arXiv:2304.08274v2 [cond-mat.soft] 6 May 2023

功能梯度板的渐近精确一阶剪切变形理论

K. C. Le[a, b1]

[a]计算数学与工程系，计算科学研究所，孙德胜大学，越南胡志明市[b]土木工程学院，孙德胜大学，越南胡志明市

摘要

采用变分渐近法，推导出功能梯度弹性板的渐近精确一阶剪切变形理论。作为应用，根据这一精化理论求得了夹层板中波传播问题的解析解。比较二维板理论与三维弹性理论得到的色散曲线可知，前者的精度可达 h^2/l^2 阶，其中 h为板厚， l 为波长。

关键词：功能梯度，板，变分渐近法，波传播，色散曲线。

1. 引言

Reissner（32）率先建立了一种考虑横向剪切的精化板理论，该理论以他的名字命名，如今称为一阶剪切变形板理论（FSDT）。[2] 他基于Castigliano变分原理推导出该理论：对横向坐标上的应力分布作出若干假设，并用应力合力、弯矩和剪力表示能量。他的开创性工作促成了大量后续研究，主要原因在于该理论适用于中等厚度的板，以及

[1]电话： +84 93 4152458，电子邮箱：lekhanhchau@tdtu.edu.vn[2]还应肯定Mindlin（27）对这一主题的重要贡献，尽管他引入横向剪切和转动惯量的动机有所不同：他希望捕捉板的高频厚度振动。

提交至《国际工程科学杂志》的预印本 *2023*年*5*月*9*日

数值方法（3；1；10；29；30）的发展；此外，他推导过程中的逻辑也可应用于其他问题（39；4；11）。许多研究尝试依据 Kantorovic-Krylov 半离散方法，为变分问题求近似解，从而论证或重新推导 Reissner 的板理论（例如，参见 Wang 等人（39）的综述）。然而，对 Reissner 推导的渐近本质的认识取得真正进展，要归功于 Berdichevsky（5，6，7）。他运用自己提出的变分渐近法，给出了考虑横向剪切的精化板壳理论的渐近精确推导；对于板，该理论可化为 Reissner 理论。他证明，Reissner 理论的积分特征是渐近准确的，但沿厚度方向的位移分布并非如此。

鉴于功能梯度（FG）材料和结构应用广泛，已有大量研究提出了适用于功能梯度板的一阶剪切变形理论和高阶剪切变形理论（HSDT）（31; 28; 37; 34; 12; 13）等[3]。上述所有参考文献均采用 Kantorovic-Krylov 半离散方法，该方法基于对变形运动学或板厚方向应力状态的一些假设来进行降维，因此所得二维理论均不能保证渐近精确性。Lefebvre 等人（26）、Baron 和 Naili（2）以及 Kuznetsov（16, 17）基于三维弹性理论分析了功能梯度波导中的波传播动力学问题。由于该分析不局限于低频或长波，其优势在于能够研究整个区域内的所有频散曲线，从而确定低频极限、群速度为零的点以及群速度为负的区域。该三维方法的缺点是，有限板侧边缘处的边界条件会导出振动模态振幅的无穷多个耦合方程，而这些方程无法得到精确满足。至于渐近方法，遗憾的是，笔者目前尚不了解任何适用于功能梯度板的渐近精确的一阶剪切变形理论。Berdichevsky（7）曾尝试构建一种适用于各向异性非均质壳的精化理论，该理论在弹性模量受到约束的条件下考虑横向剪切，但这一约束

[3]由于针对功能梯度板的二维理论种类繁多，包括单层、多层以及包含转动惯量和横向剪切等因素的精化理论，关于这一主题的文献数量极其庞大。因此，不可能列出所有参考文献。关于综述，读者可参阅（38；34）及其中的参考文献。

要求泊松比为常数，限制过于严格，因此几乎所有实际的功能梯度板都不满足这一条件。对于作为功能梯度板特例的层合板，Sutyrin（36）和Yu（40）对能量泛函进行了渐近分析。然而，由于一般情况下层合板的降维并不能导出一阶剪切变形理论，他们尝试优化参数，使所得理论在保持一阶剪切变形理论形式的同时，尽可能接近渐近正确性。还值得一提的是，变分渐近法近年来在板壳问题及均匀化方面的一些应用（22; 24; 20; 21; 23; 35; 33）。

本文旨在通过变分渐近法，为功能梯度板构建渐近精确的一阶剪切变形理论。我们的目标是构建渐近精度达到 h^2/l^2阶的精化板理论，其中 h 为板厚，l 为波长。由于我们只考虑横向的非均匀性，因此假设各向同性弹性功能梯度板的质量密度和弹性模量沿此方向变化，且其分布关于横向坐标为偶函数。降维基于对含有小参数 h/l的作用泛函进行渐近分析，由此可根据厚度问题的解得到位移分布。还必须对所得平均能量进行外推，以确保其在短波下表现正确。通过这一渐近分析，我们得到了该一阶剪切变形理论，其中理论的所有系数均以闭合解析形式给出，可针对任何满足上述假设的功能梯度板进行计算。我们将该理论用于研究夹层板中的波传播问题，并比较采用所提出的理论和弹性理论得到的频散曲线。结果表明，前者在 h^2/l^2阶以内是精确的，这证明了我们的渐近分析是合理的。

本文结构安排如下。在简短的引言之后，第2节给出问题的变分表述。第3节对作用泛函进行渐近分析。第4节介绍适用于功能梯度板的二维一阶剪切变形理论。第5节分析夹层板中的波传播，并比较色散曲线。最后，第6节总结全文。

2. 功能梯度板的变分表述

设 Ω 为（x_1，x_2）平面内由光滑闭曲线 ∂Ω 围成的二维区域。我们考虑一块在未变形状态下

占据三维区域 $\mathcal{V} = \Omega \times (-h/2,\ h/2)$ 的板。其在（x_1，x_3）平面内的横截面如图1所示。我们称 Ω 为板中面，h 为其厚度。

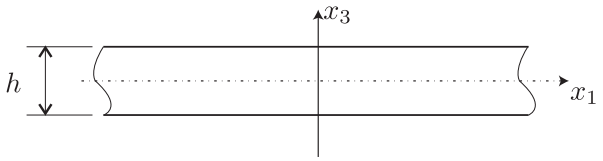

图 1：板的横截面

我们分析由功能梯度各向同性弹性材料制成的板的受迫振动，其质量密度和弹性模量取决于x_3。作用泛函为

$$I[\mathbf{w}(\mathbf{x},t)] = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\int_{-h/2}^{h/2}[T(x_3,\dot{\mathbf{w}}) - W(x_3,\boldsymbol{\varepsilon})]\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{w}|_{x_3=h/2} + \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{w}|_{x_3=-h/2})\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t\,, \quad (1)$$

其中，$\mathrm{d}a = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$ 表示中面的面积元，$\mathbf{w}(\mathbf{x}\ t)$为位移场，而 $\boldsymbol{\tau}$ 为作用于板上下表面的表面力。这里明确指出了该功能梯度材料的拉格朗日量对横向坐标 x_3 的显式依赖。动能密度为

$$T(x_3,\dot{\mathbf{w}}) = \frac{1}{2}\rho(x_3)\dot{\mathbf{w}}\cdot\dot{\mathbf{w}} = \frac{1}{2}\rho(x_3)(\dot{w}_\alpha\dot{w}_\alpha + \dot{w}^2),$$

其中，点表示时间导数。储能密度 W 为

$$W(x_3,\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\lambda(x_3)(\varepsilon_{ii})^2 + \mu(x_3)\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij},$$

应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的分量为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}) \equiv w_{(i,j)}.$$

此外，我们假设 $\rho(x_3)$、$\lambda(x_3)$ 和 $\mu(x_3)$ 都是 x_3 的偶函数。在此以及下文中，我们使用取值范围为 1 至 3 的拉丁指标表示

空间坐标，并使用取值范围为 1 至 2 的希腊指标表示平面坐标 x_1 和 x_2。指标前的逗号表示对相应坐标进行微分，一对指标外的圆括号表示对称化运算，并默认对重复指标求和。

哈密顿变分原理指出，功能梯度板的真实位移 $\check{\mathbf{w}}(\mathbf{x}\ t)$ 随空间和时间变化，使得作用泛函 (1) 在 $\check{\mathbf{w}}(\mathbf{x}\ t)$ 处相对于所有满足初始和终止条件以及运动学边界条件的连续可微函数 $\mathbf{w}(\mathbf{x}\ t)$ 取驻值（例如参见 (7)）。问题在于，对于薄功能梯度板，用一个近似的二维作用泛函取代三维作用泛函，该二维作用泛函中的函数仅依赖于纵向坐标 x_1, x_2 和时间 t。降维的可能性与厚度 h 和变形状态在纵向的变化特征尺度之比很小有关，l（参见 (19) 和第3节）。我们假设

$$\frac{h}{l} \ll 1.$$

此外，我们假设

$$\frac{h}{c\tau} \ll 1, \tag{2}$$

其中，τ 是函数 $\check{\mathbf{w}}(\mathbf{x}\ t)$ 随时间变化的特征尺度（参见 (19)），c 是所研究弹性材料中平面波的最小速度。这意味着我们仅考虑功能梯度弹性板的静力学或低频振动。下面将采用变分渐近法构造二维作用泛函，其中相对于单位，直至 h^2/l^2 阶的项均为精确项（考虑横向剪切的精化板理论，现称为一阶剪切变形理论）。

为了在取极限 $h \to 0$ 时固定横向坐标的定义域，我们引入无量纲坐标

$$\zeta = \frac{x_3}{h}, \quad \zeta \in [-1/2, 1/2],$$

并将作用泛函转换为

$$I[\mathbf{w}(\mathbf{x},t)] = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\int_{-1/2}^{1/2} h[T(\zeta,\dot{\mathbf{w}}) - W(\zeta,\boldsymbol{\varepsilon})]\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}(\tau_i w_i|_{\zeta=1/2} + \tau_i w_i|_{\zeta=-1/2})\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t\,. \quad (3)$$

现在， h 通过应变张量的分量 ε_{ij} 显式地进入作用泛函

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = w_{(\alpha,\beta)}, \quad 2\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{h}w_{\alpha|\zeta} + w_{,\alpha}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{1}{h}w_{|\zeta}.$$

竖线后跟着 ζ 表示对 ζ 的偏导数，而非对 x_ζ的偏导数。

3. 作用泛函的渐近分析

我们仅研究满足假设 (2) 的功能梯度板的低频振动。基于这一假设，在通过变分渐近方法求位移场的渐近展开时，可以忽略动能密度。[4] 同样，在这一过程中也可以忽略外部牵引力 $\boldsymbol{\tau}$ 所做的功。求得位移的渐近公式后，即可计算平均动能密度和外部牵引力所做的功。在将变分渐近方法应用于泛函 (3) 之前，我们先将储能密度变换为另一种更便于渐近分析的形式。注意，在 $W(\varepsilon_{ij})$ 的各项中， $\varepsilon_{\alpha 3}$ 和 ε_{33} 中的导数$w_{\alpha|\zeta}/h$ 和 $w_{|\zeta}/h$ 从渐近意义上来说是主要项。因此，适合从储能密度中单独提取分量 $\varepsilon_{\alpha 3}$ 和 ε_{33} 。为此，我们将后者表示为两个二次型 $W_{\|}$ 和 $W_{\perp}$ 之和，分别对应纵向和横向储能密度。它们定义如下

$$W_{\|} = \min_{\varepsilon_{\alpha 3},\varepsilon_{33}} W, \quad W_{\perp} = W - W_{\|}. \quad (4)$$

[4]关于弹性壳和杆的高频振动（其中动能密度应在变分渐近分析中予以保留），参见（8; 9; 18; 19; 14）。

简单计算可得

$$W_{\parallel} = \mu[\sigma(\varepsilon_{\alpha\alpha})^2 + \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}],$$
$$W_{\perp} = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)(\epsilon_{33} + \sigma\varepsilon_{\alpha\alpha})^2 + 2\mu\varepsilon_{\alpha 3}\varepsilon_{\alpha 3},$$

其中 $\sigma = \lambda/(\lambda + 2\mu) = \nu/(1-\nu)$。对于功能梯度板 λ、μ 和 σ 是 ζ的函数。若无需精确说明，则简略省略这些函数中的 ζ自变量。

我们可以按照一般方案（19；7），从确定集合 $\mathcal{N}$ 开始进行变分渐近方法。结果表明，在第一步中，函数 $\mathbf{w}$ 不依赖于横向坐标 ζ：$\mathbf{w} = \mathbf{u}(x_\alpha, t)$；在第二步中，与横向剪切相关的附加自由度 $\varphi_\alpha(x_\alpha, t)$ 出现在 $\mathbf{w}^*$中；而在下一步中，$\mathbf{w}^{**}$ 则完全由 $\mathbf{u}$ 和 φ_α确定。因此，按照变分渐近方案得到的集合 $\mathcal{N}$ 由函数$\mathbf{u}(x_\alpha, t)$ 和 $\varphi_\alpha(x_\alpha, t)$ 组成。我们将略过这些冗长但标准的推导，并作如下未知函数变换

$$\begin{aligned} w_\alpha(x_\alpha,\zeta,t) &= u_\alpha(x_\alpha,t) + h\varphi_\alpha(x_\alpha,t)\zeta - hu_{,\alpha}\zeta + hy_\alpha(x_\alpha,\zeta,t), \\ w(x_\alpha,\zeta,t) &= u(x_\alpha,t) - h\mathcal{I}[\sigma]u_{\beta,\beta} + hy(x_\alpha,\zeta,t). \end{aligned} \tag{5}$$

在这些公式中，u_α, u 表示板的平均位移，而$\psi_\alpha = \varphi_\alpha - u_{,\alpha}$则描述平均转角[5]，具体如下

$$\begin{aligned} &u_\alpha(x_\alpha,t) = \langle w_\alpha(x_\alpha,\zeta,t)\rangle, \quad u(x_\alpha,t) = \langle w(x_\alpha,\zeta,t)\rangle, \\ &\psi_\alpha(x_\alpha,t) = \langle w_\alpha(x_\alpha,\zeta,t)\zeta\rangle/(h/12), \end{aligned} \tag{6}$$

其中，$\langle . \rangle$ 表示在 ζ 范围内、上下限为 $[-1/2, 1/2]$的积分。$\mathcal{I}[f]$ 表示对任意函数$f(\zeta)$应用以下变换

$$\mathcal{I}[f](\zeta) = \int_0^\zeta f(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \langle \int_0^\zeta f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\rangle.$$

根据此定义，如果 $f(\zeta)$ 是偶函数，则 $\mathcal{I}[f](\zeta)$ 是奇函数，反之亦然。此外，$\langle \mathcal{I}[f]\rangle = 0$。

[5]不难看出，φ_α 是由横向剪切引起的旋转角。如果 $\varphi_\alpha = 0$，剪切应变 $\varepsilon_{\alpha 3}$ 在一阶近似下为零，横向纤维平均而言仍垂直于变形中面，这与基尔霍夫板理论中的情况相同。

根据定义 (6)，函数 y_α 和 y 应满足以下约束

$$\langle y_\alpha \rangle = 0, \quad \langle y_\alpha \zeta \rangle = 0, \quad \langle y \rangle = 0. \tag{7}$$

方程（5）—（7）建立了 w_α, w 与函数集合 $u_\alpha, u, \varphi_\alpha, y_\alpha, y$ 之间的一一对应关系，并确定未知函数 $\{w_\alpha, w\} \to \{u_\alpha, u, \varphi_\alpha, y_\alpha, y\}$ 的变化。

渐近分析使我们能够确定 y_α, y 的小量阶。若忽略这些项，则板的变形状态仅由伸长度量 $A_{\alpha\beta} = u_{(\alpha,\beta)}$ 和弯曲度量 $B_{\alpha\beta} = u_{,\alpha\beta} - \varphi_{(\alpha,\beta)}$ 表征。引入以下记号

$$\varepsilon_A = \max_\Omega \sqrt{A_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta}}, \quad \varepsilon_B = h \max_\Omega \sqrt{B_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta}},$$
$$\Delta_\alpha = \max_{\mathcal{V}} |y_{\alpha|\zeta}|, \quad \Delta = \max_{\mathcal{V}} |y_{|\zeta}|.$$

考虑中面 Ω 上的某一点。不等式中的最佳常数 l

$$|A_{\alpha\beta,\gamma}| \le \frac{\varepsilon_A}{l}, \quad h\,|B_{\alpha\beta,\gamma}| \le \frac{\varepsilon_B}{l}, \quad |\varphi_\alpha| \le \frac{h}{l}(\varepsilon_A + \varepsilon_B)$$
$$|\varphi_{\alpha,\beta}| \le \frac{h}{l^2}(\varepsilon_A + \varepsilon_B), \quad \max_\zeta |y_{\alpha,\beta}| \le \frac{\Delta_\alpha}{l}, \quad \max_\zeta |y_{,\alpha}| \le \frac{\Delta}{l}$$

称为纵向变形状态变化的特征尺度。我们将内部区域 Ω_i 定义为 Ω 的一个子区域，在该区域内下列不等式成立：

$$h/l \ll 1.$$

假设区域 Ω 由内部区域 Ω_i 和一个紧邻轮廓 ∂Ω、宽度为 h 阶的区域 Ω_b（边界层）构成。于是，泛函（3）可分解为两个泛函之和：一个是将采用迭代过程的内部区域泛函，另一个是边界层泛函。我们首先讨论内部区域泛函。

现在固定 $u_\alpha, u, \varphi_\alpha$，并求取 y_α, y。将 (5) 代入作用泛函 (3)，保留其中包含 y_α, y 的渐近主导项，并忽略所有其他项。基于上述不等式的估算得出渐近公式

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{33} = -\sigma A_{\beta\beta} + y_{|\zeta}, \quad 2\varepsilon_{\alpha 3} = \varphi_\alpha + y_{\alpha|\zeta} - h\mathcal{I}[\sigma]A_{\beta\beta,\alpha} + hy_{,\alpha}, \\ &\varepsilon_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - hB_{\alpha\beta}\zeta + hy_{(\alpha,\beta)}. \end{aligned} \tag{8}$$

根据公式 (8)，纵向储能密度不含包含 y_α, y 的渐近主导项，因此可以忽略。由于横向储能密度中的渐近主导项仅包含 y_α, y 关于 ζ 的导数，我们省略对 Ω 和 t 的积分，并将厚度问题简化为求以下泛函的最小值。

$$I_\perp = \frac{h}{2}\langle[(\lambda+2\mu)(y_{|\zeta} - \sigma h B_{\beta\beta}\zeta)^2 \\ + \mu(\varphi_\alpha + y_{\alpha|\zeta} - h\mathcal{I}[\sigma]A_{\beta\beta,\alpha} + h y_{,\alpha})(\varphi_\alpha + y_{\alpha|\zeta} - h\mathcal{I}[\sigma]A_{\gamma\gamma,\alpha} + h y_{,\alpha})]\rangle.$$

这个问题可以分两步求解。首先，我们将泛函最小化

$$\frac{h}{2}\langle(\lambda+2\mu)(y_{|\zeta} - \sigma h B_{\beta\beta}\zeta)^2\rangle$$

满足约束条件 $(7)_3$。显然，最小值为零，并在以下情况下取到

$$y = h\mathcal{I}[\sigma\zeta]B_{\beta\beta}. \tag{9}$$

现在，将此处的 y 代入 $I_\perp$的剩余项中，便得到第二步：最小化

$$\frac{h}{2}\langle\mu(\varphi_\alpha + y_{\alpha|\zeta} - h\mathcal{I}[\sigma]A_{\beta\beta,\alpha} + h^2\mathcal{I}[\sigma\zeta]B_{\beta\beta,\alpha})(\varphi_\alpha + y_{\alpha|\zeta} - h\mathcal{I}[\sigma]A_{\gamma\gamma,\alpha} + h^2\mathcal{I}[\sigma\zeta]B_{\gamma\gamma,\alpha})\rangle$$

在满足 (7) 中前两个约束条件的 y_α 范围内。为简化这个最小化问题，我们对未知函数作如下变换

$$y_\alpha = f(\zeta)hA_{\beta\beta,\alpha} + g(\zeta)h^2 B_{\beta\beta,\alpha} + z_\alpha \tag{10}$$

使约束条件 $(7)_{1,2}$ 得到满足，并且

$$y_{\alpha|\zeta} = h\mathcal{I}[\sigma]A_{\beta\beta,\alpha} - h^2\mathcal{I}[\sigma\zeta]B_{\beta\beta,\alpha} + \alpha h^2 B_{\beta\beta,\alpha} + z_{\alpha|\zeta},$$

其中 α 仍是一个未知系数。于是

$$f(\zeta) = \mathcal{I}[\mathcal{I}[\sigma]], \quad g(\zeta) = -\mathcal{I}[\mathcal{I}[\sigma\zeta]] + \alpha\zeta.$$

由于 $\sigma(\zeta)$ 是偶函数， $f(\zeta)$ 也是偶函数，且 $\langle f\rangle = 0$。因此，(10) 右侧的第一项满足约束 $(7)_{1,2}$。

函数 $g(\zeta)$ 是奇函数，因此约束 $(7)_1$ 会自动满足。为满足第二个约束 $\langle g(\zeta)\zeta\rangle = 0$，系数 α 必须为

$$\alpha = 12\langle\zeta\mathcal{I}[\mathcal{I}[\sigma\zeta]]\rangle. \tag{11}$$

利用 (10)，我们将该问题化为最小化下列函数 a l

$$J_\perp = \frac{h}{2}\langle\mu(z_{\alpha|\zeta} + \bar{\varphi}_\alpha)(z_{\alpha|\zeta} + \bar{\varphi}_\alpha)\rangle$$

在满足约束 $\langle z_\alpha\rangle = \langle z_\alpha\zeta\rangle = 0$ 的 z_α 中进行，其中

$$\bar{\varphi}_\alpha = \varphi_\alpha + \alpha h^2 B_{\beta\beta,\alpha}. \tag{12}$$

为求解此最小化问题，我们考虑对偶变分问题 (7)

$$\min J_\perp = \max J_\perp^*, \quad J_\perp^* = h\langle p_\alpha\bar{\varphi}_\alpha - \frac{1}{2\mu}p_\alpha p_\alpha\rangle.$$

T在满足以下条件的 p_α 及数值 a_α 和 b_α 中求取最大值

$$p_{\alpha|\zeta} = a_\alpha + b_\alpha\zeta, \quad p_\alpha(\pm 1/2) = 0.$$

数值 a_α 和 b_α 是约束 $\langle z_\alpha\rangle = 0$ 和 $\langle z_\alpha\zeta\rangle = 0$ 对应的拉格朗日乘子。对 p_α 的方程积分，并利用它们的边界条件，我们得到 $a_\alpha = 0$ 和 $p_\alpha = b_\alpha k$（ζ），其中 k（ζ）$= \frac{1}{2}$（$\zeta^2 - 1/4$）。将 p_α 代入 $J_\perp^*$，并对 b_α 求最大值，得到

$$\Phi_\perp = \min J_\perp = \max J_\perp^* = \frac{1}{2}h\mu^*\bar{\varphi}_\alpha\bar{\varphi}_\alpha, \quad \mu^* = \frac{\langle k\rangle^2}{\langle k^2/\mu\rangle}.$$

由于使 $J_\perp^*$ 达到最大值的 b_α 为

$$b_\alpha = \frac{\langle k\rangle}{\langle k^2/\mu\rangle}\bar{\varphi}_\alpha,$$

我们有

$$p_\alpha = b_\alpha k(\zeta) = \frac{\langle k\rangle k}{\langle k^2/\mu\rangle}\bar{\varphi}_\alpha.$$

利用极小化者与极大化者之间的关系

$$z_{\alpha|\zeta} + \bar{\varphi}_\alpha = \frac{1}{\mu}p_\alpha,$$

我们也由此得到 z_α

$$z_\alpha = \mathcal{I}\Big[\frac{\langle k\rangle k}{\langle k^2/\mu\rangle\mu} - 1\Big]\bar{\varphi}_\alpha. \tag{13}$$

现在我们来计算平均纵向能量密度。考虑到式 (10)，只需在此精化理论中将 $\varepsilon_{\alpha\beta}$ 近似为

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - hB_{\alpha\beta}\zeta + \mathcal{I}[\mathcal{I}[\sigma]]h^2 A_{\gamma\gamma,\alpha\beta}$$

因为其他项不会带来 h^2/l^2阶的修正。将 $\varepsilon_{\alpha\beta}$代入 $W_\parallel$ 并沿厚度方向积分，得到

$$\begin{aligned}\Phi_\parallel = h[&\langle\mu\sigma\rangle(A_{\alpha\alpha})^2 + \langle\mu\rangle A_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} + \langle\mu\sigma\zeta^2\rangle h^2(B_{\alpha\alpha})^2 + \langle\mu\zeta^2\rangle h^2 B_{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}\\ &+ 2\langle\mu\sigma\mathcal{I}[\mathcal{I}[\sigma]]\rangle h^2 A_{\delta\delta}A_{\gamma\gamma,\alpha\alpha} + 2\langle\mu\mathcal{I}[\mathcal{I}[\sigma]]\rangle h^2 A_{\alpha\beta}A_{\gamma\gamma,\alpha\beta}].\end{aligned}$$

注意，由于弹性模量具有偶性， $A_{\alpha\beta}$ 与 $B_{\alpha\beta}$之间不存在交叉项。然而，与均匀板的精化理论不同，由于 μ 和 σ 依赖于 ζ， $A_{\alpha\beta}$ 与 $A_{\gamma\gamma,\ \alpha\beta}$之间还存在两个额外的交叉项。将横向和纵向储能密度相加，得到总平均储能密度，其形式为

$$\begin{aligned}\Phi = h[&\langle\mu\sigma\rangle(A_{\alpha\alpha})^2 + \langle\mu\rangle A_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} + \langle\mu\sigma\zeta^2\rangle h^2(B_{\alpha\alpha})^2 + \langle\mu\zeta^2\rangle h^2 B_{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}\\ &+ 2\langle\mu\sigma\mathcal{I}[\mathcal{I}[\sigma]]\rangle h^2 A_{\delta\delta}A_{\gamma\gamma,\alpha\alpha} + 2\langle\mu\mathcal{I}[\mathcal{I}[\sigma]]\rangle h^2 A_{\alpha\beta}A_{\gamma\gamma,\alpha\beta} + \frac{1}{2}\mu^*\bar{\varphi}_\alpha\bar{\varphi}_\alpha].\end{aligned} \tag{14}$$

接下来讨论平均动能密度。要计算平均动能密度，我们必须先根据渐近展开 (5) 计算速度。在精化理论 (7) 所要求的精度范围内，与其他时间导数相比，我们可以忽略 $\dot{y}_\alpha$ 和$\dot{y}$ ，因此

$$\dot{w}_\alpha = \dot{u}_\alpha + \dot{\psi}_\alpha\zeta, \quad \dot{w} = \dot{u} - h\mathcal{I}[\sigma]\dot{u}_{\alpha,\alpha}.$$

将这些公式代入动能密度，并沿厚度积分后，我们得到

$$\Theta = \frac{h}{2}[\langle\rho\rangle\dot{u}_\alpha\dot{u}_\alpha + \langle\rho\rangle\dot{u}^2 + \langle\rho\zeta^2\rangle h^2\dot{\psi}_\alpha\dot{\psi}_\alpha + \langle\rho(\mathcal{I}[\sigma])^2\rangle h^2(\dot{u}_{\alpha,\alpha})^2].$$

同样， ρ 的偶性以及 ζ 和 $\mathcal{I}[\sigma]$ 的奇性确保了 $\dot{u}_{,\ \alpha}$ 与 ψ_α 之间，以及 $\dot{u}$ 与 $\dot{u}_{\alpha,\ \alpha}$之间都不会出现交叉项。平均动能密度的表达式则相当简单。

将平均储能密度与平均动能密度相结合，可得平均二维作用泛函的形式为

$$J[u_\alpha, u, \psi_\alpha] = \int_{t_0}^{t_1} \int_\Omega [\Theta(\dot{u}_\alpha, \dot{u}, \dot{\psi}_\alpha) - \Phi(A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}, A_{\gamma\gamma,\alpha\beta}, \bar{\varphi}_\alpha)] \,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t\,,$$

其中 Θ 和 Φ 如上所述。这个作用泛函仍可进一步简化。首先，若引入一个新的未知函数

$$\bar{u} = u + \alpha h^2 B_{\alpha\alpha}. \tag{15}$$

那么经过未知函数（12）和（15）的变换后，旋转角 $\psi_\alpha = \varphi_\alpha - u_{,\ \alpha}$ 的形式保持不变，

$$\psi_\alpha = \varphi_\alpha - u_{,\alpha} = \bar{\varphi}_\alpha - \bar{u}_{,\alpha},$$

而用 ψ_α 表示的 $B_{\alpha\beta}$ 不包含二阶导数 s

$$B_{\alpha\beta} = -\psi_{(\alpha,\beta)}.$$

因此，方便起见，可选择 ψ_α、 u_α 和 $\bar{u}$ 作为主要自由度，并用它们表示总平均储能密度。然而，根据（15）对未知函数作变换 $u \to \bar{u}$ 后， Θ 在忽略高阶小量后变为

$$\Theta = \frac{h}{2}[\langle\rho\rangle\dot{u}_\alpha\dot{u}_\alpha + \langle\rho\rangle\dot{\bar{u}}^2 - 2\langle\rho\rangle\alpha h^2\dot{\bar{u}}\dot{\bar{u}}_{,\alpha\alpha} + \langle\rho\zeta^2\rangle h^2\dot{\psi}_\alpha\dot{\psi}_\alpha + \langle\rho(\mathcal{I}[\sigma])^2\rangle h^2(\dot{u}_{\alpha,\alpha})^2].$$

这种平均动能密度对于长波而言是渐近精确的（精确到 h^2/l^2阶），但由于它不是正定的，因此不适用于短波。对第三项进行分部积分，忽略趋于边界的散度项（将其视为零拉格朗日量），并添加涉及 $\dot{\bar{\varphi}}_\alpha$的小项后，我们得到前一个公式的有意义的短波外推（5；19）

$$\Theta = \frac{h}{2}[\langle\rho\rangle\dot{u}_\alpha\dot{u}_\alpha + \langle\rho\rangle\dot{\bar{u}}^2 + \langle\rho\zeta^2 + 2\rho\alpha\rangle h^2\dot{\psi}_\alpha\dot{\psi}_\alpha + \langle\rho(\mathcal{I}[\sigma])^2\rangle h^2(\dot{u}_{\alpha,\alpha})^2].$$

其次，还有另一种短波外推： $\Phi_{\|}$中的第五项和第六项不是正定的，而且在短波情况下表现“糟糕”，但可以变换后与 Θ中的最后一项合并。事实上，通过分部积分并忽略零拉格朗日量，我们可将这两项化简为

$$2(\langle\mu\sigma\mathcal{I}[\mathcal{I}[\sigma]]\rangle + \langle\mu\mathcal{I}[\mathcal{I}[\sigma]]\rangle)h^2A_{\beta\beta}A_{\gamma\gamma,\alpha\alpha}. \tag{16}$$

注意到，在一阶近似中（见下一节）

$$\langle\rho\rangle\ddot{u}_\alpha = 2\langle\mu\sigma\rangle A_{\gamma\gamma,\alpha} + 2\langle\mu\rangle A_{\alpha\beta,\beta},$$

因此

$$\langle\rho\rangle\ddot{u}_{\alpha,\alpha} = 2(\langle\mu\sigma\rangle + \langle\mu\rangle)A_{\gamma\gamma,\alpha\alpha},$$

我们可以将式 (16) 中修正项的最后一个因子 $A_{\gamma\gamma,\ \alpha\alpha}$ 替换为

$$\frac{\langle\rho\rangle}{2(\langle\mu\sigma\rangle + \langle\mu\rangle)}\ddot{u}_{\alpha,\alpha}.$$

然后，对时间进行分部积分并忽略零拉格朗日量后，我们可以将 Θ 中的最后一项与该项合并，得到 $(h/2)\rho^* h^2(\dot{u}_{\alpha,\ \alpha})^2$, 其中

$$\rho^* = \langle\rho(\mathcal{I}[\sigma])^2\rangle - \frac{2\langle\rho\rangle(\langle\mu\sigma\mathcal{I}[\mathcal{I}[\sigma]]\rangle + \langle\mu\mathcal{I}[\mathcal{I}[\sigma]]\rangle)}{\langle\mu\sigma\rangle + \langle\mu\rangle}.$$

因此，经过此次短波外推后，平均储能密度和动能密度的最终公式如下

$$\Phi = h[\langle\mu\sigma\rangle(A_{\alpha\alpha})^2 + \langle\mu\rangle A_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} + \langle\mu\sigma\zeta^2\rangle h^2(B_{\alpha\alpha})^2 + \langle\mu\zeta^2\rangle h^2 B_{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\mu^*(\psi_\alpha + \bar{u}_{,\alpha})(\psi_\alpha + \bar{u}_{,\alpha})], \tag{17}$$

and

$$\Theta = \frac{h}{2}[\langle\rho\rangle\dot{u}_\alpha\dot{u}_\alpha + \langle\rho\rangle\dot{\bar{u}}^2 + \langle\rho\zeta^2 + 2\rho\alpha\rangle h^2\dot{\psi}_\alpha\dot{\psi}_\alpha + \rho^* h^2(\dot{u}_{\alpha,\alpha})^2]. \tag{18}$$

最后，我们讨论外部牵引力 τ_α 和 τ的功。将式（5）中的w_α 和 w 代入式（3）的最后一个积分，并考虑到

式（9）、（10）、（11）和（13），可得

$$\mathcal{A}=\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\Big\{P_\alpha u_\alpha+Pu+\frac{1}{2}hQ_\alpha\psi_\alpha-h\mathcal{I}[\sigma](1/2)QA_{\beta\beta}+h\mathcal{I}[\mathcal{I}[\sigma]](1/2)P_\alpha A_{\beta\beta,\alpha}$$
$$+h\mathcal{I}[\sigma\zeta](1/2)PB_{\alpha\alpha}+h^2(\frac{1}{2}\alpha-\mathcal{I}[\mathcal{I}[\sigma\zeta]](1/2))Q_\alpha B_{\beta\beta,\alpha}$$
$$+h\mathcal{I}\Big[\frac{\langle k\rangle k}{\langle k^2/\mu\rangle\mu}-1\Big](1/2)Q_\alpha\bar{\varphi}_\alpha\Big\}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t\,,$$

其中

$$P_\alpha=\tau_\alpha|_{\zeta=1/2}+\tau_\alpha|_{\zeta=-1/2},\quad P=\tau|_{\zeta=1/2}+\tau|_{\zeta=-1/2},$$
$$Q_\alpha=\tau_\alpha|_{\zeta=1/2}-\tau_\alpha|_{\zeta=-1/2},\quad Q=\tau|_{\zeta=1/2}-\tau|_{\zeta=-1/2}.$$

第五项和第七项可以通过分部积分进行变换。用新的未知函数 $\bar{u}$ 和 ψ_α 表示，最终得到的功为

$$\mathcal{A}=\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\Big\{P_\alpha u_\alpha+P\bar{u}+\frac{1}{2}hQ_\alpha\psi_\alpha-h\mathcal{I}[\sigma](1/2)QA_{\beta\beta}-h\mathcal{I}[\mathcal{I}[\sigma]](1/2)P_{\alpha,\alpha}A_{\beta\beta}$$
$$+h\mathcal{I}[\sigma\zeta](1/2)PB_{\beta\beta}-h^2\alpha PB_{\beta\beta}-h^2(\frac{1}{2}\alpha-\mathcal{I}[\mathcal{I}[\sigma\zeta]](1/2))Q_{\alpha,\alpha}B_{\beta\beta}$$
$$+h\mathcal{I}\Big[\frac{\langle k\rangle k}{\langle k^2/\mu\rangle\mu}-1\Big](1/2)Q_\alpha(\psi_\alpha+\bar{u}_{,\alpha})\Big\}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t\,.\quad(19)$$

现在适合对边界层能量作一番说明。遗憾的是，目前尚不清楚这一能量，而在短波外推中忽略零拉格朗日量，使其确定更加困难。因此，无法建立一阶剪切变形理论的渐近精确边界条件。不过，针对均质板的大量数值模拟表明，自然边界条件能够给出足够准确的结果（19），因此可以合理地预期，功能梯度板也会如此。

4. 二维一阶剪切变形理论

现在，我们建立功能梯度板自由振动二维一阶剪切变形理论的变分原理：自由振动的功能梯度板的真实位移和旋转角

随空间和时间变化，使得二维平均作用泛函

$$J[u_\alpha,\bar{u},\psi_\alpha]=\int_{t_0}^{t_1}\int_\Omega[\Theta(\dot{u}_\alpha,\dot{\bar{u}},\dot{\psi}_\alpha)-\Phi(A_{\alpha\beta},B_{\alpha\beta},\psi_\alpha+\bar{u}_{,\alpha})]\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t\,,$$

在所有连续可微函数 $u_\alpha(x_\alpha,\ t)$、$\bar{u}(x_\alpha,\ t)$ 和 $\psi_\alpha(x_\alpha,\ t)$ 中取驻值。我们假设这些函数在初始时刻和终止时刻固定。若板的边缘为自由边界，则不对这些函数施加边界约束。储能密度和动能密度分别取自式（17）和式（18），其中 $A_{\alpha\beta}=u_{(\alpha,\beta)}$ 和$B_{\alpha\beta}=-\psi_{(\alpha,\beta)}$。标准变分法表明，驻定条件 $\delta J=0$ 意味着以下二维方程

$$\begin{aligned}&\langle\rho\rangle h\ddot{u}_\alpha-\rho^* h^3\ddot{u}_{\beta,\beta\alpha}=n_{\alpha\beta,\beta},\\&\langle\rho\rangle h\ddot{\bar{u}}=q_{\alpha,\alpha},\\&\langle\rho\zeta^2+2\rho\alpha\rangle h^3\ddot{\psi}_\alpha=-m_{\alpha\beta,\beta}-q_\alpha.\end{aligned}\tag{20}$$

二维张量 $n_{\alpha\beta}$、q_α和 $m_{\alpha\beta}$ 由本构方程给出

$$\begin{aligned}n_{\alpha\beta}&=\frac{\partial\Phi}{\partial A_{\alpha\beta}}=2\langle\mu\sigma\rangle hA_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}+2\langle\mu\rangle hA_{\alpha\beta},\\q_\alpha&=\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\varphi}_\alpha}=\mu^* h(\psi_\alpha+\bar{u}_{,\alpha}),\\m_{\alpha\beta}&=\frac{\partial\Phi}{\partial B_{\alpha\beta}}=2\langle\mu\sigma\zeta^2\rangle h^3B_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}+2\langle\mu\zeta^2\rangle h^3B_{\alpha\beta},\end{aligned}\tag{21}$$

其中 $\delta_{\alpha\beta}$ 为克罗内克δ。对于具有自由边缘的板，这些方程满足自然边界条件

$$n_{\alpha\beta}\nu_\beta=0,\quad q_\alpha\nu_\alpha=0,\quad m_{\alpha\beta}\nu_\beta=0,\tag{22}$$

其中 ν_α 是垂直于曲线 $\partial\Omega$、位于 $(x_1,\ x_2)$ 平面内的单位向量分量。对于具有固支边或简支边的板，必须以相应的运动学边界条件取代自然边界条件 (22)。如果板面上有面力作用，从而产生受迫振动，则应将功 $\mathcal{A}$ 加入作用泛函。由此可在方程 (20) 右端得到附加项，这些项可通过对功 (19) 求变分轻松得到（参见

例如 Berdichevsky (7)）。请注意，对于 ρ、 λ 和 μ 为常数的均质板，方程组 (20)、(21) 及边界条件 (22) 可化为 Reissner (32) 和 Berdichevsky (5) 得到的结果。

为完成对功能梯度板的二维一阶剪切变形理论，还应说明如何利用二维场恢复三维应力和应变状态。为此，应由式（8）求得应变张量场 $\boldsymbol{\varepsilon}(x_\alpha, \zeta, t)$。利用渐近公式（9）、（10）和（12），可得

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - h\zeta B_{\alpha\beta}, \quad 2\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{\langle k\rangle k}{\langle k^2/\mu\rangle \mu}\bar{\varphi}_\alpha, \\ &\varepsilon_{33} = -\sigma A_{\alpha\alpha} + \sigma\zeta h B_{\alpha\alpha}. \end{aligned} \tag{23}$$

与 $\varepsilon_{\alpha\beta}$ 不同，由于 μ 和 σ 取决于 ζ，剪切应变 $\varepsilon_{\alpha 3}$ 和法向应变 ε_{33} 最终成为 ζ 的非线性函数。随后由三维本构方程（胡克定律）确定应力张量场 $\boldsymbol{\sigma}(x_\alpha, \zeta, t)$。在此过程中，采用分解式（4）表示储能密度较为方便。在此近似下，我们得到

$$\begin{aligned} &\sigma_{\alpha\beta} = 2\mu\sigma A_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} + 2\mu A_{\alpha\beta} - 2\mu\sigma\zeta h B_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} - 2\mu\zeta h B_{\alpha\beta}, \\ &\sigma_{\alpha 3} = \frac{\langle k\rangle k}{\langle k^2/\mu\rangle}\bar{\varphi}_\alpha, \quad \sigma_{33} = 0, \end{aligned} \tag{24}$$

我们看到，由于 μ 和 σ 取决于 ζ， $\sigma_{\alpha\beta}$ 和 $\sigma_{\alpha 3}$ 并非关于 ζ 的多项式，这与均质板的情况不同。然而，将这些应力沿板厚度积分，可得

$$\langle\sigma_{\alpha\beta}\rangle = \frac{n_{\alpha\beta}}{h}, \quad \langle\sigma_{\alpha\beta}\zeta\rangle = -\frac{m_{\alpha\beta}}{h^2}, \quad \langle\sigma_{\alpha 3}\rangle = \frac{q_\alpha}{h}. \tag{25}$$

方程（25）对这些积分特征给出了清晰的物理解释：$n_{\alpha\beta}$ 为应力合力，$m_{\alpha\beta}$ 为弯矩， q_α 为剪力。对于均质板，分布（23）和（24）简化为 Berdichevsky（5）所得的结果，但与 Reissner（32）的结果不同。对于均质板的积分特征（25），可以看出它们与上述两项研究完全一致。

为将该理论应用于特殊的功能梯度板，下面引入以下简写符号

$$\begin{aligned} &\rho_1 = \langle\rho\rangle, \quad \rho_2 = \rho^*, \quad \rho_3 = \langle\rho\zeta^2 + 2\rho\alpha\rangle, \quad \mu_1 = \langle\mu\rangle, \\ &\mu_2 = \langle\mu\sigma\rangle, \quad \mu_3 = \langle\mu\zeta^2\rangle, \quad \mu_4 = \langle\mu\sigma\zeta^2\rangle, \quad \mu_5 = \mu^* = \frac{\langle k\rangle^2}{\langle k^2/\mu\rangle}. \end{aligned} \tag{26}$$

因此，加上 α ，二维一阶剪切变形理论的系数总数为九个。利用这些简写符号，我们将方程组 (20) 和 (21) 表示为

$$\begin{aligned}
&\rho_1 h\ddot{u}_\alpha - \rho_2 h^3 \ddot{u}_{\beta,\beta\alpha} = n_{\alpha\beta,\beta} \\
&\rho_1 h\ddot{\bar{u}} = q_{\alpha,\alpha}, \\
&\rho_3 h^3 \ddot{\psi}_\alpha = -m_{\alpha\beta,\beta} - q_\alpha,
\end{aligned} \tag{27}$$

and

$$\begin{aligned}
&n_{\alpha\beta} = 2\mu_2 h A_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} + 2\mu_1 h A_{\alpha\beta} \\
&q_\alpha = \mu_5 h(\psi_\alpha + \bar{u}_{,\alpha}), \\
&m_{\alpha\beta} = 2\mu_4 h^3 B_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} + 2\mu_3 h^3 B_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{28}$$

5. 夹层板中的波传播

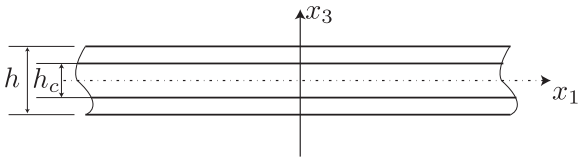

图2：夹层板的横截面

由于夹层板是功能梯度板的一种特殊情形，且其三维波传播问题（25）存在解析解（另见（15）），因此我们可以将该理论应用于这一测试问题，以验证其渐近精度。考虑图2所示的一块无限大夹层板，其弹性模量为

$$\lambda(\zeta) = \begin{cases} \lambda_c, & |\zeta| < b/2, \\ \lambda_s, & b/2 < |\zeta| < 1/2 \end{cases}, \quad \mu(\zeta) = \begin{cases} \mu_c, & |\zeta| < b/2, \\ \mu_s, & b/2 < |\zeta| < 1/2. \end{cases}$$

质量密度和系数 $\sigma = \lambda/(\lambda+2\mu)$具有相似的分布

$$\rho(\zeta) = \begin{cases} \rho_c, & |\zeta| < b/2, \\ \rho_s, & b/2 < |\zeta| < 1/2 \end{cases}, \quad \sigma(\zeta) = \begin{cases} \sigma_c, & |\zeta| < b/2, \\ \sigma_s, & b/2 < |\zeta| < 1/2. \end{cases}$$

此处为 $b = h_c/h$，其中 h_c 为芯层的高度。根据这些分布，我们现在可以计算一阶剪切变形理论的所有系数。按照式（26）进行冗长但并不复杂的计算，可得

$$
\begin{aligned}
&\rho_1 = b(\rho_c - \rho_s) + \rho_s,\\
&\rho_2 = \frac{1}{12\sigma_s}[b^3\sigma_c^2(\rho_c\sigma_s - \rho_s\sigma_s) + \rho_s(b(\sigma_c - \sigma_s) + \sigma_s)^3] - \frac{\rho_1}{12(\mu_1 + \mu_2)}(1-b)b\\
&\times [b^2(\sigma_c - \sigma_s) - \sigma_s + b(2\sigma_s - 3\sigma_c)](\mu_c\sigma_c - \mu_s\sigma_s + \mu_c - \mu_s),\\
&\rho_3 = \frac{1}{12}[b^3(\rho_c - \rho_s) + \rho_s] + 2\alpha[b(\rho_c - \rho_s) + \rho_s],\\
&\mu_1 = b(\mu_c - \mu_s) + \mu_s,\\
&\mu_2 = b(\mu_c\sigma_c - \mu_s\sigma_s) + \mu_s\sigma_s,\\
&\mu_3 = \frac{1}{12}[b^3(\mu_c - \mu_s) + \mu_s],\\
&\mu_4 = \frac{1}{12}[b^3(\mu_c\sigma_c - \mu_s\sigma_s) + \mu_s\sigma_s],\\
&\mu_5 = \frac{20\mu_c\mu_s}{3(1-b)^3(8+9b+3b^2)\mu_c + 3b(15-10b^2+3b^4)\mu_s}\\
&\alpha = \frac{1}{120}[-5b^3(\sigma_c - \sigma_s) + 3b^5(\sigma_c - \sigma_s) - 2\sigma_c].
\end{aligned}
$$

若 $b = 1$ 且芯层和面层的 ρ、 μ和 σ 值相同（均质板），很容易验证这些系数可化简为式（5）中的系数。

对于夹层板（以及一般而言，对于 ρ、 μ和 σ呈偶对称分布的功能梯度板），方程组（25）和（26）可分解为纵波和弯曲波方程。我们先考虑描述纵波的方程（25）$_1$ 和（26）$_{1,}$。用 u_α 表示时，运动方程变为

$$\rho_1 h\ddot{u}_\alpha - \rho_2 h^3\ddot{u}_{\beta,\beta\alpha} = h[(2\mu_2 + \mu_1)u_{\beta,\beta\alpha} + \mu_1\nabla^2 u_\alpha], \tag{29}$$

其中 ∇^2 为二维拉普拉斯算子。我们引入无量纲时间和坐标

$$\tau = \frac{t}{h}\sqrt{\frac{\mu_c}{\rho_c}}, \quad \zeta_\alpha = \frac{x_\alpha}{h} \tag{30}$$

并将式（29）改写为以下形式

$$r_1 u_{\alpha|\tau\tau} - r_2 u_{\beta|\beta\alpha\tau\tau} = (2m_2 + m_1)u_{\beta|\beta\alpha} + m_1\nabla^2 u_\alpha. \tag{31}$$

此处及下文中，指标前的竖线表示对相应无量纲变量求导；为简便起见，我们仍用相同的 ∇^2 表示“无量纲”拉普拉斯算子。无量纲系数为

$$r_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}, \quad i = 1,2,3; \quad m_i = \frac{\mu_i}{\mu_c}, \quad i = 1,2,3,4,5.$$

我们来求解式（31），其解为沿 ζ_1, $u_\alpha = a_\alpha e^{i(\kappa\zeta_1 - \vartheta\tau)}$ 方向传播的简谐平面波。容易证明，对应于以下两种可能的波型：

$$\begin{aligned} u_2 &= a_2 e^{i(\kappa\zeta_1 - \vartheta\tau)}, \quad u_1 = 0 \quad \text{SS-wave} \\ u_1 &= a_1 e^{i(\kappa\zeta_1 - \vartheta\tau)}, \quad u_2 = 0 \quad \text{L-wave.} \end{aligned}$$

对于 SS 波（对称剪切波），色散关系为

$$r_1\vartheta^2 = m_1\kappa^2$$

这与弹性理论的精确色散关系（25）一致。对于 L 波，由式（31）可得

$$r_1\vartheta^2 + r_2\vartheta^2\kappa^2 = 2(m_1 + m_2)\kappa^2. \tag{32}$$

对于均质板，该方程变为

$$\vartheta^2 + \frac{\sigma^2}{12}\vartheta^2\kappa^2 = 2(\sigma+1)\kappa^2.$$

将左侧的第二个修正项移至右侧，并将其中的 ϑ^2 替换为 $2(\sigma+1)\kappa^2$（在此近似下这样做是允许的），可得精化板理论色散关系的渐近公式

$$\vartheta^2 = 2(\sigma+1)\kappa^2 - \frac{\sigma^2(\sigma+1)}{6}\kappa^4 = \frac{2}{1-\nu}\kappa^2 - \frac{\nu^2}{6(1-\nu)^3}\kappa^4.$$

该公式也可以由弹性理论的瑞利-兰姆色散关系 (19) 推导得出，这意味着在这一特定情况下，一阶剪切变形理论在渐近意义下精确到 h^2/l^2 阶项。至于夹层板的色散关系 (32)，我们发现其中的首项和末项与弹性理论色散关系的渐近公式中的

公式一致；该渐近公式是 6×6 矩阵（V-矩阵）的行列式为零 (25)。还可以通过对该矩阵各元素中的正弦函数和余弦函数进行泰勒级数展开，再展开行列式，来检验公式 (32) 中第二个修正项的有效性。由于这一过程相当繁琐，而且难以从这个庞大的表达式中找出主要的渐近项，我们决定通过对色散曲线进行数值模拟来检验。观察 Lee-Chang 色散关系和公式 (32) 可知，每条色散曲线由五个参数决定:

$$b,\quad \sigma_c=\frac{\nu_c}{1-\nu_c},\quad \sigma_s=\frac{\nu_s}{1-\nu_s},\quad r_s=\frac{\rho_s}{\rho_c},\quad m_s=\frac{\mu_s}{\mu_c}.$$

图 3 展示了频散曲线数值模拟的一个代表性结果，其中粗实线表示由弹性理论得到的频散曲线，虚线和点线分别表示夹层板的一阶剪切变形理论和经典层合板理论的频散曲线。这些数值模拟所选取的参数为： $b=0.8$, $\nu_c=0.3$, $\nu_s=0.35$, $r_s=0.8$, $m_s=0.8$。可以看出，与夹层板的经典层合板理论相比，一阶剪切变形理论与弹性理论的频散曲线吻合得好得多。这种吻合甚至延伸至短波范围，此时 $\kappa>1$。参数的变化不会改变这一特征。

现在考虑描述弯曲波的方程 (27)$_{2,3}$ 和 (28)$_{2,3}$ 。我们考察沿 x_1 方向传播的简谐平面波，使得 ψ_1 和 $\bar{u}$ 是 x_1 和 t的函数，而 $\psi_2=0$。于是，方程组 (27)$_{2,3}$ 和 (28)$_{2,3}$ 化简为

$$\begin{aligned}&\rho_1 h\ddot{\bar{u}}=\mu_5 h(\psi_{1,1}+\bar{u}_{,11}),\\&\rho_3 h^3\ddot{\psi}_1=2(\mu_3+\mu_4)\psi_{1,11}-\mu_5 h(\psi_1+\bar{u}_{,1}).\end{aligned}\tag{33}$$

根据¯和 $\psi=h\psi$ ，引入无量纲变量 τ 和 ζ_1 ，并将方程（33）改写为 (30)

$$\begin{aligned}&r_1\bar{u}_{|\tau\tau}=m_5(\bar{\psi}_{1|1}+\bar{u}_{|11}),\\&r_3\bar{\psi}_{1|\tau\tau}=2(m_3+m_4)\bar{\psi}_{1|11}-m_5(\bar{\psi}_1+\bar{u}_{|1}).\end{aligned}\tag{34}$$

我们寻求这些方程的谐波形式解

$$(\bar{u},\bar{\psi}_1)=(a,b)e^{i(\kappa\zeta_1-\vartheta\tau)}$$

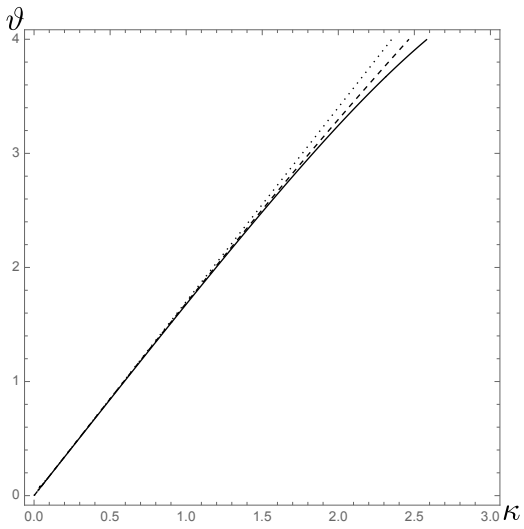

图 3：夹层板中纵波的频散曲线：(i) 粗实线：弹性理论；(ii) 虚线：夹层板的一阶剪切变形理论；(iii) 点线：夹层板的经典层合板理论。所选参数： $b = 0.8$, $m_s = 0.8$, $r_s = 0.8$, $\nu_c = 0.3$,$\nu_s = 0.35$。

并将其代入（34）。解的非平凡性条件给出色散关系

$$(m_5\kappa^2 - r_1\vartheta^2)[2(m_3 + m_4)\kappa^2 - r_3\vartheta^2 + m_5] - m_5^2\kappa^2 = 0. \tag{35}$$

展开左侧可得

$$2m_5(m_3 + m_4)\kappa^4 - [m_5r_3 + 2(m_3 + m_4)r_1]\kappa^2\vartheta^2 - m_5r_1\vartheta^2 + r_1r_3\vartheta^4 = 0.$$

在所需的近似范围内，可忽略该方程左侧的最后一项，而在第二个修正项中， ϑ^2 可替换为 $2(m_3+m_4)\kappa^4/r_1$。由此得到以下渐近公式

$$\vartheta^2 = \frac{2(m_3 + m_4)}{r_1}\kappa^4 - 2(m_3 + m_4)\Big(\frac{r_3}{r_1} + 2\frac{m_3 + m_4}{m_5}\Big)\kappa^6. \tag{36}$$

对于均质板，该渐近公式变为

$$\vartheta^2 = \frac{1}{6(1-\nu)}\kappa^4 - \frac{17 - 7\nu}{360(1-\nu)^2}\kappa^6.$$

请注意，该公式同样可以由弹性理论的瑞利-兰姆色散关系（19）推导得到，这意味着，均质板弯曲和弯曲振动的一阶剪切变形理论在渐近意义下是精确的，其误差项阶数为 h^2/l^2。

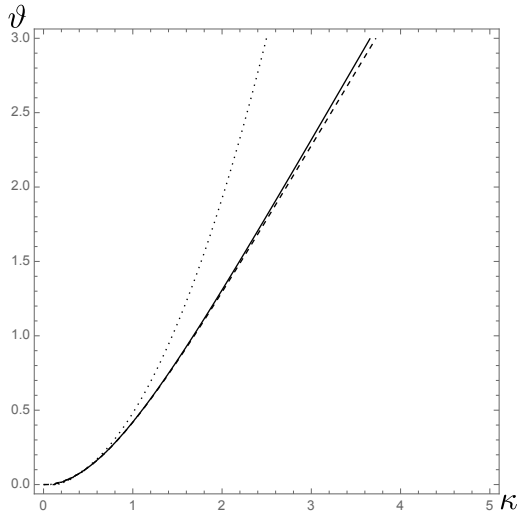

图4：夹层板中弯曲波的频散曲线：(i) 粗实线：弹性理论；(ii) 虚线：夹层板的一阶剪切变形理论；(iii) 点线：夹层板的经典层合板理论。所选参数： $b = 0.8$, $m_s = 0.8$, $r_s = 0.8$, $\nu_c = 0.3$,$\nu_s = 0.35$。

对于夹层板的色散关系（36），我们注意到，右端的第一项与弹性理论（25）给出的色散关系渐近公式一致。还可以在对矩阵各元素中的三角函数进行泰勒级数展开后，通过展开 6×6 矩阵（W 矩阵）的行列式，检验式（36）中的第二个修正项是否有效。[6] 与前一种情况类似，我们认为，检验这一点的更好方法是对色散曲线进行数值模拟。图4展示了这些数值模拟的一个代表性结果，其中粗实线表示根据弹性理论得到的色散曲线，虚线和点线则分别表示按照（35）得到的一阶剪切变形理论（FSDT）色散曲线，以及夹层板经典层合板理论的色散曲线。

[6] W-矩阵中的式（25）有一处印刷错误：该矩阵的元素 w_{56} b_1 应替换为 b_2。

以及夹层板的经典层合板理论。数值模拟所选用的参数与前一种情况相同。可以看出，与夹层板经典层合板理论相比，一阶剪切变形理论的结果与弹性理论的色散曲线吻合得更好。即使在短波范围内，精确曲线与一阶剪切变形理论的曲线也高度吻合，直到 $\kappa = 3$。同样，参数变化不会改变这一特点。这一验证证实，对于夹层板，一阶剪切变形理论具有截至 h^2/l^2 阶的渐近精确性；我们认为，对于功能梯度板也是如此。另一个有趣的现象是，正如 Kuznetsov（17）所观察到的，具有偶数层（非对称布局）或奇数层（对称布局）的板中导波的色散曲线存在显著差异；即使交替层的数量很多，这种差异仍然存在。由于此类板可视为功能梯度板，所提出的变分渐近法仅使一阶剪切变形理论在对称布局下达到渐近精度，而在非对称布局下则不能。

6. 结论

本文证明，对于质量密度和弹性模量关于横向坐标为偶函数的功能梯度板，可通过变分渐近法从三维弹性理论推导出渐近精确的一阶剪切变形理论。比较夹层板基于弹性理论和一阶剪切变形理论得到的色散曲线可知，后者的精度可达到相对于单位量级的 h^2/l^2 阶。将其推广至各向异性弹性功能梯度壳并不困难，只需加入描述拉伸与弯曲交叉效应的项。当位移较大时，纳入几何非线性效应也不困难。尚待解决的问题是，如何为质量密度和弹性模量关于横向坐标不是偶函数的功能梯度板和壳推导一阶剪切变形理论。正如第4节末尾所讨论的，对称与非对称布局之间的差异限制了我们的渐近分析；可能因此，不存在适用于非对称布局功能梯度板/壳的一阶剪切变形理论，必须构造一种尽可能逼近板/壳渐近精确理论的理论（36；40）。另一个极其重要的问题是，如何数值实现不受剪切闭锁效应影响的精化板理论。我们将在下一篇论文中讨论这一问题。

参考文献

[1] Arnold, D. N., Falk, R. S.（1989）。一种针对 Reissner–Mindlin 板的均匀精确有限元方法。SIAM 数值分析杂志 26 (6), 1276–1290。[2] Baron, C., Naili, S.（2010）。流体负载各向异性功能梯度波导中的弹性波传播：超声表征应用。美国声学学会杂志 127 (3), 1307–1317。[3] Bathe, K. J., Dvorkin, E. N.（1986）。一般壳单元的一种公式——张量分量混合插值的应用。数值方法与工程杂志 22 (3), 697–722。[4] Batista, M.（2010）。Reissner 和 Mindlin 板理论基本方程的初等推导。工程结构 32 (3), 906–909。[5]Berdichevsky, V. L.（1979a）。构造壳理论的变分渐近法。应用数学与力学杂志 43 (4), 711–736。[6] Berdichevsky, V. L.（1979b）。构造非线性壳理论的变分渐近法。载于 G. K Mikhailov 和 W. T. Koiter（编），IUTAM 壳理论研讨会论文集（第 137–161 页）。阿姆斯特丹，北荷兰。[7] Berdichevsky, V. L.（2009）。连续介质力学变分原理，第 2 卷。柏林：Springer Verlag。[8] Berdichevsky, V. L., Le, K. C.（1980）。高频长波壳振动。应用数学与力学杂志 44 (4), 520–525。[9] Berdichevsky, V. L., Le, K. C.（1982）。壳的高频振动。苏联物理学文献 27, 988–990。[10] Bletzinger, K. U., Bischoff, M., Ramm, E.（2000）。无剪切锁定三角形和矩形壳有限元的统一方法。计算结构 75 (3), 321–334。[11] Challamel, N., Elishakoff, I.（2019）。一阶剪切可变形梁板模型简史。力学研究通讯 102, 103389。

[12] Daikh, A. A., Drai, A., Houari, M. S. A., Eltaher, M. A. (2020年). 碳纳米管增强多层非局部应变梯度纳米梁的静力分析. Steel Comp. Struct. 36 (6), 643-656.[13] Hirane, H., Belarbi, M. O., Houari, M. S. A., Tounsi, A. (2021年). 关于功能梯度夹层板静力与自由振动分析的逐层有限元公式. Eng. Comput. 38, 3871-3899.[14] Kaplunov, J. D., Kossovitch, L. Y., Nolde, E. (1998年). 薄壁弹性体动力学. Academic Press.[15] Kaplunov, J., Prikazchikov, D. A., Prikazchikova, L. A. (2017年). 强非均匀三层板中的弹性波色散. Int. J. Solids Struct. 113, 169–179.[16] Kuznetsov, S. V. (2019年). 功能梯度板中弯曲兰姆波的异常色散. ZAMP 70 (3), 70–89.[17] Kuznetsov, S. V. (2021年). 周期分层板中的导波：均匀化的不足. Compos. Struct. 276, 114579.[18] Le, K. C. (1997年). 弹性壳中的高频振动与波传播：变分渐近方法. Int. J. Solids Struct. 34 (30), 3923–3939.[19] Le, K. C. (1999年). 壳与杆的振动. 柏林: Springer Verlag.[20] Le, K. C. (2017年). 功能梯度压电壳的渐近精确理论. Int. J. Eng. Sci. 112, 42-62.[21] Le, K. C. (2020 年). 微观力学导论（第二版）. 纽约：Nova Science Publishers.[22] Le, K. C., Nguyen, B. D. (2013年). 连续分布位错单晶梁的弯曲. Int. J. Plasticity 48, 152–167.[23] Le, K. C., Tran, T. M. (2020年). 纤维增强复合梁的渐近精确理论. Compos. Struct. 244, 112279.[24] Le, K. C., Yi, J.-H. (2016年). 智能夹层壳的渐近精确理论. Int. J. Eng. Sci. 106, 179–198.

[25] Lee, P. C. Y., Chang, N. (1979). 弹性夹层板中的谐波. J. Elast. 9 (1), 51–69.[26] Lefebvre, J. E., Zhang, V., Gazalet, J., Gryba, T., Sadaune, V. (2001). 连续功能梯度板中的声波传播：勒让德多项式方法的扩展. IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control 48 (5), 1332-1340.[27] Mindlin, R. (1951). 转动惯量和剪切对各向同性弹性板弯曲运动的影响. 应用力学杂志 18 (1), 31–38.[28] Nguyen, T. K., Sab, K., Bonnet, G. (2008). 功能梯度材料的一阶剪切变形板模型. Compos. Struct. 83 (1), 25-36.[29] Nguyen-Xuan, H., Liu, G. R., Thai, H. C., Nguyen, T. T. (2010). 用于分析 Reissner–Mindlin板的基于边的光滑有限元法（ES-FEM）与稳定化离散剪切间隙技术. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 199 (9-12), 471–489.[30] Nguyen, T. N., Ngo, T. D., Nguyen-Xuan, H. (2017). 一种新颖的三变量剪切变形板公式：理论与等几何实现. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 326, 376–401.[31] Reddy, J. (2000年). 功能梯度板分析. 数值方法与工程杂志 47 (1-3), 663–684.[32] Reissner, E. (1945). 横向剪切变形对弹性板弯曲的影响. 应用力学杂志 12 (2), 69–77.[33] Phanendra Kumar, A., Khajamoinuddin, S. M., Burela, R.G., Mahesh, V., Harursampath, D. (2022). 采用变分渐近法对多稳态层合板进行跳跃分析. Mech. Based Des. Struct. Mach. 1-26.[34] Shen, H.-S. (2016年). 功能梯度材料：板壳非线性分析. CRC出版社.[35] Shi, Z., Zhong, Y., Yi, Q., Peng, X. (2021年). 采用变分渐近法的复合蜂窝夹层板高效分析模型. Thin-Walled Struct. 163, 107709.

[36] Sutyrin, V. G.（1997年）。考虑渐近正确剪切变形的板理论推导。应用力学杂志 64，905–915。[37] Thai, H. T.、Choi, D. H.（2013年）。一种用于功能梯度板弯曲和自由振动分析的简易一阶剪切变形理论。Compos. Struct. 101，332-340。[38] Thai, H. T.、Kim, S. E.（2015年）。功能梯度板和壳建模与分析理论综述。Compos. Struct. 128，70-86。[39] Wang, C. M.、Reddy, J. N.、Lee, K. H.（编）（2000年）。可剪切变形梁和板：与经典解的关系。爱思唯尔。[40] Yu, W.（2005年）。复合材料层合板 Reissner–Mindlin 板理论的数学构建。Int. J. Solids Struct. 42（26），6680–6699。