arXiv:2304.08305v1 [math.RA] 17 Apr 2023

代数与型的退化和收缩

HAROLD N. WARD

Abstract. 本文将向量空间 V 上定义的代数与二次型的退化和收缩这两个概念联系起来。一般线性群 GL(V) 在这两类对象的空间上正则作用。基域取为特征不等于 2 的无限域。除此之外，不作限制，正如 Ivanova and Pallikaros 首篇被引论文中的处理。我们将这些结果应用于维数为二和三的代数与型。

1. Introduction

以下讨论的框架涉及一个无限域 $\mathbb{F}$ 和其上的向量空间V，其中维数为 $V = n$。令 G 表示一般线性群 GL(V)。通常，G 的元素由相对于 V中某个基、系数取自 $\mathbb{F}$ 的 $n\times n$ 非奇异矩阵给出。这些矩阵通过左乘作用于表示 V 元素的列向量，而 $\mathsf{g} \in$ G 通常表示其矩阵。设 Λ 是 $\mathbb{F}$ 上的另一个有限维向量空间，G 在其上以线性变换作用；这些变换相对于 Λ 的给定基的矩阵项属于多项式环 $\mathbb{F}[g_{11}, g_{12}, \ldots, g_{nn}, 1/d]$。这里，$g_{ij}$ 表示 g 的矩阵项，$d =$ 表示 det g。我们将此作用称为 Λ上的伴随作用，记作 $\Lambda(\mathsf{g})$。λ 在 g 作用下的像记为 $\lambda\mathsf{g}$，此时作用写在右侧。作用矩阵的系数是正则函数 [GW，第 1.1 节。2], ，作用本身也称为正则作用。我们将关注 Λ 上的 G-轨道及其 Zariski闭包。

主要例子是 Λ 为在 V [IP1] 上定义的非结合 $\mathbb{F}$-代数的结构向量空间。对于这样的代数，给定基 $\mathsf{v}_1, \ldots, \mathsf{v}_n$ 后，V 中的 $\mathfrak{a}$ 的结构向量为 $\lambda = \lambda(\mathfrak{a})$，其分量 λ_{ijk} 表示 $\mathfrak{a}$ 中的乘法 $[\,,\,]$：

$$[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ijk}\mathbf{v}_k.$$

G 作用于代数集合：在 $\mathsf{g} \in$ G 作用下，像代数 $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}\mathsf{g}$ 的乘法由 $[\mathsf{u}, \mathsf{v}]' = \mathsf{g}^{-1}[\mathsf{gu}, \mathsf{gv}]$ 给出。这表明 g 是从 $\mathfrak{a}'$到 $\mathfrak{a}$的同构。在 Λ 中的相应作用定义为 $\lambda(\mathfrak{a})\mathsf{g} = \lambda(\mathfrak{a}')$。将其展开可得换基公式：若 $\lambda' = \lambda(\mathfrak{a}')$，则

$$\lambda'_{ijk} = \sum_{a,b,c} g_{ai}g_{bj}\widehat{g}_{kc}\lambda_{abc},$$

Date: 2023年5月。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：16H99；次要分类：11E04 14D06。*Key words and phrases.* 代数，二次型，退化，收缩。

其中 $\widehat{g}_{kc}$ 是 $\mathfrak{g}^{-1}$的矩阵项。由于这些矩阵项是 $1/\det \mathfrak{g}$ 乘以 $\mathfrak{g}$ 的经典伴随矩阵中的对应项，因此换基作用的系数确实属于 $\mathbb{F}[g_{11}, g_{12}, \ldots, g_{nn}, 1/d]$。“换基”这一名称源于这样一个事实： λ'也是 $\mathfrak{a}$ 相对于基 $\mathfrak{gv}_1$，……，$\mathfrak{gv}_n$的结构向量。

在此语境下，G-轨道 λG 的 Zariski闭包 λG 中的元素称为 λ 的退化。关于代数退化的文献十分丰富，其中大多数聚焦于特定类型（例如李代数和约当代数）。其中一些文献在 [IP1] 中有所引用。在其他大多数论文中， $\mathbb{F}$ 取实数域或复数域。

2. Contractions

对于一般的 Λ，我们将 λG 中的任一元素称为 λ 的退化。如果 $\lambda' \in \lambda G$，标准记法为 $\lambda \longrightarrow \lambda'$；而对于代数 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{a}'$，若 $\lambda(\mathfrak{a}) = \lambda$ 且 $\lambda'(\mathfrak{a}) = \lambda'$，则有 $\mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}'$。获得退化的一种方法是通过收缩这一过程（有时该术语与“退化”互换使用）。设 $\mathcal{C} = \{\mathfrak{g}^t | t \in \mathbb{F}\}$ 是 G 中元素构成的一参数族——一个收缩族。$\mathfrak{g}^t$ 的矩阵项取自域 $\mathbb{F}(t)$，即关于 t 、在 $\mathbb{F}$ 上的有理函数域。我们可以将函数 $f(t)$ 写成以 t 为指数的形式： f^t。定义 $f(t)$ 的阶 $\mathrm{ord} f$ 为 ∞，若 $f = 0$；对于 $f(t) = t^m a(t)/b(t)$，若 $a(0)$ 和 $b(0)$ 均非零，则令 $\mathrm{ord} f = m$。若 $\mathrm{ord} f = 0$，则称 f 为单位；它确实是 $\mathbb{F}(t)$ 中由阶非负的函数组成的子代数的单位元（该代数包含 $\mathbb{F}[t]$）。此阶给出 $\mathbb{F}(t)$ 上的指数离散赋值，其完备化是 $\mathbb{F}((t))$，即在 $\mathbb{F}$ 上的形式Laurent级数域。 [L] 中将要用到的一些定理以这一完备化来表述。若 $\mathrm{ord} f \geq 0$，则可以放心地将 $t = 0$ 代入 f。我们通常用 f^0 代替 $f(0)$，并称 f^0 存在，同时将 f^0 想象成某种极限。

对于任意大小且元素属于 $\mathbb{F}(t)$ 的矩阵 M，令 $\mathrm{ord} M$ 为 M 中各元素的阶的最小值。当且仅当 $\mathrm{ord} M \geq 0$ 时， M 才能在 $t = 0$ 处取值。$\mathfrak{g}^t$ 中元素的有理性要求与所选 V 的基无关，并且 Λ 上伴随作用中的元素也将属于 $\mathbb{F}(t)$。当 $\mathcal{C}$ 已被理解且 $\lambda \in \Lambda$ 时，令 $\lambda^t = \lambda \mathfrak{g}^t$。如果 λ 是代数 $\mathfrak{a}$ 的结构向量，并且 λ^0 存在，我们也将 $\mathfrak{a}^0$ 记作与 λ^0 对应的代数。

命题 1。假设对于某个 $\lambda \in \Lambda$，$\mathrm{ord}(\lambda^t) \geq 0$，从而 λ^0 存在。于是$\lambda^0 \in \lambda G$。

证明。设 P 是关于 Λ 的坐标的一个多项式函数，这些坐标相对于某个基，而在该基下 λ^t 的元素具有非负的阶。则 $\mathrm{ord}(P(\lambda^t)) \geq 0$。因此$P(\lambda^t)$ 要么恒等于 0，要么为 $t^m u^t$, $m \geq 0$，其中某个单位元为 u^t。如果 P 在轨道 λG 上为 0，那么对于 $\det \Lambda(\mathfrak{g}^t)$ 不为 0 的所有 t 值， $P(\lambda^t)$ 都为 0；这样的值构成一个无限集。因此， $P(\lambda^t)$ 要么恒等于 0，要么 $m > 0$。无论哪种情形， $P(\lambda^0) = 0$。由于这对任意这样的 P 都成立，我们 conclude $\lambda^0 \in \lambda G$。□

这里的论证被用于文献中的大多数退化结果，一些例子见于 [IP1]。我们将极限 λ^0 称为 λ的收缩，并称 λ 可通过族 $\mathcal{C}$进行收缩。“收缩”一词被广泛用于表示代数的极限过程。两篇综述 [B]和 [N] 对其动机有所阐释，而 [IP1] 则介绍了历史背景及其他相关内容。

一个常见的例子是 $\mathsf{g}^t = t\mathsf{I}$，其中 I 为单位矩阵；$\mathsf{g}^{-1} = t^{-1}\mathsf{I}$。于是，在基变换作用中，

$$\begin{aligned}\lambda^t_{ijk} &= \sum_{a,b,c}(t\delta_{ai})(t\delta_{bj})(t^{-1}\delta_{kc})\lambda_{abc}\\ &= t\lambda_{ijk}.\end{aligned}$$

因此，$\lambda^0_{ijk} = 0$，且 λ^0 是所有乘法均为 0 的代数的结构向量。所以，这个“阿贝尔代数”是每个代数的一个退化。

3. Quadratic Forms

本节考虑 V 上二次型的空间 $\mathfrak{Q}$，以及 G 在其上的作用。总体而言，我们采用 [L 第 1]章中的记号。与该章一样，令 $\mathrm{char}\mathbb{F} \neq 2$。设 V 上的二次型为 Q，其对应的对称双线性型为 B_Q：$Q(\mathsf{u}) = B_Q(\mathsf{u},\mathsf{u})$，且 $B_Q(\mathsf{u},\mathsf{v}) = \frac{1}{4}(Q(\mathsf{u}+\mathsf{v}) - Q(\mathsf{u}-\mathsf{v}))$。（通常省略 B_Q上的 Q。）相对于V的一组基 $\mathsf{v}1,\ldots,\mathsf{v}_n$，$B$的矩阵 $[B]$的元素为 $B(\mathsf{v}_i,\mathsf{v}_j)$。$G$ 在 $\mathfrak{Q}$ 上的右作用定义为（$Q\mathsf{g}$）$(\mathsf{u}) = Q(\mathsf{gu})$，且 $B\mathsf{g}(\mathsf{u},\mathsf{v}) = B(\mathsf{gu},\mathsf{gv})$。对于矩阵，$[B\mathsf{g}] = \mathsf{g}^{\mathrm{T}}[B]\mathsf{g}$，其中 g^{T} 表示 g 的转置。型 Q 与 $Q\mathsf{g}$称为等价，记作 $Q \cong Q\mathsf{g}$。要表示V带有二次型 Q，可写作（V,Q）或（V,B_Q），并将（V,Q）称为二次空间。Q 的秩 $\mathrm{rank}Q$ 就是 $[B_Q]$的秩；若该秩等于 $\dim V$，则称 Q为非奇异（[L]中称为“正则”）。零型是秩为 0 的型，其维数 $\dim V = 0$可以非零。

若 $(V_1,Q_1)\ldots,(V_m,Q_m)$ 是二次空间，它们的正交和是 V_i 的直和，并赋予由 $Q(\mathsf{u}1,\ldots,\mathsf{u}_m) = Q_1(\mathsf{u}_1) + \ldots + Q_m(\mathsf{u}_m)$ 给出的二次型 Q，其中 $\mathsf{u}_i \in V_i$。记作 $V = V_1 \perp \ldots \perp V_m$，且 $Q = Q_1 \perp \ldots Q_m$。当所有 V_i 的维数都为 1，且 $V_i = \mathbb{F}\mathsf{v}_i$，其中 $Q_i(\mathsf{v}_i) = x_i$ 时，V 表示为 $V = \langle x_1,\ldots,x_m\rangle$。相对于基 $\mathsf{v}1,\ldots,\mathsf{v}_m$，$[B_Q]$ 是对角的，而 Q 本身也称为对角的。缩放后的形式 $\langle xx_1,\ldots,xx_m\rangle$ 在 [L], 中借助克罗内克积记作 $\langle x\rangle\langle x_1,\ldots,x_m\rangle$。不过，我们可以放心地使用 $x\langle x_1,\ldots,x_m\rangle$。当 $\dim V > 0$ 时，零型为 $\langle 0,0,\ldots,0\rangle$。

每个二次型都等价于一个对角型 [L, I.2.4]。一个重要结果是 Witt 消去定理 [L, I.4.2]：如果 $Q \perp Q_1 \cong Q \perp Q_2$，那么 $Q_1 \cong Q_2$。每个二次型 Q 都等价于一个形如 $Q_N \perp Q_Z$ 的型，其中 Q_N 是非奇异的，而 Q_Z 是一个零型（对应于 Q [L, p. 5]的根基）。在这两种分解中，非奇异部分根据消去定理彼此等价。若 Q 对于某个型 Q'?? (第 42]节）等价于 $Q'_N \perp Q''$，则称 Q 表示 Q'。适当选择基可得到 $[B_Q] = \begin{bmatrix} B_{Q'_N} & 0 \\ 0 & B_{Q''} \end{bmatrix}$。表示只取决于 Q 和 Q'的等价类。

非奇异二次型还可以进一步细分：对于型 Q，V中的各向同性元素 v 满足 $\mathsf{v} \neq 0$，但 $Q(\mathsf{v}) = 0$ [L，见第 1 节。4]。双曲平面是 $\langle 1,\ -1\rangle$，而双曲平面的正交和是双曲空间。各向异性空间不含各向同性向量。上文的非奇异型 Q_N等价于 $Q_A \perp Q_H$，其中 Q_A 是各向异性的，Q_H 是双曲的；Q 的这些分量在等价意义下也是唯一的。

3.1. 二次型的退化。相对于 G 在 $\mathfrak{Q}$ 上的作用，二次型如何退化？选定 V 的一组基后，$\mathfrak{Q}$ 的坐标可取为矩阵 $[B_Q]$ 的矩阵项 b_{ij}，其中

其中 $i \le j$，因为 $[B_Q]$ 是对称的。若 P 是关于 b_{ij} 的多项式，则令 $P(Q)$ 表示将其代入 $[B_Q]$. 的矩阵项后所得的值。诱导的 G 作用确实是正则的。令 $\mathfrak{Q}_r$ 为秩至多为 r 的二次型集合； $\mathfrak{Q}_r$ 是 G-不变的。与 [IP1，注 3.15] 中一样， $\mathfrak{Q}_r$ 是扎里斯基闭的。退化结果如下：

定理 1. 若 Q 是秩为 r 的二次型，则轨道闭包 $Q\mathsf{G}$ 为 $\mathfrak{Q}_r$。

证明。 $r = 0$ 时结论成立，令 $r > 0$。相对于所选的 V 基，令 $\langle x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0\rangle$ 为一个非零 x_i 的对角型，它与 Q 等价，因此属于 $Q\mathsf{G}$。若 P 是一个在 $Q\mathsf{G}$ 上消失的多项式，令 $p(x)$ 为函数 $x \longrightarrow P(\langle x, x_2, \dots, x_r, 0, \dots, 0\rangle)$。那么 $p(x)$ 是关于 x 的多项式。对于 $z \neq 0$，型 $\langle z^2 x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0\rangle$ 通过对角映射 $v_1 \longrightarrow zv_1$, $v_i \longrightarrow v_i$ （其中 $i \ge 2$）与 Q 等价。由于该型属于 $Q\mathsf{G}$，因此 $p(z^2 x_1) = 0$。所以 $p(x)$ 有无穷多个零点，这使得 $p(x)$ 恒等于 0。也就是说，对于所有 x， $P(\langle x, x_2, \dots, x_r, 0, \dots, 0\rangle) = 0$。由于这对任何在 $Q\mathsf{G}$ 上消失的 P 都成立，因此所有型 $\langle x, x_2, \dots, x_r, 0, \dots, 0\rangle$ 都属于 $Q\mathsf{G}$。

对于任意 x_1'，我们都可以将这一论证应用于 $\langle x_1', x, x_3, \dots, x_r, 0, \dots, 0\rangle$，它对 $x = x_2$ 属于 $Q\mathsf{G}$，由此得出，对所有 x_1', x_2'，都有 $\langle x_1', x_2', x_3 \dots, x_r, 0, \dots, 0\rangle \in Q\mathsf{G}$。依此类推，结果是：对所有 $x_1', \dots, x_r'$，都有 $\langle x_1', x_2', \dots, x_r', 0, \dots, 0\rangle \in Q\mathsf{G}$。因此 $Q\mathsf{G} \supseteq \mathfrak{Q}_r$。由于 $Q \in \mathfrak{Q}_r$ 且 $\mathfrak{Q}_r$ 是闭的，必有 $Q\mathsf{G} = \mathfrak{Q}_r$。 □

这一结果表明，二次型实际上不能通过退化来区分： Q 退化为 Q' 当且仅当 $\mathrm{rank} Q' \le \mathrm{rank} Q$。

3.2. 二次型的收缩。设 $\mathcal{C} = \{\mathsf{g}^t | t \in \mathbb{F}\}$ 是一个收缩族，并考察它对 $\mathfrak{Q}$ 的作用。根据公式 $[B_{Q\mathsf{g}}] = \mathsf{g}^{\mathrm{T}} [B_Q] \mathsf{g}$，该作用是正则的。令 $Q^t = Q\mathsf{g}^t$ 和 $B^t = B_{Q^t}$。型 Q 可收缩，当且仅当 $\mathrm{ord}\, [B^t] \ge 0$，从而得到极限 B^0 和 Q^0。

定理 2. 设 Q 和 Q' 是定义在 V 上的二次型。那么， Q' 是 Q 的收缩，当且仅当 Q 表示 Q'。

证明。假设 Q 表示 Q'。如上所述，适当选取基可得 $[B_Q] = \begin{bmatrix} B_{Q'_N} & 0 \\ 0 & B_{Q''} \end{bmatrix}$。使用相同的基和分块大小，令 $\mathsf{g}^t = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & t\ \mathrm{I} \end{bmatrix}$。那么 $(\mathsf{g}^t)^{\mathrm{T}} [B_Q] \mathsf{g}^t = \begin{bmatrix} B_{Q'_N} & 0 \\ 0 & t^2 B_{Q''} \end{bmatrix}$，其极限为 $\begin{bmatrix} B_{Q'_N} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$。这是 $B_{Q'}$ 的一个矩阵，说明 Q' 是 Q 的收缩。

反过来，设 Q' 是由族 $\mathcal{C}$ 对 Q 作收缩所得： $Q' \cong Q^0$。令 $B = B_Q$，则有 $[B^t] = (\mathsf{g}^t)^{\mathrm{T}} [B] \mathsf{g}^t$，且 $\mathrm{ord}\, [B^t] \ge 0$。我们可以假设 $[B]$ 是对角的：若对某个 $\mathsf{s} \in \mathsf{G}$， $[\mathsf{s}]^{\mathrm{T}} [B] [\mathsf{s}]$ 是对角的，就用 $\mathsf{s}^{-1}\mathsf{g}^t$ 替换 g^t。我们还可以假设 $[B^t]$ 是对角的。为此，按照 [O, 第 42G 节] 中概述的对角化过程进行。每一步都用 $E^{\mathrm{T}} M E$ 替换矩阵 M，这次所用的初等矩阵 E 的元素属于 $\mathbb{F}(t)$。但要避免将 E 取为缩放矩阵。令 m 为 M 中的一个元素，其阶（非负）最小。若 m 位于对角线上，我们可以通过置换将其移到 (1, 1) 位置。若 m 位于对角线外，且对角项的阶都严格大于 $\mathrm{ord} m$，则可以用下面这个 2×2 示例所示的计算，将 (1, 1) 项改为一个阶为 $\mathrm{ord} m$ 的元素：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & m \\ m & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m + a + b & b + m \\ b + m & b \end{bmatrix}.$$

由于 a 和 b 的阶都严格大于 ord$m$，因此 ord$(2m+a+b) =$ ord$m$。将新的 (1, 1) 项仍记为 m，此时它具有最小阶。然后，可以使用非对角项为 $-c/m$的初等矩阵，将新矩阵中第 1 行和第 1 列内除 (1, 1) 位置外的项变为 0，其中 c 是要变为 0 的项。这里 ord$(-c/m) \geq 0$。接着，可以对行和列的指标都大于 1 的子矩阵重复这一过程。若所用初等矩阵的乘积为 $[e],$，则可将其并入 g^t。由于 B 和 B^t 的秩相同，我们还可以通过置换并删去全零行和全零列，假设 B 和B^t 均为非奇异矩阵。仍将新的秩记为 n。$[B^t]$ 的最终形式是一个分块对角矩阵，其各个块是对角型 D_0^t、tD_1^t、.....、$t^s D_s^t$的矩阵，其中每个非零的 $[D_i^t]$ 都是一个对角矩阵，且其项为单位元。于是 $\left[B^0\right]$ 只显示出一个块 $\left[D_0^0\right]$，其余均为零块。令 S_i^t 为与 D_i^t对应的二次型。最后，令 $\mathcal{E}$ 为使 D_i^t 非零的偶数 i 的集合，并令 $\mathcal{O}$ 为使 i 非零的奇数的集合。

现在，R 上的每个非奇异型 $\mathbb{F}(t)$都与 $\mathbb{F}(t)$等价于 $R_1 \perp tR_2$，其中$R_1 \cong \langle u_1$、.....、$u_r\rangle$ 以及 $R_2 \cong \langle w_1$、.....、$w_s\rangle$，且 u_i 和 w_j 是单位元（两种型中可能有一种不存在）。这是通过将基向量乘以t的幂进行缩放得到的。型 R_1 和 R_2 不一定唯一；但若$R \cong R_1' \perp tR_2'$ 是另一种这样的分解，那么用上标 0 表示在 $t=0$处取值的u_i 和 w_i，则要么（R_1'）$^0 \cong R_1^0 \perp H$，要么（R_1）$^0 \cong$（R_1'）$^0 \perp H$，其中 H是 $\mathbb{F}$上的双曲型。R_2 和 R_2' 也有同样的结论（参见 [L，V.1],，其中给出了 T. A. Springer 关于 Witt 环和完备化$\mathbb{F}((t))$ 的一个定理）。

对于定理 2 中的 Q，只出现了 Q_1，其中有 $Q_1 \cong Q$，因为 Q 是系数取自 $\mathbb{F}$ 的非奇异形式。对于 Q^t，我们可以令 Q_1^t 为 $S_{\mathcal{E}}^t$，即由具有 $i \in \mathcal{E}$ 的 S_i^t 与具有 $i \in \mathcal{O}$ 的 Q_2^t 作正交和，这是因为基向量可按 t 的幂进行缩放。在双曲情形的表述中，必有 $Q \cong Q_1^0 \perp H$，其中某个双曲形式 H 定义在 $\mathbb{F}$ 上，因为 $n \geq$ 秩Q_1^0 且 $n =$ 秩Q。我们有 $Q_1^0 = S_{\mathcal{E}}^0$，从而得到$Q \cong S_{\mathcal{E}}^0 \perp H$。现在，对于某个秩为 $n -$ 秩S_0^0 的零型 Z_0，有 $Q^0 = S_0^0 \perp Z_0$。如果 Q^0 本身是零型，那么它显然由 Q 表示。否则，S_0^0 不是零型，$Q_N^0 \cong S_0^0$，并且对于某个 R，有 $Q \cong Q_N^0 \perp R$，因为 S_0^0 是 $S_{\mathcal{E}}^0$的一个正交项。所有这些都说明，极限 Q^0 由 Q 表示。□

4. Trace forms

设 $\mathfrak{a}$ 是定义在向量空间 V上的代数，其相对于基 $v_1, \ldots, v_n$ 的结构向量为 λ。对于 $u \in V$，令 ad$_{\mathfrak{a}}$(u) 表示伴随映射 $v \longrightarrow [u, v]$。那么，$\mathfrak{a}$ 的迹型是由$T_{\mathfrak{a}}$(u, v) = tr(ad$_{\mathfrak{a}}$(u)ad$_{\mathfrak{a}}$(v))定义的对称双线性型，相应的二次型为 $Q_{\mathfrak{a}}$。对于 $[T_{\mathfrak{a}}] = [t_{ij}]$, $t_{ij} = \sum_{k,l} \lambda_{ikl}\lambda_{jlk}$。$[T_{\mathfrak{a}}]$ 的秩称为 $\mathfrak{a}$的秩。当且仅当 $m \times m$ 中所有$m > r$ 阶子矩阵的行列式均为 0 时，$[T_{\mathfrak{a}}]$ 的秩至多为 r。该条件可用 λ_{ijk}中的多项式表示，因此，秩至多为 r 的代数构成扎里斯基闭集（例如参见[IP1，第 3]节）。著作 [CP] 对迹型进行了详细研究。

若 $\mathcal{C} =\{g^t | t \in \mathbb{F}\}$ 是 λ 与 ord$\lambda^t \geq 0$的收缩族，使得 λ^0 存在，则 ord$T_{\mathfrak{a}} \geq 0$ 也成立，而且 $T_{\mathfrak{a}}^0$也存在。由于 $t_{ij}^0 = \sum_{k,\ l} \lambda_{ikl}^0 \lambda_{jlk}^0$, $T_{\mathfrak{a}}^0 = T_{\mathfrak{a}^0}$和$Q_{\mathfrak{a}}^0 = Q_{\mathfrak{a}^0}$。根据定理 2，$Q_{\mathfrak{a}}$ 必定表示 $Q_{\mathfrak{a}^0}$。

4.1. 二维代数。举例来说，考虑 2 维交换结合代数，尤其是域。由于 char$\mathbb{F} \neq 2$, $\mathbb{F}$ 上的每个二次域都具有 $\mathbb{F}(w)$ 的形式，其中 $w^2 = s$，且 $s \in \mathbb{F}$为某个非平方数。为此调整结构向量 λ_s，令 v_1 为单位元，v_2 为 w，则

$$\lambda_{111} = 1,\ \lambda_{122} = 1,\ \lambda_{212} = 1,\ \lambda_{221} = s, \tag{4.1}$$

以及所有其他的 $\lambda_{ijk} = 0$。那么在迹型 T_s 中，

$$h_{ij} = \lambda_{i11}\lambda_{j11} + \lambda_{i12}\lambda_{j21} + \lambda_{i21}\lambda_{j12} + \lambda_{i22}\lambda_{j22},$$

以及 $[T_s] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2s \end{bmatrix}$。对于另一个非平方数 s'，仅当$\langle 2s\rangle \cong \langle 2s'\rangle$时才有 $Q_{s'} \cong Q_s$；根据维特消去定理，而这又等价于对某个 $r \in \mathbb{F}$ 有 $s = s'r^2$。这与 $\mathbb{F}(w) \cong \mathbb{F}(w')$ 相同，其中 $w'^2 = s'$。现在，Q_s 表示 $Q_{s'}$ 的唯一方式是通过 $Q_s \cong Q_{s'}$。归根结底，一个二次域只有在两个域同构时，才可能是另一个二次域的收缩。

那么退化的情形如何呢？对于 $s \neq 0$，令 $\mathfrak{f}_s$ 为满足 $\lambda(\mathfrak{f}_s) = \lambda_s$ (4.1) 的二维代数。与域的情形一样，当 $r \neq 0$时，$\mathfrak{f}_s \cong \mathfrak{f}_{r^2 s}$。仿照定理 1 的证明，考虑 $\lambda_s\mathrm{G}$，并令 P 为一个在 $\lambda_s\mathrm{G}$ 上消失的多项式。通过 $x \longrightarrow P(\lambda_x)$ 定义 $p(x)$。于是，对所有 $r \neq 0$，都有 $p(r^2 s) = 0$，这使得 $p(x)$ 有无穷多个零点，从而 $p(x)$ 恒等于 0。由于这对所有此类 P 都成立，因此对包括 0 在内的所有 x，都有 $\lambda_x \in \lambda_s\mathrm{G}$。这些域以及直和 $\mathbb{F}\oplus\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的半单二维交换代数。此外，$\mathbb{F} \oplus \mathbb{F} \cong \mathfrak{f}_1$: $1_2(\mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_1)$ 和 $1_2(\mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_1)$ 是正交幂等元。因此，所有这些代数都彼此退化。

[K 第 3] 节中的方法展示了另外三种 2 维结合交换代数的同构类型，其结构向量如下所示（代数的编号沿用 [IP2]）。最后三列分别给出这些代数的湮灭子、平方和导子空间的维数。

	λ_{111}	λ_{112}	λ_{121}	λ_{122}	λ_{211}	λ_{212}	λ_{221}	λ_{222}	ann	sq	der
$\mathfrak{a}_0$	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	4
$\mathfrak{a}_4$	1	0	0	1	0	1	0	0	0	2	1
$\mathfrak{a}_5$	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1

因此 $\mathfrak{f}_s \longrightarrow \mathfrak{f}_{s'}$，进一步的退化为

$$\mathfrak{f}_s \longrightarrow \mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{f}_s \longrightarrow \mathfrak{a}_5,\ \mathfrak{f}_s \longrightarrow \mathfrak{a}_0,\ \mathfrak{a}_4 \longrightarrow \mathfrak{a}_0,\ \mathfrak{a}_5 \longrightarrow \mathfrak{a}_0$$

与 [IP2] 中相同。形如 $\mathfrak{f}_s \longrightarrow \mathfrak{a}$ 的情形，是先进行 $\mathfrak{f}_s \longrightarrow \mathfrak{f}_1$，再从 $\mathfrak{f}_1$ 收缩到 $\mathfrak{a}$。根据维数，$\mathfrak{a}_5 \longrightarrow \mathfrak{a}_4$ 这一退化可由 [IP1 引理 3.17], 排除。如果 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$，则导子维数可以排除 $\mathfrak{a}_4 \longrightarrow \mathfrak{a}_5$ 和 $\mathfrak{a}_5 \longrightarrow \mathfrak{a}_4$；有关代数几何背景，参见 [BB 第 II] 节。对于一般的无限 $\mathbb{F}$ 且 char$\mathbb{F} \neq 2$，可以找到在一个轨道上取值为零、而在另一个轨道上不为零的多项式（使用 Maple^{TM}）：

$$\begin{array}{cc} \lambda_{111}^2 - \lambda_{212}^2 + 2\lambda_{112}\lambda_{211} + 2\lambda_{112}\lambda_{222} & 0 \text{ on } \lambda(\mathfrak{a}_4)\mathrm{G} \text{ but not on } \lambda(\mathfrak{a}_5)\mathrm{G} \\ \lambda_{111}\lambda_{212} - \lambda_{112}\lambda_{211} & 0 \text{ on } \lambda(\mathfrak{a}_5)\mathrm{G} \text{ but not on } \lambda(\mathfrak{a}_4)\mathrm{G} \end{array}$$

因此，$\mathfrak{a}_4 \longrightarrow \mathfrak{a}_5$ 和 $\mathfrak{a}_5 \longrightarrow \mathfrak{a}_4$ 都不成立。

4.2. 三维域。设 $\mathbb{F}$ 是一个特征既不为 2 也不为 3 的无限域。设 $\mathfrak{f}$ 是 $\mathbb{F}$ 的一个三次扩张域，将其视为 $\mathbb{F}$ 上的交换结合代数；乘法 $[\mathrm{u}, \mathrm{v}]$ 将按惯例写作 uv。代数 $\mathfrak{f}$ 有一个单位元 e 和一个生成元 w，使得 e、w 和 w^2

构成 V 的一组基。经过标准归一化，我们可以假设对某些 p、 $q \in \mathbb{F}$，有 $\mathsf{w}^3 = p\mathsf{w} + q\mathsf{e}$，其中 $q \neq 0$。当 $p \neq 0$ 时，我们还可以通过取生成元 $\mathsf{u} = \frac{1}{p}\mathsf{w}^2 - \frac{1}{3}\mathsf{e}$，进一步对这样的代数进行归一化。于是 $\mathsf{u}^3 = \mathsf{u}^2 - (4p^3 - 27q^2)/27p^3$，且 e、u 和 u^2 线性无关。但若 $p = 0$，则取 $b \neq 0$，并令 $\mathsf{u} = 1/(9bq)\mathsf{w}^2 + b\mathsf{w} + 1/3$，此时 $\mathsf{u}^3 = \mathsf{u}^2 + (27b^3q - 1)^2/(729b^3q)$。为了使 e、u 和 u^2 线性无关，结果表明需要 $729b^6q^2 \neq 1$。由于 $\mathbb{F}$ 是无限域，存在一个 b，使得最后一个不等式成立，且 u^3 中的常数项非零。因此，我们可以假设 $\mathfrak{f}$ 满足定义关系 $\mathsf{w}^3 = \mathsf{w}^2 + c$，其中 $c \neq 0$。将这样的代数（无论是否为域）记为 $\mathfrak{f}_c$，并约定该代数有单位元 w^0，且 $\{\mathsf{w}^0, \mathsf{w}, \mathsf{w}^2\}$ 是 V 的一组基。（将 $a\mathsf{w}^0$ 简写为 a。）设 $\mathfrak{F}$ 为定义在 V 上、且与这些定义在 V 上的类域代数中任一个同构的代数集合，其中包括 $\mathfrak{f}_0$，即定义关系为 $\mathsf{w}^3 = \mathsf{w}^2$ 的那个代数（基仍为 $\{\mathsf{w}^0, \mathsf{w}, \mathsf{w}^2\}$）。我们关注退化 $\mathfrak{f} \longrightarrow \mathfrak{f}'$，其中 $\mathfrak{f}$、$\mathfrak{f}'$ 属于 $\mathfrak{F}$。

相对于基 $\{\mathsf{w}^0, \mathsf{w}, \mathsf{w}^2\}$，$\mathfrak{f}_c$ 的迹型的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3c+1 \\ 1 & 3c+1 & 4c+1 \end{bmatrix},$$

其行列式为 $-c(27c+4)$。令 $\gamma = 27c+4$；这一组合在下文中会反复出现。

我们通过寻找元素 $\mathsf{u} \in \mathfrak{f}_c$，使得对某个 d 有 $\mathsf{u}^3 = \mathsf{u}^2 + d$，来寻找 $\mathfrak{f}_c$ 的同构形式；这一过程同样借助 Maple™。令 $\mathsf{u} = x_2\mathsf{w}^2 + x_1\mathsf{w} + x_0\mathsf{w}^0$。接着，通过令 $\mathsf{u}^3 - \mathsf{u}^2 \in \mathbb{F}$，寻找满足条件的三元组 $\{x_0, x_1, x_2\}$：将 $\mathsf{u}^3 - \mathsf{u}^2$ 中 w^2-项和 w-项的系数分别设为 0。求解这些方程时，会出现一个作为二次方程根的元素。要在 $\mathbb{F}$ 中得到解，该二次方程的判别式必须是 $\mathbb{F}$ 中的平方。这便得到一条至少有一个 $\mathbb{F}$ 点的圆锥曲线。其余 $\mathbb{F}$ 点可用标准方法求得：过给定点作斜率为 m 的直线，并求其与圆锥曲线的第二个交点。于是，u 中由 m 参数化的系数如下，其中 $\Delta = m^2 - 3\gamma c$：

$$x_0 = \frac{2c(3m - \gamma)}{\Delta},\ x_1 = \frac{m^2 - (\gamma - 9c)m + 3\gamma c}{\Delta},\ x_2 = \frac{4m}{\Delta}.$$

此外，$d = c(m^3 - \gamma m^2 + 9\gamma c m - \gamma^2 c)^2/\Delta^3$。$\mathsf{w}^0, \mathsf{u}$ 的行列式以及 u^2是 m的非零有理函数。因此，对于无穷多个 d 值，$\mathfrak{f}_d \in \mathfrak{F}$，且 $\mathfrak{f}_d \cong \mathfrak{f}_c$。如计算可得，对于 m的有理函数 s，$27d^2 + 4d = s^2(27c^2 + 4c)$。这与上文关于迹型的评论一致，因为 $\mathfrak{f}_c$ 和 $\mathfrak{f}_d$ 的迹型应当等价。

设 $\lambda_c = \lambda(\mathfrak{f}_c)$ 是 $\mathfrak{f}_c$, $c \neq 0$ 相对于 V的一个指定基的结构向量。对于 $\lambda_c\mathsf{G}$，我们采用前面多项式论证：若 P 是结构空间坐标 λ_{ijk} 中的一个多项式，且在 $\lambda_c\mathsf{G}$ 上消失，令 $p(x) = P(\lambda_x), \lambda_x = \lambda(\mathfrak{f}_x)$。那么 $p(x)$ 是一个多项式，并且根据前面的讨论，对于无穷多个 d，$p(d) = 0$。因此，对于所有 x，$P(\lambda_x) = 0$，而且对于任意 x，$\mathfrak{f}_c \longrightarrow \mathfrak{f}_x$。因此

命题 2. 对于 $c \neq 0$, $\lambda(\mathfrak{F}) \subseteq \lambda(\mathfrak{f}_c)\mathsf{G}$。

$\mathfrak{F}$ 中的代数包括任意在$\mathbb{F}$上的交换结合半单代数。因为如果不是域，这样的代数要么同构于 $\mathbb{F} \oplus \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}$，要么同构于 $\mathbb{F} \oplus \mathbb{F}(\sqrt{n})$，其中 $n \in \mathbb{F}$为某个非平方数。令 $\mathfrak{c}$ 为具有基 $\mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2, \mathsf{v}_3$ 的交换代数

以及关系

$$\mathbf{v}_1^2 = \mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2^2 = \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3^2 = s\mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = 0, \mathbf{v}_1\mathbf{v}_3 = 0,\ \mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_3,$$

$s \neq 0$，使得 $\mathfrak{c} \cong \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}(\sqrt{s})$，第二个加项为 $\mathbb{F}\mathbf{v}_2 + \mathbb{F}\mathbf{v}_3$。$\mathfrak{c}$ 的单位元 e 为 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$。若 s 是非零平方，则借助正交幂等元 $\frac{1}{2}(\mathbf{v}_2 \pm \frac{1}{\sqrt{s}}\mathbf{v}_3)$，有 $\mathbb{F}(\sqrt{s}) \cong \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}$。为证明对于某个 d 有 $\bar{\mathfrak{c}} \cong \mathfrak{f}_d$，我们沿用一直采用的计算策略。结果是，对于直线斜率参数 m，我们可以取 $\mathsf{w} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3,$，使得

$$x_1 = \frac{9m^2s - 1}{9m^2s + 3},\ x_2 = \frac{2}{9m^2s + 3},\ x_3 = \frac{2m}{3m^2s + 1},$$

m 的取值使 e、w 和 w^2 线性无关。对 m 的总限制是 $m^2s \notin \{-1/3, 0, 1/9, 1\}$。那么 $\mathsf{w}^3 = \mathsf{w}^2 + d\mathsf{e}$，其中

$$d = -\frac{4(9m^2s - 1)^2}{27(3m^2s + 1)^3}.$$

References

[BB] T. Beneˇs 和 D. Burde，《前李代数的退化》，*J. Math. Phys.* 50 (2009)，第 11 期，9 页。[B] D. Burde，《Lie代数和代数群的收缩》，*Arch. Math. (Brno)* 43 (2007)，第 5 期，321–332。[CP] P. E. Conner 和 R. Perlis，《*A Survey of Trace Forms of Algebraic Number Fields*》，纯数学系列，第 2 卷。World Scientific Publishing Co.，新加坡（1984）。[Ge] M. Geck，《*An Introduction to Algebraic Geometry and Algebraic Groups*》，牛津大学出版社，牛津（2003）。[GW] R. Goodman 和 N. R. Wallach，《*Representations and Invariants of the Classical Groups*》，剑桥大学出版社，剑桥（1998）。[IP1] N. M. Ivanova 和 C. A. Pallikaros，《任意域上的代数退化》，*Adv. Group Theory Appl.* 7 (2019)，39–83。[IP2] N. M. Ivanova 和 C. A. Pallikaros，《通过 Lie代数和 Jordan代数研究三维复结合代数的退化》，arXiv:2212.10635v1（2022）。[K] Y. Kobayashi、K. Shirayanagi、M. Tsukada 和 S-E. Takahasi，《$\mathbb{R}$ 上的三维代数的完整分类以及 $\mathbb{C}$——（温故而知新）》，*Asian-Eur. J. Math.* 14（2021），第 8 期，论文编号 2150131，25 页。[L] T. Y. Lam，《*Introduction to Quadratic Forms over Fields*》，数学研究生教材，第 67 卷；美国数学学会，普罗维登斯（2005）。[N] M. Nesterenko 和 R. Popovych，《低维李代数的压缩》，*J. Math.* ( ), *Phys.* 47 2006 12, 45 第 期，页。[O] O. T. O'Meara，《*Introduction to Quadratic Forms*》，Academic Press，纽约（1963）。

Department of Mathematics, University of Virginia, Charlottesville, VA 22904, USA
Email address: hnw@virginia.edu