arXiv:2304.08314v1 [math.GT] 17 Apr 2023

拟群的希尔伯特多项式与随机链环的染色

Ariel Davis、Tomer M. Schlank

2023年4月18日

摘要

给定一个有限quandle Q，我们研究随机辫子的闭包在 B_n 中具有 Q 染色的平均数量，考察该数量随 n变化的情况。特别地，我们证明，对于 $n \gg 0$，该数量等于某个多项式 $P_Q \in \mathbb{Q}[x]$ 。这个多项式的次数可以根据 Q 作为拟群的性质直接计算，并且我们计算了所有满足 $|Q| \leq 4$的quandle的这些不变量。此外，我们证明，本文的方法能够将 [EVW15] 的稳定性结果从“周期稳定性”提升为“稳定性”。

1 引言

拟群是一种特别适合用来构造定向链环数值不变量的代数结构：对于有限quandle Q 和 S^3中的定向链环 L，我们计算 $\mathrm{Col}_Q(L)$——即 L的“Q-着色”集合。本文的主要目标是研究 $\mathrm{Col}_Q(L)$ 的平均大小，其中 L 是根据某个分布族随机选取的。非正式地说，我们关注的是 $\mathrm{Col}_Q(L)$ 的平均大小，其中 L 取为 n股随机辫子 $\sigma \in B_n$ 的闭包$\overline{\sigma}$。其严格含义并不立即明了，因为 B_n 是一个可数离散群。然而，不难证明（见命题 2.24），函数 c_Q: $B_n \to \mathbb{N}$将 $\sigma \in B_n$ 映射到 $c_Q(\sigma) := |\mathrm{Col}_Q(\overline{\sigma})| \in \mathbb{N}$，可唯一延拓为一个连续$\widehat{\ }$函数 $\widehat{c_Q}$: $\widehat{B_n} \to \mathbb{N}$，其定义域为 $\widehat{B_n}$的有限生成完备化。由于 B_n 紧致且豪斯多夫，我们得到一个定义良好的平均值 $\mathbb{E}_{\widehat{B_n}} c_Q = \int_{\widehat{B_n}} c_Q d\mu_{\widehat{B_n}}$。

本文的主要结果如下：

定理 1.1（定理 2.26）。 *Let $Q \in \mathbb{Q}ndl^{fin}$. Then there exist integer-valued polynomials $P_Q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ s.t.*

$$\int_{\widehat{B_n}} c_Q d\mu = P_Q(n)$$

for all $n \gg 0$.

接下来，我们给出一个简单公式，描述 $\deg P_Q$ 与 Q 的子 quandles 的连通分支数之间的关系（命题 4.5）。

定理 1.1 令人联想到交换代数中分次模的希尔伯特多项式的存在性。实际上，证明中的主要技术步骤是命题 3.36，它将希尔伯特多项式推广到了某一类性质良好的非交换分次环上的分次模。命题 3.36 还可用于略微改进 [EVW15]中的稳定性结果。具体而言， [EVW15，定理 6.1] 指出，某些 Hurwitz 空间序列的同调群维数 $\dim_{\mathbb{C}} H_i(\mathrm{Hur}^{c}_{G,\ n}, \mathbb{C})$ 关于 n最终呈周期性；而命题 3.36 表明，这个序列实际上最终为常数（见注 3.38）。

1.1 本文内容

在第 2 节，我们从拟群的预备知识开始。我们证明， Q-着色链环会产生一个随机变量 $c_{Q,\ n}$ ，其取值于 B_n，即作用于 n 股的有限生成群。其期望值用 Q 和 n 明确描述。

在第 3 节，我们将遍历所有 n 所得的 $c_{Q,\ n}$ 的期望值，恢复为与 Q 相关联的分次幺半群 $\mathcal{A}_Q$ 的分次基数。接着，我们证明主要结果：存在一个整值多项式 $P_Q \in \mathbb{Q}[x]$ ，使得对于所有足够大的 n，$c_{Q,\ n}$ 的期望值等于 $P_Q(n)$。我们称之为 Q 的 *Hilbert polynomial* 。

在第 4 节，我们计算 P_Q 的次数：$\deg P_Q = \dim_Q - 1$，其中 $\dim_Q$ 是一个可直接从 Q 的结构中得到的不变量。

在第 5 节，我们证明明 $\dim_{Q\times R} = \dim_Q \cdot \dim_R$。前几节关注的是 Q-着色的期望值，而这一观察表明，利用同一套方法并将其应用于更大的拟群，可以恢复更精细的统计信息，例如高阶矩和协变式。

在第 6 节中，我们讨论 quandle 的不交并。 $\eta_Q(t) = \sum_n |\mathcal{A}_{Q,\ n}|t^n \in \mathbb{Z}[[t]]$ 的 Q 是比 $P_Q(x)$ 更精细的不变量。我们证明了 $\eta_{Q\sqcup R}(t) = \eta_Q(t) \cdot \eta_R(t)$。这为计算 $P_{Q\sqcup R}(x)$ 提供了一种简便方法，而通常无法通过 $P_Q(x)$ 和 $P_R(x)$ 确定它。

在第 7 节中，我们计算了几个 quandle 族的希尔伯特多项式示例，其中包括所有大小不超过 4 的有限 quandle。

1.2 致谢

作者谨向 Ruth Lawrence、Ohad Feldheim 以及整个 Seminarak 组致以谢意，感谢他们进行了有益的讨论。我们也感谢 Aaron Landesman 提出我们的方法与 [EVW15] 相关。第二作者获得 ISF1588/18 和 BSF 2018389 的资助。

2 从链环和拟群到幺半群

2.1 关于拟群的既有事实

本节收录了一些可在文献中轻易找到的关于 quandle 的陈述。quandle 的定义及其代数性质不在 [Joy82], 的讨论范围内，定向链环的基本拟群的定义也不在讨论范围内。 n-元组上的 B_n-作用取自 [Bri86]。

2.1.1 拟群基础——代数概念

回顾 [Joy82] 中拟群的定义。我们认为 [FR92, §1] 的记法更为合适。我们也选择像 [Bri86] 中那样，让拟群从左侧作用。

定义 2.1. A *quandle* 是一个集合 Q，配备了一个二元运算

$$Q \times Q \to Q\,, \quad (x, y) \mapsto {}^{x}y$$

满足以下条件:

(Q1) 对任意 $x \in Q$, ${}^{x}x = x$。（Q2）对任意 $x \in Q$, ${}^{x}(-)$: $Q \to Q$ 是双射。（Q3）对任意 $x, y, z \in Q$, ${}^{x}({}^{y}z)$, $= {}^{({}^{x}y)}({}^{x}z)$。

拟群之间的一个态射是函数 $f\colon Q \to R$，使得对所有 $x, y \in Q$,

$$f({}^{x}y) = {}^{f(x)}f(y).$$

所有 quandle 及其拟群态射自然构成一个范畴，记作 $\mathfrak{Q}$dl。拟群态射是同构，当且仅当它是双射。令 $Q \in \mathfrak{Q}$dl，且令 $x \in Q$。根据 φ_x: 我们用 $Q \to Q$ 表示函数 $\varphi_x(y) = {}^{x}y$。根据定义 2.1 的公理 (Q2) 和 (Q3), 对所有 $x \in Q$

$$\varphi_x \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{Q}\mathrm{dl}}(Q).$$

我们用 $\mathfrak{Q}\mathrm{dl}^{\mathrm{fin}} \subseteq \mathfrak{Q}$dl 表示有限 quandle 的满子范畴，也就是底层集合有限的那些 $Q \in \mathfrak{Q}$dl。

例 2.2（[Joy82, §1]）。设 $G \in \mathfrak{Grp}$ 是一个群。那么 G 上有一个由共轭给出的典范拟群结构: ${}^{h}g := hgh^{-1}$ 满足所有 quandle 公理。存在一个函子

$$\mathrm{Conj}\colon \mathfrak{Grp} \to \mathfrak{Q}\mathrm{dl}\ , \quad \mathrm{Conj}(G) = (G, {}^{g}h = ghg^{-1})\ , \quad \mathrm{Conj}(f\colon G \to H) = f.$$

事实上，设 $G \in \mathfrak{Grp}$，且 $S \subseteq G$ 是一个在共轭作用下封闭的子集。那么 S 是一个拟群，其结构由 G 中的共轭作用诱导。例如，任意共轭类、这类共轭类的并，或任意单元素集。若不易产生混淆，我们常用 $G \in \mathfrak{Q}$dl 代替 Conj(G)。

以下关于平凡拟群的概念可见于许多资料，例如 [Nos17]。

例 2.3. 对于每个集合 $X \in \mathcal{S}\mathrm{et}$，我们用 $\mathrm{Triv}(X) \in \mathcal{Q}\mathrm{dl}$ 表示底层集合为 X 且对所有 $x \in X$ 都为 $\varphi_x = \mathrm{Id}_X$ 的 *trivial quandle*：

$$\forall\, x, y \in X\ ,\quad {}^{x}y = y.$$

设 $X, Y \in \mathcal{S}\mathrm{et}$。任意函数 $f\colon X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{S}\mathrm{et}$ 都是平凡拟群之间的夸尔德态射：

$$f({}^{x}y) = f(y) = {}^{f(x)}f(y),$$

从而使 $\mathrm{Triv}\colon \mathcal{S}\mathrm{et} \to \mathcal{Q}\mathrm{dl}$ 成为一个函子。对于 $\alpha \in \mathbb{N}$，我们用 $T_\alpha \in \mathcal{Q}\mathrm{dl}$ 表示 *trivial quandle with α elements*，它在同构意义下良定义。

定义 2.4. 设 $Q \in \mathcal{Q}\mathrm{dl}$。$Q$ 的一个 *sub-quandle* R 是子集 $R \subseteq Q$ s.t.

$$\forall\, x, y \in R\ ,\quad {}^{x}y \in R.$$

对于这样的 R，我们使用记号 $R \leq Q$。对于 $R \leq Q$ 和 $R \neq Q$，我们记作 $R < Q$。

命题 2.5. *Let $f\colon R \to Q$ be a quandle morphism. Then*

$$f(R) \leq Q.$$

Proof. 设 $f(x)\ f(y) \in f(R)$，其中 $x, y \in R$。那么

$${}^{f(x)}f(y) = f({}^{x}y) \in f(R).$$

□

定义 2.6. 设 $Q \in \mathcal{Q}\mathrm{dl}$，且 $S \subseteq Q$ 是 Q的子集。那么 $\langle S\rangle \leq Q$是由 S生成的 *sub-quandle generated by S*，即包含 S的最小 $R \leq Q$。当 $Q =$ 是某个 $G \in \mathcal{G}\mathrm{rp}$ 的 $\mathrm{Conj}(G)$ 时，我们区分由 S 生成的子拟群和子群，分别记作 $\langle S\rangle_{\mathcal{Q}\mathrm{dl}}$ 和 $\langle S\rangle_{\mathcal{G}\mathrm{rp}}$。

定义 2.7（[Joy82，第 5] 节）。设 $Q \in \mathcal{Q}\mathrm{dl}$。回顾一下，对所有 $x \in Q$，都有 $\varphi_x \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{Q}\mathrm{dl}}(Q)$。$Q$ 的 *inner automorphism group* 定义为 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{Q}\mathrm{dl}}(Q)$ 中由这些 φ_x 生成的子群：

$$\mathrm{Inn}(Q) := \langle \{\varphi_x\}_{x\in Q}\rangle_{\mathcal{G}\mathrm{rp}} \leq \mathrm{Aut}_{\mathcal{Q}\mathrm{dl}}(Q)$$

注意，从 quandle 到群的 $\mathrm{Inn}(Q)$ 在函子意义下是函子性的。

命题 2.8. *Let $Q \in \mathcal{Q}dl$. Then*

$$Q \to Conj(Inn(Q))\ ,\quad x \mapsto \varphi_x$$

is a morphism in $\mathcal{Q}dl$.

该命题见于 [Bri86, §2]。为完整起见，我们给出证明。

Proof. 令 $x, y \in Q$。那么对于所有 $z \in Q$,

$$(\varphi_x \circ \varphi_y)(z) = {}^{x}({}^{y}z) = {}^{({}^{x}y)}({}^{x}z) = (\varphi_{{}^{x}y} \circ \varphi_x)(z).$$

因此

$$\varphi_{{}^{x}y} = \varphi_x \circ \varphi_y \circ \varphi_x^{-1} = {}^{\varphi_x}\varphi_y \in \mathrm{Inn}(Q).$$

□

在 [Joy82], 中，如果 Inn(*Q*) 在 Q 上传递作用，则称拟群 Q *connected*。有鉴于此，我们借用以下拓扑学记号:
定义 2.9。设 $Q \in \mathfrak{Q}\mathrm{dl}$。我们定义以下集合商

$$\pi_0(Q) := Q/\mathrm{Inn}(Q).$$

The el $\pi_0(Q)$ 的元素是 *connected components* Q 的。

由于 Inn(*Q*) 由 $\{\varphi_x\}_{x\in Q}$ 生成，因此 $\pi_0(Q)$ 是集合 Q 关于由 ${}^{x}y \sim y$ 对所有 $x, y \in Q$ 生成的等价关系所取的商。这个观察将有助于证明以下引理:

引理 2.10. *The map* $Q \mapsto \pi_0(Q)$ *is a functor*

$$\pi_0 \colon \mathfrak{Q}dl \to \mathcal{S}et.$$

Proof. 设 $f\colon R \to Q$ 是一个 quandle 态射。那么 f 将 R 上形如 ${}^{x}y \sim y$ (x, $y \in R$) 的关系映射为 Q上同样形式的关系:

$${}^{f(x)}f(y) = f({}^{x}y) \sim f(y).$$

因此， f 保持由这些关系生成的等价关系，故

$$f\colon \pi_0(R) \to \pi_0(Q)$$

是良定义的。函子性显然。 □

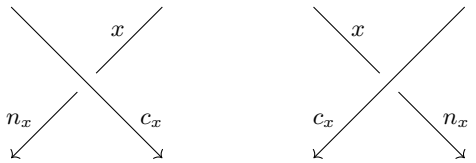
2.1.2 定向链环与拟群

现代纽结与链环研究的基础由 Alexander、Briggs 和 Reidemeister 的著作奠定——参见 [AB26] 和 [Rei48]。下文将简要概述其中的基本概念。

link L 中的 S^3 是一个嵌入 $L\colon \coprod S^1 \hookrightarrow S^3$，它将有限个圆的不交并嵌入三维球面。通过为 S^3 和 S^1指定定向，便得到 *oriented*链环的概念。若存在保向同胚 $f\colon S^3 \xrightarrow{\sim} S^3$ 使得$f \circ L_1 = L_2$，则两个定向链环 L_1、L_2 是 *equivalent*的。若一个定向链环等价于某个多边形链环，则称其为 *tame*。本文中所有链环均假定为定向且驯结的。

通过将链环 L 投影到 $\mathbb{R}^2$，可以得到一个 *link diagram* ——一种由定向弧和交叉构成的链环的组合表示。每个交叉表示投影的 L 中的一个二对一纤维，由一条在线股上方交叉、另一条在线股下方交叉的线股组成，并分成两条弧。如果链环是纽结，通常会看到弧按循环方式编号—— x_1、.....、 x_n。对于一般的链环图 D，此类图表的数据可以用 $\mathbb{R}^2$中的一个有限集合 $arcs(D)$ 个定向弧来组织，并附加描述交叉的数据:

- 一个置换 n: $arcs(D) \to arcs(D)$，为每条弧指定其 *next* 弧。
- 一个函数 c: $arcs(D) \to arcs(D)$——位于 x 和 n_x上方交叉的弧。
- 一个函数 ε: $arcs(D) \to \{\pm 1\}$ ——c_x 越过 x 和 n_x处交叉的定向。



$\varepsilon_x = 1$ $\qquad$ $\varepsilon_x = -1$

如 [Rei48]，所示，两个链环图描绘等价链环，当且仅当它们可以通过一系列称为 *Reidemeister moves* 的图表局部变换互相转换。

定向链环 L 的基本拟群，在 [Joy82, §15] 中通过生成元与关系来描述，这些生成元与关系由描绘 L 的图表 D 决定：

命题 2.11。 *Let L be an oriented link in S^3. For a link diagram$D$ of L, let $Q_D \in \mathcal{Q}dl$ be the following quandle defined by generators andrelations:*

$$Q_D = \langle\, x \in arcs(D) \mid \forall x \in arcs(D)\ ,\ \ \varphi_{c_x}^{\varepsilon_x}(x) = n_x \,\rangle =$$

$$= \left\langle\, x \in arcs(D) \mid \forall x \in arcs(D)\ ,\ \begin{cases} {}^{c_x}x = n_x & ,\ \varepsilon_x = 1 \\ {}^{c_x}n_x = x & ,\ \varepsilon_x = -1 \end{cases} \right\rangle.$$

Then up to isomorphism Q_D is a well-defined invariant of L up to equivalence.

这一点在 [Joy82, §15] 中针对 L 是纽结的情形得到了证明：只需说明，若 D' 和 D 是相差一个 Reidemeister 变换的链环图，则 $Q_D \simeq Q_{D'}$。该证明原样适用于一般的定向链环 L。

定义 **2 12** L S^3 *fundamental quandle* Q_L L $Q_D \in \mathcal{Q}$ D L . . 设 是 中的一个定向链环。 的 定义为 dl，其中 是 的任意链环图。根据命题 2.11， Q_L 在同构意义下良定义。

定义 2.13. 设 $Q \in \mathcal{Q}$dl，并设 L 是 S^3中的一个定向链环。*Q-coloring of L* 是一个态射 f: $Q_L \to Q$ ，属于 $\mathcal{Q}$dl。 *dominant* Q-着色是 L 的一个满射态射。我们记为

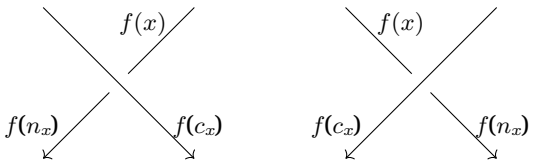
$$\mathrm{Col}_Q(L) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}\mathrm{dl}}(Q_L, Q),$$

$$\mathrm{Col}_Q^{\mathrm{dom}}(L) = \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}\mathrm{dl}}(Q_L, Q) \mid \mathrm{Im}(f) = Q\}$$

这种以生成元与关系表示 Q_L 的方式，使我们能够用拟群态射来诠释先前的一个概念 *knot coloring* ——对图表 D 的弧进行“着色”，并在每个交叉处满足某些条件 $Q_L \simeq Q_D \to Q$。更确切地说：

命题 2.14. *Let L be an oriented link with link diagram D. Then*

$$Col_Q(L) \simeq \{f\colon\ arcs(D) \to Q \mid \forall x \in arcs(D)\quad \varphi_f^{\varepsilon_x}{}_{(c_x)}(f(x)) = f(n_x)\}:$$



$\varepsilon_x = 1$ $\varepsilon_x = -1$

命题 2.15. *Let $Q \in \mathbb{Q}dl$ and let L be an oriented link in S^3.Then*

$$Col_Q^{dom}(L) = Col_Q(L) \setminus \bigcup_{R<Q} Col_R(L).$$

Proof. 由命题 2.5 可知，对所有 $f \in \mathsf{Col}_Q(L)$，$\mathsf{Im}(f) \leq Q$。因此，一个 Q-着色 f 是 *not* 满射，当且仅当其像是 Q的真子拟群。因此

$$\mathrm{Col}_Q^{\mathrm{dom}}(L) = \mathrm{Col}_Q(L) \setminus \bigcup_{R<Q} \mathrm{Col}_R(L).$$

□

命题 **2 16** *Let L be an oriented link in S^3 and let $Q \in \mathbb{Q}dl^{fin}$ be . . 0 0 a finite quandle. Then Col_Q L Col_Q^{dom} L are finite sets.*

Proof. 设 D 是 L的一个链环图，由有限多个弧组成。那么，$\mathsf{Col}_Q(L)$ 嵌入 $\mathsf{Hom}_{\mathrm{Set}}(arcs(D)\ Q)$，后者是有限集合，因为 Q 是有限的。因此，$\mathsf{Col}_Q(L)$ 是有限的，$\mathsf{Col}_Q^{\mathrm{dom}}(L) \subseteq \mathsf{Col}_Q(L)$ 也是如此。

□

定义 2.17. 设 L 是 S^3 中的一个定向链环，且 $Q \in \mathbb{Q}\mathsf{dl}^{\mathrm{fin}}$。根据命题 2.16，$\mathsf{Col}_Q(L)$、$\mathsf{Col}_Q^{\mathrm{dom}}(L)$ 都是有限的。我们用 $\mathsf{col}_Q(L)$、$\mathsf{col}_Q^{\mathrm{dom}}(L)$ 表示它们的 rective 基数:

$$\mathrm{col}_Q(L) := |\mathrm{Col}_Q(L)| \in \mathbb{N},$$
$$\mathrm{col}_Q^{\mathrm{dom}}(L) := \left|\mathrm{Col}_Q^{\mathrm{dom}}(L)\right| \in \mathbb{N}.$$

2.1.3 辫子与阿廷辫群 B_n

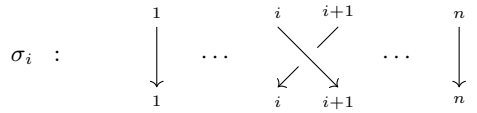
与纽结和链环类似，辫子既有拓扑定义，也有组合描述。回顾 [CK08, §1.2.2] 中对*braid diagram*的定义：由 n 个区间 $I = [0,1]$ 嵌入 $\mathbb{R} \times I$ 而成的*braid diagram*，其中各股是投影 $\mathbb{R} \times I \to I$ 的截面，端点集合固定为 $\{1, \ldots n\} \times \{0,1\}$，且任意一点至多有两股相交，并且相交时横截地相交。辫图包含了每个交点处哪一股从上方或下方穿过的信息。辫图用弧来表示——与链环图类似，但上下端点固定。我们将辫子定向为向下。

辫子的串接在 B_n 上定义了群结构，其中 B_n 是由 n 股组成的辫子的集合。这个群有如下生成元与关系表示——参见 [CK08, §1.1]:

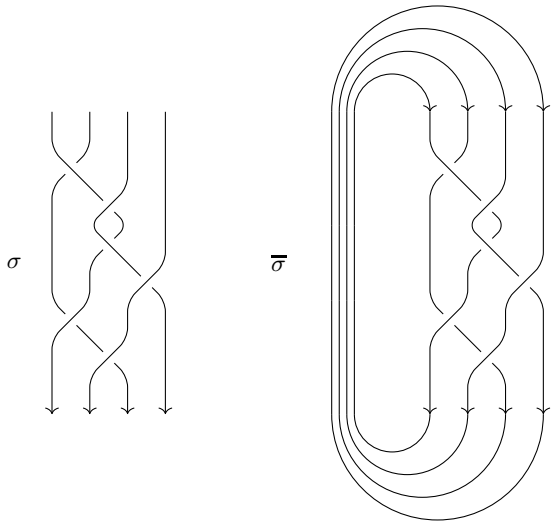
定义 2.18。由 n 股组成的阿廷辫群 B_n 由生成元与关系给出

$$B_n = \langle \sigma_1 \dots \sigma_{n-1} \mid \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1},\ [\sigma_i, \sigma_j] = 1 \text{ 其中 } |i-j| \geq 2 \rangle.$$

σ_i :



通过 *braid closure*，可以从辫子得到一个定向链环。用辫图表示时，做法是将辫子的各股从底部向上折回顶部，并使它们在途中不交叉。精确定义见 [CK08，第 2.2 节。3]。下面给出一个例子:



命题 2.19。 *Let $Q \in \mathcal{Q}dl$ and $n \in \mathbb{N}$. Then the action of $\sigma_i \in B_n$ on the set Q^n via*

$$\sigma_i(x_1\ \dots\ x_i\ ,\ x_{i+1}\ \dots\ x_n) = (x_1\ \dots\ {}^{x_i}x_{i+1}\ ,\ x_i\ \dots\ x_n)$$

extends to a well-defined B_n-action on $Q^n \in \mathcal{S}et$.

该陈述是 [Bri86 第 3] 节中命题 3.1 的一部分。为完整起见，我们给出证明。

Proof. σ_i-作用的逆为

$$(x_1\ \dots\ x_i\ ,\ x_{i+1}\ \dots\ x_n) \mapsto (x_1\ \dots\ x_{i+1}\ ,\ \varphi^{-1}_{x_{i+1}}(x_i)\ \dots\ x_n).$$

令 $(x_1, \dots, x_n) \in Q^n$。对于所有满足 $|i-j| \geq 2$ 的 $1 \leq i < j \leq n-1$，

$$(\sigma_i \circ \sigma_j)(x_1, \dots, x_n) = (\dots\ {}^{x_i}x_{i+1}\ ,\ x_i\ \dots\ {}^{x_j}x_{j+1}\ ,\ x_j\ \dots) =$$

$$= (\sigma_j \circ \sigma_i)(x_1, \dots, x_n).$$

现在令 $1 \le i \le n-2$。取 $x := x_i$、$y := x_{i+1}$ 和 $z := x_{i+2}$，则

$$(\dots x, y, z \dots) \overset{\sigma_i}{\longmapsto} (\dots {}^{x}y, x, z \dots) \overset{\sigma_{i+1}}{\longmapsto} (\dots {}^{x}y, {}^{x}z, x \dots) \overset{\sigma_i}{\longmapsto} (\dots {}^{({}^{x}y)}({}^{x}z)\ {}^{x}y, x \dots)$$
$$(\dots x, y, z \dots) \overset{\sigma_{i+1}}{\longmapsto} (\dots x, {}^{y}z, y \dots) \overset{\sigma_i}{\longmapsto} (\dots {}^{x}({}^{y}z)\ x, y \dots) \overset{\sigma_{i+1}}{\longmapsto} (\dots {}^{x}({}^{y}z)\ {}^{x}y, x \dots)$$

由于 quandle 公理（$Q3$），这两者重合：${}^{x}({}^{y}z) = {}^{({}^{x}y)}({}^{x}z)$。

因此

$$(\sigma_i \circ \sigma_{i+1} \circ \sigma_i)(x_1, \dots, x_n) = (\sigma_{i+1} \circ \sigma_i \circ \sigma_{i+1})(x_1, \dots, x_n).$$

σ_i 的作用尊重 B_n中的关系，因此扩展为一个 B_n-作用。

□

定义 2.20。设 $n \in \mathbb{N}$，并令 $Q \in \mathfrak{Q}\mathrm{dl}$。我们记

$$\beta_{Q,n} \colon B_n \to \mathrm{Aut}_{\mathfrak{Set}}(Q^n)$$

命题 2.19 中描述的同态。

引理

2 21 *Let $f \quad R \to Q$ be a morphism in $\mathfrak{Q}dl$ and let $n \in \mathbb{N}$. Then .. : : the diagonal map $f_n \quad R^n \to Q^n$ commutes with the B_n action.*

Proof. 我们证明，对于所有的 $\sigma \in B_n$，

$$\beta_Q(\sigma) \circ f_n = f_n \circ \beta_R(\sigma).$$

只需证明生成元的情形：对于所有的 $1 \le i \le n-1$，

$$\beta_Q(\sigma_i) \circ f_n = f_n \circ \beta_R(\sigma_i) \colon R^n \to Q^n.$$

事实上，对于任意的 x、$y \in R$ 以及适当的 $\sigma_i \in B_n$，我们有

$$(\beta_Q(\sigma_i) \circ f_n)(\dots, x, y, \dots) = (\dots, {}^{f(x)}f(y), f(x), \dots) =$$
$$(\dots, f({}^{x}y), f(x), \dots) = (f_n \circ \beta_R(\sigma_i))(\dots, x, y, \dots).$$

□

定义 2.22. 设 $Q \in \mathfrak{Q}\mathrm{dl}^{\mathrm{fin}}$ 且设 $n \in \mathbb{N}$。我们定义 B_n-集合

$$Q^{n,\mathrm{dom}} := Q^n \setminus \bigcup_{R<Q} R^n \in \mathfrak{Set}_{B_n}.$$

利用 Q^n 上的 B_n-作用，可以将辫子 $\sigma \in B_n$ 的闭包的 Q-着色解释为 Q^n 中被 σ 固定的点。下面的引理给出了精确表述。这一表述的一种形式见于 [FR92], , 重点是使用 *racks* -为 *framed* 链环着色； *racks* -是一种推广了 quandle 的代数结构。为完整起见，我们在此给出证明，并陈述一个关于支配着色的类似结果。

引理 2.23。 *Let $Q \in \mathfrak{Q}dl$ and let $n \in \mathbb{N}$. Then for every $\sigma \in B_n$ there are natural bijections*

$$Col_Q(\overline{\sigma}) \simeq (Q^n)^{\beta(\sigma)}.$$
$$Col_Q^{dom}(\overline{\sigma}) \simeq (Q^{n,dom})^{\beta(\sigma)}.$$

Proof. 令 $\sigma \in B_n$。 σ 的辫图由定向弧和交叉组成，与定向链环的图表十分相似——不同之处在于，整体的股带有端点。我们以与定向链环图类似的方式定义 $\mathsf{Col}_Q(\sigma)$，即辫图的 Q-着色集合；但不对辫股端点施加任何条件。我们可以用 σ的 Q-着色来描述 $\overline{\sigma}$ 的 Q-着色：将 $c \in \mathsf{Col}_Q(\overline{\sigma})$ 拉回到$c_{|\sigma} \in \mathsf{Col}_Q(\sigma)$，可得到一个单射

$$\mathrm{Col}_Q(\overline{\sigma}) \to \mathrm{Col}_Q(\sigma).$$

由于闭包 $\overline{\sigma}$ 是通过将 σ 的图示中的松散端点绕合起来得到的，而且关键的是，这一过程不会引入新的交叉，因此像中的那些 $c' \in \mathsf{Col}_Q(\sigma)$ 恰好就是端点处颜色相容的那些：令 $p_0, p_1\colon \mathsf{Col}_Q(\sigma) \to Q^n$ 表示 $c' \in \mathsf{Col}_Q(\sigma)$ 在辫子顶端（分别为底端）端点处的限制。那么

$$\mathrm{Col}_Q(\overline{\sigma}) \xrightarrow{\sim} \{c' \in \mathrm{Col}_Q(\sigma) \mid p_0(c') = p_1(c')\}.$$

任何 $c' \in \mathsf{Col}_Q(\sigma)$ 都完全由顶端的颜色决定，因此

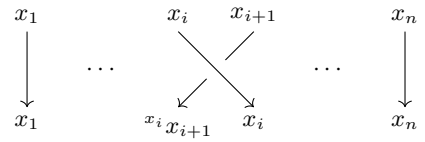
$$p_0 \colon \mathrm{Col}_Q(\sigma) \xrightarrow{\sim} Q^n$$

底端的着色同样如此，因此

$$p_1 \colon \mathrm{Col}_Q(\sigma) \xrightarrow{\sim} Q^n$$

也是一个双射。最后，注意到 σ 顶端的颜色通过 $p_1 \circ p_0^{-1} = \beta(\sigma)$ 决定了 σ 底端的颜色。这是因为 B_n- 作用于 Q^n ，恰好模拟了通过合法的 Q-着色从起点到终点的演进：

σ_i ：



因此

$$\mathrm{Col}_Q(\overline{\sigma}) \simeq \{c \in \mathrm{Col}_Q(\sigma) \mid p_0(c) = p_1(c)\} \xrightarrow[\sim]{p_0} \{\overrightarrow{x} \in Q^n \mid \overrightarrow{x} = \beta(\sigma)(\overrightarrow{x})\} = (Q^n)^{\beta(\sigma)}.$$

这对所有 $R \leq Q$ 也成立。因此

$$\mathrm{Col}_Q^{\mathrm{dom}}(\overline{\sigma}) = \mathrm{Col}_Q(\overline{\sigma}) \setminus \bigcup_{R<Q} \mathrm{Col}_R(\overline{\sigma}) = (Q^n)^{\beta(\sigma)} \setminus \bigcup_{R<Q} (R^n)^{\beta(\sigma)} =$$

$$= (Q^n \setminus \bigcup_{R<Q} R^n)^{\beta(\sigma)} = \left(Q^{n,\mathrm{dom}}\right)^{\beta(\sigma)}.$$

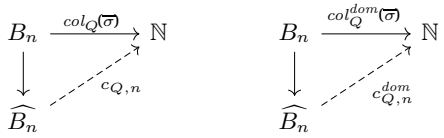
□

2.2 拟群着色的统计

命题 2.24。 *Let $Q \in \mathbb{Q}dl^{fin}$ and $n \in \mathbb{N}$. Then the functions*

$$col_Q(\overline{\sigma})\ ,\ col_Q^{dom}(\overline{\sigma})\colon B_n \to \mathbb{N}$$

$\frown$extend to locally-constant functions on B_n, the profinite completion of B_n:



Proof. 根据引理 2.23，对于每个 $\sigma \in B_n$,

$$\mathrm{Col}_Q(\overline{\sigma}) \simeq (Q^n)^{\beta(\sigma)}\ ,\ \mathrm{Col}_Q^{\mathrm{dom}}(\overline{\sigma}) \simeq (Q^{n,\mathrm{dom}})^{\beta(\sigma)}.$$

因此，函数 $\mathrm{col}_Q(\overline{\sigma})$ 和 $\mathrm{col}_Q^{\mathrm{dom}}(\overline{\sigma})$ 可分别通过 $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{Set}}(Q^n)$ 上的函数（以及 $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{Set}}(Q^{n,\mathrm{dom}})$ 上的函数）分解，这些函数分别统计 Q^n （以及 $Q^{n,\mathrm{dom}}$）中的不动点:

$$\mathrm{col}_Q(\overline{\sigma})\colon B_n \to \mathrm{Aut}_{\mathfrak{Set}}(Q^n) \to \mathbb{N},$$
$$\mathrm{col}_Q^{\mathrm{dom}}(\overline{\sigma})\colon B_n \to \mathrm{Aut}_{\mathfrak{Set}}(Q^{n,\mathrm{dom}}) \to \mathbb{N}.$$

由于 Q 是有限的，因此 $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{Set}}(Q^n)$、$\mathrm{Aut}_{\mathfrak{Set}}(Q^{n,\mathrm{dom}}) \in \mathfrak{Grp}^{\mathrm{fin}}$，于是

$$\mathrm{col}_Q(\overline{\sigma}), \mathrm{col}_Q^{\mathrm{dom}}(\overline{\sigma})\colon B_n \to \mathbb{N}$$

可通过 B_n的有限商。因此，$\mathrm{col}_Q(\overline{\sigma})$ 和 $\mathrm{col}_Q^{\mathrm{dom}}(\overline{\sigma})$ 都可以提升为 $\widehat{B_n}$上的局部常值函数。 □

定义 2.25。我们将命题 2.24 中所述的 $\mathrm{col}_Q(\overline{\sigma})$ 和 $\mathrm{col}_Q^{\mathrm{dom}}(\overline{\sigma})$ 到 $\widehat{B_n} \to \mathbb{N}$ 的提升分别记为 $c_{Q,\,n}$ 和 $c_Q^{\mathrm{dom}}{}_{,\,n}$。当$n$ 的含义由上下文明确时，我们简写为:

$$c_Q := c_{Q,n}\ \ ,\quad c_Q^{\mathrm{dom}} := c_{Q,n}^{\mathrm{dom}}.$$

$\widehat{\ }$作为一个紧豪斯多夫群，我们赋予 B_n 其 Haar测度 μ，并将 c_Q、c_Q^{dom}视为 $\widehat{B_n}$上的随机变量。

现在我们可以陈述本文的主要结果:

定理

2 26 *Let $Q \in \mathbb{Q}dl^{fin}$. Then there exist integer-valued polyno-。 . , mials P_Q $P_Q^{dom} \in \mathbb{Q}[x]$ s.t.*

$$\int_{\widehat{B_n}} c_Q d\mu = P_Q(n) \quad \text{and} \quad \int_{\widehat{B_n}} c_Q^{dom} d\mu = P_Q^{dom}(n)$$

for all $n \gg 0$.

$P_Q(x)$ 和 $P_Q^{\mathrm{dom}}(x)$ 的次数可根据 Q 的 quandle 结构直接计算。为此，我们定义:

定义 2.27. 设 $Q \in \mathbb{Q}\mathrm{dl}^{\mathrm{fin}}$。 Q 的 *dimension* 定义为

$$\dim_Q = \max_{R \le Q} |\pi_0(R)|\,.$$

定理 2.28. *Let $Q \in \mathcal{O}d\mathcal{l}^{fin}$. Then*

$$\deg P_Q^{dom} = |\pi_0(Q)| - 1,$$

$$\deg P_Q = \dim_Q -1.$$

为证明这一点，我们首先需要以下步骤:

命题 2.29。 *Let $Q \in \mathcal{O}d\mathcal{l}^{fin}$ and let $n \in \mathbb{N}$. Then the expected values of $c_{Q,n}$ and $c_Q^{dom},_n$ are equal to*

$$\int_{\widehat{B_n}} c_Q d\mu = |Q^n/B_n| \quad , \quad \int_{\widehat{B_n}} c_Q^{dom} d\mu = \left|Q^{n,dom}/B_n\right|.$$

Proof. 设 $G \in \mathcal{G}\mathbf{rp}^{\mathrm{fin}}$ 是一个有限群，其作用于有限集合 X。根据 Burnside 轨道计数引理,

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |X^g| = |X/G|\,.$$

对于作用于有限集合 X 的无限群 G，有如下结论:

$$\int_{\widehat{G}} |X^g|\, d\mu = |X/G|,$$

其中 G 是 G 的有限生成完备化，配备 Haar测度 μ; 而 X^g 是通过将 $G \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{S}\mathrm{et}}(X)$ 扩展到 $\widehat{G}$, 为 $g \in \widehat{G}$ 定义的。特别地，对于作用于 Q^n 的 $G = B_n$ 和 $Q^{n,\ \mathrm{dom}}$，我们有

$$\int_{\widehat{B_n}} c_Q d\mu = |Q^n/B_n| \qquad \text{and} \qquad \int_{\widehat{B_n}} c_Q^{\mathrm{dom}} d\mu = \left|Q^{n,\mathrm{dom}}/B_n\right|.$$

□

3 拟群、幺半群与代数

3.1 分次幺半群与分次模

定义 3.1。
所谓 *graded set*，是指一个关于 $\mathbb{N}$分次的集合 S：

$$S = \coprod_{n=0}^{\infty} S_n.$$

如果 S 是一个分次集合且 $s \in S_n$，我们将 $|s|$ 记作$= n$，表示s的次数。
用 $\mathcal{S}\mathbf{et}^{gr}$ 表示分次集合范畴，其中态射是函数 $f\colon\ S \to S'$，且保持分次:

$$\forall s \in S \quad , \quad |f(s)| = |s|.$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$。若对所有 $n \in \mathbb{N}$, S_n 都是有限的，则分次集合 S 是 *level-wise finite*。

定义 3.2。
graded monoid 是一个结合幺半群 A，其底层集合为分次集合，且满足

$$\forall a, b \in A \ , \quad |a \cdot b| = |a| + |b|.$$

用 $\mathcal{M}\mathrm{on}^{gr}$ 表示分次幺半群范畴，其中态射是幺半群的分次态射。存在一个范畴等价

$$\mathcal{M}\mathrm{on}_{gr} \cong \mathcal{M}\mathrm{on}_{/\mathbb{N}},$$

其中 $\mathcal{M}\mathrm{on}_{/\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的幺半群范畴：$= (\mathbb{N}, +)$。

定义 3.3。
设 $A \in \mathcal{M}\mathrm{on}^{gr}$. 一个 *graded A-set* 是带有分次的 A-集合 S，使得

$$\forall a \in A,\ s \in S \ , \quad |a \cdot s| = |a| + |s|.$$

我们用 $\mathcal{M}\mathrm{od}_A^{gr}$ 表示分次 A-集合的范畴，其中态射是 A-集合之间的分次态射。若存在一个有限子集 $T \subseteq S$ 使得……，则称 A-集合 S 为 *finitely generated*。

$$S = A \cdot T.$$

定义 3.4。
设 $Q \in \mathcal{Q}\mathrm{dl}$ 是一个拟群。我们将 Q 的 *enveloping monoid*[1] 定义为由以下生成元与关系给出的结合幺半群：

$$\mathcal{A}_Q := \mathbb{N}\langle\ Q \mid \forall\, x, y \in Q \ ,\ \ x \cdot y = {}^{x}y \cdot x\ \rangle.$$

注意，Q 可规范地嵌入 $\mathcal{A}_Q$。这个幺半群由 [KM05, §3] 引入，作为 Q 的 *enveloping monoidal quandle* ——但其形式为命题 3.7。

命题 3.5。 *Let $f\colon R \to Q$ be a morphism in $\mathcal{Q}dl$. Then there exists a unique well-defined multiplicative morphism*

$$\mathcal{A}_f : \mathcal{A}_R \to \mathcal{A}_Q$$

extending $f\colon R \to Q$. The map $Q \mapsto \mathcal{A}_Q$ from $\mathcal{Q}dl$ to $\mathcal{M}on$ is functorial.

Proof. 这样的 $\mathcal{A}_f$ 是唯一的，因为 Q 生成了 $\mathcal{A}_Q$。函数的复合映射

$$R \xrightarrow{f} Q \to \mathcal{A}_Q$$

满足定义 $\mathcal{A}_R$的关系：对于每个 $x,\ y \in R$，我们有

$$f(x) \cdot f(y) = {}^{f(x)}f(y) \cdot f(x) = f({}^{x}y) \cdot f(x) \in \mathcal{A}_Q.$$

因此，该函数 $R \to \mathcal{A}_Q$ 可扩展为一个乘法态射

$$\mathcal{A}_f : \mathcal{A}_Q \to \mathcal{A}_R.$$

函子性很容易得到证明。 □

[1]在 [KM05] 中，这被定义为包络幺半群架。

命题 3.6. *For every $Q \in \mathcal{Q}dl$, the monoid $\mathcal{A}_Q$ is naturally graded, making $Q \mapsto \mathcal{A}_Q$ into a functor*

$$\mathcal{A}\colon \mathcal{Q}dl \to \mathcal{M}on_{gr}.$$

Proof. 我们将 $* \in \mathcal{Q}\mathbf{dl}$ 记为终对象——只有一个元素的拟群。存在一个范畴等价

$$\mathcal{Q}\mathrm{dl} \cong \mathcal{Q}\mathrm{dl}_{/*}.$$

定义 $\mathcal{A}_*$ 的关系是冗余的，因此 $\mathcal{A}_*$ 是由一个元素生成的自由幺半群:

$$\mathcal{A}_* = \mathbb{N}\langle * \rangle \simeq \mathbb{N}.$$

最后， $\mathcal{A}$ 定义了一个上范畴函子

$$\mathcal{Q}\mathrm{dl} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Q}\mathrm{dl}_{/*} \xrightarrow{\mathcal{A}} \mathcal{M}\mathrm{on}_{/\mathcal{A}_*} \simeq \mathcal{M}\mathrm{on}_{/\mathbb{N}} \simeq \mathcal{M}\mathrm{on}_{gr}.$$

□

命题 3.7。 *Let $Q \in \mathcal{Q}dl$. Then the graded monoidal morphism*

$$\coprod_n Q^n \simeq \mathbb{N}\langle Q\rangle \to \mathcal{A}_Q$$

defines an isomorphism of graded monoids

$$\coprod_n Q^n/B_n \simeq \mathcal{A}_Q.$$

Proof.

$$\mathcal{A}_Q = \mathbb{N}\langle Q \mid {}^x y \cdot x = x \cdot y \quad \forall x, y \in Q\rangle =$$
$$= \mathbb{N}\langle Q \mid x_1 \cdots {}^{x_i} x_{i+1} \cdot x_i \cdots x_n = x_1 \cdots x_i \cdot x_{i+1} \cdots x_n,\ \forall x_1, \ldots x_n \in Q,\ i = 1 \ldots n{-}1\rangle =$$
$$= \mathbb{N}\langle Q \mid \sigma_i(x) = x \ ,\ \forall n,\ \forall x \in Q^n,\ \sigma_i \in B_n\rangle.$$

由于 B_n 由 $\sigma_1 \ldots \sigma_{n-1} \in B_n$ 生成，我们可以直接得到

$$\mathcal{A}_Q = \mathbb{N}\langle Q \mid \sigma(x) = x \quad \forall n\ ,\ x \in Q^n,\ \sigma \in B_n\rangle.$$

这看起来和 $\coprod Q^n/B_n$ 非常相似。我们之所以谨慎，是因为后者是通过将 $\mathbb{N}\langle Q\rangle \simeq \coprod Q^n$ 取各种商而得到的，作为一个 *set*。通过证明 $\coprod Q^n/B_n$ 带有 $\coprod Q^n$ 的幺半群结构，即可得出

$$\coprod_n Q^n/B_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}\langle Q \mid \sigma(x) = x \quad \forall n\ ,\ x \in Q^n,\ \sigma \in B_n\rangle = \mathcal{A}_Q.$$

事实上， $\mathbb{N}\langle Q\rangle$ 中的积——在分次分量中由下式给出

$$Q^m \times Q^n \to Q^{m+n}$$

对所有 m、 n 都成立——且模去相应辫群的作用后是良定义的:

$$Q^m/B_m \times Q^n/B_n \to (Q^m \times Q^n)/(B_m \times B_n) \to Q^{m+n}/B_{m+n}$$

通过该嵌入

$$B_m \times B_n \hookrightarrow B_{m+n}.$$

如前所述，由此可得

$$\mathcal{A}_Q \simeq \coprod_n Q^n/B_n \in \mathcal{M}\mathrm{on}_{gr}.$$

□

命题 3.8. *Let $Q, R \in \mathcal{Q}dl$ s.t. $R \leq Q$. Then the induced mor-phism*

$$\mathcal{A}_R \to \mathcal{A}_Q$$

in $\mathcal{M}on_{gr}$ is an injection.

Proof. 对于所有 $n \in \mathbb{N}$，根据引理 2.21， $R^n \subseteq Q^n$ 是一个子B_n集合。取商后，映射

$$R^n/B_n \to Q^n/B_n$$

也为单射。最后，由命题 3.7 可得

$$\mathcal{A}_R \simeq \coprod_n R^n/B_n \hookrightarrow \coprod_n Q^n/B_n \simeq \mathcal{A}_Q.$$

□

注 3.9. 鉴于命题 3.8，今后对于任意 $Q \in \mathcal{Q}$dl 和子拟群 R，我们将把 $\mathcal{A}_R$ 视为 $\mathcal{A}_Q$的子幺半群:

$$R \leq Q \implies \mathcal{A}_R \leq \mathcal{A}_Q.$$

定义 3.10. 设 $Q \in \mathcal{Q}$dl。我们通过以下方式定义分次集合 $\mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}}$

$$\mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}} = \mathcal{A}_Q \setminus \bigcup_{R<Q} \mathcal{A}_R \in \mathcal{S}\mathrm{et}_{gr}.$$

通过一个简单的容斥论证可得以下引理：引理 3.11.

Let $Q \in \mathcal{Q}dl$. Then

$$\mathcal{A}_Q = \coprod_{R \leq Q} \mathcal{A}_R^{dom}.$$

定义 3.12. 设 S 是一个分次的、逐层有限集。如果存在一个整值多项式 $P_S \in \mathbb{Q}[x]$ 使得

$$|S_n| = P_S(n) \text{ for } n \gg 0,$$

那么这个（必然唯一的）多项式称为 *Hilbert polynomial of S*。

例 3.13. 设 $\alpha \in \mathbb{N}$，并令 $T_\alpha \in \mathcal{Q}$dl 为具有 α 个元素的平凡拟群，如例 2.3 所示。那么 $\mathcal{A}_{T_\alpha}$ 自然同构于由集合 T_α生成的自由交换幺半群:

$$\mathcal{A}_{T_\alpha} \simeq \mathbb{N}\langle\, T_\alpha \mid \forall\, x, y \in T_\alpha\ ,\ \ x \cdot y = {}^x y \cdot x = y \cdot x \,\rangle \simeq \mathbb{N}[T_\alpha].$$

特别地,

$$\int_{\widehat{B_n}} c_{T_\alpha} d\mu = |\mathcal{A}_{T_\alpha, n}| = |\mathrm{Sym}_n(T_\alpha)| = \binom{n+\alpha-1}{\alpha-1}$$

对于所有的 $n \in \mathbb{N}$，其中 $\binom{x+\alpha-1}{\alpha-1} \in \mathbb{Q}[x]$ 是一个次数为 $\alpha - 1$ 的多项式.

3.2 带共轭的幺半群

定义 3.14. *monoid with conjugation* 是一个结合幺半群 A, 带有一个乘法同态

$$\varphi\colon A \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{M}\mathrm{on}}(A)$$

使得对所有 a、$b \in A$,

$$a \cdot b = \varphi_a(b) \cdot a$$

- 其中 $\varphi_a := \varphi(a) \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{M}\mathrm{on}}(A)$。

引理

3 15 *Let A be a monoid with conjugation. Then left and right 。. divisibility in A are equivalent.*

Proof. 设 $c \in A$, 并假设 a、$b \in A$ 满足 $a \cdot b = c$。那么

$$\varphi_a(b) \cdot a = a \cdot b = b \cdot \varphi_b^{-1}(a) = c.$$

因此, 若 a 从左整除 c, 则 a 从右整除 c; 若 b 从右整除 c, 则 b 从左整除 c。 □

定义 3.16. 设 A 是带共轭的幺半群。我们用 $a|b$ 表示 a 整除 b, 无论从左侧还是右侧整除——两者等价。

引理 3.17. *Let A be a monoid with conjugation. Let $a, b, c, d \in A$.Then*

$$a|b\ ,\ c|d \implies a \cdot c|b \cdot d.$$

Proof. 假设 $a|b$ 和 $c|d$。设 $x, y \in A$ 满足 $x \cdot a = b$ 和 $y \cdot c = d$。那么

$$b \cdot d = x \cdot a \cdot y \cdot c = x \cdot \varphi_a(y) \cdot a \cdot c \quad \implies \quad a \cdot c|b \cdot d\ .$$

□

命题 3.18. *Let A be a monoid with conjugation. If A is graded, then for all $a \in A$, φ_a is a graded automorphism of A.*

Proof. 设 A 是带共轭的分次幺半群, 并设 $a \in A$。那么对所有 $b \in A$,

$$|a| + |b| = |a \cdot b| = |\varphi_a(b) \cdot a| = |\varphi_a(b)| + |a|.$$

因此 $\varphi_a \in \mathrm{Aut}^{\mathcal{M}\mathrm{on}_{gr}}(A)$, 因为对所有 $b \in A$, $|\varphi_a(b)| = |b|$。 □

下面的命题是对 [KM05, 命题 4] 的重新表述:

命题 3.19. *Let $Q \in \mathcal{Q}dl^{fin}$. Then $\mathcal{A}_Q$ is monoid with conjugation with $\varphi\ \mathcal{A}_Q \to Aut_{\mathcal{M}on_{gr}}\ \mathcal{A}_Q$ extending the quandle action $\varphi\ Q \to, : (\ ) : 0$ $Aut_{\mathcal{S}et}\ Q$.*

Proof. 根据命题 3.6, $\mathcal{A}$: $\mathfrak{Q}\mathrm{dl} \to \mathfrak{Mon}^{gr}$ 是一个函子。因此，对所有$x \in Q$,

$$Q \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Aut}_{\mathfrak{Q}\mathrm{dl}}(Q) \xrightarrow{\mathcal{A}} \mathrm{Aut}_{\mathfrak{Mon}_{gr}}(\mathcal{A}_Q)$$

对所有 $x \in$, 得到 $\varphi_x \in \mathrm{Aut}^{\mathfrak{Mon}_{gr}}(\mathcal{A}_Q)$。要证明这可以扩展为从全体 $\mathcal{A}_Q$ 到乘法映射，只需证明对所有 $a \in \mathcal{A}_Q$,

$$(\varphi_x \circ \varphi_y)(a) = (\varphi_{x\,y} \circ \varphi_x)(a).$$

这对所有 $a \in Q \simeq \mathcal{A}_{Q,\,1}$ 均成立（见命题 2.8）。由于 $\mathcal{A}_Q$ 作为幺半群由 Q 生成，因此等式对所有 $a \in \mathcal{A}_Q$ 均成立。

□

命题 3.20。 *Let $Q \in \mathfrak{Q}dl^{fin}$. Then the subgroup of $Aut_{\mathfrak{Mon}}(\mathcal{A}_Q)$ generated by $\{\varphi_x \mid x \in Q\}$ is naturally isomorphic to $Inn(Q)$*。

对所有 $x \in Q$, $\varphi_x \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_Q)$ 都扩展为 $\varphi_x \in \mathrm{Aut}(Q)$, 因此存在一个限制同态

$$r \colon \langle \{\varphi_x \mid x \in \mathcal{A}_{Q,1} \simeq Q\} \rangle \to \mathrm{Inn}(Q).$$

映射 r 是满射，因为 $\mathrm{Inn}(Q)$ 由 $\{\varphi_x \mid x \in Q\}$ 生成。由于 $\mathcal{A}_Q$ 作为幺半群由 Q 生成，任意 $\psi \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{Mon}}(\mathcal{A}_Q)$ 都由其在 Q 上的作用决定 —— 因此 r 是单射。

□

命题 3.21. *Let $Q \in \mathfrak{Q}dl^{fin}$. Then there exists $0 < N \in \mathbb{N}$ s.t.*

$$\forall x \in Q\ ,\ \ \varphi_x^N = Id_{\mathcal{A}_Q}.$$

Proof. 由于 $Q \in \mathfrak{Q}\mathrm{dl}^{\mathrm{fin}}$, $\mathrm{Inn}(Q) \in \mathfrak{Grp}^{\mathrm{fin}}$。因此

$$\varphi_x^{|\mathrm{Inn}(Q)|} = \mathrm{Id}_Q \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{Q}\mathrm{dl}}(Q).$$

根据命题 3.20, 并取 $N = |\mathrm{Inn}(Q)|$,

$$\varphi_x^N = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}_Q} \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{Mon}}(\mathcal{A}_Q)$$

对所有 $x \in Q$。 □

定义 3.22. 设 $Q \in \mathfrak{Q}\mathrm{dl}^{\mathrm{fin}}$。用 $\mathrm{exp}_Q \in \mathbb{N}$ 表示满足以下条件的最小 $N > 0$： 对所有 $x \in Q$, $\varphi_x^N = \mathrm{Id}$。我们将由所有 $x \in Q$ 的 x^{exp_Q} 生成的 $\mathcal{A}_Q$ 的子幺半群记为 $J_Q \leq \mathcal{A}_Q$：

$$J_Q = \langle \{x^{\mathrm{exp}_Q} \mid x \in Q\} \rangle_{\mathfrak{Mon}} \leq \mathcal{A}_Q.$$

引理

3 23 *Let $Q \in \mathfrak{Q}dl^{fin}$. Then J_Q lies in the center of $\mathcal{A}_Q$: for all . . . , $x \in Q$ x^{exp_Q} commutes with all $\mathcal{A}_Q$.*

Proof. 由定义 3.22 可知, 对于所有 $x \in Q$、 $a \in \mathcal{A}_Q$,

$$\varphi_x^{\mathrm{exp}_Q} = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}_Q}.$$

因此

$$x^{\mathrm{exp}_Q} \cdot a = \varphi_{x^{\mathrm{exp}_Q}}(a) \cdot x^{\mathrm{exp}_Q} = \varphi_x^{\mathrm{exp}_Q}(a) \cdot x^{\mathrm{exp}_Q} = a \cdot x^{\mathrm{exp}_Q}.$$

由于 $J_Q \leq \mathcal{A}_Q$ 由这些 x^{exp_Q}生成，因此 J_Q 位于 $\mathcal{A}_Q$的中心。

□

命题 3.24。 *Let $Q \in \mathfrak{Q}dl^{fin}$ and let $R \leq Q$. Let $a,\ b \in \mathcal{A}_Q$. Then*

$$ab \in \mathcal{A}_R \implies a, b \in \mathcal{A}_R.$$

Proof. 根据引理 2.21， $R^n \subseteq Q^n$ 是 B_n-等变的；根据命题 3.7，

$$\mathcal{A}_{R,n} \simeq R^n / B_n.$$

由此可知，如果 $x \in Q$ 和 $c \in \mathcal{A}_R$ 满足 $x|c$，那么 $x \in R$。现在，假设a、$b \in \mathcal{A}_Q$ 满足 $ab \in \mathcal{A}_R$。将 $a = a_1 \cdots a_k$ 和 $b = b_1 \cdots b_m$ 分别记为a_i、 $b_j \in Q$。由于 $ab \in R$，根据上述推理， a_i、 b_j 必定属于 R。因此， a、 $b \in \mathcal{A}_R$。 □

注 3.25. 对于 $Q \in \mathfrak{Q}\mathbf{dl}^{\mathrm{fin}}$，子幺半群 $\mathcal{A}_R \leq \mathcal{A}_Q$ 恰好是满足命题 3.24 所述性质的子幺半群 $B \leq \mathcal{A}_Q$。因此，可以用带共轭的幺半群来描述支配性的概念。目前尚不清楚引理 4.2 是否在如此一般的情形下成立，因此这种方法的用途有限。

引理

3 26 *Let $Q \in \mathfrak{Q}dl^{fin}$ let $N \in \mathbb{N}$ and let $a \in \mathcal{A}_Q$ (resp. $a \in \mathcal{A}_Q^{dom}$) .. , s.t. $|a| > |Q| \cdot N$. Then there exist $x \in Q$ and $a' \in \mathcal{A}_Q$ (resp. $a' \in \mathcal{A}_Q^{dom}$) s.t.*

$$a = x^N \cdot a'.$$

Proof. 设 $n = |a|$，并将 $a = x_1 \cdots x_n$ 写作 $x_i \in Q$，其中对所有 i均成立。由于 $n > |Q| \cdot N$，存在 $x \in Q$，使得对至少 $N+1$ 个 i 值有 $x_i = x$。根据引理 3.15 和引理 3.17，可得 $x^{N+1}|a$。因此，设 $a = x^{N+1} \cdot b$= $b \in A$，并取 $a' := x \cdot b$，使得

$$a = x^N \cdot a'.$$

现在证明，若 $a \in \mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}}$，则 $a' \in \mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}}$。设 $R \leq Q$ 是一个满足 $a' = xb \in \mathcal{A}_R$ 的子拟群。我们证明 $R = Q$。由命题 3.24，

x ，$b \in \mathcal{A}_R$。因此

$$a = x^{N+1} b \in \mathcal{A}_R.$$

但假设 a $R = Q$ $a' \in$ 是支配的，因此 $\mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}}$ □

必然如此。于是 。

命题

3 27 *Let $Q \in \mathfrak{Q}dl^{fin}$. Then $\mathcal{A}_Q$ and $\mathcal{A}_Q^{dom}$ are finitely gen-* 。 。 *erated J_Q-sets.*

Proof. 首先， $\mathcal{A}_Q$ 显然是一个 J_Q-集合，因为

$$J_Q \cdot \mathcal{A}_Q \subseteq \mathcal{A}_Q \cdot \mathcal{A}_Q = \mathcal{A}_Q.$$

此外， $\mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}}$ 是一个 J_Q-集合：设 $a \in J_Q$，并设 $b \in \mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}}$。假设 $R \leq Q$ 满足 $ab \in \mathcal{A}_R$。那么，根据命题 3.24， $b \in \mathcal{A}_R$，这意味着 $R = Q$，因为 $b \in \mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}}$。由此可得 $ab \in \mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}}$。因此，$\mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}}$ 是一个 J_Q-集合。接下来，设

$$S = \{a \in \mathcal{A}_Q \mid |a| \leq |Q| \cdot \exp_Q\} \subseteq \mathcal{A}_Q.$$

这个集合是有限的，因为它是有限多个有限的 $\mathcal{A}_{Q,\ n}$ 的并集。现在我们证明 $\mathcal{A}_Q = J_Q \cdot S$。反设，令

$a \in \mathcal{A}_Q \setminus J_Q \cdot S$ 的次数最小，为 $|a| = n$。由于 $S \subseteq J_Q \cdot S$，我们必有 $a \notin S$，因此

$$n > |Q| \cdot \exp_Q .$$

由引理 3.26，令 $N = \exp_Q$，

$$a = x^{\exp_Q} \cdot a'$$

对某些 $x \in Q$、$a' \in \mathcal{A}_Q$。由于 $|a'| < |a|$ 且 $a \notin J_Q \cdot S$ 的次数最小，

$$a' \in J_Q \cdot S.$$

现在，由于 $x^{\exp_Q} \in J_Q$，我们有

$$a = x^{\exp_Q} \cdot a' \in J_Q \cdot J_Q \cdot S = J_Q \cdot S,$$

这与假设矛盾。因此 $\mathcal{A}_Q = J_Q \cdot S$，其中 $S \subseteq \mathcal{A}_Q$ 有限。接下来，令 $S' = S \cap \mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}}$。那么

$$J_Q \cdot S' \subseteq J_Q \cdot \mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}} \subseteq \mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}}.$$

此处证明等式与之前几乎完全相同：在假设 $\mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}} \setminus J_Q \cdot S' \neq \emptyset$成立的前提下，取次数最小的 $a \in \mathcal{A}_Q \setminus J_Q \cdot S'$。由引理 3.26，我们可写为

$$a = x^{\exp_Q} \cdot a'$$

对某些 $x \in Q$ 和 $a' \in \mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}}$。如前所述，我们再次会得到

$$a = x^{\exp_Q} \cdot a' \in J_Q \cdot S',$$

与假设相矛盾。因此 $\mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}} = J_Q \cdot S'$，且 S' 有限。 □

定理 **3 28** *Let $Q \in \mathcal{Q}dl^{fin}$ and let $S \in \mathcal{M}od^{gr}_{\mathcal{A}_Q}$ be finitely-generated. . . Then there exists an integer-valued polynomial $P_S\ x\ \in \mathbb{Q}[x]$ s.t. for all* 0 $n \gg 0$,

$$|S_n| = P_S(n).$$

备注 3.29. 我们继续论证所用到的 $\mathcal{A}_Q$ 的性质是：$\mathcal{A}_Q$ 是一个带共轭的分次幺半群 A，并且作为幺半群由其有限多个 1 次元素生成。提炼出这些特征所获得的启发有限，我们认为不足以证明引入一个新对象及其术语是合理的。

3.3 从幺半群到代数

本节中我们对 $\mathbb{C}$ 的选择完全是任意的——任何域都可以。

定义 3.30. 一个 *good* $\mathbb{C}$-代数由一个分次的左诺特 $\mathbb{C}$-代数 R 以及其一个有限生成元集 $S \subseteq R_1$ 组成，这些生成元的次数为 1，并满足

$$\forall s \in S\ ,\ \ sR = Rs.$$

命题 **3 31** *Let $Q \in \mathcal{Q}dl^{fin}$. Then the algebra $\mathbb{C}[\mathcal{A}_Q]$ is left Noethe-。. rian.*

Proof. 代数 $\mathbb{C}[J_Q]$ $\{x^{\exp_A} \mid x \in Q\}$ 3 23, $\mathbb{C}[J_Q]$ 是有限生成的（由集合 生成），并且根据引理 。它是交换的。因此 是诺特的。此外，由命题 3.27 可知， $\mathbb{C}[\mathcal{A}_Q]$ 是有限生成的左 $\mathbb{C}[J_Q]$-模。综合两者， $\mathbb{C}[\mathcal{A}_Q]$ 本身是左诺特的。 □

命题 3.32. *Let $Q \in \mathcal{Q}dl^{fin}$. Then $(\mathbb{C}[\mathcal{A}_Q], Q)$ is a good $\mathbb{C}$-algebra.*

Proof. $\mathcal{A}_Q$ 上的分次决定了 $\mathbb{C}[\mathcal{A}_Q]$上的分次。 $\mathbb{C}[\mathcal{A}_Q]$ 由有限集合 $Q \subseteq \mathbb{C}[\mathcal{A}_Q]_1$ 中的 1 次单项式作为 $\mathbb{C}$-代数生成。对于所有 $x \in Q$，自同构 $\varphi_x, \varphi_x^{-1}$ 可 $\mathbb{C}$-线性地扩张为 $\mathrm{Aut}^{\mathrm{Alg}_{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}[\mathcal{A}_Q])$ 中的自同构，也记作 $\varphi_x, \varphi_x^{-1}$。等式

$$x \cdot r = \varphi_x(r) \cdot x \quad , \qquad r \cdot x = x \cdot \varphi_x^{-1}(r) \tag{1}$$

它们关于 r 都是 $\mathbb{C}$-线性的，并且对所有 $r \in \mathcal{A}_Q \subseteq \mathbb{C}[\mathcal{A}_Q]$ 都成立。因此，(1) 对所有 $x \in Q$ 和 $r \in \mathbb{C}[\mathcal{A}_Q]$ 都成立。综合起来可得

$$x\mathbb{C}[\mathcal{A}_Q] = \mathbb{C}[\mathcal{A}_Q]x$$

对所有 $x \in Q$ 都成立。最后，由命题 3.31 $\mathbb{C}[\mathcal{A}_Q]$ 可知，$\mathbb{C}[\mathcal{A}_Q]$ 是左诺特的。因此 $(\mathbb{C}[\mathcal{A}_Q], Q)$ 是良好的。 □

命题 3.33. *Let $Q \in \mathcal{Q}dl^{fin}$. Then $\mathbb{C}[\mathcal{A}_Q^{dom}]$ is a finitely-generated, graded left $\mathbb{C}[\mathcal{A}_Q]$-module.*

Proof. 根据命题 3.27， $\mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}}$是一个有限生成的 J_Q-集合，因此是一个有限生成的分次 $\mathcal{A}_Q$-集合。因此 $\mathbb{C}[\mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}}]$ 是一个有限生成的分次左 $\mathbb{C}[\mathcal{A}_Q]$-模。 □

引理 **3 34** *Let R $S \subseteq R_1$ be a good $\mathbb{C}$-algebra s.t. $S \neq \emptyset$. Fix some $s_0 \in S$. Let $R' = R/Rs_0$. For every $r \in R$ denote $\overline{r} = r + Rs_0 \in R'$. Let $S' = \{\overline{s} \in R' \mid s_0 \neq s \in S\}$. Then R' S' is a good $\mathbb{C}$-algebra with $|S'| < |S|$.*

Proof. 由于 (R, S) 是良好的，且 $s_0 \in S \subseteq R_1$，集合 Rs_0 是一个双边齐次理想。因此， $R' := R/s_0R$ 是一个分次的 $\mathbb{C}$-代数，其分次由 R 诱导。集合 $\overline{S} = \{\overline{s} \mid s \in S\} \subseteq R'_1$ 生成 R'，并且还包含 $\overline{s_0} = 0_{R'}$。因此，集合

$$S' = \{\overline{s} \mid s_0 \neq s \in S\} \subseteq R'_1$$

也生成 R'。此外，对于任意 $s' = \overline{s} \in S'$，

$$s'R' = \overline{s}\overline{R} = \overline{sR} = \overline{Rs} = \overline{Rs} = R's'.$$

最后， R' 作为 R 的商是左诺特的。由此得出 (R', S') 是良好的。注意，$|S'| \leq |S \setminus \{s_0\}| = |S| - 1$。 □

下面的引理相当标准，因此我们省略证明。

引理 3.35。 *Let $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ be a function. Then f eventually coincides with a polynomoial of degree $\leq d$ in $\mathbb{Q}[x]$ iff $\delta(f)(n) = f(n) - f(n-1)$ eventually coincides with a polynomial of degree $\leq d-1$ in $\mathbb{Q}[x]$.*

命题 **3 36** *Let R $S \subseteq R_1$ be a good $\mathbb{C}$-algebra. Let M be。.(,)() 度 a finitely-generated graded left R-module. Then there exists an integer-valued polynomial P_M x $\in \mathbb{Q}[x]$ of degree $P_M < |S|$ s.t.*

$$\dim_{\mathbb{C}} M_n = P_M(n) \quad for \quad n \gg 0.$$

Proof. 我们用 $H_M(n) = \dim_{\mathbb{C}} M_n$ 表示。证明通过对 $|S|$ 作归纳法得到:

若 $|S| = 0$, 则 $R = \mathbb{C}$, 且 M 是有限生成的分次 $\mathbb{C}$-向量空间。因此, 对于 $n \gg 0$, $M_n = 0$, 并且 H_M 最终与零多项式一致, 其次数为 < 0。

若 $|S| > 0$, 取 $s_0 \in S$ 为任意元素。令 $R' := R/s_0R$, 并令 S' : $=$ $\{\overline{s} \in R' \mid s_0 \neq s \in S\}$ 3 34, R' S' 。由引理.(,)是良好的。考虑正合列

$$0 \to K \to M[-1] \xrightarrow{s_0 \cdot} M \to M/s_0M \to 0. \tag{2}$$

中间映射是分次 $\mathbb{C}$-向量空间之间的分次态射, 因此核 K 和余核 M/s_0M 都是分次 $\mathbb{C}$-向量空间。此外, 它们具有自然的分次左 R-模结构: 令 $r \in R$, 并令 $k \in K$。由于 $s_0R = Rs_0$, 取 $r_1 \in R$ 使得 $s_0r = r_1s_0$。于是

$$s_0 \cdot k = 0 \implies s_0 \cdot rk = r_1 \cdot s_0k = r_1 \cdot 0 = 0,$$

因此 $rk \in K$。所以 K 是左 R-模。令 $r \in R$, 并令 $s_0m \in s_0M$。由于 $s_0R = Rs_0$, 取满足 $rs_0 = s_0r_2$的 $r_2 \in R$ 。于是

$$r \cdot s_0m = s_0 \cdot r_2m \in s_0M.$$

因此 s_0M 是左 R-模, 商 M/s_0M也是如此。这些左R-模结构与 K 和 M/s_0M上的分次相容。左 R-模 M 是诺特的（R 是左诺特的, 且 M 是有限生成的）, 因此 M 的所有子商都是有限生成的。特别地, K 和 M/s_0M 都是有限生成的。此外, K 和M/s_0M 都被 $s_0 \in R$湮灭, 因此它们是有限生成的分次$R' = R/Rs_0$-模。

由于 (R', S') 是良好的且 $|S'| < |S|$, 由归纳法, 对于 K 和 M/s_0M, 存在取整数值的 P_K $P_{M/s_0M} \in \mathbb{Q}[x]$ P_K $P_{M/s_0M} \leq$, 满足 deg 、deg 。 $|S'| - 1$

$$\dim_{\mathbb{C}} K_n = P_K(n) \ , \ \dim_{\mathbb{C}}(M/s_0M)_n = P_{M/s_0M}(n) \quad \forall\, n \gg 0.$$

此外, 由（2）中的逐层正合性可知, 对于每个 n , 等式

$$\dim_{\mathbb{C}} M_n - \dim_{\mathbb{C}} M_{n-1} = \dim_{\mathbb{C}}(M/s_0M)_n - \dim_{\mathbb{C}} K_n.$$

因此, 对于所有 $n \gg 0$,

$$\dim_{\mathbb{C}} M_n - \dim_{\mathbb{C}} M_{n-1} = P_{M/s_0M}(n) - P_K(n) = (P_{M/s_0M} - P_K)(n),$$

其中

$$\deg(P_{M/s_0M} - P_K) \leq |S'| - 1.$$

根据引理 3.35，存在某个次数为 $\deg P_M \leq |S'| < |S|$ 的整值多项式 $P_M \in \mathbb{Q}[x]$，使得对所有 $n \gg 0$,

$$\dim_{\mathbb{C}} M_n = P_M(n).$$

因此，根据归纳法，对于所有良好的 (R,S) 以及所有分次的有限生成左 R M $P_M \in \mathbb{Q}[x]$ $P_M <$ -模，都存在一个整值多 $|S|$ 项式，其次数为 deg，使得

$$\dim_{\mathbb{C}} M_n = P_M(n) \text{ for } n \gg 0.$$

□

Proof. (定理 3.28)
设 $Q \in \mathfrak{Q}\mathbf{dl}^{\mathrm{fin}}$，并设 S 是一个有限生成的分次 $\mathcal{A}_Q$-集合。根据命题 3.32，$(\mathbb{C}[\mathcal{A}_Q], Q)$ 是一个良好的 $\mathbb{C}$-代数。由于 S 是一个有限生成的分次 $\mathcal{A}_Q$-集合，$\mathbb{C}[S]$ 是一个有限生成的分次 $\mathbb{C}[\mathcal{A}_Q]$-模。根据命题 3.36，存在一个整值多项式 $P_S \in \mathbb{Q}[x]$，使得

$$|S_n| = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[S]_n = P_S(n)$$

对于所有 $n \gg 0$。 □

现在我们可以证明第一个主要结果了。

Proof. (定理 2.26) 设 $Q \in \mathfrak{Q}\mathbf{dl}^{\mathrm{fin}}$。根据命题 2.29 和命题 3.7,

$$\int_{\widehat{B_n}} c_Q d\mu = |Q^n/B_n| = |\mathcal{A}_{Q,n}| \ , \quad \int_{\widehat{B_n}} c_Q^{\mathrm{dom}} d\mu = |Q^{n,\mathrm{dom}}/B_n| = |\mathcal{A}_{Q,n}^{\mathrm{dom}}|.$$

根据定理 3.28，存在整值多项式 $P_{\mathcal{A}_Q}, P_{\mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}}} \in \mathbb{Q}[x]$，使得

$$\int_{\widehat{B_n}} c_Q d\mu = P_{\mathcal{A}_Q}(n) \ , \quad \int_{\widehat{B_n}} c_Q^{\mathrm{dom}} d\mu = P_{\mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}}}(n)$$

对所有 $n \gg 0$ □

定义 3.37。设 $Q \in \mathfrak{Q}\mathbf{dl}^{\mathrm{fin}}$。我们将定理 2.26 中的多项式记为

$$P_Q := P_{\mathcal{A}_Q} \in \mathbb{Q}[x] \ , \quad P_Q^{\mathrm{dom}} := P_{\mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}}} \in \mathbb{Q}[x].$$

多项式 P_Q 是 Q的 *Hilbert polynomial* 。

注 3.38。 [EVW15] 中的前提是 (G,c)，其中 G 是一个有限群，$c \subseteq G$ 是满足某种不分裂原理的共轭类（[EVW15，定义 3.1]）。这个带有共轭作用的 c 是一个拟群。Hurwitz 空间于是由同伦商给出

$$\mathrm{Hur}_{G,n} \simeq G^n /\!\!/ B_n \ , \ \mathrm{Hur}_{G,n}^c \simeq c^n /\!\!/ B_n.$$

因此，EVW15 中关于 $k = \mathbb{C}$ 的第 3] 节里的环 R in [

$$R = \bigoplus_n H_0(\mathrm{Hur}_{G,n}^c, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_n \mathbb{C}[\pi_0(\mathrm{Hur}_{G,n}^c)] \simeq \bigoplus_n \mathbb{C}[c^n/B_n] \simeq \mathbb{C}[\mathcal{A}_c],$$

而且，EVW15 的定理 6.1] 表明，对于所有 $i \in \mathbb{N}$，分次左 R-模 $M_i := \bigoplus H_i(\mathrm{Hur}^c_{G,n}, \mathbb{C})$ 都是有限生成的。命题 3.36$_n$ 随即表明，对于所有 $i \in \mathbb{N}$，EVW15 的定理 6.1] 中的 [的 $\dim_{\mathbb{C}} H_i(\mathrm{Hur}^c_{G,n}, \mathbb{C})$ 的稳定范围实际上是常数，只要 n 足够大。定理 4.6 也以迂回的方式表明，$\dim_c = 1$ 这一事实。我们对域 $k = \mathbb{C}$ 的选择是任意的，因此这一结论对任何满足 $|\mathrm{Inn}(Q)| \in k^\times$ 的 k 都成立。

4 计算 P_Q 的次数和 $P_Q^{\mathbf{dom}}$ 的次数。

$Q \in \mathcal{Q}\mathbf{dl}^{\mathrm{fin}}$ 的希尔伯特多项式 P_Q 的次数可以用 Q 的所有子拟群来表示。

命题 4.1. *Let $Q \in \mathcal{Q}dl^{fin}$. Then*

$$P_Q = \sum_{R \leq Q} P_R^{dom}.$$

Proof. 根据引理 3.11，我们有 $\mathcal{A}_Q$ 的如下分次划分：

$$\mathcal{A}_Q = \coprod_{R \leq Q} \mathcal{A}_R^{\mathrm{dom}}.$$

因此，对所有 $n \in \mathbb{N}$，

$$|\mathcal{A}_{Q,n}| = \sum_{R \leq Q} |\mathcal{A}_{R,n}^{\mathrm{dom}}|. \tag{3}$$

根据定义 3.37，对所有 $R \leq Q$，

$$|\mathcal{A}_{R,n}^{\mathrm{dom}}| = P_R^{\mathrm{dom}}(n)$$

对于 $n \gg 0$，阈值取决于 R。(3) 中的和遍历有限多个子 quandles $R \leq Q$，因此存在一个共同的阈值，并且

$$P_Q(n) = |\mathcal{A}_{Q,n}| = \sum_{R \leq Q} |\mathcal{A}_{R,n}^{\mathrm{dom}}| = \sum_{R \leq Q} P_R^{\mathrm{dom}}(n)$$

对于 $n \gg 0$。由于 P_Q、$\sum P_R^{\mathrm{dom}}$ 在输入 $n \gg 0$ 时重合，它们必定 $_{R \leq Q}$相等：

$$P_Q = \sum_{R \leq Q} P_R^{\mathrm{dom}} \in \mathbb{Q}[x].$$

□

我们接下来计算 $\deg P_Q^{\mathrm{dom}}$。

引理 4.2. *Let $Q \in \mathcal{Q}dl^{fin}$ and let $a \in \mathcal{A}_Q^{dom}$. Then*

$$\langle \{\varphi_b \mid b \in \mathcal{A}_Q,\ b|a\} \rangle_{\mathcal{G}rp} = Inn(Q).$$

Proof. 记 $G_a := \langle \{\varphi_b \mid b \in \mathcal{A}_Q,\ b|a\} \rangle \leq \mathrm{Inn}(Q)$，并令 $S \subseteq Q$表示

$$S_a = \{x \in Q \mid \varphi_x \in G_a\}.$$

事实上， $S \leq Q$ 是一个子拟群：设 $x, y \in S_a$。那么根据命题 2.8

$$\varphi_x, \varphi_y \in G_a \implies \varphi_{{}^x y} = \varphi_x \varphi_y \varphi_x^{-1} \in G_a \implies {}^x y \in S_a.$$

因此， $S_a \leq Q$ 是一个子拟群。将 $a = x_1 \dots x_n$ 记作 $x_i \in \mathcal{A}_{Q,\ 1} \simeq Q$。对于所有 i, $\varphi_{x_i} \in G_a$，因此 $x_i \in S_a$，于是

$$a = x_1 \cdots x_n \in \mathcal{A}_{S_a}.$$

但是 $a \in \mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}}$，由此可得 $S_a = Q$。因此，对于所有 $x \in Q$， $\varphi_x \in G_a$。于是

$$G_a \leq \langle \{\varphi_x \mid x \in Q\} \rangle_{\mathcal{G}\mathrm{rp}} = \mathrm{Inn}(Q),$$

and

$$\langle \{\varphi_b \mid b \in \mathcal{A}_Q,\ b|a\} \rangle = \mathrm{Inn}(Q).$$

□

命题 4.3。 *Let $Q \in \mathcal{Q}dl^{fin}$ and let $a \in \mathcal{A}_Q^{dom}$. Then for all $x \in Q$ and all $\psi \in Inn(Q)$,*

$$x^{\exp_Q} \cdot a = \psi(x)^{\exp_Q} \cdot a.$$

Proof. 设 $b \in \mathcal{A}_Q$ 满足条件 $b|a$，并将 $a = b \cdot c$ 记作某个 $c \in \mathcal{A}_Q$。根据引理 3.23，对于所有 $x \in Q$,

$$x^{\exp_Q} \cdot a = x^{\exp_Q} \cdot b \cdot c = b \cdot x^{\exp_Q} \cdot c = \varphi_b(x^{\exp_Q}) \cdot b \cdot c = \varphi_b(x)^{\exp_Q} \cdot a.$$

根据引理 4.2，$\mathrm{Inn}(Q)$作为一个群由所有 $b|a$ 属于 $\mathcal{A}_Q$ 的 φ_b 生成。因此

$$x^{\exp_Q} \cdot a = \psi(x)^{\exp_Q} \cdot a$$

对于所有 $x \in Q$ 和所有 $\psi \in \mathrm{Inn}(Q)$。 □

引理

4 4 *Let A be a commutative graded monoid freely-generated by .. , k elements of degree N. Let C be a finitely-generated graded A-set that admits a Hilbert polynomial $P_C \in \mathbb{Q}[x]$. Assume that there exists $c \in C$ s.t. $|c| \in N\mathbb{Z}$ and $A \xrightarrow{\cdot c} C$ is injective. Then*

$$\deg P_C = k - 1.$$

Proof. 设 $S \subseteq C$ 是一个有限生成元集。定义分次幺半群A' 和分次 A'-集合 C' 如下：

$$A'_n = A_{nN} \quad , \qquad C'_n = C_{nN}.$$

那么对于所有 $n \gg 0$,

$$|C'_n| = |C_{nN}| = P_C(nN).$$

因此， C' 存在希尔伯特多项式 $P_{C'}$，满足

$$\deg P_C = \deg P_{C'}.$$

$\mathbb{C}$-代数 $\mathbb{C}[A']$ 是分次阿贝尔代数，由 k 个次数为 1 的元素自由生成。考虑分次 $\mathbb{C}[A']$-模 $\mathbb{C}[C']$。一方面， $\mathbb{C}[C']$ 是有限生成的，因此 $\deg P_{C'} \leq k-1$。另一方面， $\mathbb{C}[C']$ 包含一个自由子模，即 $c\mathbb{C}[A']$，由此 $\deg P_{C'} \geq k-1$。综上，

$$\deg P_C = \deg P_{C'} = k-1.$$

□

命题 4.5. *Let $Q \in \mathcal{Q}dl^{fin}$. Then*

$$\deg P_Q^{dom} = |\pi_0(Q)| - 1.$$

Proof. 考虑商映射

$$p\colon Q \to \pi_0(Q) = Q/\mathrm{Inn}(Q).$$

令 $\mathfrak{m} \subseteq Q$ 为 $\pi_0(Q)$ 中的一组代表元，也称为截面

$$\mathfrak{m}\colon \pi_0(Q) \to Q$$

在 $\mathcal{S}$et 中，上述商的代表元。对于每个 $x \in Q$ ，令 $\psi_{\mathfrak{m},x} \in \mathrm{Inn}(Q)$，使得

$$\psi_{\mathfrak{m},x}(x) \in \mathfrak{m}.$$

我们通过以下方式定义子幺半群 $J_\mathfrak{m} \leq \mathcal{A}_Q$

$$J_\mathfrak{m} := \langle \{x^{\exp_Q} \mid x \in \mathfrak{m}\} \rangle_{\mathrm{Mon}} \leq J_Q \leq \mathcal{A}_Q.$$

幺半群 $J_\mathfrak{m}$ 是自由交换的：根据引理 3.23，对于所有 $x \in Q$， $x^{\exp_Q}$ 与 $\mathcal{A}_Q$ 复合。考虑复合映射

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{N}[\pi_0(Q)] & \longrightarrow & J_\mathfrak{m} & \xhookrightarrow{\subseteq} & \mathcal{A}_Q \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{N}[\pi_0(Q)] \\ z & \longmapsto & \mathfrak{m}(z)^{\exp_Q} & & x \longmapsto p(x) \end{array} \tag{4}$$

映射 $\mathbb{N}\langle Q \rangle \to \mathbb{N}[\pi_0(Q)]$ 在 $\mathcal{A}_Q$ 上是良定义的，因为对所有 x、 $y \in Q$,

$${}^x y \cdot x = \varphi_x(y) \cdot x = y \cdot x = x \cdot y \in \mathbb{N}[Q/\mathrm{Inn}(Q)] = \mathbb{N}[\pi_0(Q)].$$

由于 $\mathbb{N}[\pi_0(Q)]$是自由交换的，(4) 中的复合映射是单射：

$$z \longmapsto \mathfrak{m}(z)^{\exp_Q} \longmapsto (p \circ \mathfrak{m})(z)^{\exp_Q} = z^{\exp_Q},$$

因此， $J_\mathfrak{m}$ 是由 $\{x^{\exp_Q} \mid x \in \mathfrak{m}\}$自由生成的交换幺半群。根据命题 3.27，存在某个有限的 $S \subseteq \mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}}$，使得

$$A_Q^{\mathrm{dom}} = J_Q \cdot S.$$

令 $a \in \mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}}$为任意元素。记

$$a = \prod_{x \in Q} x^{\exp_Q n_x} \cdot s.$$

由于 $x^{\exp_Q}$ 彼此交换且 s 是支配的，由命题 4.3 可知

$$a = \prod_{x \in Q} x^{\exp_Q n_x} \cdot s = \prod_{x \in Q} \psi_{\mathfrak{m},x}(x)^{\exp_Q n_x} \cdot s \in J_\mathfrak{m} \cdot S.$$

因此， $\mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}}$ 是一个有限生成的 $J_{\mathfrak{m}}$-集合。接下来，考虑

$$c := \prod_{x \in Q} x^{\exp_Q} \in \mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}} \quad , \quad |c| = |Q| \exp_Q .$$

映射

$$J_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\cdot c} \mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}}$$

是单射。此外， $J_{\mathfrak{m}}$ 是一个分次交换幺半群，由 $|\mathfrak{m}| = \pi_0(Q)$ 个次数为 $\exp_Q$ 的元素自由生成。因此，根据引理 4.4,

$$\deg P_{\mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}}} = \deg P_Q^{\mathrm{dom}} = |\pi_0(Q)| - 1$$

□

定理 4.6。 *Let $Q \in \mathfrak{Q}dl^{fin}$. Then*

$$\deg P_Q = \dim_Q -1.$$

Proof. 根据命题 4.1,

$$P_Q = \sum_{R \leq Q} P_R^{\mathrm{dom}}.$$

对所有 $R \leq Q$ ，除非 $P_R = 0$， P_R^{dom}中的首项系数均为正。因此

$$\deg P_Q = \deg \sum_{R \leq Q} P_R^{\mathrm{dom}} = \max_{R \leq Q} \left(\deg P_R^{\mathrm{dom}} \right).$$

根据命题 4.5，对所有 $R \leq Q$,

$$\deg P_R^{\mathrm{dom}} = |\pi_0(R)| - 1.$$

因此

$$\deg P_Q = \max_{R \leq Q} \left(\deg P_R^{\mathrm{dom}} \right) = \max_{R \leq Q} (|\pi_0(R)| - 1) = \dim_Q -1.$$

□

5 $\mathfrak{Q}$dl 中的积与精细统计量

定义 5.1. 设 $Q, R \in \mathfrak{Q}\mathsf{dl}$。集合 $Q \times R$ 具有自然的拟群结构

$$^{(x,y)}(x', y') = ({}^{x}x', {}^{y}y').$$

命题

5 2 *The quandle product of definition 5.1 is the categorical . . direct product in $\mathfrak{Q}dl$.*

Proof. 设 $Q, R, S \in \mathfrak{Q}\mathsf{dl}$。那么

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Q}\mathrm{dl}}(S, Q \times R \,{}_{(5.1)}) = \{f \colon S \to Q \times R \mid f({}^{x}y) = {}^{f(x)}f(y)\} \simeq$$

$$\simeq \{(f_1 \colon S \to Q, f_2 \colon S \to R) \mid f_1({}^{x}y) = {}^{f_1(x)}f_1(y) \quad f_2({}^{x}y) = {}^{f_2(x)}f_2(y)\} =$$

$$= \mathsf{Hom}_{\mathfrak{Q}\mathrm{dl}}(S, Q) \times \mathsf{Hom}_{\mathfrak{Q}\mathrm{dl}}(S, R).$$

□

命题 5.3. *Let f: $R \to Q$ be a morphism in $\mathcal{Q}dl$. Let $z \in Q$. Then*

$$f^{-1}(z) \leq R.$$

Proof. 设 $x, y \in f^{-1}(z)$。则 $f(x) = f(y) = z$，并且

$$f({}^{x}y) = {}^{f(x)}f(y) = {}^{z}z = z \implies {}^{x}y \in f^{-1}(z).$$

Thus

$$f^{-1}(z) \leq R.$$

□

命题 5.4. *Let f: $R \to Q$ be a surjective morphism in $\mathcal{Q}dl$. Then f induces a surjective group homomorphism*

$$f_*\colon Inn(R) \twoheadrightarrow Inn(Q)$$

s.t. for all $\psi \in Inn(R)$,

$$f \circ \psi = f_*(\psi) \circ f.$$

Proof. 对于 $Q \in \mathcal{Q}\mathrm{dl}$，可以将映射 φ: $Q \to \mathrm{Inn}(Q)$ 分解为经过 F_Q，即由 Q 生成的自由群，从而将其自身上的 Q-作用扩展为 Q 上的 F_Q-作用：

$$Q \longrightarrow F_Q \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Inn}(Q)\ .$$

现在设 f: $R \to Q$ 是一个满射夸尔德态射。考虑图表

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & F_R \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & \mathrm{Inn}(R) \arrow[d, dashed] \\
Q \arrow[r] & F_Q \arrow[r, two heads, "\varphi"'] & \mathrm{Inn}(Q)
\end{tikzcd}$$

映射 $R \xrightarrow{f} Q$ 扩展为自由群之间的同态 $F_R \to F_Q$ f $*$ $x\ y \in R$ - 也记作 -，使上面的交换图 ( ) 闭合。对于所有，我们有

$$(f \circ \varphi_x)(y) = f({}^{x}y) = {}^{f(x)}f(y) = (\varphi_{f(x)} \circ f)(y).$$

因此，对于所有 $x \in R$，函数 $R \to Q$ 相等。

$$\forall x \in R\ ,\ \ f \circ \varphi_x = \varphi_{f(x)} \circ f. \tag{5}$$

若 w、$w' \in F_R$ 是字，且满足

$$f \circ \varphi_w = \varphi_{f(w)} \circ f\ ,\ \ f \circ \varphi_{w'} = \varphi_{f(w')} \circ f,$$

then

$$f \circ \varphi_{ww'} = f \circ \varphi_w \circ \varphi_{w'} = \varphi_{f(w)} \circ f \circ \varphi_{w'} = \varphi_{f(w)} \circ \varphi_{f(w')} \circ f =$$

$$= \varphi_{f(w)f(w')} \circ f = \varphi_{f(ww')} \circ f$$

and

$$\varphi_{f(w^{-1})} \circ f = \varphi_{f(w)^{-1}} \circ f \circ \varphi_w \circ (\varphi_w)^{-1} = (\varphi_{f(w)})^{-1} \circ \varphi_{f(w)} \circ f \circ \varphi_{w^{-1}} = f \circ \varphi_{w^{-1}}.$$

因此，等式 (5) 对所有 F_R 都成立：

$$\forall w \in F_R\ ,\ \ f \circ \varphi_w = \varphi_{f(w)} \circ f. \tag{6}$$

假设 $w \in F_R$ 使得 $\varphi_w = \mathrm{Id}_R \in \mathrm{Inn}(R)$。那么对所有 $y \in R$,

$$\varphi_{f(w)}(f(y)) = (\varphi_{f(w)} \circ f)(y) = (f \circ \varphi_w)(y) = f(y).$$

回顾一下，f 是满射，因此$\varphi_{f(w)}$ 在 $f(R) = Q$上作用平凡。换言之，f 将 $\ker(F_R \to \mathrm{Inn}(R))$ 映至 $\ker(F_Q \to \mathrm{Inn}(Q))$，故存在一个群同态

$$f_*\colon \mathrm{Inn}(R) \to \mathrm{Inn}(Q)$$

从而补全了上面的交换图 (∗∗)。由于映射 $F_R \xrightarrow{f} F_Q \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Inn}(Q)$ 都是满射，f_*也如此。此外，F_R 在 R 上的作用（分别地，F_Q在 Q上的作用）可经由 $F_R \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Inn}(R)$（分别地，$F_Q \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Inn}(Q)$）分解，因此，(6) 中的等式下降到 $\mathrm{Inn}(R)$:

$$\forall \psi \in \mathrm{Inn}(R)\ ,\ \ f \circ \psi = f_*(\psi) \circ f.$$

□

推论 5.5。 *Let $f\colon\ R \to Q$ be a surjective morphism of quandles, and let $x\ y \in Q$ be such that $[x]_\sim = [y]_\sim \in \pi_0\ Q$. Then there exists ,* () () *$\psi \in Inn\ R$ s.t.*

$$\psi\colon f^{-1}(x) \xrightarrow{\sim} f^{-1}(y)$$

is an isomorphism of quandles.

Proof. 由于 $[x]_\sim = [y]_\sim \in \pi_0(Q)$，令 $\psi_0 \in \mathrm{Inn}(Q)$ 满足

$$\psi_0(x) = y.$$

由于 f 是满射，根据命题 5.4，我们可以将 ψ_0 提升为某个 $\psi \in \mathrm{Inn}(R)$，使得

$$f \circ \psi = \psi_0 \circ f,$$

这也意味着

$$\psi_0^{-1} \circ f = f \circ \psi^{-1}.$$

该 ψ 将 $f^{-1}(x)$ 双射到 $f^{-1}(y)$：令 $z \in f^{-1}(x)$。那么

$$f(\psi(z)) = \psi_0(f(z)) = \psi_0(x) = y \quad \Longrightarrow \quad \psi(z) \in f^{-1}(y).$$

对于 $z \in f^{-1}(y)$,

$$f(\psi^{-1}(z)) = \psi_0^{-1}(f(z)) = \psi_0^{-1}(y) = x \quad \Longrightarrow \quad \psi^{-1}(z) \in f^{-1}(x).$$

根据命题 5.3，$f^{-1}(x)$ $f^{-1}(y)$ 是 R 的子拟群，并且由于 $\psi \in \mathrm{Inn}(R)$ 是 Q 的 quandle 自同构，它诱导出一个 quandle 同构

$$\psi\colon f^{-1}(x) \xrightarrow{\sim} f^{-1}(y).$$

□

引理 5.6。 *Let f: $R \to Q$ be a surjective morphism of finite quandles.Then*

$$|\pi_0(R)| \leq \sum_{[x]\in\pi_0(Q)} |\pi_0(f^{-1}(x))|.$$

Proof. 令 $\mathfrak{m} \subseteq Q$ 为 $\pi_0(Q)$ 的一组代表元。对于每个 $x \in Q$，令 $\widetilde{\psi}_x \in \mathrm{Inn}(Q)$ 满足

$$\mathfrak{m}_x := \widetilde{\psi}_x(x) \in \mathfrak{m}.$$

由命题 5.4，我们可以将这些 $\widetilde{\psi}_x \in \mathrm{Inn}(Q)$ 提升为某个 $\psi_x \in \mathrm{Inn}(R)$，使得

$$\psi_x \colon f^{-1}(x) \xrightarrow{\sim} f^{-1}(\mathfrak{m}_x).$$

因此，映射

$$\coprod_{[x]\in\pi_0(Q)} f^{-1}(x) \to \mathrm{Inn}(Q)$$

是满射。此外，对于每个 $[x] \in \pi_0(Q)$，复合映射

$$f^{-1}(x) \to R \to Q \to \pi_0(Q)$$

经由 $f^{-1}(x) \to \pi_0(f^{-1}(x))$ 分解。因此，映射

$$\coprod_{[x]\in\pi_0(Q)} \pi_0(f^{-1}(x)) \longrightarrow \pi_0(Q)$$

是满射。因此，所需的不等式成立。 □

命题 5.7. *Let $Q, R \in \mathcal{Q}dl^{fin}$. Then there is a natural bijection*

$$\pi_0(Q \times R) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Q) \times \pi_0(R).$$

Proof. 若 Q 或 R 为空，则

$$\pi_0(Q \times R) = \pi_0(Q) \times \pi_0(R) = \emptyset$$

且该陈述成立。现在假设 $Q, R \neq \emptyset$。那么两个投影

$$Q \times R \to Q\ ,\quad Q \times R \to R$$

都是满射。由命题 5.4 可得诱导的群同态

$$\mathrm{Inn}(Q \times R) \to \mathrm{Inn}(Q)\ ,\quad \mathrm{Inn}(Q \times R) \to \mathrm{Inn}(R),$$

以及一个良定义的自然映射

$$\pi_0(Q\times R) = (Q\times R)/\mathrm{Inn}(Q\times R) \to (Q\times R)/\mathrm{Inn}(Q)\times\mathrm{Inn}(R) = \underset{Q\times R}{\pi_0(Q)\times\pi_0(R)}.$$

该映射是满射，因为它是通过对 $Q \times R$ $x \in Q$ 取商诱导得到的。接下来注意，对所有 ，

$$\{x\} \times R \to R$$

是 quandle 的同构。我们将引理 5.6 应用于投影映射 $Q \times R \to Q$:

$$|\pi_0(Q \times R)| \leq \sum_{[x]\in\pi_0(Q)} |\pi_0(\{x\} \times R)| = |\pi_0(Q)| \cdot |\pi_0(R)|.$$

所有涉及的集合都是有限的，因为 $Q, R \in \mathfrak{Qdl}^{\text{fin}}$，因此自然映射

$$\pi_0(Q \times R) \to \pi_0(Q) \times \pi_0(R)$$

是一个双射。 □

定理 5.8。 *Let* Q, $R \in \mathfrak{Q}dl^{fin}$ *be finite quandles. Then*

$$\dim_{Q\times R} = \dim_Q \cdot \dim_R .$$

Proof. 我们首先证明

$$\dim_{Q\times R} \geq \dim_Q \cdot \dim_R .$$

设 $Q' \leq Q$, $R' \leq R$。则 $Q' \times R' \leq Q \times R$，由命题 5.7，

$$|\pi_0(Q' \times R')| = |\pi_0(Q')| \cdot |\pi_0(R')|.$$

因此

$$\dim_{Q\times R} = \max_{D\leq Q\times R} |\pi_0(D)| \geq \max_{\substack{Q'\leq Q \\ R'\leq R}} |\pi_0(Q' \times R')| =$$

$$= \max_{Q'\leq Q} |\pi_0(Q')| \cdot \max_{R'\leq R} |\pi_0(R')| = \dim_Q \cdot \dim_R .$$

接下来我们证明

$$\dim_{Q\times R} \leq \dim_Q \cdot \dim_R .$$

设 $D \leq Q \times R$。考虑复合映射

$$f\colon D \to Q \times R \xrightarrow{proj_Q} Q.$$

记 $Q' = f(Q)$ 为命题 2.5 中 Q 的一个子拟群。根据定义，

$$|\pi_0(Q')| \leq \dim_Q .$$

对于所有 $x \in Q'$，记

$$D_x := f^{-1}(x) = \{x\} \times R_x$$

对于某个子集 $R_x \subseteq R$。由于 D 上的 quandle 结构由 $Q \times R$ 诱导，且根据命题 5.3 可知 $D_x \leq D$，因此 $R_x \leq R$，并且

$$|\pi_0(D_x)| = |\pi_0(R_x)| \leq \dim_R .$$

我们将引理 5.6 应用于满射 $f\colon D \to Q'$，得到

$$|\pi_0(D)| \leq \sum_{\pi_0(Q')} |\pi_0(D_x)| \leq \dim_Q \cdot \dim_R .$$

这对所有 $D \leq Q \times R$ 均成立，因此

$$\dim_{Q\times R} = \max_{D\leq Q\times R} |\pi_0(D)| \leq \dim_Q \cdot \dim_R .$$

我们得到了所需的等式:

$$\dim_{Q\times R} = \dim_Q \cdot \dim_R .$$

□

命题 5.9. *Let $Q, R \in \widehat{\mathbb{Q}dl^{fin}}$. Then for all $n \in \mathbb{N}$ there is an equality of random variables on B_n:*

$$c_Q \cdot c_R = c_{Q \times R}$$

Proof. 根据命题 5.2， $Q \times R$ 是 $\mathbb{Q}$dl 中的直积。因此，对于任意定向链环 L,

$$\mathrm{Col}_{Q\times R}(L) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\mathrm{dl}}(Q_L, Q \times R) \simeq$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\mathrm{dl}}(Q_L, Q) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\mathrm{dl}}(Q_L, R) = \mathrm{Col}_Q(L) \times \mathrm{Col}_R(L).$$

因此，对每个辫子 $\sigma \in B_n$,

$$\mathrm{col}_{Q\times R}(\overline{\sigma}) = \mathrm{col}_Q(\overline{\sigma}) \cdot \mathrm{col}_R(\overline{\sigma}).$$

由此可知，随机变量 $c_{Q\times R}$ 和 $c_Q \cdot c_R$ ——二者均连续——在稠密集 $B_n \subseteq \widehat{B_n}$ 上相等。因此，

$$c_{Q\times R} = c_Q \cdot c_R$$

□

注 5.10. 定理 2.26 和命题 5.9 的一个推论是，这类$c_{Q的n}$ 更精细的测量也与 $n \gg 0$ 的一个多项式相同。这些测量包括 $c_{Q的n}$的高阶矩，或协方差 Cov($c_{Q的n}$,$c_{R的n}$)。当这些测量与多项式相同时， n 对应的阈值并非普适。

例 5.11. 若一个非空有限拟群 Q 满足序列 $|\mathcal{A}_{Q,\ n}|$ 对 $n \gg 0$ 为常数，即 deg $P_Q = 0$，则称其为 *stable*。根据定理 4.6， $Q \in \mathbb{Q}\mathrm{dl}^{\mathrm{fin}}$ 稳定当且仅当 dim $P_Q = 1$。根据定理 5.8，稳定拟群的积仍然稳定，因为

$$\dim_Q = \dim_R = 1 \Longrightarrow \dim_{Q\times R} = \dim_Q \cdot \dim_R = 1.$$

6 quandle 的不交并

命题 6.1. *Let $Q, R \in \mathbb{Q}dl$ be quandles. The disjoint union $Q \sqcup R$ has a natural quandle structure given by*

$$x, y \in Q \sqcup R \ : \ {}^x y \ = \ \begin{array}{|c||c|c|} \hline {}^x y & x \in Q & x \in R \\ \hline\hline y \in Q & {}^x y & y \\ \hline y \in R & y & {}^x y \\ \hline \end{array}$$

Proof. quandle 公理 (Q1) 和 (Q2) 显然成立。至于 (Q3):

$${}^z({}^x y) = {}^{({}^z x)}({}^z y).$$

若 $x, y, z \in Q$ 或 $x, y, z \in R$，则由 Q 和 R 各自的 (Q3) 可知此结论成立。若 $x, y \in Q$ 和 $z \in R$，或者同理地，若 $x, y \in R$ 和 $z \in Q$，则

$${}^z({}^x y) = {}^x y = {}^{({}^z x)}({}^z y).$$

若 $x \in Q$ 和 $y \in R$，或者同样地，若 $x \in R$ 和 $y \in Q$，则

$${}^z({}^x y) = {}^z y = {}^{({}^z x)}({}^z y).$$

□

下面这个关于幺半群的引理相当直接。证明略。

引理 6.2. *Let A、 $B \in \mathcal{M}on$ be monoids given by generators and rela-tions:*

$$A = \mathbb{N}\langle S_A \mid R_A\rangle\ ,\ \ B = \mathbb{N}\langle S_B \mid R_B\rangle.$$

Then the free product $A \star B$、 which is the coproduct in $\mathcal{M}on$、 is given by

$$A \star B \simeq \mathbb{N}\langle S_A \sqcup S_B \mid R_A \sqcup R_B\rangle$$

and the product $A \times B$ is given by

$$A \times B \simeq \mathbb{N}\langle S_A \sqcup S_B \mid R_A \sqcup R_B \sqcup \{xy = yx \mid \forall x \in S_A, y \in S_B\}\ \rangle.$$

The natural map $A \star B \to A \times B$ in $\mathcal{M}on$ from coproduct to product、 that comes from the fact that $\mathcal{M}on$ is a pointed category is seen here by taking , further quotients in RHS.

命题 6.3. *Let Q、 $R \in \mathcal{Q}dl$. Then there is a natural isomorphism*

$$\mathcal{A}_Q \times \mathcal{A}_R \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{Q\sqcup R}$$

in $\mathcal{M}on_{gr}$.

Proof. 由 Q 和 R 到 $Q \sqcup R$ 的自然嵌入，我们得到态射

$$\mathcal{A}_Q \to \mathcal{A}_{Q\sqcup R}\ ,\ \ \mathcal{A}_R \to \mathcal{A}_{Q\sqcup R}$$

在 $_{gr}$ 上的 $\mathcal{M}$ 中。$_{gr} \simeq \mathcal{M}$ 上 $\mathcal{M}$ 的余积是 $/\mathbb{N}$ 上 $\mathcal{M}$ 中的余积，即自由积。因此我们得到

$$\mathcal{A}_Q \star \mathcal{A}_R \to \mathcal{A}_{Q\sqcup R}$$

在 $\mathcal{M}\mathrm{on}^{gr}$ 中。

$$\mathcal{A}_{Q\sqcup R} = \mathbb{N}\langle Q \sqcup R \mid \forall x, y \in Q \sqcup R\ ,\ \ x \cdot y = {}^{x}y \cdot x\rangle =$$
$$= \mathbb{N}\left\langle Q \sqcup R \,\middle|\, \begin{array}{ll} \forall x, y \in Q & x \cdot y = {}^{x}y \cdot x \\ \forall x, y \in R & x \cdot y = {}^{x}y \cdot x \\ \forall x \in Q, y \in R & x \cdot y = y \cdot x \\ \forall x \in R, y \in Q & x \cdot y = y \cdot x \end{array} \right\rangle.$$

根据引理 6.2，这自然同构于

$$\mathbb{N}\langle Q \mid \forall x, y \in Q,\ x \cdot y = {}^{x}y \cdot x\ \rangle \times \mathbb{N}\langle R \mid \forall x, y \in R,\ x \cdot y = {}^{x}y \cdot x\ \rangle = \mathcal{A}_Q \times \mathcal{A}_R.$$

这个同构保持生成元，且它们的次数均为 1：

$$\mathcal{A}_{Q\sqcup R} \supseteq Q \sqcup R \ \longleftrightarrow\ \big(Q \times \{1_{\mathcal{A}_R}\} \sqcup \{1_{\mathcal{A}_Q}\} \times R\big) \subseteq \mathcal{A}_Q \times \mathcal{A}_R,$$

因此，这是分次幺半群之间的同构。 □

定义 6.4. 设 $Q \in \mathcal{Q}\mathrm{dl}^{\mathrm{fin}}$。我们将 *generating function* 定义为 Q:

$$\eta_Q(t) = \sum_{t=0}^{\infty} |\mathcal{A}_{Q,n}| \cdot t^n \in \mathbb{Z}[t].$$

命题 6.5. *Let* $Q, R \in \mathcal{Q}dl^{fin}$. *Then*

$$\eta_{Q\sqcup R}(t) = \eta_Q(t) \cdot \eta_R(t).$$

Proof. 根据命题 6.3, $\mathcal{A}_Q \times \mathcal{A}_R$ 与 $\mathcal{A}_{Q\sqcup R}$ 作为分次幺半群是同构的。因此，对于所有 n，我们有

$$A_{Q\sqcup R,n} \simeq (\mathcal{A}_Q \times \mathcal{A}_R)_n \simeq \coprod_{i+j=n} \mathcal{A}_{Q,i} \times \mathcal{A}_{R,j}.$$

因此

$$\eta_Q(t) \cdot \eta_R(t) = \left(\sum_i |\mathcal{A}_{Q,i}| t^i\right)\left(\sum_j |\mathcal{A}_{R,j}| t^j\right) =$$

$$= \sum_n \sum_{i+j=n} |\mathcal{A}_{Q,i}| \cdot |\mathcal{A}_{R,j}| \cdot t^n = \sum_n |\mathcal{A}_{Q\sqcup R,n}| \cdot t^n = \eta_{Q\sqcup R}(t).$$

□

命题 6.6. *Let* $Q \in \mathcal{Q}dl^{fin}$. *Then*

$$\eta_Q(t) \in \mathbb{Z}[t, (1-t)^{-1}], \quad ord_{(1-t)}(\eta_Q) = -\dim_Q .$$

Proof. 如果 $Q = \emptyset$，那么 $\eta_Q(t) = 1$。否则，由于 $P_Q(x)$ 是一个次数为 $\dim_Q - 1$ 的整值多项式，存在 $a_1, \dots a_{\dim_Q} \in \mathbb{Z}$，使得 $a_{\dim_Q} \neq 0$

$$P_Q(x) = \sum_{k=1}^{\dim_Q} a_k \cdot \binom{x+k-1}{k-1}.$$

Thus

$$\sum_n P_Q(n)t^n = \sum_{k=1}^{\dim_Q} a_k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} t^n = \sum_{k=1}^{\dim_Q} \frac{a_k}{(1-t)^k}.$$

由于对于所有 $n \gg 0$, $|\mathcal{A}_{Q,n}| = P_Q(n)$，因此

$$\eta_Q(t) - \sum_{k=1}^{\dim_Q} \frac{a_k}{(1-t)^k} = \eta_Q(t) - \sum_n P_Q(n)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(|\mathcal{A}_{Q,n}| - P_Q(n)\right) t^n \in \mathbb{Z}[t].$$

因此 $\eta_Q(t) \in \mathbb{Z}[t,(1-t)^{-1}]$。由于 $a_{\dim_Q} \neq 0$, $\mathrm{ord}_{(1-t)}(\eta_Q(t)) = -\dim_Q$。

□

注 6.7. 作为额外的收获，我们可以从 $\eta_Q(t)$ 中恢复出这样的阈值：超过该阈值后，$|A_{Q,n}|$ 与 $P_Q(n)$ 一致：

$$\min\{n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0,\ |\mathcal{A}_{Q,n}| = P_Q(n)\} = -\mathrm{ord}_{t=\infty}\eta_Q(t).$$

命题 6.8。 *Let* $Q, R \in \mathcal{Q}dl^{fin}$. *Then*

$$\dim_{Q\sqcup R} = \dim_Q + \dim_R .$$

Proof. 根据命题 6.6，我们可以通过以下方式从 η_Q 恢复 $\dim_Q$：

$$\dim_Q = -\mathrm{ord}_{(t-1)}(\eta_Q(t)).$$

根据命题 6.5,

$$\eta_{Q\sqcup R}(t) = \eta_Q(t)\cdot\eta_R(t).$$

Thus

$$\dim_{Q\sqcup R} = -\mathrm{ord}_{(t-1)}(\eta_{Q\sqcup R}(t)) = -\mathrm{ord}_{(t-1)}(\eta_Q(t)\cdot\eta_R(t)) =$$
$$= -\mathrm{ord}_{(t-1)}(\eta_Q(t)) - \mathrm{ord}_{(t-1)}(\eta_R(t)) = \dim_Q + \dim_R .$$

□

例 6.9. 设 $Q \in \mathfrak{Q}\mathbf{dl}^{\mathrm{fin}}$。令 $Q_+ \in \mathfrak{Q}\mathbf{dl}$ 表示 $Q_+ := Q \sqcup *$, 其中 $* := T_{1_\circ}$ 则

$$\eta_{Q_+}(t) = \eta_Q(t)\cdot\frac{1}{1-t} \implies \eta_Q(t) = (1-t)\cdot\eta_{Q_+}(t).$$

因此，对于 $n \gg 0$,

$$P_Q(n) = |\mathcal{A}_{Q,n}| = |\mathcal{A}_{Q_+,n}| - |\mathcal{A}_{Q_+,n-1}| = P_{Q_+}(n) - P_{Q_+}(n-1).$$

令 $\eta_Q^{\mathrm{dom}}(t) \in \mathbb{Z}[[t]]$ 表示级数

$$\eta_Q^{\mathrm{dom}}(t) := \sum_{n=0}^{\infty}\left|\mathcal{A}_{Q,n}^{\mathrm{dom}}\right| t^n.$$

Then

$$\mathcal{A}_{Q_+}^{\mathrm{dom}} \simeq \mathcal{A}_Q^{\mathrm{dom}} \times \mathcal{A}_{T_1}^{\mathrm{dom}} \implies \eta_{Q_+}^{\mathrm{dom}}(t) = \eta_Q^{\mathrm{dom}}(t)\cdot\frac{t}{1-t}$$

因此，对于 $n \gg 0$,

$$P_Q^{\mathrm{dom}}(n) = |\mathcal{A}_{Q,n}^{\mathrm{dom}}| = |\mathcal{A}_{Q_+,n+1}^{\mathrm{dom}}| - |\mathcal{A}_{Q_+,n}^{\mathrm{dom}}| = P_{Q_+}(n+1) - P_{Q_+}(n).$$

6.1 扭曲有基点拟群

在本节中， $Q \in \mathfrak{Q}\mathbf{dl}^{\mathrm{fin}}$ 是一个有限的拟群，并且 $\psi \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{Q}\mathbf{dl}}(Q)$满足对所有 $x \in Q$,

$$\varphi_{\psi(x)} = \varphi_x.$$

命题 **6 10** *Let Q and ψ be as above. Then the quotient Q/ψ as .. , a set inherits the quandle structure on Q s.t. $Q \to Q/\psi$ is a morphism in $\mathfrak{Q}dl$.*

Proof. 对于所有 $x, y \in Q$,

$${}^{\psi(x)}y = {}^{x}y \quad , \quad \text{and} \quad {}^{x}\psi(y) = \psi\left({}^{\psi^{-1}(x)}y\right) = \psi({}^{x}y).$$

因此， Q 上的拟群结构模 ψ 定义良好。 □

命题 6.11。 *Let $Q \in \mathcal{Q}dl$ and $\psi \in Aut_{\mathcal{Q}dl}(Q)$ be as above. Then*

${}^{x}y$	$x = *$	$x \in Q$
$y = *$	$*$	$*$
$y \in Q$	$\psi(y)$	${}^{x}y$

is a quandle structure on the set $Q \sqcup *$. We denote this by $Q \sqcup_{\psi} * \in \mathcal{Q}dl$. The canonical embedding of Q into $Q \sqcup_{\psi} *$ is a morphism in $\mathcal{Q}dl$.

Proof. 公理 (Q 1 2 3 $x\ y\ z \in$) 和 (Q) $Q \sqcup_{\psi} *$ 很容易验证。至于 (Q): 设 , , 。则

$$z = * \implies {}^{x}({}^{y}*) = * = {}^{({}^{x}y)}({}^{x}*).$$

$$x = * \neq y, z \implies {}^{*}({}^{y}z) = \psi({}^{y}z) = {}^{\psi(y)}\psi(z) = {}^{({}^{*}y)}({}^{*}z).$$

$$y = * \neq x, z \implies {}^{x}({}^{*}z) = {}^{x}\psi(z) = {}^{\psi_{(x)}}\psi(z) = \psi({}^{x}z) = {}^{*}({}^{x}z) = {}^{({}^{x}*)}({}^{x}z).$$

$$x = y = * \neq z \implies {}^{*}({}^{*}z) = {}^{({}^{*}*)}({}^{*}z).$$

□

命题 6.12。 *Let Q and ψ be as above. Then the sub-quandles of $Q \sqcup_{\psi} *$ are the sub-quandles $R \leq Q$ and $R \sqcup_{\psi} *$ where $R \leq Q$ satisfies , ( ) $\psi\ R = R$.*

命题 6.13。 *Let $Q \in \mathcal{Q}dl^{fin}$ and let $\psi \in Aut_{\mathcal{Q}dl}(Q)$ be as above.Then*

$$\eta_{Q \sqcup_{\psi} *}(t) = \eta_{Q}(t) + t \cdot \eta_{(Q/\psi)_{+}}(t),$$
$$P_{Q \sqcup_{\psi} *}(x) = P_{Q}(x) + P_{(Q/\psi)_{+}}(x-1),$$
$$P^{dom}_{Q \sqcup_{\psi} *}(x) = P^{dom}_{(Q/\psi)_{+}}(x)$$

Proof. 首先将 ψ 在 Q 上的作用扩展到 $Q \sqcup_{\psi} *$，使得 $\psi(*) = *$。然后，ψ 作用于 $Q \sqcup_{\psi} *$ 时满足上述条件，因为 $\varphi_{\psi(*)} = \varphi_{*}$，并且对所有 $x \in Q$, $\varphi_{\psi(x)}(*) = * = \varphi_{x}(*)$。由命题 6.10 可知，存在一个满射 quandle 态射

$$f \colon Q \sqcup_{\psi} * \twoheadrightarrow (Q \sqcup_{\psi} *)/\psi \simeq (Q/\psi) \sqcup * = (Q/\psi)_{+}.$$

因此，分别在 $\mathcal{Q}$dl 和 $\mathcal{M}$on^{gr} 中有交换方块:

$$\begin{array}{ccc} Q \sqcup_{\psi} * & \twoheadrightarrow & (Q/\psi)_{+} \\ \uparrow & & \uparrow \\ Q & \twoheadrightarrow & Q/\psi \end{array} \implies \begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{Q \sqcup_{\psi} *} & \twoheadrightarrow & \mathcal{A}_{(Q/\psi)_{+}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{A}_{Q} & \twoheadrightarrow & \mathcal{A}_{Q/\psi} \end{array}.$$

对于所有 $a \in \mathcal{A}_{Q \sqcup_{\psi} *}$, $*|a$ 当且仅当 $*|\mathcal{A}_{f}(a)$ 属于 $\mathcal{A}_{(Q/\psi)_{+}}$。因此 $\mathcal{A}_{f}$ 映射

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{Q \sqcup_{\psi} *} \setminus \mathcal{A}_{Q} & \xrightarrow[\mathcal{A}_{f}]{} & \mathcal{A}_{(Q/\psi)_{+}} \setminus \mathcal{A}_{Q/\psi} \\ \| & & \| \\ \{a \in \mathcal{A}_{Q \sqcup_{\psi} *} \mid * | a\} & & \{a \in \mathcal{A}_{(Q/\psi)_{+}} \mid * | a\} \end{array}$$

为满射。但由于在 $\mathcal{A}_{Q\sqcup_\psi *}$ 中，对于所有 $x\in Q$,

$$x\cdot *={}^{x}*\cdot x=*\cdot x={}^{*}x\cdot *=\psi(x)\cdot *,$$

此映射是一个双射:

$$\mathcal{A}_f\colon \mathcal{A}_{Q\sqcup_\psi *}\setminus\mathcal{A}_Q\xrightarrow{\sim}\mathcal{A}_{(Q/\psi)_+}\setminus\mathcal{A}_{Q/\psi}.$$

因此

$$\eta_{Q\sqcup_\psi *}(t)-\eta_Q(t)=\eta_{(Q/\psi)_+}(t)-\eta_{Q/\psi}(t).$$

但是 $\eta_{Q/\psi}(t)=(1-t)^{\eta_{(Q/\psi)_+}(t)}$，因此

$$\eta_{Q\sqcup_\psi *}(t)=\eta_Q(t)+\eta_{(Q/\psi)_+}(t)-\eta_{Q/\psi}(t)=\eta_Q(t)+t\cdot\eta_{(Q/\psi)_+}(t).$$

对于 $n\gg 0$,

$$P_{Q\sqcup_\psi *}(n)=|\mathcal{A}_{Q\sqcup_\psi *,n}|=|\mathcal{A}_{Q,n}|+|\mathcal{A}_{(Q/\psi)_+,n-1}|=P_Q(n)+P_{(Q/\psi)_+}(n-1)$$

因此

$$P_{Q\sqcup_\psi *}(x)=P_Q(x)+P_{(Q/\psi)_+}(x-1).$$

$Q\sqcup_\psi *$ 的子拟群为 $\{R\le Q\}\cup\{R\sqcup_\psi *\mid R\le Q,\psi(R)=R\}$。因此

$$\mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{Q\sqcup_\psi *}=\mathcal{A}_{Q\sqcup_\psi *}\setminus\mathcal{A}_Q\setminus\bigcup_{\substack{R<Q\\ \psi(R)=R}}\mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{R\sqcup_\psi *}.$$

使用 $\mathcal{A}_f$ 并对 $|Q|$应用完全归纳法，我们得到

$$\mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{Q\sqcup_\psi *}\simeq\mathcal{A}_{(Q/\psi)_+}\setminus\mathcal{A}_{Q/\psi}\setminus\bigcup_{\substack{R<Q\\ \psi(R)=R}}\mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{(R/\psi)_+}=$$

$$=\mathcal{A}_{(Q/\psi)_+}\setminus\mathcal{A}_{Q/\psi}\setminus\bigcup_{R<Q/\psi}\mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{R_+}=\mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{(Q/\psi)_+}.$$

对于 $n\gg 0$,

$$P^{\mathrm{dom}}_{Q\sqcup_\psi *}(n)=|\mathcal{A}_{Q\sqcup_\psi *,n}|=|\mathcal{A}_{Q/\psi,n}|=P_{(Q/\psi)_+}(n),$$

因此

$$P^{\mathrm{dom}}_{Q\sqcup_\psi *}(x)=P^{\mathrm{dom}}_{(Q/\psi)_+}(x).$$

□

7 示例与计算

7.1 平凡 quandles

对于 $Q=T_0=\emptyset$ $\mathcal{A}_\emptyset=\{1\}$ $\emptyset$ $\mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_\emptyset=$, 。由于没有真子 $\{1\}$ quandles，因此也有如此。因此

$$\eta_{T_0}(t)=\eta^{\mathrm{dom}}_{T_0}(t)=1.$$

对于 $\alpha\ge 1$, $T_\alpha=(T_{\alpha-1})_+$，因此

$$\eta_{T_\alpha}(t)=\eta_{T_{\alpha-1}}(t)\cdot\frac{1}{1-t}\quad,\quad \eta^{\mathrm{dom}}_{T_\alpha}(t)=\eta^{\mathrm{dom}}_{T_{\alpha-1}}(t)\cdot\frac{t}{1-t}.$$

通过对 α 进行归纳法，可得

$$\eta_{T_\alpha}(t)=\frac{1}{(1-t)^\alpha}\ ,\quad \eta^{\mathrm{dom}}_{T_\alpha}(t)=\frac{t^\alpha}{(1-t)^\alpha},$$

因此

$$P_{T_\alpha}(x)=\tbinom{x+\alpha-1}{\alpha-1}\ ,\quad P_{T_\alpha}(x)=\tbinom{x-1}{\alpha-1}.$$

7.2 扭曲指点拟群

设 $Q=T_\alpha$，并令 $\psi\colon\ T_\alpha\to T_\alpha$ 为任意置换。则对所有 $x\in T_\alpha$，$\psi\in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Qdl}}(T_\alpha)$ 且 $\varphi_{\psi(x)}=\varphi_x=\mathrm{Id}$。因此 $T_\alpha\sqcup_\psi *$ 是一个拟群。设 $\beta:=1+|T_\alpha/\psi|$，使得 $(T_\alpha/\psi)_+=T_\beta$。那么 $T_\alpha\sqcup_\psi *$ 将满足

$$\eta_{T_\alpha\sqcup_\psi *}(t)=\eta_{T_\alpha}(t)+t\cdot\eta_{T_\beta}(t)=\frac{1}{(1-t)^\alpha}+\frac{t}{(1-t)^\beta}$$

$$P_{T_\alpha\sqcup_\psi *}(x)=P_{T_\alpha}(x)+P_{T_\beta}(x-1)=\tbinom{x+\alpha-1}{\alpha-1}+\tbinom{x+\beta-2}{\beta-1}$$

$$P^{\mathrm{dom}}_{T_\alpha\sqcup_\psi *}(x)=P^{\mathrm{dom}}_{T_\beta}(x)=\tbinom{x-1}{\beta-1}$$

7.2.1 J

设 $Q=T_2=\{a,a'\}$，并令 $\psi\in S_2$ 为非平凡置换。则 $J:=T_2\sqcup_\psi\{b\}\in$ Qdl 的结构由下式给出

$$J=\{a,a',b\}\ ,\qquad \begin{array}{|c|c||c|c|c|}\hline {}^xy & & x & & \\ \hline & & a & a' & b \\ \hline y & a & a & a & a' \\ & a' & a' & a' & a \\ & b & b & b & b \\ \hline\end{array}\ .$$

这个 J 由 [Joy82, §6] 引入，作为一个拟群的例子；它无法嵌入任何群 G 的 Conj(G) 中。

$$\eta_J(t)=\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{t}{(1-t)^2}=\frac{1+t}{(1-t)^2},$$
$$P_J(t)=\tbinom{x+1}{1}+\tbinom{x}{1}=2x+1,$$
$$P^{\mathrm{dom}}_J(x)=P^{\mathrm{dom}}_{(T_2/\psi)_+}(x)=\tbinom{x-1}{1}=x-1.$$

7.2.2 J_+

令 $Q=T_3=\{a,a',c\}$，并令 $\psi\colon\ Q\to Q$ 置换 $a\leftrightarrow a'$，固定 c。则 $J'=T_3\sqcup_\psi\{b\}$ 的结构如下：

$$J_+:=T_3\sqcup_\psi *\simeq J\sqcup\{c\}=\{a,a',b,c\}\,,\qquad \begin{array}{|c|c||c|c|c|c|}\hline {}^xy & & x & & & \\ \hline & & a & a' & b & c \\ \hline y & a & a & a & a' & a \\ & a' & a' & a' & a & a' \\ & b & b & b & b & b \\ & c & c & c & c & c \\ \hline\end{array}\ .$$

$$\eta_{J_+}(t) = \frac{1}{(1-t)^3} + \frac{t}{(1-t)^3} = \frac{1+t}{(1-t)^3},$$
$$P_{J_+}(t) = \binom{x+2}{2} + \binom{x+1}{2} = (x+1)^2,$$
$$P^{\mathrm{dom}}_{J_+}(x) = \binom{x-1}{2} = \frac{x^2-3x+2}{2}.$$

7.2.3 C_3

设 $Q = T_3 = \{a, a', a''\}$，并设 $\psi\colon\ Q \to Q$ 是一个长度为 3 的环。那么 $C_3 = \{a, a', a''\} \sqcup_\psi \{d\}$ 的结构如下

$$C_3 := T_3 \sqcup_\psi \{d\} = \{a, a', a'', d\},$$

${}^x y$		x			
		a	a'	a''	d
y	a	a	a	a	a'
	a'	a'	a'	a'	a''
	a''	a''	a''	a''	a
	d	d	d	d	d

$$\eta_{C_3}(t) = \frac{1}{(1-t)^3} + \frac{t}{(1-t)^2} = \frac{1+t-t^2}{(1-t)^3},$$
$$P_{C_3}(t) = \binom{x+2}{2} + \binom{x}{1} = \frac{x^2+5x+2}{2},$$
$$P^{\mathrm{dom}}_{C_3}(x) = \binom{x-1}{1} = x-1.$$

7.2.4 J'

令 $Q = J = \{a, a', b\}$，并令 $\psi = \varphi_b \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{Q}\mathrm{dl}}(J)$。对 Q 和 $\psi \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{Q}\mathrm{dl}}(Q)$ 的这一选择满足：对所有 $x \in Q$，$\varphi_{\psi(x)} = \varphi_x$，因此 $J \sqcup_\psi \{b'\} \in \mathfrak{Q}\mathbf{dl}$，其中：

$$J' := J \sqcup_\psi \{b'\} = \{a, a', b, b'\},$$

${}^x y$		x			
		a	a'	b	b'
y	a	a	a	a'	a'
	a'	a'	a'	a	a
	b	b	b	b	b
	b	b'	b'	b'	b'

这里有 $(J/\psi)_+ \simeq T_3$，因此

$$\eta_{J'}(t) = \eta_J(t) + t \cdot \eta_{T_3}(t) = \frac{1+t}{(1-t)^2} + \frac{t}{(1-t)^3} = \frac{1+t-t^2}{(1-t)^3},$$
$$P_{J'}(x) = P_J(x) + P_{T_3}(x-1) = (2x+1) + \binom{x+1}{2} = \frac{x^2+5x+2}{2},$$
$$P^{\mathrm{dom}}_{J'}(x) = P^{\mathrm{dom}}_{T_3}(x) = \binom{x-1}{2} = \frac{x^2-3x+2}{2}.$$

7.3 二面体 quandles

存在一个从阿贝尔群到quandle的函子 -

$$D\colon \mathcal{A}\mathrm{b} \to \mathcal{Q}\mathrm{dl} \ , \quad M \mapsto D_M,$$

其中 D_M 的底层集合为 M，其 quandle 结构为

$$^{x}y = 2x - y.$$

一个 $f\colon\ M \to M'$ 属于 $\mathcal{A}\mathrm{b}$ 的态射会导出一个 $D_f\colon\ D_M \to D_{M'}$ 属于$\mathcal{Q}\mathrm{dl}$ 的态射:

$$\forall x \in M \ \ : \quad f(^{x}y) = f(2x-y) = 2f(x) - f(y) = {}^{f(x)}f(y).$$

为便于计算，我们按以下方式区分 $M \in \mathcal{A}\mathrm{b}$ 和 $D_M \in \mathcal{Q}\mathrm{dl}$ 的元素:

$$x \in M \ , \ \ [x] \in D_M.$$

对于每个 $M \in \mathcal{A}\mathrm{b}$，都有一个自然函数

$$\mathrm{T}_M\colon \mathcal{A}_{D_M} \to M \ , \quad \mathrm{T}_M([x_0]\cdots[x_n]) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \cdot x_i.$$

这是满足以下条件的唯一函数 $\mathcal{A}_{D_M} \to M$

$$\forall x \in M \ , \ \ \mathrm{T}_M([x]) = x \ ,$$

$$\forall\ a, b \in \mathcal{A}_{D_M} \ , \ \ \mathrm{T}_M(a \cdot b) = \mathrm{T}_M(a) + (-1)^{|a|}\mathrm{T}_M(b).$$

对于 $M = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \in \mathcal{A}\mathrm{b}$，这些 D_M 称为 *dihedral quandles*，记作

$$D_\ell := D_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}.$$

对于所有 $M \in \mathcal{A}\mathrm{b}$，拟群 D_M 自然同构于二面体群 $M \rtimes \{\pm 1\}$ 中由所有反射构成的子拟群，通过

$$D_M \to M \rtimes \{\pm 1\} \ , \quad m \mapsto (m, 1).$$

我们的目标是计算所有 $\ell \in \mathbb{N}$的 $P_{D_\ell}(x)$ $P^{\mathrm{dom}}_{D_\ell}(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 和 $\eta_{D_\ell}(t) \in \mathbb{Z}(t)$。我们需要一些预备性结论:

命题 7.1。 *Let $\ell \in \mathbb{Z}$ and let $M = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \in \mathcal{A}b$. Then the sub-quandles R of D_ℓ are precisely $R = \emptyset$ and the cosets of subgroups of $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$:*

$$\{R \leq D_\ell\} = \{\emptyset\} \cup \{c + H \ \mid \ \ H \leq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \ , \ \ c \in (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})\,/H\}.$$

For each $c + H \leq D_M$, the map

$$H \to c + H \ , \quad h \mapsto c + h$$

is an isomorphism of quandles.

Proof. 令 $\emptyset \neq R \leq D_\ell$。对于每个 $[x] \in R$，令

$$m_x := m_{[x]} := \min\{n \in \mathbb{N} \mid [x+n] \in R\}.$$

考虑 $[x] \in R$，其中 m_x 最小。于是，一方面

$$[x + m_x] \in R \quad \text{and} \quad m_{x+m_x} \geq m_x.$$

另一方面

$$^{[x+m_x]}[x] = [2(x + m_x) - x] = [(x + m_x) + m_x] \in R.$$

因此

$$m_{x+m_x} = m_x.$$

由此可得 $[x + m_x\mathbb{N}] \subseteq R$。选取 x 使 m_x 最小，我们得到

$$R = [x + m_x\mathbb{N}] = x + m_x\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$$

是子群 $m_x\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 的一个陪集。子群 $H \leq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 的所有陪集都是同构的子拟群：令 $c \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$。映射 $x \mapsto x+c$ 属于 $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{Qdl}}(D_\ell)$：

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}\,, \quad ^{(x+c)}(y + c) = 2(x + c) - (y + c) = (2x - y) + c = {}^{x}y + c.$$

此外，该映射是一个双射，因此是 D_ℓ 在 $\mathfrak{Qdl}$ 中的一个自同构。$\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 在 H 的陪集上具有传递性，将其中一个同构地映射到另一个。

□

注记 **7.2** 7.1 $M \in$ .. 命题 . 的陈述对任意 $\mathfrak{Ab}^{\mathrm{fin}}$ 都不成立^{k}——对所有 , $D_{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k}$ 都是平凡的，因此 *any* 子集是一个^{M}子拟群。不过，如果 是奇数，这一结论确实成立，而且证明要简单得多。

命题 7.3. *Let $\ell, \ell' \in \mathbb{N}$ be coprime. Then for all $n \in \mathbb{N}$,*

$$|\mathcal{A}_{D_{\ell\ell'},n}| = |\mathcal{A}_{D_\ell,n}| \cdot |\mathcal{A}_{D_{\ell'},n}|.$$

Proof. 在 $\mathcal{A}\mathfrak{b}$ 中的同构 $\mathbb{Z}/\ell\ell'\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}\ell\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\ell'\mathbb{Z}$ 诱导出一个态射 f: $D_{\ell\ell'} \to D_\ell \times D_{\ell'}$ in $\mathfrak{Qdl}$。由于 f 是一个双射，f 是一个同构。对于任意 $Q \in \mathfrak{Q}\mathrm{dl}^{\mathrm{fin}}$，令 $h_Q \in \mathbb{N}$ 表示

$$h_Q := [B_2 : \ker(B_2 \xrightarrow{\beta} \mathrm{Aut}_{\mathfrak{Set}}(Q^2))].$$

在 $Q = D_\ell$ 的情形下，$\sigma_1(x + c, x) = (x + 2c, x + c)$，因此 $h_{D_\ell} = \ell$。我们证明，若 $Q, R \in \mathfrak{Qdl}^{\mathrm{fin}}$ 满足 h_Q 与 h_R 互素，则对所有 $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{A}_{Q\times R,n} \simeq \mathcal{A}_{Q,n} \times \mathcal{A}_{R,n}.$$

由于 $\ell = h_{D_\ell}$和 $\ell' = h_{D_{\ell'}}$互素，这就完成了证明。对于 $n = 0$，两边都是单元素集。对于 $n = 1$，两边都是 $Q \times R$。令 $n \geq 2$。由于 h_Q和 h_R互素，存在 m、$k \in \mathbb{N}$，使得

$$\begin{array}{llll} m \equiv 0 & \mod h_Q\,, & k \equiv 1 & \mod h_Q \\ m \equiv 1 & \mod h_R\,, & k \equiv 0 & \mod h_R \end{array}$$

于是，对于所有 $\sigma_i \in B_n$ 和所有 $z_i = (x_i,\ y_i)\quad z_{i+1} = (x_{i+1},\ y_{i+1}) \in Q \times R$,

$$\begin{array}{l|l} \sigma_i^k(\dots x_i, x_{i+1}\dots) = \sigma_i(\dots x_i, x_{i+1}\dots) & \sigma_i^m(\dots x_i, x_{i+1}\dots) = (\dots x_i, x_{i+1}\dots) \\ \sigma_i^k(\dots y_i, y_{i+1}\dots) = (\dots y_i, y_{i+1}\dots) & \sigma_i^m(\dots y_i, y_{i+1}\dots) = \sigma_i(\dots y_i, y_{i+1}\dots) \end{array}$$

由此可知，在 $(Q \times R)^n$ 上的 B_n-作用中，我们可以分别强制在 Q^n 和 R^n 上作用。因此，对于所有 $n \geq 2$ （以及前面提到的 $n = 0,\ 1$）

$$\mathcal{A}_{Q\times R,n} \simeq (Q \times R)^n / B_n \simeq Q^n/B_n \times R^n/B_n \simeq \mathcal{A}_{Q,n} \times \mathcal{A}_{R,n}.$$

□

鉴于此，$|\mathcal{A}_{D_\ell,n}|$ 的所有计算都可归结为其 p-主分量。因此，在接下来的计算中，我们假设

$$\ell = p^r \quad , \quad \text{with} \quad p \ \text{ prime} \, , \ \ r > 0 \, .$$

此外，进行计算时，我们区分 $x \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 和 $[x] \in D_\ell$ ——在括号内，我们在 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 中进行标准算术运算。

引理 7.4. *Let $Q = D_\ell$ and let $x, y \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$. Then*

$$[y] \cdot [x] \in \mathcal{A}_{D_\ell}^{dom} \iff y - x \in (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times.$$

More generally, $[x_1] \cdots [x_n] \in \mathcal{A}_{D_\ell}^{dom}$ iff there exist some $1 \leq i, j \leq n$ s.t.

$$x_j - x_i \in (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times \, .$$

引理 7.5. *Let $\ell = p^r$, $r \geq 1$ and $Q = D_\ell \in \Omega dl$. Let $x, y \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$.*

1. *For all $k \in \mathbb{Z}$,*

$$[x + y] \cdot [x] = [x + (k + 1)y] \cdot [x + ky].$$

2. *If $y - x \in (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$ then for all $k \in \mathbb{Z}$*

$$[x] \cdot [y] = [x + k] \cdot [y + k].$$

3. *If $x \in (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$, then for all $k \in \mathbb{Z}$,*

$$[x + pk] \cdot [x] \cdot [0] = [1 + pk] \cdot [1] \cdot [0].$$

Proof. 1。

2. 由于 $y - x \in (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$，存在 $m \in \mathbb{Z}$ 使得 $m \cdot (y - x) = k$ 模 ℓ。因此

$$[y] \cdot [x] = [x + (y - x)] \cdot [x] = [x + (m + 1)(y - x)] \cdot [x + m(y - x)] =$$
$$= [y + m(y - x)] \cdot [x + m(y - x)] = [y + k] \cdot [x + k].$$

3. 根据第 2 项,

$$[x+pc]\cdot[x]\cdot[0]=[x+pc]\cdot[x+1+pc]\cdot[1+pc]=$$
$$=[1+pc]\cdot[2+pc]\cdot[1+pc]=[1+pc]\cdot[1]\cdot[0].$$

□

引理 **7 6** *Let $Q=D_\ell$ let $n\geq 2$ and let $a\in\mathcal{A}^{dom}_{D_\ell\ n}$. Then $[0]$ divides .. , , a.*

Proof. 令 $a=[x_1]\cdots[x_n]\in\mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{D_\ell}$, $_n$ 7 4, $1\leq$。由引理 ., 存在 s.t. ( )。由引 $i<j\leq n$ $x_i-x_j\in\ \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}\ ^\times$ 3 17 2, 理 . 和条目可知, 存在 $a'\in\mathcal{A}_{D_\ell}$ s.t.

$$a=a'\cdot[x_i]\cdot[x_j]=a'\cdot[x_i-x_j]\cdot[0].$$

因此 $[0]$ 整除 a . □

推论 7.7。 *Let $\ell=p^r$, $r\geq 0$, and let $Q=D_\ell$. Then*

$$|\mathcal{A}^{dom}_{D_\ell,2}|=|(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times|=p^r-p^{r-1}.$$

Proof. 由引理 7.4, 对所有 $c\in\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$,

$$[c]\cdot[0]\in\mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{D_\ell}.\iff c\in(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times.$$

由引理 7.6, 每个 $a\in\mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{D_\ell,\ 2}$ 均可表示为 $a=[c]\cdot[0]$, 其中某个 $c\in\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 由 a 通过 $c=c-0=\mathrm{T}^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}(a)$ 唯一确定。因此

$$|\mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{D_\ell,2}|=|\{[c]\cdot[0]\mid c\in(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times\}|=|(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times|=p^r-p^{r-1}.$$

□

命题 7.8. *Let $\ell=p^r$ be odd, $r\geq 1$, and let $Q=D_\ell$. Then for all $n\geq 3$*

$$|\mathcal{A}^{dom}_{D,n}|=\ell.$$

Proof. $[0]^{n-2}|a$ $a\in\mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{D_\ell}$ $n=|a|\geq$ 首先, 我们证明对于每个次数为 3 7 6 的 都有 。根据引理 。, $[0]\mid a$。要证明这一断言, 只需证明

$$b\cdot[0]\in\mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{D_\ell}\ ,\ \ |b|\geq 3\implies[0]^2\mid b\cdot[0]$$

- 实际上, 只需对 $b=[x]\cdot[y]\cdot[z]$ 的 $|b|=3$证明这一点。如果 $b\in\mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{D_\ell}$, 那么根据引理 7.6 有 $[0]\mid b$, 证明完毕。否则, 我们必有 $p|(y-z)$。还要注意, $x,y,z\in(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$, 因为 $b\cdot[0]\in\mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{D_\ell}$。由第 3 项可知

$$[y]\cdot[z]\cdot[0]=[y-z+1]\cdot[1]\cdot[0]=[-x+y-z]\cdot[-x]\cdot[0].$$

因此

$$b\cdot[0]=[x]\cdot[y]\cdot[z]\cdot[0]=[x]\cdot[-x+y-z]\cdot[-x]\cdot[0].$$

令 $b':=[x]\cdot[-x+y-z]\cdot[-x]$。由于 ℓ 为奇数, $x-(-x)=2x\in(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$。由引理 7.4 $b'\in\mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{D_\ell}$。由引理 7.6, $[0]\mid b'$。因此

$$[0]^2\mid b\cdot[0].$$

现在令 $n \geq 3$。那么对每个 $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{D_\ell,\ n}$，都存在 $x, y \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 使得。

$$a = [x] \cdot [y] \cdot [0]^{n-2}.$$

如果 $[x] \cdot [y] \in \mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{D_\ell}$那么

$$a = [z] \cdot [0]^{n-1}.$$

由于 $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{D_\ell}$和 $n-2 \geq 1$，这个 z必定属于 $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$，根据引理 7.4。如果 $[x] \cdot [y] \notin \mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{D_\ell}$，那么 $p|(y-x)$ ——然而 $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{D_\ell}$，因此 $x, y \in (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$。根据第 3 项，

$$a = [x] \cdot [y] \cdot [0]^{n-2} = [1+z] \cdot [1] \cdot [0]^{n-2}$$

对于某个 $z \in p\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$。在两种情况下，$z = x - y = \mathrm{T}^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}(a)$ 都由 a唯一确定。因此

$$|\mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{D_\ell,\ n}| = |\{[z]\cdot[0]^{n-1} \mid z \in (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times\} \cup \{[1+z]\cdot[1]\cdot[0]^{n-2} \mid z \in p\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}\}| =$$

$$= |\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}| = \ell.$$

□

命题 7.9。 *Let $\ell = 2^r$ with $r \geq 1$, and let $n \geq 3$. Then*

$$\left|\mathcal{A}^{dom}_{D_\ell,n}\right| = 2^{r-1}(n-1).$$

Proof. 首先证明，对于所有 $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{D_\ell,n}$，存在唯一的 $0 < j < n$ 和 $u \in (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$，使得

$$a = [u] \cdot [1]^{n-j-1} \cdot [0]^j.$$

令 $j \in \mathbb{N}$ 为满足 $[0] \mid a$的最大者。由于 $[0]^n \notin \mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{D_\ell}$，由引理 7.6，$0 < j < n$。记

$$a = a_1 \cdot [0]^j.$$

由 j 的极大性及命题 7.1，$a_1 \in \mathcal{A}_{1+2\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$。又因为 a 是支配的，所以 $j \geq 1$。对于所有 i，记为 $[1]^i \cdot [0] = [0] \cdot u_i$。由第 3 项，对于所有 c，$d \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$，

$$[1+2c] \cdot [1+2d] \cdot [1]^i \cdot [0] = [1+2c] \cdot [1+2d] \cdot [0] \cdot u_i =$$

$$= [1+2c-2d] \cdot [1] \cdot [0] \cdot u_i = [1+2c-2d] \cdot [1]^{i+1} \cdot [0].$$

因此我们可以写成

$$a = a_1 \cdot [0]^j = [u] \cdot [1]^{n-j-1} \cdot [0]^j.$$

注意，由于 $[u]$ 整除 $a_1 \in \mathcal{A}_{1+2\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$，$u \in (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$。将 $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{D_\ell}$表示为 $a = [u] \cdot [1]^{n-j-1} \cdot [0]^j$ 的表示是唯一的：假设

$$[u] \cdot [1]^{n-j-1} \cdot [0]^j = [v] \cdot [1]^{n-i-1} \cdot [0]^i \quad , \quad u, v \in (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times.$$

该等式在 $\mathcal{A}_{D_2}$ 中以 $[1]^{n-j} \cdot [0]^j = [1]^{n-i} \cdot [0]^i$ 的形式保持不变。由于 D_2 是一个平凡拟群，因此可得 $j = i$。于是，$u \in (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$ 的值由 $\mathrm{T}^{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}(a)$ 和 j 决定。满射态射 $\mathcal{A}_{D_\ell} \to \mathcal{A}_{D_2}$ 还表明，$0 < j < n$ 和 $u \in (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$ 的所有值都是显然的。因此

$$|\mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{D_\ell,n}| = |(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times| \cdot |\{0 < j < n\}| = 2^{r-1}(n-1).$$

□

命题 7.10. *Let* $\ell = p^r, \quad r \geq 1$ *and let* $Q = D_\ell$. *Then for alln* ≥ 3,

$$|\mathcal{A}_{D_\ell,n}| = \begin{cases} (r+1)p^r & p \neq 2 \\ 2^r + 2^{r-1}r(n-1) & p = 2 \end{cases}.$$

Proof. 由引理 3.11 和命题 7.1,

$$|\mathcal{A}_{D_\ell,n}| = \sum_{R \leq D_\ell} \left|\mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{R,n}\right| = \sum_{k=0}^{r} p^{r-k} \left|\mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{D_{p^k},n}\right| = p^r + \sum_{k=1}^{r} p^{r-k} \left|\mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{D_{p^k},n}\right|.$$

若 $p \neq 2$, 由命题 7.8,

$$|\mathcal{A}_{D_\ell,n}| = p^r + \sum_{k=1}^{r} p^{k-r} \cdot p^k = p^r + rp^r = (r+1)p^r.$$

若 $p = 2$, 则由命题 7.9,

$$|\mathcal{A}_{D_\ell,n}| = 2^r + \sum_{k=1}^{r} 2^{k-r} \cdot (2^{k-1}(n-1)) = 2^r + r2^{r-1}(n-1).$$

□

命题 7.11。 *Let* $\ell = p^r$, $r \geq 1$ *and let* $Q = D_\ell$. *Then*

	$P_{D_\ell}(x)$	$P^{dom}_{D_\ell}(x)$	$\eta_{D_\ell}(t)$
$p \neq 2$	$(r+1)p^r$	p^r	$(1-t)^{-1}\left(1+(p^r-1)t+r(p^r-p^{r-1})t^2+rp^{r-1}t^3\right)$
$p = 2$	$(2^r - r2^{r-1}) + r2^{r-1}x$	$2^{r-1}(x-1)$	$(1-t)^{-2}\left(1+(2^r-2)t+(r2^{r-1}-2^r+1)t^2\right)$

Proof. 当 p 为偶数或奇数时, $P_{D_\ell}(x)$ $P^{\mathrm{dom}}_{D_\ell}(x)$ 的计算直接来自命题 7.8、7.9 和 7.10。对于 $\eta_{D_\ell}(t)$, 剩下要计算的只有 $|\mathcal{A}_{D_\ell,2}|$。根据推论 7.7, $|\mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{D_\ell,2}| = p^r - p^{r-1}$。因此

$$|\mathcal{A}_{D_\ell,2}| = \sum_{k=0}^{r} p^{r-k}|\mathcal{A}^{\mathrm{dom}}_{D_{p^k},2}| = p^r + \sum_{k=1}^{r} p^{r-k}(p^k - p^{k-1}) =$$

$$= p^r + r(p^r - p^{r-1}) = (r+1)p^r - rp^{r-1}.$$

对于 $p \neq 2$, 我们得到

$$\eta_{D_\ell}(t) = 1 + p^r t - rp^{r-1}t^2 + \frac{(r+1)p^r \cdot t^2}{1-t} =$$

$$= \frac{1 + (p^r - 1) \cdot t + r(p^r - p^{r-1}) \cdot t^2 - rp^{r-1} \cdot t^3}{1-t}.$$

对于 $p = 2$, 注意

$$n = 1 \ : \ |\mathcal{A}_{D_\ell,1}| = \ell = P_{D_\ell}(1)$$

$$n = 2 \ : \ |\mathcal{A}_{D_\ell,2}| = (r+1)2^r - r2^{r-1} = 2^r + r2^{r-1} = P_{D_\ell}(2),$$

因此

$$\eta_{D_\ell}(t) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left((2^r - r2^{r-1}) + r2^{r-1}n\right)t^n = 1+\frac{(2^r - r2^{r-1})\cdot t}{1-t}+\frac{r2^{r-1}\cdot t}{(1-t)^2} =$$

$$= \frac{1+(2^r-2)\cdot t + (r2^{r-1}-2^r+1)\cdot t^2}{(1-t)^2}.$$

□

特别地，我们得到 $P_Q\ x\ \ P_Q^{\mathrm{dom}}\ x\ \in \mathbb{Q}[x]$ $\eta_Q\ t\ \in \mathbb{Z}[t,\ 1-(\ )$ t $(\ )$ 和 $(\ )\,(\ )^{-1}]$，与以下小例子有关:

7.3.1 $Q = D_3$

对于 $\ell = 3$, D_3 满足

$$P_{D_3}(x) = 6\ ,\ \ P_{D_3}^{\mathrm{dom}}(x) = 3\ ,\ \ \eta_{D_3}(t) = \frac{1+2t+2t^2+t^3}{1-t}.$$

7.3.2 $Q = D_4$

对于 $\ell = 4 = 2^2$, D_4 满足

$$P_{D_4}(x) = 4x\ ,\ \ P_{D_4}^{\mathrm{dom}}(x) = 2x-2\ ,\ \ \eta_{D_4}(x) = \frac{1+2t+t^2}{(1-t)^2}.$$

7.3.3 $Q = D_{3,\ +}$

$$\eta_{D_{3,+}}(t) = \eta_{D_3}(t)\cdot\eta_{T_1}(t) = \frac{1+2t+2t^2+t^3}{(1-t)^2} = t+4+\frac{6}{(1-t)^2}-9\frac{1}{1-t} =$$

$$= t+4+\sum_n\left(6\tbinom{n+1}{1} - 9\tbinom{n+0}{0}\right)t^n = t+4+\sum_n(6n-3)t^n$$

因此

$$P_{D_{3,+}}(x) = 6x-3.$$

$R\ \ D_3$ 的真子 quandles 有 $\emptyset$ 和三个单点集。因此

$$P_{Q_+}^{\mathrm{dom}}(x) = P_{Q_+}(x) - P_Q(x) - \sum_{R<Q} P_{R_+}^{\mathrm{dom}}(x) =$$

$$= P_{D_{3,+}}(x) - P_{D_3}(x) - 3P_{\mathrm{dom}T_2}(x) - P_{\mathrm{dom}T_1}(x)\ = (6x-3) - 6 - 3(x-1) - 1 = 3x-7.$$

7.4 小 quandles

我们列出所有 $Q \in \mathfrak{Q}\mathrm{dl}$，直到同构为止，满足 $|Q| \le 4$——以及 $P_Q(x)$ $P_Q^{\mathrm{dom}}(x)\ \in \mathbb{Q}[x]$ 和 $\eta_Q(t)\ \in \mathbb{Z}[t,(1-t)^{-1}]$。

$\lvert Q\rvert$	Q	$P_Q(x)$	$P_Q^{\mathrm{dom}}(x)$	$\eta_Q(t)$
0	$\emptyset$	0	0	1
1	T_1	1	1	$(1-t)^{-1}$
2	T_2	$x+1$	$x-1$	$(1-t)^{-2}$
3	T_3	$\frac{1}{2}(x^2+3x+2)$	$\frac{1}{2}(x^2-3x+2)$	$(1-t)^{-3}$
	J	$2x+1$	$x-1$	$(1-t)^{-2}(1+t)$
	D_3	6	3	$(1-t)^{-1}(1+2t+2t^2+t^3)$
4	T_4	$\frac{1}{6}(x^3+6x^2+11x+6)$	$\frac{1}{6}(x^3-6x^2+11x-6)$	$(1-t)^{-4}$
	J_+	x^2+2x+1	$\frac{1}{2}(x^2-3x+2)$	$(1-t)^{-3}(1+t)$
	$D_{3,+}$	$6x-3$	$3x-7$	$(1-t)^{-2}(1+2t+2t^2+t^3)$
	J'	$\frac{1}{2}(x^2+5x+2)$	$\frac{1}{2}(x^2-3x+2)$	$(1-t)^{-3}(1+t-t^2)$
	D_4	$4x$	$2x-2$	$(1-t)^{-2}(1+2t+t^2)$
	C_3	$\frac{1}{2}(x^2+5x+2)$	$x-1$	$(1-t)^3(1+t-t^2)$

参考文献

[AB26] J. W. Alexander 和 G. B. Briggs。论纽结曲线的类型。 *Annals of Mathematics Second Series Vol. 28 No. 1 (1926-1927) pp. 562-586* 1926

[Bri86] E. Brieskorn。自守集、辫子与奇点。 *Proceedings of the AMS-IMS SIAM*，1986。[CK08] V. Turaev C. Kassel。 *Braid Groups*。施普林格，2008。[EVW15] Jordan Ellenberg、Akshay Venkatesh 和 Craig Westerland。函数域上 Hurwitz 空间的同调稳定性与 Cohen–Lenstra猜想。http://arxiv.org/pdf/0912.0325.pdf，2015。[FR92] Roger Fenn 和 Colin Rourke。余维二中的架与链环。 *Journal of Knot Theory and its Ramifications Vol. 1 No. 4 p.343-406* 1992

[Joy82] David Joyce。纽结的分类不变量 —— 纽结幺群。 *Journal of Pure and Applied Algebra 23 (1982) 37-65*，1982。[KM05] Seichii Kamada 和 Yukio Matsumoto。包络幺半群架。 *Topology and its Applications. 146-147 (2005) 133-148* 2005

[Nos17] Takefumi Nosaka。 *Quandles and Topological Pairs - Symmetry, Knots and Cohomology*。施普林格，2017。[Rei48] Kurt Reidemeister。 *Knotentheorie*。施普林格，1948。