \subseteq B$ 为上三角幺幺矩阵子群（B 的幺幂根），并令 $T \subseteq B$ 为对角矩阵子群（B 的 Levi 商）。T 的模特征 δ_B 为 $|\cdot| \otimes |\cdot|^{-1}$。令 Z 表示 G 的中心，它同构于 $F^\times$。

我们固定一个足够大的 E 关于 F 的有限扩张。域 E 取决于所讨论的表示；本文会在需要时说明它在各处应当多大。其赋值环记作 $\mathcal{O}$，剩余域记作 $k = \mathcal{O}/\varpi\mathcal{O}$，其中 $\varpi \in \mathcal{O}$ 是一致化元。环 $R = E$、$\mathcal{O}$、k 将作为 G 表示的系数环。根据具体情况，这些表示记作 (π, V)，或者仅记作 π 或 V。令 $H \subseteq G$ 为一个子群。我们用 RH 表示 H 在 R 上的群代数，并将“RH-模”和“H 在 R 上的表示”这两种说法交替使用。若 V 是一个 RH-模，则对于子集 $S \subseteq V$，我们用 $H \cdot S$ 表示由 S 生成的 V 的 RH-子模。

我们固定 $\mathbb{C}$ 与 E 的代数闭包 $\overline{E}$ 之间的一个同构。对于系数取自 E 的光滑表示 π，我们将其经由嵌入 $E \hookrightarrow \mathbb{C}$（由上述固定同构诱导）的标量扩张记为 $\pi_{\mathbb{C}} = \pi \otimes_E \mathbb{C}$。我们也称 π 为 $\pi_{\mathbb{C}}$ 的一个 E- 模型。根据 [CEG+16，第 3.13]，节，关于 $\pi_{\mathbb{C}}$ 的所有结果对于 π（在 E 足够大的情况下）均成立。如果一个表示 π 具有中心特征，则记作 ω_π。

G 的光滑表示（分别为 $D^\times$ 的光滑表示）若有一个非零向量被子群 $K(1)$（分别被 $D(1) = 1 + \varpi_D\mathcal{O}_D$）固定，则称为温和分歧。设 d' 是 d 的一个因子，令$D_{d'}$ 为 D 中 $F_{d'}$ 的中心化子；它是一个指标为 d/d' 的中心 $F_{d'}$-除代数。令$\theta : F_{d'}^\times \to E^\times$ 为一个特征，它在由模极大理想同余于 1 的整数单位构成的子群上平凡，且其所有伽罗瓦共轭彼此不同。此处要求 E 包含所有 d 单位根。将其与约化范数 $\mathrm{Nrd} : D_{d'}^\times \to F_{d'}^\times$ 复合，并通过规定其在 $D(1)$ 上平凡，将其扩张到 $D(1)D_{d'}^\times$，便得到一个仍以同一字母记作的特征 $\theta : D(1)D_{d'}^\times \to E^\times$。表示 $\mathrm{Ind}_{D^\times(1)D_{d'}^\times}^{D^\times}\theta$ 是绝对不可约且温和分歧的。事实上，$D^\times$ 上所有系数取自 E 的光滑、温和分歧、绝对不可约表示，均可通过这种方式得到 [SZ05]。

2. Coefficient systems and Vignéras' integrality criterion

我们先回顾一些定义。设 $H \subseteq G$ 是一个开子群。E 上的 H 的局部代数表示是形如 $\pi = \pi_{sm} \otimes \pi_{alg}$的表示，其中 π_{sm} 是 E 上的 H 的光滑表示，而 π_{alg} 是 G 上的 E的有限维有理表示在 H 上的限制。如果 π_{sm} 有一个名称“X”，那么 π 就称为“局部代数 X”。表示 π 不可约，当且仅当 π_{sm} 和 π_{alg}是不可约的 [（STP01，附录，定理 1]）。一个 H-整结构是一个 H-稳定的自由$\mathcal{O}$-子模 $\pi^\circ \subseteq \pi$，它张成 π 在 E上的空间。该整结构也称为一个 H-格，因为它是在 H作用下稳定的格。如果存在一个 H-整结构，我们就称π 为 H-整；如果上下文中的群已明确，也简称为整。我们关注 G的不可约局部代数表示的整性。

一个图表

$$\mathcal{D}_1 \xrightarrow{r} \mathcal{D}_0$$

是由连续的（当 $R = k$ 时为光滑的）$R\mathfrak{K}_i$-模 $\mathcal{D}_i$ 以及一个关于 $\mathfrak{K}_0 \cap \mathfrak{K}_1 = I\varpi_D^{\mathbb{Z}}$ 的作用等变的映射 r 构成的数据。这样的图表会导出 G 的 Bruhat-Tits 树上的一个 G-等变系数系统。反过来，将一个 G-等变系数系统限制到由标准边和标准顶点构成的子树上，即得到一个图表。对于图表 $\mathcal{D}$（或系数系统），有定向链同调群 $H_i(\mathcal{D})$，$i = 0,1$；它们是由下述正合列定义的连续 RG-模

$$0 \longrightarrow H_1(\mathcal{D}) \longrightarrow \text{c-Ind}_{\mathfrak{K}_1}^G \mathcal{D}_1^{\mathfrak{e}} \xrightarrow{\partial} \text{c-Ind}_{\mathfrak{K}_0}^G \mathcal{D}_0 \longrightarrow H_0(\mathcal{D}) \longrightarrow 0.$$

这里， $\mathcal{D}_1^\varepsilon$ 上的 $\mathfrak{K}_1$-作用被 $\mathfrak{K}_1/(\mathfrak{K}_0\cap\mathfrak{K}_1)\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上的非平凡特征 ε 扭曲，而 G-等变边界映射 ∂ 由 $\partial([1,v])=[1,r(v)]-[t,r(t^{-1}v)]$ 给出，其中 $v\in\mathcal{D}_1^\varepsilon$，c-Ind$_{\mathfrak{K}_1}^G\mathcal{D}_1^\varepsilon$（分别为 c-Ind$_{\mathfrak{K}_0}^G\mathcal{D}_0$）表示支撑在 $\mathfrak{K}_1g^{-1}$（分别为 $\mathfrak{K}_0g^{-1}$）上且在 g^{-1} 处取值为 $v\in\mathcal{D}_1^\varepsilon$（分别为 $v\in\mathcal{D}_0$）的唯一函数。

设 $\pi=\pi_{sm}\otimes\pi_{alg}$ 是 G 在 E上的一个局部代数表示。假设对于某个正整数 n， π_{sm} 由其 $I(n)$-不变子空间 $\pi_{sm}^{I(n)}$生成，且 dim$_E(\pi_{sm}^{I(n)})<\infty$。设 $V_1=\pi_{sm}^{I(n)}\otimes\pi_{alg}$ 和 $V_0=\pi_{sm}^{K(n)}\otimes\pi_{alg}$，并考虑图表

$$\mathcal{D}(\pi)=V_1\hookrightarrow V_0$$

$E\mathfrak{K}_i$-模 V_i。由 [SS97，定理 II.3.1] 和 [Vig08，命题 0.4]（对 GL$_2$(D)，证明完全相同）可知， G 的表示 $H_0(\mathcal{D}(\pi))$同构于 π。

定理 2.1（Vign´eras）。 π 是整的，当且仅当 V_0 包含一个 $\mathfrak{K}_0$-格 M_0，使得$M_1=M_0\cap V_1$ 是 V_1 的一个 $\mathfrak{K}_1$-格，即 M_1 在 t的作用下稳定。在这种情况下，$H_0(M_1\hookrightarrow M_0)$是 π的一个 G-整结构。

证明。参见 [Vig08，推论 0.2 和命题 0.4]。 □

假设 V_1 包含一个 $\mathfrak{K}_1$-格 L_1。从 L_1开始，归纳定义一个递增的“之”-zag”序列，由 $\mathfrak{K}_1$的 V_1 -格组成，如下所示：

$$L_1^{(0)}:=L_1,$$
$$L_1^{(i+1)}:=\left(\left(\mathfrak{K}_0\cdot L_1^{(i)}\right)\cap V_1\right)+t\left(\left(\mathfrak{K}_0\cdot L_1^{(i)}\right)\cap V_1\right)\ \text{ for } i\geq 0.$$

推论 2.2。 π 是整的，当且仅当 V_1 包含一个 $\mathfrak{K}_1$-格 L_1，使得递增序列 $(L_1^{(i)})_i$ 中的 $\mathfrak{K}_1$-格（属于 V_1）最终稳定。

证明。若 π 是整的，则定理 2.1 中的 $\mathfrak{K}_1$-格 M_1 满足 $M_1^{(0)}=M_1^{(1)}$。反之，若 V_1 包含一个 $\mathfrak{K}_1$-格 L_1，使得 $L^{(i_0)}{}_1=L_1^{(i_0+1)}$ 对某个正整数 i_0 成立，则 $M_0=\mathfrak{K}_0\cdot L^{(i_0)}{}_1$ 是 V_0 的一个 $\mathfrak{K}_0$-格，并且满足 $M_1=M_0\cap V_1=L^{(i_0)}{}_1$。 □

注 2.3. 若 π 是整的，那么对于任意 V_1的 $\mathfrak{K}_1$-格 L_1， $\mathfrak{K}_1$-格的序列 $(L_1^{(i)})_i$ 最终会稳定。事实上，我们知道存在一个 V_1 的 $\mathfrak{K}_1$-格 M_1，使得序列 $(M_1^{(i)})_i$ 最终稳定。不妨设 $L_1\subseteq M_1$。由于 $[M_1:L_1]$ 是有限的，显然递增序列 $(L_1^{(i)})_i$ 也会最终稳定。

我们记录一个引理以备后用：

引理 2.4. 设 L_1 是 V_1 中的一个 $\mathfrak{K}_1$-格，且对所有 $i\geq 0$都有 $L_0^{(i)}=\mathfrak{K}_0\cdot L_1^{(i)}$。那么，对于所有 $i\geq 0$，自然映射 $H_0(L_1^{(i)}\hookrightarrow L_0^{(i)})\to H_0(L_1^{(i+1)}\hookrightarrow L_0^{(i+1)})$ 是满射。

证明。根据定义， $H_0(L_1^{(i+1)}\hookrightarrow L_0^{(i+1)})=\left(\text{c-Ind}_{\mathfrak{K}_0}^G(\mathfrak{K}_0\cdot L_1^{(i+1)})\right)/\text{Im}(\partial)$。我们需要证明， $H_0(L_1^{(i+1)}\hookrightarrow L_0^{(i+1)})$中的同调类 $[g,v]+\text{Im}(\partial)$在 $H_0(L_1^{(i)}\hookrightarrow L_0^{(i)})$中有一个原像。由于同调之间的自然映射是 G-等变的，只需考虑 $H_0(L_1^{(i+1)}\hookrightarrow L_0^{(i+1)})$中满足 $v\in L_1^{(i+1)}$ 的类$[1,v]+\text{Im}(\partial)$。元素 $v\in L_1^{(i+1)}$ 的形式为$v'+tv''$，其中 $v',v''\in(\mathfrak{K}_0\cdot L_1^{(i)})\cap V_1$。同调类 $[1,v']+\text{Im}(\partial)\in H_0(L_1^{(i+1)}\hookrightarrow L_0^{(i+1)})$有一个原像 $[1,v']+\text{Im}(\partial)\in H_0(L_1^{(i)}\hookrightarrow L_0^{(i)})$。考虑同调类 $[1,tv'']+\text{Im}(\partial)\in H_0(L_1^{(i+1)}\hookrightarrow L_0^{(i+1)})$。注意， $\partial([\varpi_D t^{-1},v''])=[\varpi_D t^{-1},v'']-[1,tv'']$。因此， $[1,tv'']+\text{Im}(\partial)=[\varpi_D t^{-1},v'']+\text{Im}(\partial)$属于 $H_0(L_1^{(i+1)}\hookrightarrow L_0^{(i+1)})$，且类 $[\varpi_D t^{-1},v'']+\text{Im}(\partial)$在 $H_0(L_1^{(i)}\hookrightarrow L_0^{(i)})$中有一个原像$[\varpi_D t^{-1},v'']+\text{Im}(\partial)$，因为 $v''\in L_0^{(i)}$。 □

推论 2.2 中的整性判据将在以下各节中使用，以证明 Emerton 条件足以保证存在 π 的整结构，其中 π_{sm} 是温和分歧的。

3. Integrality of smooth principal series

设 (τ_1, W_1) 和 (τ_2, W_2) 是 $D^\times$ 在 E 上的两个光滑绝对不可约温和分歧表示。本节中，$\pi = \pi_{sm} = \mathrm{Ind}_B^G(\tau_1 \otimes \tau_2)$ 是一个光滑主系列表示。注意，$\pi^{I(1)} \neq 0$。事实上，π 作为一个 G-表示由 $\pi^{I(1)}$ 生成。为了描述空间 $V_0 = \pi^{K(1)}$ 和 $V_1 = \pi^{I(1)}$，我们定义主系列 π 的一些显式元素。

设 $s = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 和 $u_\lambda = \left(\begin{smallmatrix} 1 & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$，其中 $[\lambda] \in \mathcal{O}_D$ 是 $\lambda \in \mathbb{F}_{q^d}$ 的 Teichmüller 提升。对于 $h \in G$ 和 $v \in W_1 \otimes W_2$，记 f_v^h 为 $\pi^{I(1)}$ 中唯一一个支集包含于 $BhI(1)$ 且满足 $f_v^h(h) = v$ 的函数。同样，记 g_v^h 为 $\pi^{K(1)}$ 中唯一一个支集包含于 $BhK(1)$ 且满足 $g_v^h(h) = v$ 的函数。注意，由于 $BI(1) = BK(1)$，有 $f_v^1 = g_v^1$；又由于 $BsI(1) = \bigsqcup_{\lambda \in \mathbb{F}_{q^d}} Bsu_\lambda K(1)$，有 $f_v^s = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_{q^d}} g_v^{su_\lambda}$。若 $M \subseteq W_1 \otimes W_2$ 是一个 $\mathcal{O}$-子模，记 f_M^h 表示集合 $\{f_v^h\colon\ v \in M\}$；类似地，记 g_M^h 表示集合 $\{g_v^h\colon\ v \in M\}$。这些集合是 $\mathcal{O}$-模，在逐点加法和数乘下同构于 M。作为

$$G = BI(1) \sqcup BsI(1) = BK(1) \sqcup \bigsqcup_{\lambda \in \mathbb{F}_{q^d}} Bsu_\lambda K(1),$$

我们有

$$V_1 = f^1_{W_1 \otimes W_2} \oplus f^s_{W_1 \otimes W_2} \text{ and } V_0 = g^1_{W_1 \otimes W_2} \oplus \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{F}_{q^d}} g^{su_\lambda}_{W_1 \otimes W_2}\ .$$

容易验证 $tf_v^1 = f^{s\ (\tau_1\ (\varpi_D)\ \otimes \mathrm{Id})\ (v)}$ 和 $tf_v^s = f^{1\ (\mathrm{Id} \otimes \tau_2\ (\varpi_D)\ )\ (v)}$。令 $K(1)$ 在 $W_1 \otimes W_2$ 上平凡作用，便可将 $B \cap \mathfrak{K}_0$ 在 $W_1 \otimes W_2$ 上的作用扩展到 $I\varpi_D^{\mathbb{Z}} = (B \cap \mathfrak{K}_0)K(1)$。于是，作为 $E\mathfrak{K}_0$-模，有 $V_0 \cong \mathrm{Ind}_{I\varpi_D^{\mathbb{Z}}}^{\mathfrak{K}_0}(\tau_1 \otimes \tau_2)$。

令 $T_0 = T \cap \mathfrak{K}_0$。$\pi$ 的中心特征 ω_π 等于 $\omega_{\tau_1}\omega_{\tau_2}$。当 ω_π 为整时，存在一个 T_0-格 $\mathcal{L} \subseteq W_1 \otimes W_2$。本节的主要结果如下:

定理 3.1. 具有整中心特征的温和分歧主系列表示 $\pi = \mathrm{Ind}_B^G(\tau_1 \otimes \tau_2)$ 是整的，当且仅当 $q^{d^2}\omega_{\tau_1}(\varpi_F) \in \mathcal{O}$ 且 $\omega_{\tau_2}(\varpi_F) \in \mathcal{O}$。

证明。（$\Longrightarrow$）尽管 Emerton 已证明必要性，但为了给下一部分的记号作铺垫，我们仍给出一个证明。设

$$L_0 := \mathrm{Ind}_{I\varpi_D^{\mathbb{Z}}}^{\mathfrak{K}_0} \mathcal{L} = g^1_{\mathcal{L}} \oplus \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{F}_{q^d}} g^{su_\lambda}_{\mathcal{L}}$$

是 V_0 的一个 $\mathfrak{K}_0$-格。那么，

$$L_0 \cap V_1 = L_0^{I(1)} = f^1_{\mathcal{L}} \oplus f^s_{\mathcal{L}}.$$

Let

$$L_1 = L_1^{(0)} := L_0 \cap V_1 + t(L_0 \cap V_1).$$

由于 $\mathcal{L}$ 在 ϖ_D 的对角作用下稳定，L_1 在 $\mathfrak{K}_1$ 的作用下也稳定，因此它是 V_1 的一个 $\mathfrak{K}_1$-格。计算可得

$$L_1 = f^1_{\mathcal{L} + (\mathrm{Id} \otimes \tau_2(\varpi_D))\mathcal{L}} \oplus f^s_{\mathcal{L} + (\tau_1(\varpi_D) \otimes \mathrm{Id})\mathcal{L}}.$$

因此，

$$\mathfrak{K}_0 \cdot L_1 = \mathfrak{K}_0 \cdot f^1_{\mathcal{L} + (\mathrm{Id} \otimes \tau_2(\varpi_D))\mathcal{L}} + \mathfrak{K}_0 \cdot f^s_{\mathcal{L} + (\tau_1(\varpi_D) \otimes \mathrm{Id})\mathcal{L}}. \tag{3.1}$$

由于 $u_{-\lambda}s \cdot f_v^1 = u_{-\lambda}s \cdot g_v^1 = g_v^{su_\lambda}$，式（3.1）中的第一项 $\mathfrak{K}_0 \cdot f^1_{\mathcal{L} + (\text{恒等映射} \otimes \tau_2(\varpi_D))\mathcal{L}}$ 为

$$g^1_{\mathcal{L} + (\mathrm{Id} \otimes \tau_2(\varpi_D))\mathcal{L}} \oplus \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{F}_{q^d}} g^{su_\lambda}_{\mathcal{L} + (\mathrm{Id} \otimes \tau_2(\varpi_D))\mathcal{L}}.$$

为描述第二项 $\mathfrak{K}_0 \cdot f^s_{\mathcal{L} + (\tau_1(\varpi_D) \otimes \text{恒等映射})\mathcal{L}}$，设

$$F_v^x := u_x s \cdot f_v^s \quad \text{for } x \in \mathbb{F}_{q^d} \text{ and } v \in \mathcal{L} + (\tau_1(\varpi_D) \otimes \mathrm{Id})\mathcal{L}.$$

格 $f^s_{\mathcal{L} + (\tau_1(\varpi_D) \otimes \text{恒等映射})\mathcal{L}}$ 在 $I\varpi_D^{\mathbb{Z}}$ 的作用下保持稳定。集合 $\{1, u_x s\colon\ x \in \mathbb{F}_{q^d}\}$ 构成了 $\mathfrak{K}_0/I\varpi_D^{\mathbb{Z}}$ 的一组代表元。因此

$$\mathfrak{K}_0 \cdot f^s_{\mathcal{L} + (\tau_1(\varpi_D) \otimes \mathrm{Id})\mathcal{L}} = f^s_{\mathcal{L} + (\tau_1(\varpi_D) \otimes \mathrm{Id})\mathcal{L}} + \langle \sum_{x,v}{}' F_v^x \rangle, \tag{3.2}$$

其中 $\sum'_{x,v}$ 表示对有限多个满足 $x \in \mathbb{F}_{q^d}$ 和 $v \in \mathcal{L}+(\tau_1(\varpi_D)\otimes$恒等映射$)\mathcal{L}$ 及 $\langle \sum'_{x,v} F_v^x \rangle$ 这样的数对 (x,v) 求和；$_v F_v^x\rangle$ 是由所有此类和生成的 $\mathcal{O}$-模。将 $c \neq 0$ 代入 $su_c s = \left(\begin{smallmatrix} -1/[c] & 1 \\ 0 & [c] \end{smallmatrix}\right) su_{1/c}$，得到

$$F_v^x = u_x s \cdot \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_{q^d}} g_v^{su_\lambda} = g_v^1 + \omega_{\tau_1}(-1) \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_{q^d}^\times} g_{\xi_\lambda(v)}^{su_{(1/\lambda)-x}}$$

其中 $\xi_\lambda = \tau_1(\lambda) \otimes \tau_2(1/\lambda)$。固定任意一个但不变的 $v \in \mathcal{L}+(\tau_1(\varpi_D) \otimes \mathrm{Id})\mathcal{L}$，考虑

$$\begin{aligned}\sum_{x \in \mathbb{F}_{q^d}} F_v^x &= q^d g_v^1 + \omega_{\tau_1}(-1) \sum_{x \in \mathbb{F}_{q^d}} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_{q^d}^\times} g_{\xi_\lambda(v)}^{su_{(1/\lambda)-x}} \\ &= f_{q^d v}^1 + \omega_{\tau_1}(-1) \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_{q^d}^\times} \sum_{x \in \mathbb{F}_{q^d}} g_{\xi_\lambda(v)}^{su_{(1/\lambda)-x}} \\ &= f_{q^d v}^1 + \omega_{\tau_1}(-1) \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_{q^d}^\times} f_{\xi_\lambda(v)}^s.\end{aligned}$$

由于 $\xi_\lambda(v) \in \mathcal{L}+(\tau_1(\varpi_D) \otimes \mathrm{Id})\mathcal{L}$，因此有 $f_{q^d v}^1 \in \mathfrak{K}_0 \cdot f^s_{\mathcal{L}+(\tau_1(\varpi_D)\otimes\mathrm{Id})\mathcal{L}}$。因此，我们有

$$f^1_{q^d(\tau_1(\varpi_D)\otimes\mathrm{Id})\mathcal{L}} \subseteq (\mathfrak{K}_0 \cdot L_1)^{I(1)} \subseteq L_1^{(1)}, \text{ and thus } f^s_{q^d(\tau_1(\varpi_D)\otimes\mathrm{Id})\mathcal{L}} \subseteq (\mathfrak{K}_0 \cdot L_1^{(1)})^{I(1)}.$$

令 $\mathcal{L}_1^{(i)} = (\mathrm{Id} \otimes \tau_2(\varpi_D))^i\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}_2^{(i)} = (q^d(\tau_1(\varpi_D) \otimes \mathrm{Id}))^i\mathcal{L}$，则有

$$f^1_{\mathcal{L}_1^{(1)}} \oplus f^s_{\mathcal{L}_2^{(1)}} \subseteq (\mathfrak{K}_0 \cdot L_1^{(1)})^{I(1)}.$$

因此，如上所述

$$f^1_{\mathcal{L}_1^{(1)}+(\mathrm{Id}\otimes\tau_2(\varpi_D))\mathcal{L}_1^{(1)}} \oplus f^s_{\mathcal{L}_2^{(1)}+(\tau_1(\varpi_D)\otimes\mathrm{Id})\mathcal{L}_2^{(1)}} \subseteq L_1^{(2)}.$$

然后，重复上述论证可得 $f^1_{\mathcal{L}_1^{(2)}} \subseteq {L_1}^3$ 和 $f^1_{\mathcal{L}_2^{(2)}} \subseteq L_1^{(3)}$。反复使用这一论证，一般而言可得

$$f^1_{\mathcal{L}_1^{(i)}} \subseteq L_1^{(2i-1)} \text{ and } f^1_{\mathcal{L}_2^{(i)}} \subseteq L_1^{(2i-1)} \text{ for all } i \geq 0.$$

由注 2.3，π 中整结构的存在性意味着 $\mathfrak{K}_1$-格 $L_1^{(i)}$ 稳定。这意味着线性映射 $\mathrm{Id} \otimes \tau_2(\varpi_D)$ 和 $q^d(\tau_1(\varpi_D) \otimes \mathrm{Id})$ 在 $W_1 \otimes W_2$ 中保持某些格不变。取这些映射的 d 次幂，得到 $\omega_{\tau_2}(\varpi_F) \in \mathcal{O}$ 和 $q^{d^2}\omega_{\tau_1}(\varpi_F) \in \mathcal{O}$。

($\Longleftarrow$) 关于 π 的假设是，其中心特征是整的，且

$$\omega_{\tau_2}(\varpi_F), q^{d^2}\omega_{\tau_1}(\varpi_F) \in \mathcal{O}$$

意味着存在一个 T_0-格 $\mathcal{L} \subseteq W_1 \otimes W_2$，使得

$$(\mathrm{Id} \otimes \tau_2(\varpi_D))\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L} \text{ and } q^d(\tau_1(\varpi_D) \otimes \mathrm{Id})\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}. \tag{3.3}$$

利用 $\mathcal{L}$，我们像之前一样定义格 L_0 和 L_1。由 (3.3),

$$L_1 = f^1_{\mathcal{L}} \oplus f^s_{\mathcal{L}+(\tau_1(\varpi_D)\otimes\mathrm{Id})\mathcal{L}}.$$

我们将证明 $L_1^{(1)} = L_1^{(0)} = L_1$，由推论 2.2 可知这意味着 π 的整性。这等价于证明

$$(\mathfrak{K}_0 \cdot L_1) \cap V_1 = (\mathfrak{K}_0 \cdot L_1)^{I(1)} = L_1.$$

由 (3.1) 和 (3.2)，只需证明若

$$l + \sum_{x,v}' F_v^x \in (\mathfrak{K}_0 \cdot L_1)^{I(1)} \text{ with } l \in L_0,$$

那么 $l + \sum'_{x,\ v} F_v^x \in L_1$。由于 $q^d - 1$ 在 $\mathcal{O}$中可逆，我们可以选取格 $\mathcal{L} + (\tau_1(\varpi_D) \otimes \mathrm{Id})\mathcal{L}$ 的一个 $\mathcal{O}$-基 $\{v_1, \ldots, v_n\}$，使其为算子 ξ_λ 的特征基，并且使 v_i的某些适当数乘构成子格 $\mathcal{L}$的一个 $\mathcal{O}$-基。令 $\psi_i(\lambda)$ 为

v_i上 $\xi_{1/\lambda}$ 作用的特征值。那么 ψ_i 在 $\mathbb{F}_{q^d}^\times$ 上定义了一个特征。通过定义 $\psi_i(0)=0$，将 ψ_i 扩展为 $\mathbb{F}_{q^d}$ 上的一个函数。

设 $l+\sum_{x,v}{}' F_v^x \in (\mathfrak{K}_0\cdot L_1)^{I(1)}$，其中 $l\in L_0$。记

$$\begin{aligned}\sum_{x,v}{}' F_v^x &= \sum_{x\in\mathbb{F}_{q^d}}\left(\sum_{i=1}^n a_{x,i}F_{v_i}^x\right)\\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^d}} a_{x,i}F_{v_i}^x\\ &= \sum_{i=1}^n\left(\left(\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^d}} a_{x,i}\right)g_{v_i}^1+\omega_{\tau_1}(-1)\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^d}} a_{x,i}\sum_{\lambda\in\mathbb{F}_{q^d}^\times} g_{\xi_\lambda(v_i)}^{su_{(1/\lambda)-x}}\right)\\ &= \sum_{i=1}^n\left(f^1_{\left(\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^d}} a_{x,i}\right)(v_i)}+\omega_{\tau_1}(-1)\sum_{x,\lambda\in\mathbb{F}_{q^d}} a_{x,i}\psi_i(\lambda)g_{v_i}^{su_{\lambda-x}}\right).\end{aligned}$$

记 $a_{x,i}=a_i(-x)$，将其视为定义在 $\mathbb{F}_{q^d}$ 上的函数，并令

$$S_1=\sum_{i=1}^n f^1_{\left(\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^d}} a_i(-x)\right)(v_i)} \text{ and } S_2=\omega_{\tau_1}(-1)\sum_{i=1}^n\sum_{x,\lambda\in\mathbb{F}_{q^d}} a_i(-x)\psi_i(\lambda)g_{v_i}^{su_{\lambda-x}}.$$

Thus

$$\sum_{x,v}{}' F_v^x = S_1+S_2.$$

我们可以取 $l\in\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{F}_{q^d}} g_{\mathcal{L}}^{su_\lambda}$，从而记为

$$l=\sum_{i=1}^n\sum_{\lambda\in\mathbb{F}_{q^d}} b_i(\lambda)g_{v_i}^{su_\lambda}.$$

回忆一下

$$V_1=f^1_{W_1\otimes W_2}\oplus f^s_{W_1\otimes W_2} \text{ and } L_1=f^1_{\mathcal{L}}\oplus f^s_{\mathcal{L}+(\tau_1(\varpi_D)\otimes\mathrm{Id})\mathcal{L}}.$$

注意，S_1 在 $I(1)$ 的作用下保持不变。因此，$l+S_2$ 在 $I(1)$ 的作用下也保持不变。此外，函数 $l+S_2$ 的支集不包含在 $BI(1)$ 上。因此 $l+S_2\in f^s_{W_1\otimes W_2}$。记

$$l+S_2=\sum_{y\in\mathbb{F}_{q^d}} c_1g_{v_1}^{su_y}+\ldots+\sum_{y\in\mathbb{F}_{q^d}} c_ng_{v_n}^{su_y}$$

可得函数

$$y\mapsto\omega_{\tau_1}(-1)\left(\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^d}} a_i(-x)\psi_i(x+y)\right)+b_i(y) \quad \text{on } \mathbb{F}_{q^d}$$

对所有 $1\le i\le n$，都是常值函数 c_i。因此，对所有 i，有 $c_i\in\mathcal{O}$，且 $l+S_2=f^s_{\sum_i c_iv_i}\in f^s_{\mathcal{L}+(\tau_1(\varpi_D)\otimes\mathrm{Id})\mathcal{L}}\subseteq L_1$。

为证明 $S_1\in L_1$，我们采用 [Vig08, §3] 中的傅里叶理论方法。我们假设系数域 E 包含 p 个单位根，因此存在一个非平凡的加性特征标 η，定义在 $\mathbb{F}_{q^d}$ 上，并且 $\mathbb{F}_{q^d}$ 上取值于 $\mathcal{O}$的函数的傅里叶变换是良定义的。给定一个函数$\sim f\colon\mathbb{F}_{q^d}\to\mathcal{O}$，其傅里叶变换 f 定义为

$$\widehat{f}(x)=\sum_{y\in\mathbb{F}_{q^d}}\eta(xy)f(y).$$

给定两个函数 $f,g\colon\mathbb{F}_{q^d}\to\mathcal{O}$，它们的卷积积 $f*g$ 是函数 $(f*g)(x)=\sum_{x=y+z}f(y)g(z)$。有 $\widehat{\widehat{f}}=q^df$ 且 $\widehat{f*g}=\widehat{f}\widehat{g}$。令 Δ 表示定义在.....上的常值函数 1

$\mathbb{F}_{q^d}$ 和 δ_0 表示 0 的特征函数。那么 $\widehat{\Delta} = q^d\delta_0$。用这种语言，我们有$S_1 = f^1_{\sum_{i=1}^n \widehat{a_i}(0)v_i}$。我们证明，对每个 $1 \le i \le n$，都有 $\widehat{a_i}(0)v_i \in \mathcal{L}$。事实上，对每个 i，由上一段可知

$$c_i\Delta = \omega_{\tau_1}(-1)(a_i * \psi_i) + b_i. \tag{3.4}$$

若 ψ_i 是平凡的，则可得对所有 $y \in \mathbb{F}_{q^d}$，$c_i = \omega_{\tau_1}(-1)(\widehat{a_i}(0) - a_i(y)) + b_i(y)$。因此

$$(\widehat{a_i}(0) - \omega_{\tau_1}(-1)c_i)v_i + \omega_{\tau_1}(-1)b_i(y)v_i = a_i(y)v_i \text{ for all } y \in \mathbb{F}_{q^d}.$$

对 $y \in \mathbb{F}_{q^d}$ 求和可得

$$(\widehat{a_i}(0) - \omega_{\tau_1}(-1)c_i)q^d v_i + \omega_{\tau_1}(-1)\widehat{b_i}(0)v_i = \widehat{a_i}(0)v_i.$$

由 (3.3)，$(\widehat{a_i}(0) - \omega_{\tau_1}(-1)c_i)q^d v_i \in \mathcal{L}$。此外，回忆一下 $\sum_{i=1}^n b_i(y)v_i \in \mathcal{L}$。基 $\{v_i\}$ 的选取意味着每个 $b_i(y)v_i \in \mathcal{L}$。因此 $b_i(0)v_i \in \mathcal{L}$。于是 $\widehat{a_i}(0)v_i \in \mathcal{L}$。若 ψ_i 非平凡，则对 (3.4) 两边应用傅里叶变换，得到

$$c_i q^d \delta_0 = \omega_{\tau_1}(-1)\widehat{a_i}\widehat{\psi_i} + \widehat{b_i}.$$

将两边乘以 $\widehat{\psi_i^{-1}}$，并利用 $\widehat{\psi_i}\widehat{\psi_i^{-1}} = \psi_i(-1)q^d(\Delta - \delta_0)$，得到

$$c_i q^d \delta_0 \widehat{\psi_i^{-1}} = \omega_{\tau_1}(-1)\psi_i(-1)q^d(\Delta - \delta_0)\widehat{a_i} + \widehat{b_i}\widehat{\psi_i^{-1}}.$$

Thus

$$c_i q^d \delta_0 \widehat{\psi_i^{-1}} = \omega_{\tau_1}(-1)\psi_i(-1)q^d\widehat{a_i} - \omega_{\tau_1}(-1)\psi_i(-1)q^d\delta_0\widehat{a_i} + \widehat{b_i}\widehat{\psi_i^{-1}}.$$

重新整理各项，得到

$$q^d\widehat{a_i} = q^d\widehat{a_i}(0)\delta_0 + \widehat{\psi_i^{-1}}\widehat{\phi} = q^d\widehat{a_i}(0)\delta_0 + \widehat{\psi_i^{-1} * \phi}$$

其中 $\phi = \omega_{\tau_1}(-1)\psi_i(-1)(c_i\Delta - b_i)$。再次应用傅里叶变换，得到

$$q^d a_i = \widehat{a_i}(0)\Delta + \psi_i^{-1} * \phi.$$

因此

$$\widehat{a_i}(0)v_i = a_i(0)q^d v_i - (\psi_i^{-1} * \phi)(0)v_i.$$

注意

$$\begin{aligned}(\psi_i^{-1} * \phi)(0)v_i &= \omega_{\tau_1}(-1)\psi_i(-1)\left(\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^d}} \psi_i^{-1}(-x)(c_i - b_i(x))\right)v_i \\ &= \omega_{\tau_1}(-1)\psi_i(-1)\left(c_i\widehat{\psi_i^{-1}}(0) - \sum_{x\in\mathbb{F}_{q^d}} \psi_i^{-1}(-x)b_i(x)\right)v_i \\ &= -\omega_{\tau_1}(-1)\psi_i(-1)\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^d}} \psi_i^{-1}(-x)b_i(x)v_i \in \mathcal{L}.\end{aligned}$$

此外，根据 (3.3)，$q^d v_i \in \mathcal{L}$。因此 $\widehat{a_i}(0)v_i \in \mathcal{L}$。

由此可知 $S_1 = f^1_{\sum_{i=1}^n \widehat{a_i}(0)v_i} \in f^1_{\mathcal{L}} \subseteq L_1$。因此，$l + \sum'_{x,\ v} F^x_v = l + S_1 + S_2 \in L_1$。 □

设 E 足够大以包含 $\sqrt{q}$，并令

$$\tau_1 \times \tau_2 := \mathrm{Ind}_B^G\left(\tau_1|\cdot|^{\frac{1}{2}} \otimes \tau_2|\cdot|^{-\frac{1}{2}}\right)$$

为 E 上的归一化抛物诱导。定理 3.1 中的整性判据对于归一化诱导是对称的：

定理 3.2. 设 τ_1 和 τ_2 是 $D^\times$ 的光滑不可约温和分歧表示。具有整中心特征的表示 $\tau_1 \times \tau_2$ 存在整结构，当且仅当 $\omega_{\tau_1}(\varpi_F)q^{\frac{d^2}{2}}$，$\omega_{\tau_2}(\varpi_F)q^{\frac{d^2}{2}} \in \mathcal{O}$。

由定理 3.2 可得，当具有整中心特征的 $\tau_1 \times \tau_2$ 可约时，其不可约子商总是整的。事实上，如有必要，扩大 E 后，我们可以假设 $\tau_1 \times \tau_2$ 的所有不可约子商都定义在 E 上。我们回顾 Tadi´c 的一个结果：$(\tau_1 \times \tau_2)_{\mathbb{C}}$ 与 $(\tau_1)_{\mathbb{C}} \times (\tau_2)_{\mathbb{C}}$ 同构；它可约当且仅当 $(\tau_2)_{\mathbb{C}} \cong (\tau_1)_{\mathbb{C}}|\cdot|_{\mathbb{C}}^{\pm\frac{a}{d}}$，且在这种情况下，它是无重数的，长度为 2 [（Tad90，引理 2.5、4.2，命题 4.3]）。这里，a 是与 $(\tau_1)_{\mathbb{C}}$ 在 Jacquet-Langlands 对应下相关联的 $\mathrm{GL}_d(F)$ 的本质平方可积表示的片段长度。因此，$\tau_1 \times \tau_2$ 在 E 上可约，当且仅当它们作为 E-线性表示同构（同样，如有必要，可扩大 E）。若 τ_1 是维数为 d' 的温和分歧表示，则 $d = ad'$。

设 $\tau = \tau_1|\cdot|^{\frac{a}{2d}}$。分别记 Steinberg 表示 $\mathrm{St}(\tau_{\mathbb{C}})$ 和 Speh 表示 $\mathrm{Sp}(\tau_{\mathbb{C}})$ 的 E-模型为 $\mathrm{St}(\tau)$ 和 $\mathrm{Sp}(\tau)$，则有以下光滑E-线性表示的短正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Sp}(\tau) \longrightarrow \tau|\cdot|^{-\frac{a}{2d}} \times \tau|\cdot|^{\frac{a}{2d}} \longrightarrow \mathrm{St}(\tau) \longrightarrow 0 \tag{3.5}$$

（参见 [Rag07，定理 2.2]）。我们指出，$\mathrm{Sp}(\tau)$ 是无限维的，当且仅当 τ 的维数为 > 1 [Rag07，注 2.4]。

定理 3.3。设 τ 是 $D^\times$在 E上的光滑绝对不可约温和分歧表示。具有整中心特征的表示 $\mathrm{St}(\tau)$ 存在整结构。具有整中心特征的表示 $\mathrm{Sp}(\tau)$ 存在整结构。

Proof. 设 $\Pi = \tau|\cdot|^{-\frac{a}{2d}} \times \tau|\cdot|^{\frac{a}{2d}}$。由正合列 (3.5)，我们可知 $\omega_{\mathrm{Sp}(\tau)} = \omega_{\mathrm{St}(\tau)} = \omega_\Pi = \omega_\tau^2$. If $\omega_{\mathrm{Sp}(\tau)}$ 是整的，那么 $\omega_\tau(\varpi_F) \in \mathcal{O}^\times$，因此 ω_Π 是整的。此外，注意到

$$\omega_\tau(\varpi_F)q^{\frac{d(d+a)}{2}}, \omega_\tau(\varpi_F)q^{\frac{d(d-a)}{2}} \in \mathcal{O} \text{ because } d + a \geq 0 \text{ and } d - a \geq 0.$$

因此，由定理 3.2，Π 具有一个整结构，故其不可约子表示 $\mathrm{Sp}(\tau)$ 也具有一个整结构。通过考察 (3.5) 的对偶正合列，可以类似地证明，具有整中心特征 $\omega_{\mathrm{St}(\tau)}$ 的 $\mathrm{St}(\tau)$ 具有一个整结构。□

推论 3.4. 设 τ 是 E上取值于 $D^\times$的光滑绝对不可约温和分歧表示。那么，$\mathrm{St}(\tau)$ 是整的，当且仅当 $\mathrm{Sp}(\tau)$ 是整的。□

4. Integrality of locally algebraic representations

本节中，$\pi = \pi_{sm} \otimes \pi_{alg}$，其中 π_{alg} 是 E上取值于 G 的非平凡不可约代数表示。我们从 Hu 关于零阶同调平凡的 k-向量空间图表的一个简单推广开始，即 Hu21，命题 2.2] 。我们称图表 $\mathcal{D}_1 \xrightarrow{r} \mathcal{D}_0$ 具有中心特征，如果 Z 通过一个特征作用于 $\mathcal{D}_0$ 和 $\mathcal{D}_1$。

引理 4.1. 设 $\mathcal{D}$ 是一个 k-光滑表示的图表 $\mathcal{D}_1 \xrightarrow{r} \mathcal{D}_0$，且这些表示都具有中心特征，使得 $H_0(\mathcal{D}) = 0$，并且 $\mathcal{D}_1$ 是 $\mathfrak{K}_1$的不可约表示。那么

$$\dim_k \mathcal{D}_0 \leq \frac{q^d + 1}{2} \dim_k \mathcal{D}_1.$$

此外，若 $\dim_k \mathcal{D}_0 = \frac{q^d+1}{2} \dim_k \mathcal{D}_1$，则 $\mathcal{D}_0 \cong \mathrm{Ind}_{I\varpi_D^{\mathbb{Z}}}^{\mathfrak{K}_0} r(\mathcal{D}_1)$。

Proof. 由于 $H_0(\mathcal{D}) = 0$，故 $\mathrm{Ker}(r) \neq 0$。取一个非零的 $I/I(1)$-特征向量 $v \in \mathrm{Ker}(r)$。设 $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$为满足以下条件的子图 $\mathcal{D}_1' \xrightarrow{r'} \mathcal{D}_0'$

$$\mathcal{D}_1' = \mathfrak{K}_1 \cdot v,\ \mathcal{D}_0' = \mathfrak{K}_0 \cdot r(\mathcal{D}_1'),\ \text{and } r' = r|_{\mathcal{D}_1'}. \tag{4.1}$$

由于 $\mathcal{D}_1$ 不可约，故 $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_1' = 0$。此外，$H_0(\mathcal{D}) = 0$ 意味着 $H_0(\mathcal{D}/\mathcal{D}') = 0$。因此，$\mathcal{D}_0/\mathcal{D}_0' = 0$。于是，$\mathcal{D}' = \mathcal{D}$，从而存在一个满射

$$\mathrm{Ind}_{I\varpi_D^{\mathbb{Z}}}^{\mathfrak{K}_0} r(\mathcal{D}_1) \twoheadrightarrow \mathcal{D}_0. \tag{4.2}$$

令 $\mathcal{D}_1^0 \subseteq \mathcal{D}_1$ 为向量 $\varpi_D^i v$（$0 \leq i \leq d-1$）的 k-张成空间。于是 $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1^0 + t\mathcal{D}_1^0$。注意，$t$ 是一个线性同构。因此

$$\frac{\dim_k \mathcal{D}_1}{2} \leq \dim_k \mathcal{D}_1^0.$$

此外，由于 $r(v)=0$ 且 r 是 $\varpi_D^{\mathbb{Z}}$-线性的，我们有 $\mathcal{D}_1^0 \subseteq \mathrm{Ker}(r)$。因此

$$\frac{\dim_k \mathcal{D}_1}{2} \leq \dim_k \mathcal{D}_1^0 \leq \dim_k \mathrm{Ker}(r).$$

因此，$\dim_k \mathcal{D}_1 = \dim_k r(\mathcal{D}_1) + \dim_k \mathrm{Ker}(r) \geq \dim_k r(\mathcal{D}_1) + $ 维数$\frac{k\mathcal{D}_1}{2}$。~~因此~~ $\dim_k r(\mathcal{D}_1) \leq$维数$\frac{k\mathcal{D}_1}{2}$。~~现在~~由 (4.2) 可得

$$\dim_k \mathcal{D}_0 \leq \frac{q^d+1}{2}\dim_k \mathcal{D}_1$$

因为 $[\mathfrak{K}_0 : I\varpi_D^{\mathbb{Z}}] = q^d+1$。

若 $\dim_k \mathcal{D}_0 = \frac{q^d+1}{2}\dim_k \mathcal{D}_1$，则由 (4.2) 可得 维数$\frac{k\mathcal{D}_1}{2}$ ~~$\leq \dim_k r(\mathcal{D}_1)$~~。根据上一段，这意味着 维数$\frac{k\mathcal{D}_1}{2} = \dim_k r(\mathcal{D}_1)$，~~从而~~ $\mathcal{D}_0 \cong \mathrm{Ind}_{I\varpi_D^{\mathbb{Z}}}^{\mathfrak{K}_0} r(\mathcal{D}_1)$。□

注 4.2. 在上述引理中，若 $\mathcal{D}_1$ 不可约，则图表 $\mathcal{D}$ 具有一个由子图构成的滤过，其分次片是形如 (4.1) 的图表。因此，若 $\dim_k \mathcal{D}_1 < \infty$，则引理中的同一维数关系仍成立。此外，若 $\dim_k \mathcal{D}_0 = \frac{q^d+1}{2}\dim_k \mathcal{D}_1$，则对 $\mathcal{D}$ 的任意分次片 $\mathcal{Q}_1 \xrightarrow{\overline{r}} \mathcal{Q}_0$，$\mathcal{Q}_0 \cong \mathrm{Ind}_{I\varpi_D^{\mathbb{Z}}}^{\mathfrak{K}_0} \overline{r}(\mathcal{Q}_1)$。

下一个引理是众所周知的：

引理 4.3. 设群 H 作用于有限维的 $\mathbb{Q}_p$-向量空间 V，并在 V中稳定一个格。那么，H 稳定 V 中有限多个格的相似类，当且仅当它在 V 上的作用不可约。

证明. 群 H 在 V 上的作用不可约，当且仅当其像 $\overline{H}$ 在 GL(V) 中不包含于 GL(V) 的真抛物子群 $\cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ 中。假设 $\overline{H}$ 包含于 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ 的一个真抛物子群中。由于 H 稳定一个格，不失一般性，可假设 $\overline{H}$ 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ 中与划分 $n = n_1 + \ldots + n_k$相对应的标准真抛物子群的子群。对于 $m \in \mathbb{N}$，考虑由n_1 个 $\frac{1}{p^m}\mathbb{Z}_p$ 与 $n_2+\ldots+n_k$ 个 $\mathbb{Z}_p$的直和构成的格 L_m。那么，H稳定格的相似类 $\{[L_m]\}_{m\in\mathbb{N}}$这一无限族。

为证明逆命题，固定一组 $\{g_\alpha\}$ $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)/\mathbb{Q}_p^\times \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ 的陪集代表元，使得 $g_\alpha = (g_{ij}^\alpha) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_p)$。若 $L_0 = \mathbb{Z}_p \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_p$ 表示 $\mathbb{Q}_p^n \cong V$中的标准格，则

$$g_\alpha L_0 = \bigoplus_{i=1}^{n} p^{\min_j\{\mathrm{val}_p(g_{ij}^\alpha)\}}\mathbb{Z}_p.$$

假设 H 稳定一个格族 $\{g_\alpha L_0 : \alpha \in \mathcal{I}\}$，其中 $\mathcal{I}$ 不是有限的。那么存在i、$1 \leq i \leq n$，使得

$$\max_{\alpha\in\mathcal{I}}\{\min_j\{\mathrm{val}_p(g_{ij}^\alpha)\}\}$$

不是有界的。因此，我们发现 $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{I}} g_\alpha L_0$ 包含于 V的一个真子空间中，该子空间在 H的作用下稳定；也就是说，H在 V 上的作用是可约的。□

令 $\tau = \mathrm{Ind}_{D^\times()D_{d'}^\times}^{D^\times}\theta$ 为 $D^\times$的一个光滑绝对不可约温和分歧表示，其维数为 d'。

引理 4.4. (i) 作为 As $I/I(1)$-表示，

$$\mathrm{St}(\tau)^{I(1)} \cong \mathrm{Sp}(\tau)^{I(1)} \cong (\theta \oplus \theta^q \oplus \ldots \oplus \theta^{q^{d'-1}}) \otimes (\theta \oplus \theta^q \oplus \ldots \oplus \theta^{q^{d'-1}}).$$

(ii) 表示 $\mathrm{St}(\tau)^{I(1)}$ 和 $\mathrm{Sp}(\tau)^{I(1)}$ 是不可约的 $\mathfrak{K}_1$-表示，当且仅当 $d' = 1,2$。

证明. 我们证明 St(τ) 的引理；关于 Sp(τ) 的证明类似。

(i) 根据 [MP96，命题 6.7], , 自然的 T-等变满射映射

$$\mathrm{St}(\tau_{\mathbb{C}}) \twoheadrightarrow \mathrm{St}(\tau_{\mathbb{C}})_N$$

从 Steinberg 表示到其光滑雅各布模块的映射诱导出一个 $(T \cap I)$-等变同构

$$\mathrm{St}(\tau_{\mathbb{C}})^{I(1)} \to (\mathrm{St}(\tau_{\mathbb{C}})_N)^{T\cap I(1)}.$$

根据 [Rag07，定理 2.2 (ii)], $\mathrm{St}(\tau_{\mathbb{C}})_N \cong \tau_{\mathbb{C}}|\cdot|_{\mathbb{C}}^{\frac{a+d}{2d}} \otimes \tau_{\mathbb{C}}|\cdot|_{\mathbb{C}}^{-\frac{a+d}{2d}}$ 作为 T-表示。因此，群 $T \cap I(1) = D(1) \times D(1)$ 在 $\mathrm{St}(\tau_{\mathbb{C}})_N$ 上的作用是平凡的，因为 $\tau_{\mathbb{C}}$ 是温和分歧的，即，

$$(\mathrm{St}(\tau_{\mathbb{C}})_N)^{T\cap I(1)} = \mathrm{St}(\tau_{\mathbb{C}})_N.$$

由于所有表示都定义在 E 上，因此可得

$$\mathrm{St}(\tau)^{I(1)} \cong \tau|\cdot|^{\frac{a+d}{2d}} \otimes \tau|\cdot|^{-\frac{a+d}{2d}}$$

作为 E-线性 $I/I(1)$-表示。现在，(i) 可由以下同构推出

$$\tau|\cdot|^{\frac{a+d}{2d}} \cong \tau|\cdot|^{-\frac{a+d}{2d}} \cong \theta \oplus \theta^q \oplus \ldots \oplus \theta^{q^{d'-1}}$$

作为 $\mathcal{O}_D^\times/D(1)$-表示。

(ii) $I/I(1)$-表示 $\mathrm{St}(\tau)^{I(1)}$ 是 d'^2 个互不相同的 $I/I(1)$-特征之和，因为 θ 的伽罗瓦共轭互不相同。回顾一下， $\mathfrak{K}_1$ 由 I 和 t生成。因此，由非零 $I/I(1)$-特征向量生成的 $\mathrm{St}(\tau)^{I(1)}$ 的 $\mathfrak{K}_1$-子表示的维数至多为$2d'$。因此，若 $d' > 2$，则 $\mathrm{St}(\tau)^{I(1)}$ 是可约的。反过来，若 $d' = 2$，容易验证 $\mathrm{St}(\tau)^{I(1)}$ 中的四个 $I/I(1)$-特征中的任意一个，都能在 t的作用下生成整个表示。□

根据弗罗贝尼乌斯互反律，存在非零的 K-表示映射

$$\mathrm{Ind}_I^K(\theta^{q^i} \otimes \theta^{q^j}) \to \mathrm{St}(\tau)^{K(1)} \text{ and } \mathrm{Ind}_I^K(\theta^{q^i} \otimes \theta^{q^j}) \to \mathrm{Sp}(\tau)^{K(1)}$$

对所有 $0 \le i, j \le d'-1$ 都成立。当 $i \ne j$ 时，表示 $\mathrm{Ind}_I^K(\theta^{q^i} \otimes \theta^{q^j})$ 不可约。因此，

$$\mathrm{Ind}_I^K(\theta^{q^i} \otimes \theta^{q^j}) \subseteq \mathrm{St}(\tau)^{K(1)} \text{ and } \mathrm{Ind}_I^K(\theta^{q^i} \otimes \theta^{q^j}) \subseteq \mathrm{Sp}(\tau)^{K(1)} \tag{4.3}$$

对所有 $0 \le i < j \le d'-1$ 都成立。若 $i = j$，则 $\mathrm{Ind}_I^K(\theta^{q^i} \otimes \theta^{q^i})$ 是两个不可约子表示$\theta^{q^i} \circ \det(\cdot)$ 和 $\mathrm{st}(\theta^{q^i})$的和。这里，$\det(\cdot)$ 是 $\overline{\mathrm{GL}}_2(\mathbb{F}_{q^d})$ 的行列式特征与自然满射 $K \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{q^d})$ 的复合。

引理 4.5. 作为 K-表示

$$\mathrm{St}(\tau)^{K(1)} \cong \bigoplus_{i<j} \mathrm{Ind}_I^K(\theta^{q^i} \otimes \theta^{q^j}) \oplus \bigoplus_i \mathrm{st}(\theta^{q^i}) \quad and$$
$$\mathrm{Sp}(\tau)^{K(1)} \cong \bigoplus_{i<j} \mathrm{Ind}_I^K(\theta^{q^i} \otimes \theta^{q^j}) \oplus \bigoplus_i (\theta^{q^i} \circ \det(\overline{\cdot})).$$

证明. 只需证明 $\theta \circ \det(\cdot) \subseteq \mathrm{Sp}(\tau)^{K(1)}$。事实上，若 $\theta \circ \det(\cdot) \subseteq \mathrm{Sp}(\tau)^{K(1)}$，则 $\overline{\varpi}_D$ 的对角作用给出 $\theta^{q^i} \circ \det(\cdot) \subseteq \mathrm{Sp}(\tau)^{K(1)}$，对所有 i 均成立；而 $\mathrm{St}(\tau)^{I(1)}$ 与 $\mathrm{Sp}(\tau)^{I(1)}$ 的无重数性进而推出，对所有 i, $\mathrm{st}(\theta^{q^i}) \subseteq \mathrm{St}(\tau)^{K(1)}$。我们可以利用 [MS14, 命题 7.21(1)] 得出 $\theta \circ \det(\cdot) \subseteq \mathrm{Sp}(\tau)^{K(1)}$。□

定理 4.6. 设 τ 是 $D^\times$的一个维数为 $d' \le 2$的光滑绝对不可约温和分歧表示。设 $\pi = \mathrm{St}(\tau) \otimes \pi_{alg}$是一个具有整中心特征的不可约局部代数表示。那么 π 存在一个整结构。

证明. 设 $V_1 = \mathrm{St}(\tau)^{I(1)} \otimes \pi_{alg}$且 $V_0 = \mathrm{St}(\tau)^{K(1)} \otimes \pi_{alg}$。群 $\mathfrak{K}_1$同构于$I \rtimes t^{\mathbb{Z}}$。由于 I 是紧的，$t^{2d} \in Z$，且 Z 通过一个整特征作用于 V_1，可知 V_1包含一个 $\mathfrak{K}_1$-格 L_1。此外，由引理 4.4 (ii)，$\mathrm{St}(\tau)^{I(1)}$ 是一个不可约的 $\mathfrak{K}_1$-表示，而 π_{alg} 也是一个不可约的 $\mathfrak{K}_1$-表示，因此 V_1 是 $\mathfrak{K}_1$的一个不可约局部代数表示。由引理 4.3， V_1 包含有限多个 $\mathfrak{K}_1$-格的相似类。

假设 π 不是整的。那么，根据推论 2.2，递增序列 $\mathfrak{K}_1$-格 $(L_1^{(i)})_i$的 V_1 不会稳定。由上一段可知，存在 $i_0 > 0$ 使得 $L^{(i_0)}1$

且 L_1 属于同一个相似类，即 $L^{(i_0)}{}_1 = \varpi^j L_1$ 对某个 $j < 0$成立。令 $L_0 = \mathfrak{K}_0 \cdot L_1$和 $L^{(i_0)}{}_0 = \mathfrak{K}_0 \cdot L^{(i_0)}{}_1 = \varpi^j L_0$。令

$$\mathcal{D}_{\mathcal{O}} = L_1 \hookrightarrow L_0 \quad \text{and} \quad \mathcal{D}_{\mathcal{O}}^{(i_0)} = L_1^{(i_0)} \hookrightarrow L_0^{(i_0)}$$

是相应的 $\mathcal{O}$-自由 $\mathcal{O}\mathfrak{K}_i$-模图表。由引理 2.4，自然映射 $H_0(\mathcal{D}_{\mathcal{O}}) \to H_0(\mathcal{D}^{(i_0)}{}_{\mathcal{O}})$ 是满射。由于图表 $\mathcal{D}^{(i_0)}{}_{\mathcal{O}}$ 等于图表 $\varpi^j \mathcal{D}_{\mathcal{O}}$，因此得到 $H_0(\varpi^j \mathcal{D}_{\mathcal{O}}/\mathcal{D}_{\mathcal{O}}) = 0$。通过 d´evissage，我们有 $H_0(\mathcal{D}_k) = 0$，其中 $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} k = \varpi^{-1}\mathcal{D}_{\mathcal{O}}/\mathcal{D}_{\mathcal{O}}$。由引理 4.1 和注 4.2 可得 $\dim_k(L_0 \otimes_{\mathcal{O}} k) \leq \frac{q^d+1}{2} \dim_k(L_1 \otimes_{\mathcal{O}} k)$。由于 $\dim_k(L_0 \otimes_{\mathcal{O}} k) = \dim_E V_0$ 且 $\dim_k(L_1 \otimes_{\mathcal{O}} k) = \dim_E V_1$，我们得到 $\dim_E V_0 \leq \frac{q^d+1}{2} \dim_E V_1$。然而，由引理 4.4 (i) 可知

$$\dim_E \mathrm{St}(\tau)^{I(1)} = d'^2,$$

以及由引理 4.5 可知

$$\dim_E \mathrm{St}(\tau)^{K(1)} = \frac{1}{2}(d'^2 - d')(q^d + 1) + d'q^d.$$

这意味着 $\dim_E V_0 > \frac{q^d+1}{2} \dim_E V_1$。矛盾。 □

我们以一个整局部代数 Speh 表示的例子作结。为简单起见，我们取 D 为四元数除法代数。令 $\tau = \mathrm{Ind}_{D^\times_1 () D_2^\times}^{D^\times} \theta$ 为 E 上的光滑绝对不可约温和分歧表示。注意，τ 的维数为 2，因此 Sp(τ) 是无限维的。考虑下面这个不可约局部代数表示

$$\pi := \mathrm{Sp}(\tau) \otimes (\mathrm{Sym}^1 E^4 \otimes \det{}^{-\frac{1}{4}})$$

G。这里，G 通过由映射 $D \to \mathrm{M}_2(F_2)$，$\alpha + \beta\varpi_D \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta\varpi_F \\ \sigma\beta & \sigma\alpha \end{pmatrix}$ 诱导的 $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_4(F_2) \hookrightarrow \mathrm{GL}_4(E)$ 作用于代数表示，其中 σ 是 Gal(F_2/F) 中唯一的非平凡自同构。我们假设 ω_τ 是整的，因此 π 的中心特征 ω_π 是整的。现在我们证明 π 是整的；特别地，这意味着 Emerton 条件足以保证 π 的整性。我们取 $s = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$，使得 $\det(\bar{s}) = 1$。

定理 4.7. 表示 $\pi = \mathrm{Sp}(\tau) \otimes (\mathrm{Sym}^1 E^4 \otimes \det{}^{-\frac{1}{4}})$ 具有一个整结构。证明。回忆引理 4.5 中

$$\mathrm{Sp}(\tau)^{K(1)} = (\theta \circ \det(\bar{\cdot})) \oplus (\theta^q \circ \det(\bar{\cdot})) \oplus \mathrm{Ind}_I^K(\theta \otimes \theta^q),$$
$$\mathrm{Sp}(\tau)^{I(1)} = (\theta \otimes \theta) \oplus (\theta^q \otimes \theta^q) \oplus (\theta \otimes \theta^q) \oplus (\theta^q \otimes \theta).$$

设 e_1是特征 $\theta \circ \det(\cdot)$ 的底层空间中的一个非零向量。则 $e_2 := t^2 e_1$和 $e_0 := t\overline{e_1}$ 分别是特征 $\theta^q \circ \det$ 和$\theta \otimes \theta^q$在 K和 I的底层空间中的非零向量。注意，$(\theta \circ \det(\cdot))|_I = \theta \otimes \theta$且 $(\theta^q \circ \det(\cdot))|_I = \theta^q \otimes \theta^q$。$K$-表示 $\mathrm{Ind}_I^K Ee_0$ 在 t^2的作用下稳定。因此，对某些$\varepsilon \in \mathcal{O}^\times$ 和 $\nu \in \mathbb{Z}$，有 $t^2 e_0 = \varepsilon\varpi^\nu f_0$，其中 $f_0 = \sum_x u_x s e_0 \in (\mathrm{Ind}_I^K Ee_0)^{I(1)}$ 是一个支撑在 $IsI(1)$ 上的函数。令 $q = \varepsilon'\varpi^{\nu'}$，其中 $\varepsilon' \in \mathcal{O}^\times$ 且 $\nu' \in \mathbb{Z}$。$I(1)$-不变函数 $\sum_x u_x s f_0$在 1 处的取值为 q^2，在 s 处的取值为 0。因此 $\sum_x u_x s f_0 = q^2 e_0$。利用 $t^2 \circ (\sum_x u_x s) = (\sum_x u_x s) \circ t^2$，以及 t^4 的作用是乘以一个单位，可得 $\nu = -\nu'$。

考虑表示 Sym Kdet 中的 K-格

$$M_0 = \mathrm{Sym}^1 \mathcal{O}^4 \otimes \det{}^{-\frac{1}{4}} = \mathcal{O}X_1 \oplus \mathcal{O}X_2 \oplus \mathcal{O}Y_1 \oplus \mathcal{O}Y_2$$

那么 $M_1 = (M_0 + tM_0) + t^2(M_0 + tM_0)$ 是表示 $\mathrm{Sym}^1 E^4 \otimes \det{}^{-\frac{1}{4}}$ 中的 $\mathfrak{K}_1$-格。计算可得

$$\begin{aligned} M_1 &= \varpi_F^{\frac{-1}{4}} \mathcal{O}X_1 \oplus \varpi_F^{\frac{-3}{4}} \mathcal{O}X_2 \oplus \varpi_F^{\frac{0}{4}} \mathcal{O}Y_1 \oplus \varpi_F^{\frac{-2}{4}} \mathcal{O}Y_2 \\ &= \varpi^{\frac{-e}{4}} \mathcal{O}X_1 \oplus \varpi^{\frac{-3e}{4}} \mathcal{O}X_2 \oplus \varpi^0 \mathcal{O}Y_1 \oplus \varpi^{\frac{-2e}{4}} \mathcal{O}Y_2 \end{aligned}$$

其中 e 是分歧指数 $e(E/F)$。注意，4 整除 e，因为 E 取得足够大[1]，从而包含 $\varpi_F^{\frac{1}{4}}$。因此 $\nu' \geq e \geq 4$且 $\nu \leq -4$。

考虑以下 $\mathfrak{K}_1$的 V_1-格:

$$L_1^{(0)} = L_1 := (\varpi^0\mathcal{O}e_1 \oplus \varpi^0\mathcal{O}e_2 \oplus \varpi^0\mathcal{O}e_0 \oplus \varpi^\nu\mathcal{O}f_0) \otimes M_1.$$

为便于计算，我们写作如下： $L_1^{(0)}$

$$\begin{aligned} L_1^{(0)} &= (0e_1 \oplus 0e_2) \otimes (\tfrac{-e}{4}X_1 \oplus \tfrac{-3e}{4}X_2 \oplus 0Y_1 \oplus \tfrac{-2e}{4}Y_2) \\ &\quad \oplus (0e_0 \oplus \nu f_0) \otimes (\tfrac{-e}{4}X_1 \oplus \tfrac{-3e}{4}X_2 \oplus 0Y_1 \oplus \tfrac{-2e}{4}Y_2). \end{aligned}$$

我们记录 $u_x s$ 和 t 的作用:

$$\begin{aligned} &u_x s((ae_1 \oplus be_2) \otimes (n_1X_1 \oplus n_2X_2 \oplus m_1Y_1 \oplus m_2Y_2)) \\ &= (ae_1 \oplus be_2) \otimes (n_1([x]X_1 + Y_1) \oplus n_2([x^q]X_2 + Y_2) \oplus m_1X_1 \oplus m_2X_2), \\ &t((ae_1 \oplus be_2) \otimes (n_1X_1 \oplus n_2X_2 \oplus m_1Y_1 \oplus m_2Y_2)) \\ &= (ae_0 \oplus (b+\nu)f_0) \otimes ((n_1 + \tfrac{-e}{4})Y_2 \oplus (n_2 + \tfrac{3e}{4})Y_1 \oplus (m_1 + \tfrac{-e}{4})X_1 \oplus (m_2 + \tfrac{-e}{4})X_2), \\ &t((ae_0 \oplus bf_0) \otimes (n_1X_1 \oplus n_2X_2 \oplus m_1Y_1 \oplus m_2Y_2)) \\ &= ((b-\nu)e_1 \oplus ae_2) \otimes ((n_1 + \tfrac{-e}{4})Y_2 \oplus (n_2 + \tfrac{3e}{4})Y_1 \oplus (m_1 + \tfrac{-e}{4})X_1 \oplus (m_2 + \tfrac{-e}{4})X_2). \end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned} &\sum_x u_x s((ae_0 \oplus bf_0) \otimes (n_1X_1 \oplus n_2X_2 \oplus m_1Y_1 \oplus m_2Y_2)) \\ &= ((b-2\nu)e_0 \oplus af_0) \otimes ((m_1 - 2\nu)X_1 \oplus (m_2 - 2\nu)X_2) \oplus (n_1 - 2\nu)Y_1 \oplus (n_2 - 2\nu)Y_2. \end{aligned}$$

现在我们计算 $L_1^{(1)}$。

步骤 1: 我们首先计算得到

$$\begin{aligned} (\mathfrak{K}_0 \cdot L_1^{(0)}) \cap V_1 &= (0e_1 \oplus 0e_2) \otimes (\tfrac{-e}{4}X_1 \oplus \tfrac{-3e}{4}X_2 \oplus \tfrac{-e}{4}Y_1 \oplus \tfrac{-3e}{4}Y_2) \\ &\quad \oplus (0e_0 \oplus \nu f_0) \otimes (\tfrac{-e}{4}X_1 \oplus \tfrac{-3e}{4}X_2 \oplus 0Y_1 \oplus \tfrac{-2e}{4}Y_2). \end{aligned}$$

在这项计算中，对于格的前半部分（$\mathfrak{K}_0 \cdot L_1^{(0)}$），我们使用了 $s(e_i \otimes X_j) = e_i \otimes Y_j \cap V_1$。格的后半部分（$\mathfrak{K}_0 \cdot L_1^{(0)}$）与 $L_1^{(0)}$ 的格的后半部分相同，因为$\nu \leq -4$，因此 $\sum_x u_x s$ 的作用所产生的部分已包含在格 $L_1^{(0)}$ 中。

步骤 2: t 在（$\mathfrak{K}_0 \cdot L_1^{(0)}$）上的作用 $\cap V_1$ 给出

$$\begin{aligned} t((\mathfrak{K}_0 \cdot L_1^{(0)}) \cap V_1) &= (0e_0 \oplus \nu f_0) \otimes (\tfrac{-2e}{4}Y_2 \oplus 0Y_1 \oplus \tfrac{-2e}{4}X_1 \oplus \tfrac{-4e}{4}X_2) \\ &\quad \oplus (0e_1 \oplus 0e_2) \otimes (\tfrac{-2e}{4}Y_2 \oplus 0Y_1 \oplus \tfrac{-e}{4}X_1 \oplus \tfrac{-3e}{4}X_2). \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} L_1^{(1)} &= (\mathfrak{K}_0 \cdot L_1^{(0)}) \cap V_1 + t((\mathfrak{K}_0 \cdot L_1^{(0)}) \cap V_1) \\ &= (0e_1 \oplus 0e_2) \otimes (\tfrac{-e}{4}X_1 \oplus \tfrac{-3e}{4}X_2 \oplus \tfrac{-e}{4}Y_1 \oplus \tfrac{-3e}{4}Y_2) \\ &\quad \oplus (0e_0 \oplus \nu f_0) \otimes (\tfrac{-2e}{4}X_1 \oplus \tfrac{-4e}{4}X_2 \oplus 0Y_1 \oplus \tfrac{-2e}{4}Y_2). \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} (\mathfrak{K}_0 \cdot L_1^{(1)}) \cap V_1 &= (0e_1 \oplus 0e_2) \otimes (\tfrac{-e}{4}X_1 \oplus \tfrac{-3e}{4}X_2 \oplus \tfrac{-e}{4}Y_1 \oplus \tfrac{-3e}{4}Y_2) \\ &\quad \oplus (0e_0 \oplus \nu f_0) \otimes (\tfrac{-2e}{4}X_1 \oplus \tfrac{-4e}{4}X_2 \oplus 0Y_1 \oplus \tfrac{-2e}{4}Y_2) = L_1^{(1)}. \end{aligned}$$

因此，根据推论 2.2， $L_1^{(2)} = L_1^{(1)}$ 和 π 是整的。 □

References

[Ass21] Eran Assaf, 《 *Existence of invariant norms in p-adic representations of GL_2 (F) of large weights*》, 《数论杂志》 **224** 2021 95 141 4221529 （）, –。MR BS Christophe Breuil 和 Peter Schneider, 《

[07] *First steps towards p-adic Langlands functoriality*》, 《纯粹与应用数学杂志》 **610** 2007 149 180 2359853 （）, –。MR CEG Ana Caraiani、Matthew Emerton、Toby Gee、David

[+16] Geraghty、Vytautas Pa˘sk¯unas 和 Sug Woo Shin, 《*Patching and the p-adic local Langlands correspondence*》, 《剑桥数学杂志》**4**（2016）, 第 2 期, 197–287。MR 3529394

[DI13] Marco De Ieso, 《 *Existence de normes invariantes pour* $_2$, **133** 2013 8, 》GL《数论 2729 2755 3045213 杂志》（），第 – 期。MR[Eme06] Matthew Emerton, 《 *Jacquet modules of locally analytic representations of p-adic reductive groups. I. Construction and first properties*》, Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup.（4）39（2006），第 5 期，775–839。MR 2292633[GeK14] Elmar Große Kl¨onne, 《 *On the universal module of p-adic spherical Hecke algebras*》, Amer. J. Math. 136（2014），第 3 期，599–652。MR 3214272[GMF23] Henniart Guy 和 Vign´eras Marie-France, 《 *Representations of* $GL_n(D)$ *near the identity*》, 2023 年，见 https://arxiv.org/abs/2305.06581。[Hu09] Yongquan Hu, 《 *Normes invariantes et existence de filtrations admissibles*》, 《纯粹与应用数学杂志》634（2009），107–141。MR 2560407[Hu21] Yong Quan Hu, 《 *A note on integral structures in some locally algebraic representations of*》GL, 《Acta Math. Sin.（Engl. Ser.）》 **37** 2021 1, 59 72 4204535（），第 – 期。MR MP Allen Moy 和 Gopal Prasad, 《 [96] *Jacquet functors and unrefined minimal K-types*》, Comment. Math. Helv. **71** 1996 1, 98 121 1371680（），第 – 期。MR MS Alberto Mınguez 和 Vincent Secherre, 《 *Représentations lisses modulo l de*》$\mathrm{GL}_m(D)$, Duke Math. J. [14] ´ ´ **163** 2014 4, 795 887 3178433（），第 – 期。MR PR Dipendra Prasad 和 A. Raghuram, 《 [00] *Kirillov theory for* $_2$ D *where D is a division algebra over a*》GL（）, Duke Math. J.（），第 – *non-Archimedean local field* **104** 2000 1, 19 44 1769724 期。MR[07] *On the restriction to* $D^* \times D^*$ *of representations of p-adic* $_2$ D Rag A. Raghuram, GL（）， Canad. J. Math. **59** 2007 5, 1050 1068 2354402（），第 – 期。MR Sor Claus M. Sorensen, 《 [13] *A proof of the Breuil-Schneider conjecture in the indecomposable case*》, Ann. of Math.（2）177（2013），第 1 期，367–382。MR 2999043[SS97] Peter Schneider 和 Ulrich Stuhler, 《 *Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building*》, Inst. Hautes ´ Etudes Sci. Publ. Math.（ 1997 85, 97 191 1471867），第 – 期。MR STP P. [01] $U\mathfrak{g}$ Schneider、J. Teitelbaum 和 Dipendra Prasad,（）*-finite locally analytic representations*, 《Represent. Theory》 **5** 2001 111 128, 1835001（），–, 附录由 Dipendra Prasad 撰写。 [05] MR SZ Allan J. Silberger 和 Ernst-Wilhelm Zink, 《*An explicit matching theorem for level zero discrete series of unit groups of p-adic simple algebras* **585** 2005 173 235 》, 《纯粹与应用数学杂志》（），–。 2164626 MR[90] ´ *Induced representations of* n A *for p-adic division algebras A* Tad Marko Tadic, GL （，），《纯粹与应用数学杂志》405（1990），48–77。MR 1040995[Vig08] Marie-France Vign´eras, 《 *A criterion for integral structures and coefficient systems on the tree of*》PGL（ 2 F **4** 2008 4, 1, ，），Pure Appl. Math. Q.（），专刊: 1291 1316 2441702 纪念 Jean-Pierre Serre。第 – 部分。MR

Department of Mathematics and Statistics, Indian Institute of Technology Kanpur, Kanpur -208016, India*Email address*: nsantosh@iitk.ac.in

Department of Mathematics, Indian Institute of Science, Bangalore - 560012, India
Email address: mihirsheth@iisc.ac.in