arXiv:2304.08388v1 [math.GR] 17 Apr 2023

坏特征下的完全可约性

ALASTAIR J. LITTERICK 和 ADAM R. THOMAS

Abstract. 设 G 是代数闭域上特征为 $p>0$ 的例外型单代数群。本文延续了对 G 的连通约化子群进行分类的长期研究。此前我们已完成 p 足够大时的分类，本文则聚焦于 p 对 G 为坏特征的情形。我们对 G 中不具有 G-完全可约性的连通约化子群进行分类，其中这些子群的单分量的秩至少为 3。对于每个这样的子群 X，我们确定 X 在伴随模 $L(G)$ 和一个极小非平凡 G-模上的作用，以及 X 在 G 中的连通中心化子。作为推论，我们获得了以下方面的信息：在连通约化子群中极大的子群；由彼此可交换的 G-完全可约子群构成的乘积；具有平凡连通中心化子的子群；以及在 G 的伴随模或极小模上不可分解地作用的子群。

1. Introduction and results

本文研究代数闭域上约化代数群的闭子群，这一研究可追溯至 Dynkin 在 20 世纪 50 年代的工作。Borel 和 Tits[7] 的一个结果指出，这样的子群要么本身是约化的，要么包含于 G的某个真抛物子群中。因此，研究重点在于约化子群。Dynkin 本人对特征零下单代数群的约化极大连通子群进行了分类 [19], ，随后 Seitz [37, 38] 以及 Liebeck 和 Seitz [26]将这一分类推广到了正特征情形。

自然可以尝试将这一分类推广到所有约化子群。例如，对于约化代数群 G的闭子群X ，陪集空间 G/X 是仿射簇，当且仅当 X 是约化的 [35]。 G 的子群结构对于研究相应的李型有限群 [25, 14, 13, 15]也至关重要。

一个基本结果指出，在零特征下， G 的闭子群 X 是约化的，当且仅当 X 是 G-完全可约的（G-cr）；这意味着，每当 X 包含于 G的一个抛物子群 P 中时，它也包含于 P的一个 Levi 因子中。因此，Dynkin 的工作提供了一种对约化子群进行分类的归纳方法：遍历 G的 Levi 子群 L ，并研究每个 L 的真子群中不包含于 L的真抛物子群内的那些子群，即所谓的 L-不可约子群。

在正特征下，这项研究要困难得多。设 G的一个抛物子群的 Levi 分解为 $P=QL$ ，则 P的约化子群不再必然有一个 L中的 P-共轭子群。相反，必须研究 L 的子群 X_0 在幺幂根基 Q上的作用，以及它们在半直积 QX_0中的相应补子群。因此会出现非阿贝尔上同调问题。

由此自然产生一种二分情形：当 G 是经典型单群时， G 的秩可以任意大，而对所有 G 的约化子群进行分类，等价于理解约化群的所有表示；众所周知，这是一个棘手得难以处理的问题。另一方面，当 G 具有例外型时，这种情形既有趣（因为例外群表现出最复杂的行为），也切实可行（因为其秩有界）。

因此，设 G 是定义在特征为 $p>0$ 的代数闭域上的例外型单群。当相对于 G 的李型而言， p 足够大时， G 的所有约化子群也都是 G-cr，我们便可以进行归纳。通过这种方式，在 [24] 中，Liebeck 和 Seitz 得到了 G 的所有约化子群的分类；例如，当 $p>7$ 时，该分类成立。一般而言，素数特征越小、子群越小（以李秩衡量），上同调就越复杂，

子群结构也越复杂。D. Stewart [41, 44] 首先对 G 中的例外型G 开展了这项研究，研究对象是类型为 G_2 或 F_4 的 G 。在这里，非-G-cr 的约化子群仅在 $p \leq 3$ 时存在。本文作者的工作 [31] 解决了底域的特征对于 G 是好特征时的问题。回顾一下，对于例外群 G，若素数 p 满足 $p = 2$ 或 3，或者 $p = 5$ 且 G 属于类型 E_8，则称其为坏素数；否则称 p 为好素数。

本文的主要结果完成了对 G 的约化子群的分类，其中每个单因子的秩都至少为 3，且对特征不作限制。

定理 1. 设 G 是代数闭域上特征为 $p > 0$ 的例外型单代数群。设 X 是 G 的半单子群，满足 X 非 G-cr，且 X 的每个单因子的秩都至少为 3。那么 $p = 2$ 为 2 或 3，且 X 共轭于第 11 节表 5–8 中列出的恰好一个子群；这些子群均为非 G-cr。

对于每个这样的 X，我们给出连通中心化子 $C_G(X)^\circ$ ，以及 X 在 G 的李代数上和在 G 的最低维非平凡模上的作用。

因子秩小于 3 的子群数量更多，研究起来也更为微妙，这些子群是作者们正在进行的研究课题。

定理 1 的证明遵循了与先前结果类似的框架 [31, 44] （另见 [30,§1.4.2]），但最终结果及所涉及的论证要微妙得多。除了更复杂的上同调集之外，当 p 对于 G [20,定理 1.1] 而言具有良特征时，一些有用的性质（例如子群的可分性，即群论中心化子维数与无穷小中心化子维数相等）成立，然而在这里却常常失效。此外，在良特征下，许多自然子群 H要么具有上升遗传性，即 H-cr 子群的连通子群仍为 H -cr，要么具有下降遗传性，即 G-cr 子群的连通子群为 H-cr [30, 定义 2.47]。例如， [2, 定理 3.26] 指出，包含 G 的极大环面的约化子群同时具有上升遗传性和下降遗传性。这在坏特征下并不成立； [30, 例 2.40], 给出了一个有趣的例子，其中两类 F_4-cr 子群分别是非-B_4-cr 和非-C_4-cr。对这类遗传性质的研究是当前正在开展的工作。

注 1.1. 表 4 显示，当 $p = 2$ 时， F_4 型群有两个 B_3 型子群共轭类，它们不是 F_4-完全约化的；而表 5 显示， E_6 型群只有一个这样的子群共轭类。比较它们在低维模上的作用可知，这两个 F_4 子群共轭类在 E_6 中不会融合。因此，至少有一个子群类是 E_6- 完全约化的，所以 F_4 在 E_6 中不是下降遗传的。这与 $p \neq 2$ 的情形形成对照：根据 [36, 命题 16.9] 和 [2, 推论 3.21], F_4 既是上升遗传的，也是下降遗传的。

一个有趣的复杂情况是，存在一些非 G-完全约化子群，它们是 G 的连通约化子群中的极大者。对于这些子群，无法利用关于 G 中已知约化子群的先前结果，因为它们在 G 中的所有极大上群都是抛物子群。为简便起见，我们称这些子群为 MR。下面的结果描述了定理 1 中出现的这类子群。

推论 2. 设 G 和 p 如定理 1 中所述，令 X 为 G 的一个 MR 子群，其中 X 的每个单因子的秩至少为 3。那么， X 要么是 G 的一个极大连通子群，要么

(i) G 的类型为 E_6 ，且 X 是类型为 D_5T_1 的 Levi 子群；
(ii) G 的类型为 E_7 ，且 X 是类型为 E_6T_1 的 Levi 子群；(iii) $(G, X, p) = (E_7, D_4, 2)$，且 X 是非-G-cr；(iv) $(G, X, p) = (E_8, D_4, 2)$，且 X 是非-G-cr。

(i)–(iv) 中的每个子群都是 MR 子群。(i)、(ii) 和 (iv) 中的子群在 G 中共轭意义下唯一，而 (iii) 中的子群构成无穷多个共轭类。

此推论可直接由定理 1 与极大连通子群分类 [26] 得出。(iii) 中的子群是在 [22], 中发现的，而 (iv) 中的子群是$_2$

新的。此处及下文中，我们会宽泛地使用术语，将 G 的 Levi 子群称为 G 的某个抛物子群的 Levi 因子。

对于下一个推论，回顾一下，G 的子系统子群是由极大环面规范化的半单子群。这些构成了 G 的一大类子群，对应于 G的根系中 p-闭子系。未包含在子系统子群中的连通约化子群既相对少见，也较难研究。以下结果补充了其好特征类比 [31, 推论 6]。

推论 3. 设 G 和 X 满足定理 1 的假设。那么，要么 X 包含于 G的一个真子系统子群中，要么 $p = 2$，并且以下结论之一成立：

(i) $(G, X) = (E_6, B_3)$，且 X 属于一个极大子群 F_4；(ii) $(G, X) = (E_7, D_4)$，且 X 是极大约化子群；(iii) $(G, X) = (E_8, D_4)$，且 X 是极大约化子群；(iv) $(G, X) = (E_8, B_3)$，且 X 包含于第 (iii) 部分中的某个子群。

(i)–(iv) 中的每个子群都不包含在 G 的任何真子系统子群中。(i)、(iii) 和 (iv) 中的子群在 G 中在共轭意义下唯一，而 (ii) 中的子群则构成无穷多个共轭类。

推论 3 可通过查阅表 4–8 得证：其中列出的除上述 (i)–(iv) 外的子群 X，均给出了嵌入 G 的某个子系统子群的明确方式。(ii) 和 (iii) 中的子群是极大约化子群，因此不包含在任何真约化子群中。根据 Borel–de Siebenthal算法 [6], ，当 G 的类型为 E_6 时，G 的每个子系统子群都包含在类型为A_1A_5、A_2^3 或 D_5 的子群中。其中，只有 D_5 能包含类型为 B_3 的子群；但这样的子系统子群会中心化 G 的一个一维环面，而 (i) 中的子群 X 则不会。同样，查阅表 8 可知，(iv) 中的子群 X 不会中心化 G 中的非平凡环面，因此它只能包含在秩极大的子系统子群中，且该子群的所有单因子的秩都至少为 3。接下来只需考虑类型为 A_8、D_8 和 A_4^2 的子系统子群。后者不包含子群 B_3；前两者分别作用于 $L(G)$，其不可分解直和项的维数分别为 80、84、84 和 120、128 [28, 引理 11。2]这与 X 所述的作用不相容，因为其不可分解直和项的维数为 30、30、62、63 和 63。

接下来，[3] 的主要结果指出，只要特征 p 对 G 或 $p > 3$是良好的，两个彼此对易的 G-cr 子群的乘积仍是G-cr。我们猜想事实上 $p \neq 2$ 就足够了 [30, 备注 1.12]。接下来的结果为这一方向提供了证据。

推论 4. 设 G 和 X 满足定理 1 的假设。若 X 不是单的，则 $p = 2$、G 的类型为 E_8，而 X 的类型为 B_3^2。X 的每个单因子都是 G-cr。

这里的第一条结论直接由定理 1 中非G-cr 子群的分类得出。最后一条结论利用了表 5–8 中包含的额外信息。具体而言，定理 1 中类型为 B_3 的非G-cr 子群的中心化子秩至多为 2，而非G-cr 子群 B_3^2 的各因子彼此中心化，因此不属于这些非G-cr 子群。

对于下一个结果，回顾 [2, 引理 3.17]：a G-cr 子群的中心化子仍是G-cr，因此是约化的。特别地，当 G 是半单时，G-不可约子群具有平凡连通中心化子 [29, 引理 2.1]。当特征为零或足够大时，反过来也成立：由于约化子群是 G-cr，因此它是 G-不可约的，当且仅当它不包含在 G的任何真 Levi 子群中；而这又当且仅当它的连通中心化子是平凡的。正特征下这一结论不成立，而下一个结果将说明这种失效的程度。这推广了 [31, 推论 9]。嵌入的记号见第 2.7 节。

推论 5. 设 G和 X 满足定理 1 的假设，并假设 $C_G(X)^\circ$ 是约化的。那么 $C_G(X)^\circ = 1$。

这恰好发生在两个子群 X 上（在共轭意义下）。具体而言，$p = 2$, G 具有类型 E_8，而 X 或是经由 $T(101)$ 的子群 $A_3 < D_8$，或是经由 0001 的 $B_4 < D_8$。

我们的最终结果揭示了一个有趣的现象：约化子群 G 在低维 G-模上的作用。具体而言，人们通常预期，一个真约化子群在给定的不可约 G-模上会有许多不可分解直和项。然而，我们展示了一些不可分解地作用的子群。这补充了诸如 [27] 这样的先前结果，后者对不可约作用的子群进行了分类。下文中，我们用 $V_{\min}$ 或 V_n 表示维数最小的非平凡 G-模，它是 n。

推论6. 设 G 和 X 满足定理 1 的假设，并设 $V = L(G)$ 或 $V_{\min}$。当且仅当 $p = 2$ 且 (G, X, V) 属于以下情形之一时，$V \downarrow X$ 不可分解：

(i) $(G, X) = (F_4, B_3)$，其中 X 属于短根子群 D_4 且 $V = V_{26}$，(ii) $(G, X) = (E_6, B_3)$，其中 $V = L(G)$，(iii) $(G, X) = (E_7, D_4)$，其中 X 是极大约化子群，且 $V = V_{56}$ 或 $V = L(G)$。

本文的结构。第 2 节介绍相关记号，第 3 节给出预备结果，随后在第 4–9 节证明定理 1。每节对应一种非-G-cr 子群的李型，并依据第 3.1 节所述策略划分为若干小节。接着，第 10 节确定定理 1 中出现的每个 X 的限制 $L(G) \downarrow X$ 和 $V_{\min} \downarrow X$，而这些子群及其相关数据的表格列于第 11 节。

2. Notation

2.1. 代数群、根与权。全文中，所有群都是定义在特征为 $p > 0$ 的代数闭域 K 上的线性代数群。我们采用“群簇”观点 [8], ，因此代数群是一般线性群在 K 上的扎里斯基闭子群的 K-点。文中提及的所有子群都是闭子群，所有群同态都是簇态射。“单”和“半单”一词始终指连通群。群作用均为左作用，以点表示，即 $(g, q) \mapsto g \cdot q$，其中 g 属于群 G，而 q 属于一个 G-集。

对于约化代数群 G，取其极大环面 T 及相应的根系 Φ。令 $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ 为单根基，$\{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$ 为相应的基本支配权，并采用布尔巴基排序 [9, （第 VI 章，图版 I–IX）]。记号 $a_1 a_2 \dots a_l$ 表示一个根 $\sum a_i \alpha_i$ 或一个权 $\sum a_i \lambda_i$；上下文将消除歧义。

Weyl 群 $W = N_G(T)/T$ 作用于 $\mathbb{Z}\Phi \otimes \mathbb{R}$。对于 $\alpha \in \Phi$，令 s_α 表示垂直于 α的超平面上的反射，并令 $U_\alpha = \{x_\alpha(t) : t \in K\}$ 为对应于 α的根子群。对于 $t \in K^*$，定义

$$n_\alpha(t) = x_\alpha(t) x_{-\alpha}(-t^{-1}) x_\alpha(t) \in N_G(T),$$
$$h_\alpha(t) = n_\alpha(t) n_\alpha(-1) \in T,$$

使得 $n_\alpha(t)$映射到 $s_\alpha \in W$, [10, §6.4]。令 $n_\alpha = n_\alpha(1)$，对于单根 α_i，令 $s_i = s_{\alpha_i}, n_i = n_{\alpha_i}$ 和 $h_i(t) = h_{\alpha_i}(t)$。

~记号 X 表示由 G的长根子群生成的 G 的子群。若 Φ 具有~种不同的根长，则 X 表示由 G的短根子群生成的子群。

2.2. 模。对于约化代数群 G 及 G的支配权 λ，令 $V_G(\lambda)$表示最高权为 λ的不可约 G模。当 G 明确时，我们将该模简记为 λ；特别地，0 表示平凡的不可约 G模。对应于 G的韦尔模记作 $W(\lambda)$ 或 $W_G(\lambda)$，倾斜模记作 $T(\lambda)$ 或 $T_G(\lambda)$。我们用 $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$表示 G模 V的对偶。若 $G = G_1 G_2 \dots G_k$是约化代数群的交换乘积，则 $(V_1, \dots, V_k)$表示 G模 $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$，其中每个 i对应一个 G_i模 V_i。

设 $F : G \to G$ 是一个弗罗贝尼乌斯自同态，它对根元素的作用为 $x_\alpha(t) \mapsto x_\alpha(t^p)$，其中 $\alpha \in \Phi, t \in K$。若 V 是由表示 $\rho : G \to GL(V)$ 给出的 G-模，则 $V^{[r]}$ 表示由 $\rho^{[r]} := \rho \circ F^r$ 给出的模。设 $M_1, \dots, M_k$ 为 G-模，且 $m_1, \dots, m_k$

为正整数。则 $M_1^{m_1}/\ldots/M_k^{m_k}$ 表示一个与 $M_1^{m_1}\oplus\ldots\oplus M_k^{m_k}$ 具有相同合成因子的 G-模。此外，$V=M_1|\ldots|M_k$ 表示一个底层级数为 $V=V_1>V_2>\ldots>V_{k+1}=\{0\}$ 的 G-模，因此对 $1\le i\le k$ 有 $\mathrm{Soc}(V/V_{i+1})=V_i/V_{i+1}\cong M_i$。我们用 $L(G)$ 表示伴随 G-模。对于类型为 F_4 的 G，我们分别将这些维数最小的非平凡模记为$V_{26}=V_G(\lambda_4)$、$V_{27}=V_G(\lambda_1)$ 和 $V_{56}=V_G(\lambda_7)$。

2.3. 抛物子群与 Levi 子群。设 $J=\{\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\ldots,\alpha_{j_r}\}\subseteq\Pi$，并设 $\Phi_J=\Phi\cap\mathbb{Z}J$。则与 J 对应的 G 的标准抛物子群为 $P_J=\langle T,\ U_\alpha:\ \alpha\in\Phi_J\cup\Phi^+\rangle$。它具有 Levi 分解 $P_J=Q_JL_J$，其中 $Q_J=R_u(P)=\langle U_\alpha:\ \alpha\in\Phi^+\setminus\Phi_J\rangle$，而 $L_J=\langle T,\ U_\alpha:\ \alpha\in\Phi_J\rangle$ 是 P_J 的标准 Levi 因子。若导出子群 L' 具有李型 X，则分别称 P_J 和 L_J 为 G 的 X-抛物子群和 X-Levi 子群。例如，当 G 具有类型 E_6 时，子群 P_{2345} 是 G 的一个 D_4- 抛物子群。请回忆，“G 的 Levi 子群”是指 G 的某个抛物子群的任意 Levi 因子。

2.4. 形状模。对于子集 $J\subseteq\Pi$，$\gamma=\sum_{\alpha\in\Pi}c_\alpha\alpha$ 的层是总和 $\sum_{\alpha\in\Pi\setminus J}c_\alpha$，而 γ 相对于 J 的形状是 $\sum_{\alpha\in\Pi\setminus J}c_\alpha\alpha$。因此，对于上述标准抛物子群 $P_J=Q_JL_J$，Q_J 由对应于正层根的根子群生成。对于每个 $i\ge1$，我们定义

$$Q(i)=\langle U_\gamma:\gamma\text{ has level }\ge i\rangle,$$

Q_J 的一个 L-稳定正规子群。Q 的第 i 层是 $Q(i)/Q(i+1)$，它在 $Q/Q(i+1)$ 中心。根据 [1, 定理 2 和注记 1],，每一层都是一个 L-模，并且是形状模 V_S 的直和，其中 S 遍历层为 i 的形状。每个 V_S 要么不可约，要么是长度为 2 的不可分解模；后一种情形仅当 $(G,p)=(G_2,2)$、$(G_2,3)$ 或 $(F_4,2)$ 时出现。此外，L 在 V_S 上的高权可通过组合方法确定，参见 [24, 引理 3.1]。

2.5. 中心化子。讨论子群中心化子时，我们用 U_i 表示一个 i 维幺正群，用 T_j 表示一个 j 维环面。例如，$C_G(X)^\circ=U_5T_1$ 表示$C_G(X)^\circ$ 有一个 5 维幺幂根基，其商为一个一维环面。

2.6. G 及其 Levi 子群的根。若 L 是 G 的标准 Levi 子群，则 L 的根也是 G 的根，我们必须始终一致地识别这些根。若 L_0 是 L 的一个单因子，则令 $\Psi=\{\alpha_1',\ldots,\alpha_m'\}$ 为 L_0的单根，它是 Π的一个子集。对 Π作线性排序，使得当 $i<j$时，$\alpha_i<\alpha_j$。若 L_0 的李型为 A_m，则选取嵌入 $L\to G$，使得 α_1' 是包含于 Ψ中的 G 的最小单根。若 L_0 的类型为 E_6 或 E_7，则对所有 i，$\alpha_i'=\alpha_i$。若 L_0 的类型为 D_4，则 $(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3',\alpha_4')=(\alpha_2,\alpha_4,\alpha_3,\alpha_5)$。若 L_0 的类型为D_5，则 $(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3',\alpha_4',\alpha_5')=(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_2)$ 或 $(\alpha_6,\alpha_5,\alpha_4,\alpha_3,\alpha_2)$。若 L_0的类型为 D_6，则 $(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3',\alpha_4',\alpha_5',\alpha_6')=(\alpha_7,\alpha_6,\alpha_5,\alpha_4,\alpha_3,\alpha_2)$。最后，若 L 有多个同类型的分支，则按照其最小单根“α_1'”作为 Π中元素的位置对这些分支排序。例如，若 $G=E_7$ 且 $L=L_{12567}$，则 L 是一个 $A_1A_1A_3$ 型 Levi 子群，第一个 A_1 因子对应于 α_1，第二个则对应于 α_2。
当 G 是 E_7 或 E_8 型的单群时，我们需要区分 G 的某些同构子系统子群。对于 E_7 型，存在两个共轭类的 A_5-Levi 子群，其代表元为 $A_5=L_{24567}$ 和 $A_5'=L_{34567}$。根据 [24, 表 8.2]，我们有 $C_G(A_5)^\circ=A_2$ 和 $C_G(A_5')^\circ=A_1T_1$。此外，A_5' 包含于子群 E_6 中，而 A_5 则不包含于其中。在 E_8 中，子群 A_7 有两个共轭类：一个由 A_7-Levi 子群 $L_{1345678}$ 给出，我们将其记为 A_7；另一个记为 A_7'，且包含于 G 的一个 E_7-Levi 子群中。再次根据[上述文献]，我们有 $C_G(A_7)^\circ=T_1$，以及 $C_G(A_7')^\circ=A_1$。

2.7. 嵌入经典群。最后，对于约化代数群 X，有理X-模 V 对应于从 X 到 $H=\mathrm{SL}(V)$、$\mathrm{SO}(V)$ 或 $\mathrm{Sp}(V)$ 的一个表示；为简便起见，我们将其记为“$X\le H$ 经由 V”。当 $V=V_X(\lambda)$ 不可约时，我们进一步将其记为“$X\le H$ 经由 λ”。我们有时会讨论“$X\le Y\le Z$ 经由 λ”的链，其中

在这种情况下，嵌入指第一个包含映射 $X \to Y$；包含映射 $Y \to Z$ 将由上下文明确。

3. Preliminary Results

3.1. 子群枚举的策略。从现在起， G 表示代数闭域 K上的一个例外李型单代数群。为证明定理 1，我们采用 [44] 和 [31]中提出的策略。每个非G-完全约化子群的共轭类都可在某个 G的标准抛物子群 P 中取一个代表元X ； 取包含X的极小 P ，并令 X_0 为 X 在 P的标准 Levi 因子 L 中的像。由极小性可知， X_0 是L-不可约的。如果 X 是约化的，那么 X 就是半直积 QX_0 中 $Q := R_u(P)$的一个补子群（作为抽象群）。上同调集 $H^1(X_0, Q)$可用于参数化此类补子群的 Q-共轭类。以下结果表明， $H^1(X_0, Q)$的非平凡元素会产生非G-完全约化子群，而非相关联的抛物子群会产生彼此不相交的非G-完全约化子群的 G-共轭类。这里，若两个抛物子群的 Levi 因子彼此 G-共轭，则称它们相关联。

引理 3.1（[5, 定理5.8 和命题 5.14], [31, 引理 3.26]）。设 X 是 G的闭子群，设 P 是包含 X 的 G的抛物子群，并设 X_0 是X 在投影到 P的某个 Levi 因子下的像。那么， X 与 X_0 G-共轭，当且仅当 X 与 $X_0R_u(P)$-共轭。

如果 P_1 和 P_2 是包含 X 的 G的抛物子群中极小的，那么 P_1 和 P_2 相关联，且 X 在各自 Levi 因子中的像彼此 G-共轭。

引理的第二部分使我们能够将非-G-CR 子群的枚举拆分开来：对每一对 (L, X_0) 分别设一个小节，其中 L 表示一个 Levi 子群的 G-共轭类，而 X_0 是一个 L-不可约子群。

此时我们需要两个关键要素。首先，我们需要描述每个 L中出现的 L-不可约子群 X_0 。本文作者已在 [32] 和 [46], 中明确完成了这项工作，其中给出了每个 G的 Levi 子群L 的各个单因子中的不可约子群；一般的 L-不可约半单子群则是这些子群的中心积。其次，我们必须描述每个这样的 L-不可约子群 X_0对应的集合 $H^1(X_0, Q)$；这些集合在模去 Q-共轭后，对应于半直积 QX_0中 Q 的补子群。

3.2. 半直积中的上同调与补子群。回顾一下，当 X_0 和Q 是代数群，且 X_0 通过态射 $X_0 \times Q \to Q$ 作用于 Q 时，半直积 QX_0 中Q 的补子群与有理 1-余循环双射对应。所谓有理 1-余循环，是指簇态射ϕ： $X_0 \to Q$ ，满足对于所有 x、 $y \in X_0$，均有 $\phi(xy) = \phi(x)(x \cdot \phi(y))$。这里，根据定义， Q 的补子群 X是 QX_0 的一个闭子群，并满足 (i) $QX = QX_0$、(ii) $Q \cap X = 1$和(iii) $L(Q) \cap L(X) = \{0\}$，参见 [43, Definition 3.2.1] 和 [34, 4.3.1]。若存在 $q \in Q$ ，使得对于所有 $x \in X_0$，均有 $\phi(x) = q^{-1}\psi(x)(x \cdot q)$，则称两个余循环 ϕ、 ψ 上同调等价。这在 1-余循环集合 $Z^1(X_0, Q)$上定义了一个等价关系，相应的商记作 $H^1(X_0, Q)$，它参数化了模 Q-共轭的补子群。集合 $H^1(X_0, Q)$有一个指定元素，即将 X_0 的每个元素映射到 Q的单位元的映射所对应的等价类。一般而言， $H^1(X_0, Q)$只是一个带基点集合；但若 Q 是一个 KX_0-模，则 $H^1(X_0, Q)$自然构成一个 K-向量空间。

根据 [43, 引理 3.6.1], ，当 X_0 是连通约化的、 Q 是幺幂的且 $p \neq 2$时，满足 (i) 和 (ii) 的子群自动满足 (iii)。然而，在特征 2 下会出现一个微妙问题：闭约化子群可能作为半直积中的抽象补群出现，因此若要涵盖所有这类子群，就必须放宽对李代数的条件。所幸，我们对这种情况有很好的掌控。当 X_0 定义在 $\mathbb{F}_p \subset K$上时，我们令 $Q^{[1]}$ 表示由 X_0的作用经弗罗贝尼乌斯态射 $X_0 \to X_0$ 扭曲后得到的代数 X_0-群，其中该态射由 p次幂的域自同构 $K \to K$诱导。

于是我们得到诱导映射 $Q \to Q^{[1]}$ 和 $H^1(X_0, Q) \to H^1(X_0, Q^{[1]})$；后者总是单射，并且通常是带基点集合的同构 [43, 定理 3.5.6]。以下结论现在是 [43, 引理 3.6.1]的一个特例。

引理 3.2. 设 X_0 是一个作用于幺正代数群 Q 上的单代数群，作用由态射 $X_0 \times Q \to Q$ 给出，并假设 Q 有一个由正规且 X_0-稳定的子群构成的滤过，其逐次商为 X_0-模。设 X 是半直积 QX_0 中 Q 的一个抽象补群。那么：

(i) X 是代数群意义下 Q 的一个补子群；或者 (ii) $p = 2$、X_0 的类型为 C_n，X 的类型为 B_n，且 Q 的滤过中有一个 X_0-合成因子具有高权 λ_1。

在 (ii) 中，如果这些群和态射都定义在素域上，那么 X 对应于 $H^1(X_0, Q^{[1]})$ 中的一个元素，该元素不属于 $H^1(X_0, Q) \to H^1(X_0, Q^{[1]})$ 的像。因此，$H^1(X_0, Q^{[1]})$ 与 QX_0 中那些作为 Q 的抽象补群的闭连通约化子群的 Q-共轭类之间存在双射。

因此，要对 G 中非 G-cr 子群进行分类，我们需要了解各种群 X_0 对应的集合 $H^1(X_0, Q)$，以及当 X_0 具有类型 C_n 和 $p = 2$ 时的 $H^1(X_0, Q^{[1]})$。在许多情况下，可以利用长正合列将问题化为阿贝尔上同调计算。具体而言：

引理 3.3（[39, §I.5, 命题 36 和 43]）。设 Q 是一个代数 X_0-群，R 是 Q 的一个 X_0-稳定子群。则：

（i）存在一个带基点集合的正合列

$$0 \to R^{X_0} \to Q^{X_0} \to (Q/R)_0^X \to H^1(X_0, R) \to H^1(X_0, Q)$$

其中，$-^{X_0}$ 表示 X_0 的作用下的不动点子群。

（ii）此外，若 R 是 Q 的中心子群，则存在一个带基点集合的正合列

$$0 \to R^{X_0} \to Q^{X_0} \to (Q/R)^{X_0} \to H^1(X_0, R) \to H^1(X_0, Q) \to H^1(X_0, Q/R) \to H^2(X_0, R)$$

where $H^2(X_0, R)$ is the second cohomology group defined for example in [21, §II.4.2].

请注意，这些只是带基点集合之间的正合列，也就是说，每个映射的像都是下一映射下指定元素的原像。不过，这已经足以推导出关于 $H^1(X_0, Q)$ 的许多信息。例如，当 $X \leq M \leq G$ 是一条约化子群链时，它还使我们能够将 M-完全可约性与 G-完全可约性联系起来：

推论 3.4. 设 $M \leq G$ 是两个约化代数群，且设 $P_M = Q_M L_M$ 是 M 的一个抛物子群，其中包含约化子群 X，使得 X 不包含在 P_M 的任何 Levi 因子中，并记 X 在 L_M 中的像为 X_0。此外，设 $P = QL$ 是 G 的一个抛物子群，使得 $P_M = M \cap P$ 和 $Q_M = M \cap Q$。

If $(Q/Q_M)^{X_0} = \{0\}$ then X is non-G-cr.

证明。假设条件蕴含映射 $(Q/Q_M)^{X_0} \to H^1(X_0, Q_M)$ 为零；又由于 X 是非 M-完全可约的，后一个集合包含非零点。由正合性可知，这些点不属于核 $H^1(X_0, Q_M) \to H^1(X_0, Q)$；由于 X 对应于这样一个点，X 仍然是非 G-完全可约的。□

3.3. 逼近 $H^1(X_0, Q)$。现在我们回顾一种在 [44] 中提出并在 [31], 中广泛应用的方法，用于逼近 $H^1(X_0, Q)$。当 Q 是抛物子群 P的幺幂根基时，回顾一下，Q 具有由正规子群 $Q(i)$（$i = 1, \ldots, r$）构成的滤过。我们将相应的层记作$V_i = Q(i)/Q(i+1)$；它们是 Levi 子群 L 的模，因此当 $X_0 \leq L$时也是 P的模以及 X_0 的模。由此可以构造直和

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_{X_0, Q} := \bigoplus_{i=1}^{r} H^1(X_0, V_i).$$

对于 $i = 1, \dots, r$，现在归纳地定义偏映射 $\rho_i\colon \mathbb{V} \to H^1(X_0, Q/Q(i+1))$ [44,定义 3.2。5]。设 $\mathbf{v} = ([\gamma_1], \dots, [\gamma_r]) \in \mathbb{V}$。对于 $i = 1$，令 $\rho_1(\mathbf{v}) = [\gamma_1]$。对于 $i > 1$，通过自然映射 $H^1(X_0, Q/Q(i+1)) \to H^1(X_0, Q/Q(i))$，将 $\rho_{i-1}(\mathbf{v})$ 提升为某个元素 $[\Gamma_i] \in H^1(X_0, Q/Q(i+1))$（若可行），然后令 $\rho_i(\mathbf{v}) = [\Gamma_i][\gamma_i]$。只要 $[\Gamma_i]$ 存在，这个乘积就是良定义的，因为 $Q(i)/Q(i+1)$在 $Q/Q(i+1)$中是中心的。如果不存在这样的提升 $[\Gamma_i]$，则声明 ρ_i 在 $\mathbf{v}$ 处未定义。事实证明，这些偏映射 $\rho_i\colon \mathbb{V} \to H^1(X_0, Q/Q(i+1))$ 都是满射（参见 [44, 命题 3.2.6], [31, 引理 3.10]），我们记 $\rho = \rho_r$。作为一个特殊的推论，如果对于所有层 V_i 都有 $H^1(X_0, V_i) = \{0\}$，那么 $H^1(X_0, Q) = \{0\}$，且 QX 中 Q 的所有补子群都与 X Q-共轭。类似地，在引理 3.2(ii) 的情形下，若 X_0 为 C_n 型，如果对于所有 i 都有 $H^1(X_0, V_i^{[1]}) = \{0\}$，则不会出现（抽象的） B_n 型补子群。

最后， Q 作用于其自身；如果 $q \in Q^{X_0}$，则 q 用于融合对应于 $\mathbb{V}$ 的不同元素的子群类。完整的说明见 [31, 第 5292–5294] 页。待我们在证明中用到这一作用时，将给出完整细节；目前我们只指出，如果 q 映射到 $V_i^{X_0}$ 中的一个点，那么通过 q 的共轭会对每个 j 诱导出 X_0-模同态 $V_j \to V_{i+j}$ 以及线性映射 $H^1(X_0, V_j) \to H^1(X_0, V_{i+j})$，从而得到一个映射 $\mathbb{V} \to \mathbb{V}$。通常，这会以如下方式融合子群类：由 $(k_1, \dots, k_m)$ 表示的子群类 $\in \mathbb{V}$也将由一个具有 $k_i k_j = 0$ 的元素表示，其中 i 和 j 为特定指标。

3.4. 从 Q-共轭到 G-共轭。迄今的理论描述了抛物子群 $P = QL$ 中非-G-cr 的半单子群，至多相差 Q-共轭；但故事并未就此结束，因为 G 中的元素可以将不同的共轭类融合起来。我们回顾一下 [31, Section 3.5] 中的一些细节。
首先，环面 $Z(L)$ 作用于 Q，并中心化每个子群 $X_0 \le L'$，从而在 $H^1(X_0, Q)$ 上诱导出一个作用。为每个空间 $H^1(X_0, V_i)$ 选定一组基，其中 V_i 是 Q 的一个层，映射 ρ 使我们能够用某些 m-元组 $(k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{V}$（其中 m）来参数化 QX_0 中 Q 的补子群。 ρ 的定义涉及许多任意的提升选择，但在作出适当选择后， $Z(L)$ 的作用可视为将坐标 k_i 乘以适当的标量，从而融合所有相应的子群共轭类。 $Z(L)$ 在 Q 的非单位元上是不动点自由的，因为 $C_G(Z(L)) = L$，因此该作用在 $\mathbb{V}$ 的每个坐标上都非平凡。

此外， G 的元素可以融合出现在标准抛物子群P_I 和 P_J中的子群的共轭类，其中 I 和 J 是单根的子集，且不一定彼此不同。由引理 3.1 可知，在这种情况下，相应的 Levi 子群 L_I 和 L_J 在 G下共轭。特别地，我们将关注韦尔群 $W(G) = N_G(T)/T$中的元素 w，其原像为 $\dot{w} \in N_G(T)$，且满足 $\dot{w} \cdot L_I = L_J$。在这种情况下， $\dot{w}$ 将 P_I的幺幂根基中的每个根子群映到 G的另一个根子群，而该子群可能属于也可能不属于 P_J。因此，若有一个子群$X \le P_I$，且对某个满足 $\dot{w} \cdot U \le Q_J$的子群 $U \le Q_I$有 $X \le UL_I$，那么 X在 G下共轭于 P_J的某个子群。同样，在第 4–9 节使用这类论证时，我们将详细说明相关的韦尔群元素，以及它们如何融合这些共轭类。

3.5. 非-G-cr 子群的李型。现在我们描述那些能在相关模上具有非零上同调的半单群李型 X。

引理 3.5。设 G 是特征 p 下一个例外型单代数群，且 G 有一个类型为 X 的非-G-cr 半单子群，其单分量的秩均至少为 3。那么 (G,X p) 出现在表 1 中。

注 3.6。在证明定理 1 的过程中，我们将证明引理 3.5 的逆命题，即确实存在每种类型的非-G-cr 子群。对于单型，这一点已在 [42] 中证明；而展示一个类型为 B_3^2 的非-G-cr 子群（第 5 节）即可完成论证。

证明。出现的单型 X 由 [42, 定理 1], 给出，因此我们只需考虑具有多个分量的类型。对于这样的类型 X，假设 G 有一个抛物子群

TABLE 1. 半单非-G-完全可约子群的类型

$\mathbf{X} \setminus G$	E_8	E_7	E_6	F_4
A_3, C_4, D_4	2	2		
B_3	2	2	2	2
C_3	3			
B_3^2, B_4	2			

子群 $P = QL$，其中包含一个 L-不可约子群 X_0，它也属于类型 X（或者在 $\mathrm{X} = B_n$时属于类型 C_n），且满足 $H^1(X_0, Q) \neq \{0\}$。根据上同调正合列（引理 3.3），我们看到，若对每个 i，都有 $H^1(X_0, Q(i)/Q(i+1)) = \{0\}$，则 $H^1(X_0, Q) = \{0\}$。因此，若要存在一个类型为 X 的非 -G-cr 子群，就需要某个不可分解的 X_0-模直和项 V（它是 Q 的一个层的直和项）满足 $H^1(X_0, V) \neq \{0\}$。

在 [32] 和 [46], 中，给出了 G 的 Levi 子群的每个单因子中的不可约子群的明确列表。除了 [32] 中类型为 D_7 的因子外，这些子群均按在单因子中的共轭分类；对于后者，也允许在图自同构下共轭。因此，对于 G 的每个 Levi 子群 L， L-不可约半单子群恰好是各单因子中不可约子群的乘积。总之，以这种方式得到的非单半单 L-不可约子群 X_0 如下所示。

L	$X_0 A_3^2$	$X_0 = L' A_3 A_4$ $X_0 = L' D_6$	A_3^2 经由 (010, 0) + (0, 010)
D_7	$A_3 D_4$ 经由 (010, 0) + (0, λ_1)	B_3^2 经由 (100, 0) + (0, 100) ($p \neq 2$) 或 0	
((100, 0) + (0, 100))	0 ($p = 2$)	$A_3 B_3$ 经由 (010, 0) + (0, 100) + 0 ($p \neq 2$) 或	
(010, 0) + (0, T(100)) ($p = 2$)	$A_3 B_3$ 经由 (010, 0) + (0, 001)		

只需证明，对于每个这样的 X_0 和每个相关的 V，都有 $H^1(X_0, V) = \{0\}$，但 $p = 2$ 的 B_3^2 型 X_0 除外。根据上同调的 K¨unneth 公式，若 U_i 是约化群 $Y_i (i = 1, 2)$ 的模，则 $H^1(Y_1 \times Y_2, U_1 \otimes U_2) \cong \bigoplus_{j=0,\ 1} H^j(Y_1, U_1) \otimes H^{1-j}(Y_2, U_2)$。

作为 L-模， Q 的每一层都是形状模 V_S 的直和，如第 2.4 节所述。此类形状模的结构已由先前的研究确定，例如 [24, 引理 3.1]。具体而言，除取对偶外，对于 L 的一个 A_n 型单因子，我们得到不可约模 λ_1、 λ_2、λ_3；对于 D_n ($n \geq 4$) 型，我们得到 λ_1、 λ_{n-1} 和 λ_n；对于 B_3 型，我们得到 W(100) 和不可约模 001；对于 C_3 型，我们得到 W(010)；对于 E_6 型，我们得到 λ_1；对于 E_7 型，我们得到 λ_7。

一旦这些形状模 V_S 已知，确定 L-不可约子群X_0 在 V_S 上的作用，通常只需进行常规的权空间计算。当 X_0 不是单群时， X_0 的每个单因子都包含于 L （因此也包含于 G）的某个真 Levi 子群中，该子群的导出子群是类型为 A_3、 A_4 或 D_4的单群。出现的非零形状模维数至多为 10，而 Q 滤过中出现的每个 L-模限制到 X_0 后，都是 X_0各因子对应的模的张量积。特别地，在上述每个分解 $U_1 \otimes U_2$ 中，每个因子 U_i 的维数至多为 10。

对于我们所关注的大多数不可约 X_0-模 V，第一上同调群 $H^1(X_0, V)$ 已经在文献中出现过。例如， [42, 引理 4.6] 汇总了许多此类结果。一般而言，这些上同调群可以根据相应韦尔模的结构和维数移位论证来确定，参见 [21, 命题 4.14] 以及其后的

注记。反过来，韦尔模的结构既可以使用 S. Doty 的 GAP 程序 [18] 计算，也可以结合 Weyl 特征标公式与已知的低维不可约模的权 [33]计算。作为一个初等例子，韦尔模W_{B_3}(100)的结构为 $100|0$，而维数移位给出 $H^1(B_3, 100) \cong H^0(B_3, 0) \cong K$。

最后，对于 X_0 的单因子 Y，我们发现，具有非零上同调（且维数至多为 10）的不可约 Y-模 U 只出现在类型为 B_3 和 $U \cong V_{B_3}$（100）的因子上。现在，除 $p = 2$ 时的 $B_3^2 < D_7$ 外，每个这样的因子 B_3 都包含在一个类型为 D_4 的真 Levi 子群中，该子群在三个 8 维模上的作用为倾斜模 T（100）或 001。根据定理 1，[16, 这样的模的上同调为零，因此，如果存在一个类型为 X 的非 G-cr 子群X，那么 $p = 2$ 且 $X = B_3^2 < D_7$。□

既然我们已确定了可能出现的非 G-cr 半单子群 X 的类型，接下来便描述 G 的 Levi 子群 L 的相关嵌入 $X_0 \to L$，其像为 L-不可约；这可直接由 [32] 和 [46] 的主要结果推出。

引理 3.7。设（G,X p）如表 1 所示，令 L 为 G 的一个 Levi 子群，$X_0 \le L$ 为一个L-不可约半单子群，其中 X_0 的类型为 X，或者当 X $= B_n$（$n = 3$ 或 4）时，X_0 的类型为 C_n。则以下情况之一成立：

（i） $p = 3$ 且（X_0, L'）=（C_3, D_7），其中 $H \to L'$ 通过 010 嵌入；或者（ii） $p = 2$ 且包含映射 $X_0 \to L'$ 如表 2 所述。

TABLE 2. 在 $p = 2$时包含相关不可约子群 X_0 的 Levi 子群

L'	嵌入 $X_0 \to L'$
B_3	A_3 经由 $010 + 0$
C_3	A_3 经由 010
D_4	B_3 经由 T(100)
	B_3 经由 001（2 个类）
A_5	C_3 经由 100
	A_3 经由 010
D_5	B_4 经由 T(1000)
D_6	A_3 经由 $010 + 010^{[r]}$ ($r \neq 0$；2 个类)
A_3^2	A_3 通过 ($100^{[r]}, 100^{[s]}$) 或 ($100^{[r]}, 001^{[s]}$) ($rs = 0$)

L'	嵌入 $X_0 \to L'$
E_6	$C_4 < F_4$
	$D_4 < C_4 < F_4$
A_7	C_4 通过 1000
	D_4 通过 1000
	B_3 通过 001
D_7	C_3 通过 $010 + 0$
	B_3^2 通过 $0\|((100, 0) + (0, 100))\|0$
	B_3 通过 $0\|(100 + 100^{[r]})\|0$ ($r \neq 0$)
	A_3 经由 101

最后，引理 3.7 告诉我们应关注哪些抛物子群 $P = QL$；我们考察每个相关的 L-不可约子群 X_0 在幺幂根基 Q上的作用；特别是，我们需要知道 X 如何作用于 Q各层中出现的形状模 V_S。

命题 3.8. 设 X_0 G的一个 G-cr 半单子群，类型为引理 3.7 中的 X，并设 G的一个抛物子群为 $P = QL$，其中 $X_0 \le L$ 是 L- 不可约的。若对于某个 Q 某一层中出现的形状模 V_S 的 X_0- 直和项 V，有 $H^1(X_0, V^{[1]}) \neq \{0\}$，则以下情况之一成立：

(i) $p = 3$ *and* $(X_0, L', V_S, V) = (C_3, D_7, V_{D_7}(\lambda_1), V_{C_3}(010))$ *with* $\dim H^1(X_0, V) = 1$, *or*
(ii) $p = 2$ *and* X_0, L', V_S *and* V *appear in Table 3.*

在 (ii) 中，如果 (X_0, V) =($D_4, V_{D_4}(\lambda_2)$)，那么 dim $H^1(X_0, V) = 2$；否则 dim $H^1(X_0, V^{[1]}) = 1$。后一种情形下，我们还有 dim $H^1(X_0, V) = 1$，除非 X_0的类型为 C_n且 $V_S \downarrow X_0$具有高权 λ_1（参见引理 3.2）。

注 3.9. 在证明定理 1 的过程中，我们将证明，除两个例外外，每当 X_0 在模 V 上有非零上同调时，这确实会产生一个非 G-cr 子群 G。这两个例外出现在 E_8 的 A_3^2-抛物子群中：此时 X_0 的类型为 A_3，且 $V = V_X$(210) 是形状模的一个直和项，但 $H^1(X_0, Q)$ 仍然为零。这是由于某个形状模的第二上同调群非零；根据引理 3.3，这会阻碍将余循环从 Q 的某一层提升到 Q 本身。

TABLE 3. 具有非零上同调的形状模， $p = 2$

G	L'	$X_0 \leq L$	$V_S \downarrow L'$	$V_S \downarrow X_0$
F_4	B_3	$X_0 = L'$	$100\|0$	$100\|0$
	C_3	$X_0 = L'$	$001\|100$	$001\|100$
E_6	A_5	C_3 经由 100	λ_1, λ_5	100
E_7	A_5	C_3 经由 100	λ_1, λ_5	100
			λ_3	$100\|001\|100$
		A_3 经由 010	λ_2, λ_4	$101 + 0$
	E_6	$C_4 < F_4$	λ_1, λ_6	$0100 + 0$
		$D_4 < C_4 < F_4$	λ_1, λ_6	$0100 + 0$
E_8	A_5	C_3 经由 100	λ_1, λ_5	100
			λ_3	$100\|001\|100$
		A_3 经由 010	λ_2, λ_4	$101 + 0$
	A_3^2	A_3 通过 $(100, 100^{[1]})$	(010, 100)	210
		A_3 通过 $(100^{[1]}, 100)$	(100, 010)	210
	E_6	$C_4 < F_4$	λ_1, λ_6	$0100 + 0$
		$D_4 < C_4 < F_4$	λ_1, λ_6	$0100 + 0$
	A_7	C_4 经由 1000	λ_1	1000
		D_4 经由 1000	λ_2	$0\|0100\|0$
		B_3 经由 001	λ_2	$0\|100\|010\|100\|0$
	D_7	B_3^2 通过 $0\|((100, 0) + (0, 100))\|0$	λ_1	$0\|((100, 0) + (0, 100))\|0$
		$B_3 < B_3^2$ 通过 $0\|(100 + 100^{[r]})\|0$ $(r \neq 0)$	λ_1	$0\|(100 + 100^{[r]})\|0$
		A_3 经由 101	λ_1	101

命题 3.8 的证明。正如引理 3.5 的证明中所述，每个出现的形状模 V_S 都是一个韦尔模，其可能的最高权范围较小。在大多数情况下，已知 X_0 嵌入 L' 后，确定作用 $V_S \downarrow X_0$ 只需进行常规的权空间计算。例如，当 L' 的类型为 A_n 时，所有模都属于自然模 λ_1 的张量代数，因此可以通过对 $\lambda_1 \downarrow X_0$ 进行张量积、取直和项等构造来计算 $V_S \downarrow X_0$ 。在其他情况下，可以将 X_0 的极大环面识别为 L' 的极大环面的一个子环面，从而确定 $V_{L'}$ 上 X_0 (λ) 的权。还有一些情况下，作用可由 Seitz [37, 定理 1] 的先前研究得出。例如，在 $C_3 < D_7$ 经由 010 且 $p = 2$ 的情形下， C_3 在形状模 $V_S = V_{D_7}(\lambda_6)$ 上的作用由 [37, 第四种情形$_8$, 第 283] 页给出。同样，对于 $A_3 < D_7$ 经由 101 且 $p = 2$ 的情形， X_0 在 $V_{D_7}(\lambda_6)$ 上的作用由 [37, S 情形$_7$, 第 283] 页给出。

现在我们详细讨论两个最复杂的情形，它们的 G 都是 E_8 型。当 X_0 为 B_3 型，并在 $p = 2$ 时通过 001 嵌入 A_7 ，出现的三个形状模的最高权分别为 λ_1、 λ_3 和 λ_6，因此它们分别限制到 X_0 上为 001、 $\wedge^3(001)$ 和 $\wedge^2(001)$。现在，001 是 X_0 的倾斜模，因此具有平凡上同调。外立方 $\wedge^3(001)$ 是一个维数为 56 的自对偶模，其权是 001 中两两不同的权的三元和；由此可知， $\wedge^3(001)$ 有一个最高权 101。考察 [33], ，我们发现 $W_{X_0}(101)$ 在特征 2 下是一个维数为 48 的不可约模；剩下的最高权是 001。由于 101 和 001 在特征 2 下都是倾斜模，因此 $\wedge^3(001)$ 分解为直和 $101 + 001$，且具有平凡上同调。最后，类似的计算表明， $\wedge^2(001)$ 的合成因子为 $0^2/100^2/010$。在此情形下，该模是一个单列模，其底层级数为 $0|100|010|100|0$。例如，一般理论告诉我们， $\wedge^2(001)$ 到 K 存在唯一的非零 X_0-同态（相差一个标量倍数），因为 001 在相似意义下仅支持一个非退化交替双线性形式。然而，确定子模结构最直接的方法是

通过计算进行，即使用生成一个足够大的有限子群（例如 $\mathrm{SO}_7(4) \leq X_0$）的显式矩阵；对于该子群，此模仍为单列模。
既然我们已知 $\wedge^2(001) = 0|100|010|100|0$，便可以求出它的第一上同调群。包含映射 $100|0 \to \wedge^2(001)$ 给出一个上同调长正合列，其中一部分为

$$H^0(X_0, 0|100|010) \to H^1(X_0, 100|0) \to H^1(X_0, \wedge^2(001)) \to H^1(X_0, 0|100|010).$$

这里的第一个群为零，右侧的群也为零，因为 $0|100|010$ 是韦尔模的对偶 [26, 引理 7.1.2(ii)]，而这类模的第一上同调为零 [17, 定理 1]。因此，中间的群同构；又由于 $H^1(X_0, 100|0) = K$，因为 $T(100) = 0|100|0$，而它的上同调为零 [同上文献。]。

最后再举一个例子，仍设 G 为 E_8型，考虑嵌入到 L'（D_7型）中的 X_0（B_3^2型）；该嵌入通过模 $V = 0|((100, 0) + (0, 100))|0$实现。于是 $\dim H^1(X_0, V) = 1$: 考虑短正合列 $\{0\} \to (100, 0)|0 \to V \to 0|(0, 100) \to \{0\}$ 及其相关联的长正合列。我们有 $H^0(X_0, 0|(100, 0)) = H^1(X_0, 0|(100, 0)) = \{0\}$，后者成立是因为它是一个韦尔模的对偶。由此可得 $H^1(X_0, (100, 0)|0) \cong H^1(X_0, V) \cong K$，如所述。最后，模 $V_{\lambda_6}(\lambda_6) \downarrow X_0$ 是每个因子的旋量模的张量积，根据 [24, 命题 2.7], ，它不可约且上同调为零，因此未列入表 3。□

我们特别提出命题 3.8 的一个具体情形，既因为其中的计算更为复杂，也因为在第 5 节对 B_3 型子群进行分类时，我们需要更多细节。
引理 3.10. 设 $p = 2$，设 X_0 是 C_3 型的单模，且 $M = \bigwedge^3 V_{X_0}(100)$。那么 $H^1(X_0, M)$ 消失，而 $H^1(X_0, M^{[1]})$ 是一维的。包含映射 $200 \to M^{[1]}$ 诱导第一上同调群的一个同构，而映射 $M^{[1]} \to 200$ 在第一上同调群上诱导零映射。

证明. 第一个结论成立，因为 $M = 100|001|100$，它没有第一上同调群非零的合成因子。不过请注意，$\dim H^1(X_0, 200) = 1$。现在，直接计算（例如使用 [18]）表明，韦尔模 $W(002) = 002|200|020|200|000|101|000$ 是一个单列的 X_0-模。因此，$W(002)$ 没有合成因子为 $002/200/000$ 的不可分解商模。取对偶后可知，$H^1(X_0, 200|002)$ 消失。
接下来，短正合列 $\{0\} \to 200 \to M^{[1]} \to 200|002 \to \{0\}$ 诱导出正合列$\{0\} \to H^1(X_0, 200) \to H^1(X_0, M^{[1]}) \to H^1(200|002) = \{0\}$，这表明 $H^1(X_0, M^{[1]}) \cong H^1(X_0, 200) \cong K$。这也表明映射 $200 \to M^{[1]}$ 在第一上同调群上诱导出一个同构。

最后，$M^{[1]}$ 的子模 $002|200$ 的第一上同调群是一维的，这可由短正合列 $\{0\} \to 200 \to 002|200 \to 002 \to \{0\}$ 诱导出 $\{0\} \to K \to H^1(X_0, 002|200) \to H^1(X_0, 002) = \{0\}$ 看出。接着，$\{0\} \to H^1(X_0, 002|200) \to H^1(X_0, M^{[1]}) \to H^1(X_0, 200)$ 的正合性表明，映射 $M^{[1]} \to 200$ 在上同调群上诱导出零映射。□

3.6. 展示非-G-cr 子群。在许多情况下，研究第一上同调会限制给定类型的非-G-cr 子群可能出现的共轭类数目。这里，我们汇集了一些有助于证明此类子群确实存在的结果。在某些情况下，我们会知道存在非-M-cr 子群，且 M 是 G 的真约化子群；此时，了解这类子群何时也是非-G-cr 会很有帮助，但这并非必然。

引理 3.11（[2, 引理 2.6 和推论 3.21]）。设 S 是连通约化代数群 G 的线性约化子群。那么 S 是 G-cr；并且，若 $H = C_G(S)^\circ$，则 H 的子群是 H-cr 当且仅当它是 G-cr。

在 S 是环面的特殊情况下，$C_G(S)$ 是 G 的 Levi 子群，而这一情形的结论最初由 [40, 命题 3.2] 证明。

以下是 M. Liebeck [2, 例 3.45 的一个小幅推广].

命题 3.12. 设 X 是一个群，具有忠实的不可约模 V，其维数为偶数，特征为 $p = 2$，并且承载一个非退化双线性型。
那么，正交直和 $W = V \perp V$ 在 X 上实现为 $H = \mathrm{Sp}(W)$的一个非-H-cr子群；若 V 是正交的，它也实现为 $\mathrm{SO}(W)$的一个非-H-cr子群。

证明. 我们只需证明 X 是非-H-cr的。将上文的左、右直和项分别记为 V'、V''，并固定一个等距的 X-模同构 $\phi\colon V' \to V''$。那么，W 的非零真 X-稳定子空间（除 V'' 本身外）全都具有 V_λ的形式，其中

$$V_\lambda = \{v + \lambda\phi(v) \,:\, v \in V'\}.$$

现在，由于 ϕ 是等距变换且 V' 与 V''正交，我们有 $(v + \lambda\phi(v),\ w + \lambda\phi(w)) = (1 + \lambda^2)(v, w)$。由于双线性型非退化且 $p = 2$，当且仅当 $\lambda = 1$时，此表达式对所有 v、$w \in V$ 均为零。因此，X 保持 W的唯一非零全各向同性子空间，故 X 包含于 $H = \mathrm{Sp}(W)$的唯一抛物子群中，从而是非-H-cr的。类似地，若 V承载一个非退化二次型 q，则对所有 $v \in V'$，$q(v + \lambda\phi(v)) = (1 + \lambda^2)q(v)$，同样可知 V_1 是 W唯一的非零 X-稳定全奇异子空间，因此 X 是非-$\mathrm{SO}(W)$-cr的。□

注 3.13。我们将在三种情形下用到这个命题：当 $X = A_3 < H = D_6$通过 $010 + 010$ 时，当 $X = B_3 < H = D_8$ 通过 $001 + 001$ 时，以及当 $X = D_4 < H = D_8$ 通过$1000 + 1000$ 时。每种情形都会得到 H 的两个彼此不H-共轭且非G-完全可约的子群，例如可以通过它们在 H 的半旋量模上的作用不等价看出这一点；这些子群在 H 的一个外自同构下共轭。一般而言，利用轨道-稳定子定理，以及 $W = V \perp V$ 上该形式的完整等距群中 X 在共轭意义下唯一这一事实，可以证明以这种方式出现的 H-共轭类子群有一个或两个。

3.7. 计算中心化子。现在我们讨论计算每个定理 1 中出现的 X 对应的 $C_G(X)^\circ$ 时涉及的一些细节。设 P 是包含 X 的 G 的抛物子群中极小的一个，其 Levi 分解为 $P = QL$，并设 X_0 是它在 L 中的像。首先注意，X 中的元素具有 $\phi(x)x$ 的形式，其中余循环 $\phi\colon X_0 \to Q$ 和 $x \in X_0$。因此，当 Q 是阿贝尔群时，或者更一般地，当像 $\phi(X)$ 在 Q 中是中心的时，不动点子群Q^X 和 Q^{X_0} 重合。在这种情况下，Q^{X_0} 给出 $C_G(X)$ 的一个连通幺幂子群。此外，当 Q 是阿贝尔群时，利用其作为 X_0-模的权以及 [1]，可以直接确定群 Q^{X_0} 本身。然而，当 Q 不是阿贝尔群时，会出现两个问题：群 Q^{X_0} 未必仅对应于每个层中平凡的 X_0-合成因子，而且像 $\phi(X_0)$ 未必与 Q^{X_0} 交换，因此确定 Q^X 更为微妙。

为克服第一个问题，可以利用 X_0 是 G-cr这一事实，这对 $C_G(X_0)$的结构施加了有用的限制；例如，参见 [32, §6.2]中的讨论。在我们关注的许多情形下，Liebeck和Seitz [23, p. 333] 已经确定了 $C_G(X_0)^\circ$，因此我们可以据此确定 Q^{X_0}，进而确定 Q^X。

关于 Q^X 与 Q^{X_0}之间关系的问题，通常归结为证明 $\phi(X_0)$与Q^{X_0}中的特定元素交换，例如利用 Chevalley 交换子公式。通常，这又归结为这样一个事实：某个子群 $Q(j)$是阿贝尔群，且同时包含 Q^{X_0} 和 $\phi(X_0)$。最复杂的计算出现在 G 的类型为 E_8、而 X 的类型为 B_3时；在这种情况下，我们用 G 的根元素显式构造相关的余循环 ϕ （命题5.1），从而直接确定 Q^X 。

以下 也有助于计算定理 1 中每个子群 X 的 $C_G(X)^\circ$.

引理 3.14. 设 G 是一个秩为 r、特征 G 下非完全约化的约化代数群，其连通子群 X 最小地包含于一个抛物子群 $P = QL$ 中，且 $P = QL$ 的半单秩为 s。那么 $C_G(X)$ 的秩至多为 $r - s - 1$。

证明. 假设 $S \le C_G(X)$ 是一个秩为 $r-s$ 的环面。为导出矛盾，只需证明 X 包含于 G 的一个抛物子群中，且该抛物子群的 Levi 子群的半单秩小于 s，因为 X 的所有极小抛物上群都是相关联的（引理 3.1）。

令 $M = C_G(S)$。那么 M 是 G 的一个 Levi 子群，且包含 X。由于 X 不是 G-cr，由引理 3.11 可知 X不是 M-cr。特别地，$X < P_M = Q_M L_M$，其中 P_M是 M 的一个真抛物子群，且 L_M 是 M 的一个 Levi 子群，其半单秩小于 s。^ 由 [11, 命题 2.6.6、2.6.7], 可知，存在 G^ ^ ^ 的一个抛物子群 P，使得 $P_M < P$，且 L_M 是 P的一个 Levi 子群。由于 $X < P_M < P$，我们得到了矛盾。□

引理 3.15。设 X 是 G的一个约化子群。那么存在一个抛物子群 P，其 Levi 分解为 $P = QL$，并且在包含 X的条件下极小，使得 Q^X 是 $C_G(X)$的一个极大连通幺幂子群。

此外，令 X_0 为 X 在投影 $P \to L$ 下的像，并令 n 为所有层 $Q(i)/Q(i+1)$ 中平凡 X_0-合成因子的总数，$i \ge 0$。那么 $\dim Q^X \le n$。

证明。由 Borel–Tits 定理可直接得到 P 的存在；若 U 是 $C_G(X)$ 的极大连通幺幂子群，则 U 是 UX 的幺幂根基，因此存在 G 的一个抛物子群 P，它包含 X，且其幺幂根基包含 U。由于对于抛物子群 $R_u(P_1) \ge R_u(P_2)$，只要 $P_1 \le P_2$，我们可以取包含 X 且满足条件的极小 P。

对于后一陈述，滤过 $Q = Q(1) \ge Q(2) \ge \dots$ 也是由 X-稳定子群构成的滤过，因为每个子群都是 Q 的正规子群且为 X_0-稳定。现在，关系 $[Q(i)\ Q(j)] \subseteq Q(i+j)$ 意味着 Q 在每一层 $Q(i)/Q(i+1)$ 上的诱导作用是平凡的。由于 X 中的元素具有形式 $\phi(x)x$，其中 $x \in X_0$ 且 $\phi : X_0 \to Q$ 是一个余循环，因此可知 X 和 X_0 在每一层上具有完全相同的合成因子，特别是平凡合成因子的数量也相同。现在，Q 关于 X_0-稳定正规子群 $Q(i)$ 的滤过导出 Q^X 关于 X-稳定子群的滤过，且相应的商是平凡的 X-模。结论得证。□

引理 3.16. 设 P 是 G的一个极大抛物子群，并假设 P 在包含给定的非 G-完全可约子群 X（其中 X 是 G的子群）的抛物子群中极小。那么：

(i) P 是包含 X的 G 的唯一真抛物子群；(ii) $N_G(X) \le P$ 且 $C_G(X)^\circ \le Q$。

证明. (i) 由极小性，像 $\pi(X)$ 是 L-不可约的。现在设 P_1 是包含 X的 G 的任意真抛物子群；我们将证明 $P_1 = P$。关于抛物子群交的标准结果表明，P_1 的 Levi 因子与 L [31, 共轭，其中 G是由引理 3.26]给出的。于是可以假设 P和 L 是标准的，并且由 [11, §8] 可假设 $P_1 = n \cdot P_2$，其中 P_2是标准抛物子群，$n \in N_G(T)$来自 Weyl 群的一组特选双陪集代表元。现在，由 n 作共轭将 P_2 的标准 Levi 因子 L_2 映到 L。由极大性，L 和 L_2 对应于从 G的 Dynkin 图中删去一个节点，因此 n 将 L_2 中的所有单根子群映到正根；将剩下的单根记为 α。若 $n \cdot \alpha$ 也是正的，则 n 保持 G的正根集合，因而在 $N_G(T)/T$中诱导恒等元，所以 $P_1 = P_2$。于是 P和 P_1都是标准的，且都是包含 X的极小抛物子群，因此 $P = P_1$，如所声称。反之，若 $n \cdot \alpha$ 是负的，则 n 将 G 中 α系数为正的所有根映为负根。这些恰好是出现在 P_2的幺幂根基中的根，而出现在 P的幺幂根基中的根全为正根；因此 $P \cap P_1 = P \cap (n \cdot P_2) = L$。然而，这个交包含 X，而根据假设，X 不属于 L；矛盾说明后一种情况不可能发生，故 $P_1 = P$。

(ii) 由 (i) 可知，G 中任何正规化 X 的元素也会正规化 P，因此 $N_G(X) \le P$。现在由引理 3.14，$C_G(X)^\circ$ 的秩为 0，故为幺幂群，因此引理 3.15 告诉我们存在一个（真）

抛物子群 P_0，它包含 X，且 $C_G(X)^\circ$ 是其幺幂根基在 X 作用下的不动点子群；由 (i) 可知 $P_0 = P$。□

4. Type A_3

4.1. G，类型为 E_7。

4.1.1. L'，类型为 A_5。G 中有三个标准 A_5-抛物子群，分别为 P_{13456}、P_{34567} 和 P_{24567}。前两个相关联，按照第 2.6 节所述的约定，其 Levi 子群标记为 A_5'；而 P_{24567} 自成一个关联类，其 Levi 子群仅标记为 A_5。因此，根据引理 3.1，在标准 Levi 子群 L_{13456} 和 L_{34567} 中具有不可约像的非 G-完全可约子群，不会与在 L_{24567} 中具有不可约像的子群通过 G 共轭。

首先，令 $P = P_{13456}$ 或 P_{34567}，其 Levi 分解为 $P = QL$。设 X_0 是一个类型为 A_3 的单子群，包含于导出子群 L' 中，其中 $X_0 \le L'$ 采用第 2.7 节的记号表示 010。正如第 2.4 节所述，幺幂根基 Q 的各层是 L' 的模，其最高权可通过组合方法确定。这些层的 L'-模结构及其在 X_0 上的限制如下。

	$Q/Q(2)$	$Q(2)/Q(3)$	$Q(3)/Q(4)$	$Q(4)$
L'_{13456}	$\lambda_3+\lambda_5$	λ_2+0	λ_5	
$X_0 \le L_{13456}$	$(010\|(200+002)\|010)+010$	$101+0^2$	010	
L'_{34567}	$\lambda_1+\lambda_2$	λ_3	λ_5	0
$X_0 \le L_{34567}$	$010+101+0$	$010\|(200+002)\|010$	010	0

这里我们用到了 $\lambda_2 \downarrow X_0 = \bigwedge^2(010) = 101+0$，以及 $\lambda_3 \downarrow X_0 = \bigwedge^3(010) = 010\|(200+002)\|010$。根据命题 3.8，$H^1(X_0,101) \cong K$，而 Q 的一个层中的所有其他直和项对于 X_0 的第一上同调群均为零。因此 $\mathbb{V} \cong K$（对于 P 的两种选择分别成立）。

非平凡环面 $Z(L)$ 中心化 X_0，并且在 Q 上的作用没有不动点，因此在 $\mathbb{V} = K$ 上诱导出非平凡作用。正如第 3.3 节所述，由此可知，每个抛物子群中至多出现一个非-G-cr 子群的共轭类。在 Q_{13456} 和 Q_{34567} 中，高权 λ_2 的模分别由 $U_{0101111}$ 在第2层的像和 U_{α_2} 在第1层的像作为 X_0-模生成。由元素 $n_{1011111}n_{1010000} \in N_G(T)$ 共轭所给出的映射将 L_{13456} 映到 L_{34567}，并将 $U_{0101111}$ 送到 U_{α_2}。由此可推得，这些抛物子群之一中的非 -G-cr 子群与另一个抛物子群的某个子群共轭。特别地，此处出现的任何非-G-cr 子群都有一个共轭子群包含于 P_{13456} 中。在这种情况下，$Q(3)$ 包含 $U_{0101111}$，因此此处出现的任何非-G-cr 子群都有一个共轭子群包含于 $Q(3)X_0$ 中。另请注意，根据 Chevalley 交换子公式，$[Q(3)\ Q(3)] = \{0\}$，因此 $Q(3)$ 是阿贝尔的。由于 $Q(3)/Q(4)$ 有两个平凡合成因子，且 $H^1(X_0, 010) = \{0\}$，因此 QX_0 中 Q 的每个补子群都中心化一个二维幺幂子群，即 $Q(3)^{X_0}$。

现在我们给出一个适当的非-G-cr 子群。由注 3.13 可知，存在两个经 $010+010$ 的非-D_6-cr 子群 $A_3 \le D_6$ 的 D_6-共轭类；取它们的代表元 Y 和 Z。由引理 3.11 可知，Y 和 Z 是非-G-cr 的，因为 D_6 是 G 的 Levi 子群。它们在 56 维不可约 G-模上的作用见表 6；选取 Y 和 Z，使得$V_{56} \downarrow Y = 010^4 + T(200) + T(002)$，且 $V_{56} \downarrow Z = 010^4 + T(101)^2$。于是，$Y$ 和 Z 在 G 中不共轭，因为它们在 $\mathrm{GL}(V_{56})$ 中不共轭；而 Z 不包含于 P_{13456} 的任何共轭子群中，因为它在 V_{56} 上的合成因子不同于 X_0 的合成因子。由命题 3.8 可知，每个类型为 A_3 的非-G-cr 子群都包含于某个 A_5-抛物子群中。因此，Z 属于 P_{24567} 的某个共轭子群，我们稍后将考察该子群；由于 Y 不与 Z G-共轭，可知 Y 属于 P_{13456} 的某个共轭子群。

现在我们计算 $C_G(Y)^\circ$。首先，引理 3.14 表明 $C_G(Y)$ 的秩至多为 1。由于 $Y \leq D_6$，我们有 $C_G(Y) \geq C_G(D_6) = A_1$ [23, p.333 表 2]，因此 $C_G(Y)$ 的秩恰为 1。现在令 U 为 $C_G(Y)$ 的极大连通幺幂子群。由引理 3.15 可知，P_{13456} 和 P_{34567} 中至少有一个包含 U 的一个共轭子群，且该子群位于其幺幂根基中。上表中，每个Q 至多有 2 个平凡合成因子，因此由引理 3.15 还可得 $\dim U \leq 2$。另一方面，我们在上文已给出 $Q = Q_{13456}$ 的一个二维幺幂子群，它被 QX_0 中所有 Q 的补子群中心化。因此 $\dim U = 2$。我们已证明，$C_G(Y)^\circ$ 是一个秩为 1 的连通代数群，其极大连通幺幂子群的维数为 2。因此，对于某个一维连通幺幂群 U_1，有 $C_G(Y)^\circ = U_1 A_1$。

现在我们考虑 A_5-抛物子群的第二个关联类。令 $P = P_{24567} = QL$，再令 X_0 为类型 A_3的单子群，其中 $X_0 \leq L'$ 经由 010。L' 和 X_0 在 Q 上的相应作用如下

	$Q/Q(2)$	$Q(2)/Q(3)$	$Q(3)/Q(4)$	$Q(4)/Q(5)$	$Q(5)$
L'	$\lambda_2 + 0$	λ_2	λ_4	0	0
X_0	$101 + 0^2$	$101 + 0$	$101 + 0$	0	0

因此 $\mathbb{V} \cong K^3$。Q 第 1、2 和 3 层中的 X_0-模 101 分别由根群 U_{α_3}、$U_{1010000}$ 和 $U_{1122100}$ 生成。由 [23, 第333页，表 3]，$C_G(X_0)^\circ = G_2$，因此 Q^{X_0} 是 6 维的。$Q/Q(2)$中的平凡 L-模由 $z_1(c) = x_{\alpha_1}(c)$生成，故给出 Q^{X_0} 的一个子群，它诱导从$Q/Q(2)$的直和项 λ_2 到 $Q(2)/Q(3)$的直和项 λ_2 的 X_0-模同构。此外，$Q(2)/Q(3)$的平凡 X_0-子模由 $z_2(c) = x_{1112100}(c)x_{1111110}(c)x_{1011111}(c)$生成，诱导出一个非零同态$Q/Q(2) \to Q(3)/Q(4)$；由于这个平凡模位于 $Z(Q/Q(4)) = Q(3)/Q(4)$之外，该同态在直和项 101 上非零。因此，如第 3.3 节所述，在用元素 $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{V}$参数化 QX_0 中 Q 的补子群时，我们可以假设 k_1、k_2 和 k_3 中至多一个非零。此外，元素 $n_{\alpha_1} \in N_G(T)/T$ 中心化 L'，并交换第 1 层与第 2 层的根；这些根产生高权为 λ_2的 L'-模。最后，Weyl 群的下列元素正规化 L'，并交换根 1010000 和 1122100：

$$n_3n_4n_2n_5n_4n_3n_6n_5n_4n_2n_7n_6n_5n_4n_3.$$

根据第 3.4 节中的讨论，这些元素将对应于 $\mathbb{V}$ 的 (1, 0, 0)、(0, 1, 0) 和 (0, 0, 1) 的补子群类融合在一起。因此，在 P_{24567} 中，至多存在一个非 G-cr 子群（在 G-共轭意义下），对应于 $(0, 0, 1) \in \mathbb{V}$。上文中，我们找到了一个非 G-cr 子群 Z，它属于这类抛物子群，且在 L 中的像不可约。

剩下的工作是计算 $C_G(Z)^\circ$。首先，Z 共轭于一个对应于 $(0, 0, 1) \in \mathbb{V}$ 的子群，因此我们可以假设 Z 包含于 $Q(3)X_0$ 中，其中 $Q(3)$ 是阿贝尔的。我们断言，$Q(3)X_0$ 中 $Q(3)$ 的任意补子群都与 Q^{X_0} 交换。为验证这一点，我们首先注意到，由于 $Q(3)$ 是阿贝尔的，$x_{1122100}(t)$ 与 $Q^{X_0} \cap Q(3)$ 的所有元素交换，因此 $Q(3)X_0$ 中 $Q(3)$ 的任意补子群都与 $Q^{X_0} \cap Q(3)$ 交换。现在，Q^{X_0} 由 $Q(3) \cap Q^{X_0}$ 以及上文给出的 $z_1(c)$ $z_2(c)$ 和 $z_3(c) = x_{0112100}(c)x_{0111110}(c)x_{0011111}(c)$ 生成。利用 Chevalley 交换子公式，直接验证可知，$x_{1122100}(t)$ 也与这三个生成元交换。或者，无需进行显式计算，因为 Q^{X_0} 的元素诱导从由 $x_{1122100}(t)$ 生成的 X_0-模到第 4 层及以上各层的 X_0-模同态；该模的高权为 101，且处于第 3 层。但这些同态必定是平凡的，因为第 4 层或第 5 层中不存在非零权向量。这意味着 Q^{X_0} 的元素与 $x_{1122100}(t)$ 交换。

此时，我们知道 $C_G(Z)^\circ$ 的秩为 1，且包含子群 A_1。根据引理 3.15，我们还知道 $C_G(Z)$ 有一个维数至多为 6 的极大连通幺幂子群，而且我们已经在上文构造了这样一个子群，即 Q^{X_0}。因此，$C_G(Z)^\circ = U_5\bar{A}_1$，其中 U_5 是一个 5 维连通幺幂子群。

4.2. G型的 E_8。

4.2.1. L' 型 A_5。 G 的四个标准 A_5-抛物子群分别是 P_{13456}、 P_{34567}、 P_{45678}和 P_{24567}。我们先考虑 $P = P_{13456} = QL$，其中 $X_0 = A_3 \leq L'$ 通过 010 给出。 X_0 在 Q 各层上的作用如下：

$Q/Q(2)$	$Q(2)/Q(3)$	$Q(3)/Q(4)$	$Q(4)/Q(5)$
$(010\|(200+002)\|010) \ +010+0$	$101+010+0^2$	$101+010+0$	010^2

$Q(5)/Q(6)$	$Q(6)/Q(7)$	$Q(7)/Q(8)$	$Q(8)$
101	010	0	0

层 2、3、5 中高权 101 的直和项分别由根群 $U_{01011110}$、 $U_{01011111}$ 和 $U_{12232221}$ 的像生成。此外，元素 $z_1(c) = x_{\alpha_8}(c)$、$z_2(c) = x_{01122210}(c)x_{11221110}(c)x_{11122110}(c)$ 以及 $z_3(c) = x_{01122211}(c)x_{11221111}(c)x_{11122111}(c)$ 与 X_0 交换。接着，标准的 Chevalley 交换子公式计算表明，对于每个 $c \neq 0$， $z_1(c)$ 都诱导出层 2 和 3 中 101 直和项之间的一个 X_0-模同构。类似地，非平凡元素 $z_2(c)$ 和 $z_3(c)$ 分别诱导出层 3 和 5、以及层 2 和 5 中 101 直和项之间的同构。将 Q 在 QX_0 中的补子群参数化为 $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{V}$，这使我们可以假设 $k_1k_2 = k_1k_3 = k_2k_3 = 0$。此外， n_{α_8} 保持 L_{13456} 中的根不变，并交换根 01011110 和 01011111；元素 $n_{12232111}n_{01122211}n_{10111100}n_2n_4n_3n_5n_4n_2n_8n_7$ 保持 L_{13456} 中的根不变，并将 $01011111 \mapsto 12232221 \mapsto 01011110$ 送至 $01011111 \mapsto 12232221 \mapsto 01011110$。因此，在此情形下，恰有一个类型为 A_3 、像在 Levi 因子中不可约且非 G-cr 的子群。

如果 $P = QL$是剩余三个标准 A_5型抛物子群之一，那么同样，幺幂根基的某一层中恰有三个直和项对经由 010 的子群$A_3 \leq L$ 而言是高权 101 的不可约表示。这些是唯一具有非零第一上同调群的直和项，且分别由对应于以下根的根子群的像生成：

抛物子群	根
P_{34567}	α_2, 11111111, 12232111
P_{45678}	01110000, 11110000, 12232100
P_{24567}	α_3, 10100000, 11221000

对这三个抛物子群所作的计算基本相同，结果表明，在每个抛物子群中，至多存在一个类型为 A_3 的非-G-cr 子群（在共轭意义下），且其在 Levi 因子中的像不可约。最后，在其余各个情形中， G 的 Weyl 群中的下列元素将 L_{13456} 的根映到 Levi 因子的根，并将根 01011110 映到相应幺幂根基中出现的给定根 β：

抛物子群	根 β	韦尔群元素
P_{34567}	α_2	$n_7n_6n_5n_4n_3n_1$
P_{45678}	01110000	$n_7n_6n_5n_4n_3n_1n_8n_7n_6n_5n_4n_3$
P_{24567}	10100000	$n_{112}n_{101}n_7n_6n_5n_4n_3$

我们得出结论：在 G-共轭意义下，恰好存在一个类型为 A_3 的非-G-cr 子群，其在类型为 A_5 的 Levi 子群中的像不可约。

令 $Y = A_3 \leq E_7$ 表示两个非 E_7-cr 子群共轭类之一（由于它们包含在子群 D_6 中，而 G 在该子群上诱导一个图自同构，因此它们在 G 中融合）。由引理 3.11， Y 是非 G-cr 的，并且包含于 G 的一个 A_5-抛物子群中。

$\bar{}$ $\bar{}$接下来需要计算 $C_G(Y)^\circ$。由于 $C_G(E_7)^\circ = A_1$ 且 $C_{E_7}(Y) = U_5A_1$，可得$U_5\bar{A}_1^2 = C_{\bar{A}_1E_7}(Y) \le C_G(Y)$。查阅表 8 中 $L(G)$ 对 Y 的限制，可知 $\dim C_G(Y) \le 12$。我们断言 Y 在 G 中不可分，由此可得 $U_5\bar{A}_1^2 = C_G(Y)$。为证明 Y 在 G 中不可分，我们先考虑限制 $L(G)\downarrow_{\bar{}} {}_{\bar{}}A_1E_7 = L(A_1E_7) + (1, V_{56})$。结合这一结果以及 $L(G)\downarrow Y$ 的限制，可推出 $\dim^{C_{L(\bar{A}_1E_7)}}(Y) = 12$。然而，在上述$\bar{}$ $\bar{}$计算中已经证明$C_{\bar{A}_1E_7}(Y)$是 11 维的。因此，Y 不是 A_1E_7 的可分子群。现在，(A_1E_7, G) 是一个约化对，因此由 [4, 定理 1.4]，Y 不是 G 的可分子群，证毕。

4.2.2. L' 类型的 A_3^2。G 的两个标准 A_3^2-抛物子群 $P = QL$ 分别是 P_{134678} 和P_{234678}。P_{134678} 的幺幂根基的滤过中有一个模 (010, 100)，它由根群 $U_{01011000}$的像作为 X_0-模生成；还有一个模 (100, 010)，由根群 $U_{01122100}$的像生成。因此，若 $A_3 \le A_3^2$ 经由 $(100^{[r]}, 100^{[s]})$，我们发现，当 $(r, s) = (1, 0)$ 或 $(0, 1)$ 时，$\mathbb{V}$ 是一维的；否则，$\mathbb{V} = \{0\}$。下文将证明，非平凡余循环 $X_0 \to Q(2)/Q(3)$ 和 $X_0 \to Q(3)/(4)$ 无法提升为余循环 $X_0 \to Q$，因此 $H^1(X_0, Q) = \{0\}$，且 P_{134678} 不包含类型为 A_3的非-G-完全可约子群。（这是因为滤过中存在一个第二上同调群非零的模。）

在 P_{234678} 中，幺幂根基再次产生 A_3^2-模 (010,100) 和 (100,010)，它们分别由根子群 U_{α_5} 和 $U_{11122100}$的像生成。韦尔群元素 $n_{\alpha_1}n_{\alpha_3}n_{\alpha_4}n_{\alpha_2}$ 将标准 Levi 子群 L_{134678} 映到 L_{234678}，并分别将根群 $U_{01011000}$ 和 $U_{11122100}$ 映到 U_{α_5} 和 $U_{11122100}$。因此，P_{234678} 的任意非 G-cr 子群 A_3 都共轭于一个包含在 P_{134678} 中的子群。

现在我们证明，当 $Q = R_u(P_{134678})$ 时，$H^1(X_0, Q) = \{0\}$。为此，我们使用 Q 中根元素的显式计算；我们通过 $(100, 100^{[1]})$ 给出 $X_0 \le L'_{134678}$ 的情形的详细过程，以说明只有在 $Q(2)/Q(3)$ 中才会出现第一上同调群非零的模。对于 X_0 的其他嵌入，我们省略本质上相同的计算；这些情形中，Frobenius 扭曲出现在另一个因子上，或者在任一因子中用对偶模 001 代替 100。

固定 X_0 的极大环面 T_{X_0}，它包含于 G 的固定极大环面中，并令 β_1、β_2 和 β_3 为相对于 T_{X_0} 的 X_0 的一组单根。若 $V = V_{X_0}(210)$ 是不可约 X_0-模，则非平凡余循环 $X_0 \to V$ 由其在三个子群 U_{β_1}、U_{β_2}、U_{β_3} 上的限制确定，因为这些子群共同生成 X_0 的 Borel 子群 B_{X_0} 的幺幂根基 U_{X_0}，并且根据 [21, 4, 我们有同构 $H^1(X_0, V) \cong H^1(B_{X_0}, V) \cong H^1(U_{X_0}, V)^{T_{X_0}}$. 7(c), 6.9(3)]。此外，考虑由一个 T_{X_0}-稳定的零权向量 v 生成的不可分解扩张 $W = 0|V$。那么，余循环 $X_0 \to V$、$x \mapsto \lambda(x \cdot v - v)$ 给出了 $H^1(X_0, V)$ 中上同调类的一组完备代表元。因此，每个余循环都上同调等价于某个 ϕ，使得 $\phi(x_{\beta_i}(1))$ 是权 $c_i\beta_i$、$c_i \in \mathbb{N}$ 向量之和。将根表示为 X_0 的权格中的元素后，经过简单计算可知，权 $\beta_1 = (2, -1, 0)$、$\beta_2 = (-1, 2, -1)$、$\beta_3 = (0, -1, 2)$ 在 $V(210)$ 中的重数均为一；当 $c_i > 1$ 时，$c_i\beta_i$ 不出现。特别地，存在权向量 $v_{(2,-1,0)}$、$v_{(-1,2,-1)}$、$v_{(0,-1,2)}$，使得 ϕ 完全由 $\phi(x_{\beta_1}(a)) = av_{(2,-1,0)}$、$\phi(x_{\beta_2}(b)) = bv_{(-1,2,-1)}$、$\phi(x_{\beta_3}(c)) = cv_{(0,-1,2)}$ 确定。利用 $x_{\beta_1}(a)$、$x_{\beta_2}(b)$ 和 $x_{\beta_3}(c)$ 的交换子关系，我们计算得

$$\phi(x_{\beta_1}(a)x_{\beta_2}(b)x_{\beta_3}(c)) = av_{(2,-1,0)} + bv_{(-1,2,-1)} + cv_{(0,-1,2)} + bc^2v_{(-1,0,3)} + ab^2v_{(0,3,-2)} + ab^2c^2v_{(0,1,2)}$$

对于所有的 a、b、$c \in K$，其中每个 v_j 都是 T_{X_0}-权 j 的非零向量。

现在，我们将 T_{X_0} 实现为 T 的一个子环面。我们通过 $(100, 100^{[1]})$ 将 A_3 实现为 $A_3^2 = L'_{134678}$ 的一个子群，定义 $x_{\beta_1}(c) = x_1(c)x_6(c^2)$、$x_{\beta_2}(c) = x_3(c)x_7(c^2)$、$x_{\beta_3}(c) = x_4(c)x_8(c^2)$，其中对所有$c \in K$均成立。于是，$T_{X_0}$ 由元素 $h_{\beta_i}(t) = n_{\beta_i}(t)n_{\beta_i}(-1)$ 生成，而我们进而定义$n_{\beta_i}(t) = x_{\beta_i}(t)x_{-\beta_i}(-t^{-1})x_{\beta_i}(t)$，其中 $t \in K^*$。

现在，由于 T_{X_0} 是 T 的一个子环面， $Q(2)/Q(3)$ 的 T_{X_0}-权空间是G的根子群。通过直接计算，我们可以将上面的六个向量 v_j 识别如下：

$$v_{(2,-1,0)} = x_{01011111}(\lambda_1)Q(3), \quad v_{(-1,2,-1)} = x_{01121110}(\lambda_2)Q(3), \quad v_{(0,-1,2)} = x_{11221100}(\lambda_3)Q(3),$$
$$v_{(-1,0,3)} = x_{01121111}(\lambda_4)Q(3), \quad v_{(0,3,-2)} = x_{11221110}(\lambda_5)Q(3), \quad v_{(0,1,2)} = x_{11221111}(\lambda_5)Q(3)$$

对于某些非零标量 $\lambda_1, ..., \lambda_6$。最后，注意，对于一个余循环 ϕ： $X_0 \to Q$ 以及任意幺幂元 $u \in X_0$，元素 $\phi(u)u$ 的阶至多为四，因为它是 QX_0 中 Q 的补子群里的一个幺幂元。因此，我们取元素 $\phi(y(a,b,c))y(a,b,c)$，其中 $y(a,b,c) = x_{\beta_1}(a)x_{\beta_2}(b)x_{\beta_3}(c)$，并计算：

$$y(a,b,c)^4 = x_{11221111}(ab^2c\lambda_1 + abc^2\lambda_2)x_{12232221}(ab\lambda_1\lambda_2).$$

特别地，对于所有 a, b 和 c，只有当 λ_1 和 λ_2 均为零时，该式才为零；而这当且仅当 ϕ 是一个余边界时成立。

4.2.3. L' 型的 D_7。设 $P = P_{2345678} = QL$ 是 G 的唯一标准 D_7-抛物子群。其幺幂根基有两层，其中 $Q/Q(2) \cong \lambda_6$ 和 $Q(2) = Z(Q) \cong \lambda_1$ 是 L'-模。

令 $X_0 = A_3 \leq L'$ 经由 101。于是权空间计算表明， $V_{L'}(\lambda_6) \downarrow X_0 = V_{L'}(\lambda_7) \downarrow X_0 = V_{X_0}(111)$（参见 [24, 命题 2.12] 的证明； [37, 第 283 页的 S7] 情形中也有陈述），并且这是 $L(G) \downarrow X_0$ 中出现的具有此高权的唯一模。特别地，$\mathbb{V} = K$，且在 P 中极小包含的 A_3 型非 G-cr 子群至多有一个，除 G-共轭外。

现在考虑一个 A_3 型子群 Y，它通过 16 维模 $T(101) = 0|101|0$ 嵌入子系统子群 D_8 中。由于 Y 在自然 16 维模上的作用可约，且 Y 在 101 [37, 上保持一个非退化二次型（第 283 页，S7], 情形），因此 Y 包含于 D_8 的一个 D_7-抛物子群中，进而包含于 P 的一个共轭子群中；我们可以假设 Y 在 L' 中的像为 X_0。注意， Y 与 X_0 并非 D_8-共轭，因为它们在自然 16 维模上的作用不相容，因此 Y 是非 D_8-cr。

在包含 Y 的 D_8 D_7-抛物子群中，幺幂根基记作 Q_{D_8}，它是阿贝尔的，并且作为 L' 的模与 $V_{D_7}(\lambda_1)$ 同构。在 G 中，我们有 $Q_{D_8} = Z(Q) = Q(2)$，以及作为 X_0-模的 $Q_{D_8} \cong 101$ 和 $Q/Q_{D_8} \cong V_Y(111)$。现在，包含映射 $Q_{D_8} \to Q$ 诱导出一个上同调长正合列；由于 Q/Q_{D_8} 在 X_0 的作用下没有不动点，推论 3.4 告诉我们， Y 不是 G-cr。

由于 P 是 G 和 $Q^{X_0} = Q^Y = 1$ 的极大抛物子群，根据引理 3.16， Y 的连通中心化子是平凡的。

5. Type B_3 and B_3^2

5.1. G，类型为 F_4。在 G 中，类型为 B_3 的非-G-cr 子群的分类见 [44,引理 4.4.3]。这类子群有两个共轭类，分别是通过 $T(100)$ 得到的 G-共轭子群 $Y_1 < D_4 < B_4$，以及通过 $T(100)$ 得到的 $Y_2 < D_4 < C_4$。此外， Y_1 包含于一个 B_3-抛物子群中，而 Y_2 包含于一个 C_3-抛物子群中。

还需要计算 $C_G(Y_1)^\circ$ 和 $C_G(Y_2)^\circ$。只需计算其中一个，因为例外型图态射交换 Y_1 和 Y_2，因此它们的连通中心化子作为抽象群是同构的。我们将计算 $C_G(Y_2)^\circ$。根据表 4 中 Y_2 在 $L(G)$ 上的作用，我们看到 $\dim C_G(Y_2) \leq 1$。另一方面， Y_2 包含于抛物子群 $P_{234} = QL$中，而 Q 有两层，第二层为 $Z(Q)$，它是一维的，因而被 L'中心化。因此， QL' 中 Q 的每个补子群都中心化这个一维幺幂子群，所以 $C_G(Y_2)^\circ = U_1$。

5.2. G属于 E_6型。

5.2.1. A_5型的 L' 。令 $P = P_{13456} = QL$ 和 $X_0 = C_3 \leq L'$ 通过 100。幺幂根基 Q有两层，其中 $Q(2) = Z(Q)$ 是一个平凡的一维 L'-模，而 $Q/Q(2)$ 同构于不可约 A_5-模 λ_3。由引理 3.10， $H^1(X_0, Q/Q(2))$ 消失，且 $H^1(X_0, (Q/Q(2))^{[1]})$ 是一维的。由于 $H^1(X_0, Q(2)) = \{0\}$，由引理 3.3 可知，$H^1(X_0, Q)$ 消失，而 $H^1(X_0, Q^{[1]})$ 至多是一维的。根据引理 3.2，Q 在 QX_0 中的任意非-G-cr 补子群均为 B_3型。考虑环面 $Z(L)$ 对 $H^1(X_0, Q^{[1]})$ 的作用，我们看到，在 G-共轭意义下， P中至多有一个非-G-cr 子群 B_3 ，其在投影到 L下的像为 X_0 。

设 Y 是一个类型为 B_3 的非 G-cr 子群，它包含在 F_4 的一个 C_3-抛物子群中，如 [44, 定理 1(A)] 所示。注意， $Y < D_4 < F_4$，这也是表 5 中列出的形式。嵌入 $F_4 \to E_6$ 将 F_4 的一个 C_3-抛物子群映射到 P 中。设 R 为 F_4 的 C_3-抛物子群的幺幂根基。那么 R 具有一个滤过 $R/R(2) \cong V_{C_3}(\lambda_3), R(2) \cong V_{C_3}(0)$，其各项为 C_3-模。因此， R 是 Q 的一个 X_0-不变正规子群，并且 $(Q/R)^{[1]}$ 同构于一个形状为 $200|002$ 的 X_0-模。特别地，这个商没有不动点；根据推论 3.4，这个非 F_4-cr 子群 Y 仍然是非 G-cr。
由于 P是一个极大抛物子群，引理 3.16 蕴含 $C_G(Y)^\circ = Q^Y$。由于$Q^{X_0} \leq Z(Q)$且为一维，因此可得 $C_G(Y)^\circ = U_1$。

5.3. G，类型为 E_7。

5.3.1. L' ，类型为 A_5。 G 的三个标准 A_5-抛物子群分别为 P_{13456}、 P_{34567} 和P_{24567}。 P_{24567} 的幺幂根基仅涉及对 Levi 因子而言高权为 0、 λ_2 和 λ_4 的模；特别是，对于子群 C_3，这些模的第一上同调群均为零。如第 4 节所述，另外两个抛物子群彼此相关联，其幺幂根基的滤过都各涉及两个高权为 λ_1 或 λ_5的模，以及一个高权为 λ_3的模，因此两种情形下均有 $\mathbb{V} \cong K^3$ 。
首先，令 $P = P_{34567} = QL$，并令 $X_0 = C_3 < L'_{34567}$ 由 200 给出。于是 Q 包含每个高权 λ_1、 λ_3 和 λ_5各一个 L'-模，它们分别由根群 U_{α_1}、 $U_{1111000}$ 和 $U_{1223210}$的像作为 L'-模生成。幺幂根基 Q 也包含一个高权为 λ_2的 L'-模，由根群 U_{α_2}的像生成。作为 X_0-模，它同构于 $\bigwedge^2(200) = 020 + 0$，而这个平凡模诱导出一个非零的 X_0-模映射 $Q/Q(2) \to Q(2)/Q(3)$。如引理 3.10 的证明中所述，这诱导出上同调群 $H^1(X_0, 200)$ 与 $\to H^1(X_0, \bigwedge^3(200))$ 之间的同构。因此，若我们用 $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{V}$ 为 QX_0 中 Q 的补子群参数化，则可假设 $k_1 k_2 = 0$。

若 $k_1 = 0$ ，则 Q-共轭的、对应于 Q 在 QX_0 中的补子群包含于由 X_0、 $U_{1111000}$ 和 $U_{1223210}$生成的子群中。Weyl 群元素 $n_7 n_6 n_5 n_4 n_3 n_1$将 L_{34567} 中的根映到 L_{13456}中的根，并将根 1111000 和 1223210 映到 Q_{13456}中的根。若改为 $k_2 = 0$ ，则 Weyl 群元素：

$$n_7 n_6 n_5 n_4 n_2 n_3 n_1 n_4 n_3 n_5 n_4 n_2 n_6 n_5 n_4 n_3 n_7 n_6 n_5 n_4 n_2$$

将 L_{34567} 中的根映到 L_{13456}中的根，并将根 α_1 和 1111000 映到Q_{13456}中的根。因此，每个非 G-cr 的、对应于 Q 在 QX_0 中的补子群，都与 P_{13456}的某个子群 G-共轭。现在令 $P = P_{13456} = QL$。则 Q 有三个层，而 $X_0 = C_3 < L'$ 在这些层上的作用如下。

$Q/Q(2)$	$Q(2)/Q(3)$	$Q(3)$
$(100\|001\|100) + 100$	$010 + 0^2$	100

因此 $\mathbb{V} \cong K^3$，其中 $100|001|100$ 中高权为 100 的 X_0-子模由形如 $x_{0111000}(c)x_{0101100}(c)$ 的元素生成，而高权为 100 的 X_0-直和项则由根群 U_{α_7} 和 $U_{1223211}$ 的像生成。

根群 $U_{1223210}$ 是平凡的 L'-模，并诱导两个高权为 λ_5 的模之间的非零 L'-模同态。此外，相应的韦尔群元素 $n_{1223210}$ 交换根 α_7 和 1223211，并将 0111000 和 0101100 映为负根。因此，将 QX_0 中 Q 的补子群参数化为三元组 $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{V}$ 后，我们可以假设 $k_2k_3 = 0$；只要 $k_1 = 0$，我们还可以交换 k_2 和 k_3。

考虑二维环面 $Z(L)$的作用后， QX_0 中 Q的非-G-cr 补子群对应于以下四个三元组之一：(1, 0, 0)、(0, 0, 1)、(1, 1, 0) 和 (1, 0, 1)。因此，模去 G-共轭后， QX_0中 Q 的非-G-cr 补子群至多有四个。

现在我们给出四个类型为 B_3的非-G-cr 子群。考察它们在 V_{56}上的作用（见表 6），可知它们两两不共轭。令 $Y_1 < E_6$ 为上一节中的非-E_6-cr 子群，并令 $Y_2 < A_6$ 通过 W(100)嵌入。由引理 3.11， Y_1 和 Y_2 均为非-G-cr。子群 Y_3 和 Y_4 分别通过 T(100)和 001 嵌入极大秩子群 A_7 中。为证明它们是非-G-cr，注意到它们在 V_{56} 上的作用各有两个维数为 28 的不可分解直和项，因此不包含于 G的任何 Levi 子群中。子群 Y_3 包含于 A_7 的一个抛物子群中，因而也包含于G的一个抛物子群中。由于 $Y_4 < D_4 < C_4 < A_7$，子群 Y_4 包含于 G 的一个抛物子群中；如第 8 节所述，这个 C_4 子群是非-G-cr。注意，所有 Y_i 子群都必须包含于类型为 A_5'的抛物子群中，因为我们已经证明， G中每个类型为 B_3 的非-G-cr 子群的代表元都包含于 P_{13456}中。

接下来，我们需要计算四个非G-cr子群的连通中心化子。先考虑包含在 $F_4 < E_6$中的 Y_1。上文指出， $C_{F_4}(Y_1)^\circ = U_1$。此外，我们还有 $C_G(F_4)^\circ = A_1$ （见 [23, 第333页，表 3]），因此 $U_1A_1 \leq C_G(Y_1)^\circ$。表 6 中给出的 $L(G)$在 Y_1 上的限制的底层级数表明，$\dim C_{L(G)}(Y_1) \leq 4$。因此$C_G(Y_1)^\circ = U_1A_1$。

类似地，考察 Y_2 在 $L(G)$上的作用，可得$\dim C_G(Y_2) \leq 3$。对应于(1, 0, 0)和(0, 0, 1)的非G-cr子群都中心化某些环面，因此 Y_1和 Y_2必定分别是它们共轭类的代表元。事实上，通过计算可验证，对于中心化根1223211的一维环面 $S \leq Z(L)$， $C_G(S)^\circ$ 的类型为 A_6T_1 ，由此可知 Y_2 与对应于(0, 0, 1)的子群共轭。考虑上文给出的 P_{13456} 的幺幂根基的结构可知，对应于(0,0,1)且包含在 $Q(2)X_0$中的非G-cr子群，中心化了 Q 的一个二维幺幂子群；该子群由第2层中生成的平凡 X_0-模生成，其中包括 $x_{1122111}(c)x_{11122111}(c)x_{0112221}(c)$和 $x_{1223210}(c)$。因此， $C_G(Y_2)^\circ = U_2T_1$。

最后，子群 Y_3 和 Y_4 不包含在任何 Levi 子群中，如上所示，因此它们的连通中心化子都是幺幂的，并且它们各自共轭于分别对应于 (1, 1, 0) 和 (1, 0, 1) 的子群之一（不过我们尚不清楚哪个对应哪个）。注意， $C_{L(G)}(Y_i)$ 包含由半单元生成的一维子代数 $Z(L(G))$，因此对于 $i = 3$， $\dim C_G(Y_i) \leq \dim C_{L(G)}(Y_i) - 1$，4。特别地，利用表 6 中的限制，我们得到 $\dim C_G(Y_3) \leq 2$，且 $\dim C_G(Y_4) \leq 1$。按照上一段的方法研究$P = P_{13456}$，我们看到，对应于 (1, 1, 0) 的子群中心化了 Q的一个一维子群，而对应于 (1, 0, 1) 的子群中心化了 Q的一个二维幺幂子群。由此可知， Y_3 共轭于对应于 (1, 0, 1) 的子群，且 $C_G(Y_3) = U_2$；类似地，Y_3 共轭于对应于 (1, 1, 0) 的子群，且 $C_G(Y_4) = U_1$。

5.4. G类型为 E_8。

5.4.1. L' 类型为 A_5。 G 的四个标准 A_5-抛物子群分别为 P_{13456}、 P_{34567}、 P_{45678}和 P_{24567}。本节的论证如下。

对于 $P = QL$ 等于四个标准抛物子群中的每一个的情形，利用 $X_0 = C_3 < L'$ 中的结果 100，我们发现 P 中至多只有有限多个 QX_0中 Q 的补子群，模去 P-共轭后亦然。

此外，每个这样的子群都与 P_{34567}的某个子群 G-共轭。事实上，无需完整分析 QX_0中 Q 的补子群，我们就能证明后一结论。接下来我们将详细考察 P_{34567} 。

首先令 $P = P_{13456}$，并通过 100 令 $X_0 = C_3 < L'$ 。在 Q 的滤过中，具有非零第一上同调群的 X_0-模由根群 U_α 的像生成，其中 $\alpha \in \{\alpha_7, \alpha_2, \alpha_7+\alpha_8, 12232110, 01122221, 12232111, 13354321\}$。此外， Q 中有四个一维子群，它们中心化 X_0 ，并在 Q 的各层之间诱导非零同态，这些同态作用于 X_0-模。我们在下文列出这些同态。这里写作 (α, β) 表示从由 U_α 的像生成的 X_0-模到由 U_β 的像生成的 X_0-模诱导的同态:

元素	诱导同态
$x_8(c)$	$(\alpha_7, \alpha_7+\alpha_8)$, (12232110,12232111)
$x_{12232100}(c)$	$(\alpha_7$, 12232110), $(\alpha_7+\alpha_8$, 12232211), (01122221, 13354321)
$x_{01122210}(c)x_{11122110}(c)x_{11221110}(c)$	$(\alpha_7+\alpha_8$, 01122221), (12232111, 13354321)
$x_{01122211}(c)x_{11122111}(c)x_{11221111}(c)$	$(\alpha_7$, 01122221), (12232110, 13354321)

逐一考察这些同态所蕴含的所有关系，以及 $N_G(T)$ 中正规化 L 的元素后，可以发现，在 QX_0 中， P_{13456} 至多有八个非 G-cr 的 Q 补子群（相差 G- 共轭）。不过我们不需要这一结论；我们只需证明每个这样的子群都共轭于 P_{34567} 的一个子群。为此，注意到由 $x_8(c)$ 诱导的第一个同态使我们可以假设 $k_1k_2 = 0$，只要为 7维空间 $\mathbb{V}$ 选取适当的基即可。此外，韦尔群元素 n_8 的共轭作用中心化 X_0 并交换 α_7 与 $\alpha_7+\alpha_8$，同时保持这样一组根：其根群在 Q 中导出具有非零第一上同调群的 X_0-模。因此我们可以假设 $k_1 = 0$。于是， QX_0 中 Q 的每个补子群都 Q-共轭于 Q_1X_0 中的一个补子群，其中 Q_1 是 Q 中包含 $Q(2)$ 和 $U_{\alpha_7+\alpha_8}$ 的最小 X_0-不变子群。

现在考虑 Weyl 群 W 的元素 $n_7n_6n_5n_4n_3n_1$ 。它将 L_{13456} 中出现的根映到 L_{34567} 中出现的根，并将所有产生非零第一上同调群的模的根（ α_7 除外）映到 Q_{34567} 中出现的根。因此，这个 Weyl 群元素将每个非-G-cr 补群的一个 Q-共轭像（位于 QX_0 中的 Q ）映到 P_{34567} 的一个子群中，正如所声称的那样。

抛物子群 P_{45678} 和 P_{24567} 中也有完全类似的计算。除共轭外，我们发现，在适当的半直积中，幺幂根基的非-G-cr 补群分别至多有八个和三个。对于情形 $P = P_{45678}$，这些补群都包含在由 X_0 、$U_{23454321}$、 $U_{11222100}$、 $U_{11222110}$、 $U_{10100000}$、 $U_{12343210}$、 U_{α_2} 和 $U_{22343210}$ 生成的 P_{45678} 的最小 X_0-不变子群中。Weyl 群元素 $n_3n_4n_5n_6n_7n_8$ 将 L_{45678} 中的根映到 L_{34567} 中的根，并将这些其他根群分别映到 Q_{34567} 中的根群。因此， P_{45678} 中每个非 -G-cr 补群都 G-共轭于 P_{34567} 的一个子群。类似地， P_{24567} 中的每个补群都 P_{24567}-共轭于一个补群，而该补群包含在由 X_0 、$U_{22454321}$、 $U_{11232111}$、$U_{11222211}$、 $U_{10111111}$ 和 $U_{12343211}$ 生成的最小 X_0-不变子群中。下面的 Weyl 群元素:

$$n_{00111111}n_2n_4n_3n_5n_4n_2n_6n_5n_4n_3n_7n_6n_5n_4n_2n_8$$

将 L_{24567} 中的根映射到 L_{34567} 中出现的根，并将上述每个根元素映射到 P_{34567} 的幺幂根基中产生的根；同样，我们得出结论， P_{24567} 中出现的每个非 G-cr 都与 P_{34567} 的一个子群 G-共轭。

因此令 $P = QL = P_{34567}$，并固定 $X_0 = C_3 < L'$。 Q 的七个相关直和项由根群 U_{α_1}、 U_{α_8}、 $U_{01011111}$、$U_{11110000}$、 $U_{12232100}$、 $U_{22343211}$、$U_{23354321}$ 的像生成。除第四个外，它们都产生一个具有高权的不可约 A_5-模

λ_1 或 λ_5，因此得到一个自然的 6 维 X_0-模 100。根群 $U_{11110000}$ 产生一个 A_5-模 λ_3，其限制到 X_0 后为 $100|001|100$。子模 100 由形如 $x_{11121000}(c)x_{11111100}(c)$ 的元素的像生成；如引理 3.10 中所述，包含映射 $100 \to 100|001|100$ 在第一上同调上诱导出一个同构（应用 Frobenius 扭曲后）。

固定 $\bigoplus_{i=1}^{7} H^1(X_0, Q(i)/Q(i+1)) = \mathbb{V} \cong K^7$ 的一个基，其中第 i 个元素张成上文第 i 个直和项的第一上同调群，这样 QX_0 中 Q 的补子群可由 7 元组 $(k_1, k_2, \ldots, k_7)$ 参数化。

以下元素生成 Q^{X_0}，其中前六个元素在 Q 的各层中诱导了 X_0-模之间的非零同态。同样，(α, β) 表示由 U_α 的像生成的 X_0-模到由 U_β 的像生成的 X_0-模诱导了一个非零同态：

Name	元素	诱导同态	隐含条件
$z_1(c)$	$x_{01011110}(c)x_{01111100}(c)x_{01121000}(c)$	(α_1, 11110000 和 12232100), (α_8, 01011111), (22343211, 23354321)	$k_1k_4 = 0$ 或 $k_1k_5 = 0$; 如果 $k_1 = 0$ 那么 $k_2k_3 = 0$; 若 $k_1 = k_2 = 0$ 则 $k_6k_7 = 0$
$z_2(c)$	$x_{10111111}(c)$	(12232100, 22343211)	$k_5k_6 = 0$
$z_3(c)$	$x_{11222211}(c)x_{11232111}(c)x_{11122221}(c)$	(12232100, 23354321)	$k_5k_7 = 0$
$z_4(c)$	$x_{22343210}(c)$	(α_8, 22343211), (01011111, 23354321)	$k_2k_6 = 0$; 若 $k_2 = 0$，则 $k_3k_7 = 0$
$z_5(c)$	$x_{12343211}(c)x_{12243221}(c)x_{12233321}(c)$	(α_1, 22343211)	$k_1k_6 = 0$
$z_6(c)$	$x_{13354321}(c)$	(α_1, 23354321)	$k_1k_7 = 0$
$z_7(c)$	$x_{23465432}(c)$		

此外，G 的 Weyl 群中有若干元素稳定 L_{34567} 中单根的集合，并将 QX_0 中 Q 的各种补子群彼此共轭。该元素

$$w = n_2n_4n_3n_5n_4n_2n_6n_5n_4n_3n_7n_6n_5n_4n_2$$

正规化 L'，并交换 U_{α_1} 与 $U_{12232100}$；U_{α_8} 与 $U_{01011111}$；$U_{22343211}$ 与 $U_{23354321}$；且固定 $U_{11110000}$。因此它交换 k_1 与 k_5，利用上面的第一个诱导同态，我们可以取 $k_1 = 0$。因此，利用同一个诱导同态，我们还可以假设 $k_2k_3 = 0$。

若 $k_2 \neq 0$，则 $k_3 = k_6 = 0$。由上面的诱导同态，我们还得到 $k_5k_7 =$0。若 $k_5 = 0$，则应用上面的 Weyl 群元素可令我们假设 $k_2 = 0$，稍后我们会处理这种情况。因此我们可以假设 $k_5 \neq 0$；考虑三维环面$Z(L)$ 对 $H^1(X_0, Q^{[1]})$ 的作用后，得到元组 (0, 1, 0, 1, 1, 0, 0) 和 (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)。

现在假设 $k_2 = 0$。若 $k_3 \neq 0$，则 $k_7 = 0$ 且 $k_5k_6 = 0$。此外，元素 $n_{10111111}$ 交换 k_5 和 k_6，同时稳定 k_3、k_4 和 k_7（它也将 α_1 和 α_8 映到负根，但这无关紧要，因为 $k_1 = k_2 = 0$）。因此，我们可以假设 $k_5 = 0$。若 $k_4 = k_6 = 0$，则可以应用韦尔群元素：

$$n_{22343211}n_{11122221}n_{00111110}n_{11110000}n_{11122100}n_5n_4n_6n_5n_8$$

它交换 k_3 和 k_6，因此使我们进入 $k_3 = 0$ 情形，我们将在下一段讨论该情形。因此，我们假设 k_4 和 k_6 中有一个非零。考虑 $Z(L)$ 的作用后，我们得到元组 (0, 0, 1, 1, 0, 1, 0)、(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0) 和 (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)。

现在假设 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$。那么我们有 $k_6k_7 = k_5k_6 = k_5k_7 = 0$，因此 k_5、k_6 和 k_7 中至多有一个非零。同样，元素 $n_{10111111}$ 交换 k_5 和 k_6，所以我们可以假设 $k_5 = 0$。然后，上面的韦尔群元素 w 使我们可以交换 k_6 和 k_7，因此我们可以假设

$k_6 = 0$。考虑 $Z(L)$ 的作用后，我们得到元组 (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1)、(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) 和 (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)，以及 (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)，它们对应于 G-cr 类。
In summary, there are at m大多数e ight non-G-cr complemen至 Q in QX_0 至共 n轭 in G.
现在给出八个类型为 B_3 的非 G-cr 子群。它们在 $L(G)$ 上的作用列于表 8，这表明它们代表不同的 G-共轭类。此外，它们在 $L(G)$ 上的合成因子表明，它们都包含于一个类型为 A_5 的抛物子群中。我们令 $Y_1 < E_6$, $Y_2 < A_6$ 经由 $W(100)$，以及 $Y_3, Y_4 < A_7' < E_7$ 分别经由 $T(100)$ 和 001，表示来自第5.3.1节的非 E_7-子群；根据引理 3.11，它们都是非 G-cr 的子群。$Y_5 < A_7$ 经由 $T(100)$ 以及 $Y_6 < D_7$ 经由 $W(100) + W(100)^*$ 的子群，根据引理 3.11 也都是非 G-cr 的子群。接下来，令 $Y_7 < D_8$ 经由 $T(100)^2$, ，它是一个非 D_8-cr 子群。从表 8 可见，Y_7 在 $L(G)$ 上的作用有五个不可分解直和项，其中两个的维数为 28，其余三个的维数为 64。由此可知，Y_7 不包含于 G 的任何 Levi 子群中，因此是非 G-cr 的。最后，令 Y_8 为引理 10.9 中一个类型为 B_3 的非 G-cr 子群，它包含于一个类型为 D_4 的非 G-cr 子群中。表 8 所列的 Y_8 的作用表明，它与前面七个 Y_i 共轭，而且不包含于 G 的任何 Levi 子群中（它在 $L(G)$ 上有五个维数分别为 30、30、62、63、63 的直和项）。
我们还需计算子群 Y_i的连通中心化子。在这种情况下，以下命题给出了此处出现的非-G-cr 子群的显式构造。

命题5.1. 设 G 为 E_8、$p = 2$ 和 $P = P_{34567} = QL$型。设 X_0 为包含于 P中的 B_3 型子群，其在 L中的 C_3 型像 X_0 不可约。那么存在 $\mathbf{v} = (a_1, \ldots, a_7) \in \mathbb{V} \cong K^7$，使得对于以下元素 $y_{\pm i}(t)$，X_0与 $X_{\mathbf{v}} = \langle y_{\pm i}(t) : t \in K, 1 \le i \le 3 \rangle$ 共轭：

$$y_{\pm 1}(t) = x_{\pm 3}(t)x_{\pm 7}(t), y_{\pm 2}(t) = x_{\pm 4}(t)x_{\pm 6}(t), y_3(t) = x_5(t)x_{10111000}(a_1 t)x_{00001111}(a_2 t)$$
$$x_{11222100}(a_3 t)x_{11122110}(a_3 t)x_{01122111}(a_4 t)x_{12233210}(a_5 t)x_{22344321}(a_6 t)x_{23465321}(a_7 t), y_{-3}(t)$$
$$= x_{-5}(t)x_{10110000}(a_1 t)x_{00000111}(a_2 t)x_{11221100}(a_3 t)x_{11121110}(a_3 t)x_{01121111}(a_4 t)x_{12232210}(a_5 t)$$
$$x_{22343321}((a_6 + a_1 a_2 a_5 + a_2 a_3^2)t)x_{23464321}((a_7 + a_1 a_4 a_5 + a_3^2 a_4)t)。$$

证明。根据构造，给定的元素属于 P；当 a_1、……、a_7 全为零时，它们生成一个 L-不可约的 C_3 型子群。显然，余循环的像位于 Q 各层中相应的模里。因此，只需证明每个这样的子群确实是 B_3 型群。利用 [10, 定理 12.1.1]，这一步是常规计算。（计算借助 MAGMA完成。）
□

注 5.2。要得到上述隐式余循环的形式，考虑限制映射$H^1(X_0, 200) \to H^1(Y_0, 200 \downarrow Y_0)$，其中 Y_0是 X_0 中由 $x_{\pm 5}(t)$ 生成的一个 A_1 型子群。那么，Y_0 是 X_0 的一个 Levi 子群的导出子群。现在 $200 \downarrow Y_0 = 2 + 0^4$。由此可知，映射 $H^1(X_0, 200) \to H^1(Y_0, 200 \downarrow Y_0)$ 是单射。A_1 型子群的余循环已在 [44, 引理 3.6.2]中明确描述。要将其提升为余循环分类$Y_0 \to Q$，可以使用定义 A_1 型群的关系；一个具体例子见 [44, 引理 3.6.1], 和 [44,第 45] 页。

回到中心化子计算，我们首先通过考察包含 Y_i 的最小 Levi 子群，求出 $C_G(Y_i)$的秩。事实上，在我们的非G-cr 子群列表中，对于每个 Levi 子群 L，都包含了所有类型为 B_3 的非L-cr 子群；请记住，前四个子群分别代表四个非E_7-cr 子群的 E_7-类。因此，Y_1和 Y_2的秩为 2，因为它们分别包含于 E_6和 A_6中。对于 Y_3、……、Y_6，它们的秩为 1，因为它们分别包含于 E_7、E_7、A_7、D_7中。最后，Y_7 和 Y_8 不包含于任何 Levi 子群中，因此其连通中心化子的秩为 0。

鉴于上文命题5.1中已构造出包含于 P 中的所有类型为 B_3 的子群，现在计算 $C_{Q^{X_0}}(X_{\mathbf{v}})$便是例行工作，因为 $Q^{X_0}=\langle z_i(c)\colon\ i=1、\ldots\ldots、7\rangle$。特别要注意，对于我们的八个类代表元中的每一个， $a_1a_2a_5+a_2a_3^2=0$ 对应 Z，而 $\in\mathbb{V}$ 对应 Z，因此根群 $U_{22343321}$ 中的提升是平凡的。

现在我们证明 $C_G(Y_1)=U_1G_2$。我们知道 $C_{F_4}(Y_1)=U_1$，且 $C_G(F_4)=G_2$。由于 $\dim C_{L(G)}(Y_1)\leq 15$，由表 8 可知结论成立。接下来考虑 Y_2，首先注意到 $C_G(A_6)=A_1T_1$。此外，按照上述方法进行常规计算可知，与 (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) 和 (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) 对应的补子群中心化 Q^{X_0}。因此，$C_G(Y_2)^\circ$ 包含一个 7 维幺幂子群。由于 $\dim C_{L(G)}(Y_2)=10$，可知 $C_G(Y_2)=U_6A_1T_1$。

接下来，我们将求出 $Y_7<D_8$ 和 Y_8 的连通中心化子。回想一下，这些中心化子是幺幂的，因此 Y_7 和 Y_8 必定共轭于与 (0, 0, 1, 1, 0, 1, 0) 和 (0, 1, 0, 1, 1, 0, 0) 对应的子群之一。现在我们验证元素 $z_2(c)$、$z_3(c)$、$z_5(c)$、$z_6(c)$、$z_7(c)$ 中心化与 (0, 0, 1, 1, 0, 1, 0) 和 (0, 1, 0, 1, 1, 0, 0) 对应的补子群，并且 $z_1(c)z_4(c)$ 中心化与 (0, 0, 1, 1, 0, 1, 0) 对应的补子群。我们断言$C_G(Y_7)^\circ=U_5$，因此 Y_7 必定共轭于与 (0, 1, 0, 1, 1, 0, 0) 对应的补子群。为验证这一断言，先注意到利用表 8 中给出的相关限制可得 $\dim C_G(Y_7)\leq 6$。由于 $Y_7<D_8$，我们有 $\mathfrak{c}=C_{L(G)}(D_8)\subseteq C_{L(G)}(Y_7)$。由于 $D_8<E_8$ 的同源类型为半旋量，可知 $\mathfrak{c}$ 是由半单元生成的一维子代数。由于 $C_G(Y_7)$ 是幺幂的，因此 $\mathrm{Lie}(C_G(Y_7))$ 不可能包含$\mathfrak{c}$，故 $\mathrm{Lie}(C_G(Y_7))$，从而 $C_G(Y_7)$，维数至多为 5。由此可知 Y_8 共轭于与 (0, 0, 1, 1, 0, 1, 0) 对应的子群，因此 $C_G(Y_8)^\circ$ 的维数至少为 6。检查表 8 中的限制可知 $\mathrm{Lie}(C_G(Y_8))$ 是 6 维的，因此$C_G(Y_8)^\circ=U_6$。

其余子群 Y_3、Y_4、Y_5和 Y_6 分别恰好与对应于 (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1)、(0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)、(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0) 和 (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0) 的四个补子群中的一个共轭；请注意，它们的中心化子的秩均为 1。通过常规计算可知，这些补子群分别中心化了Q^{X_0}中的一个 7、6、6 和 4 维子群。对于最后两个补子群，上文给出的 Q^{X_0} 的生成元中分别只有 5 个和 3 个属于中心化子。不过，在这两种情况下，两个被排除生成元的乘积构成了这些补子群中心化子的最后一个生成元。

查看表 8 可知，对于 $i=3$，$\dim C_G(Y_i)=10$，分别为 9、8、6。接下来，我们证明 Y_3和 Y_4 在 E_7T_1中不可分，即 $\dim C_{E_7T_1}(Y_i)<\dim C_{L(E_7T_1)}(Y_i)$。由于$L(E_7T_1)$是 $L(E_8)$的一个直和项，根据 [4, 定理 1.5]，可知 Y_3 和 Y_4 在 E_8中不可分。由 E_7 中的计算可得 $\dim C_{E_7T_1}(Y_3)=3$，且 $\dim C_{E_7T_1}(Y_4)=2$。利用表 6 中的限制 $L(E_8)\downarrow E_7T_1=L(E_7T_1)+(V_{56},1)+(V_{56},-1)+(0,1)+(0,-1)$ 和 $V_{56}\downarrow Y_3,Y_4$，我们可以轻易验证，在每种情况下，$L(E_7T_1)$中对应的中心化子维数都大 1。因此 $\dim C_G(Y_3)\leq 9$，且 $\dim C_G(Y_4)\leq 8$。

我们断言，在其余四种情形中，$C_G(Y_i)$都包含子群 A_1。对于 Y_3、Y_4，这一点显然，因为它们包含于 E_7，且 $C_G(E_7)^\circ=A_1$。子群 Y_5 在$V_{A_7}(\lambda_1)$上作用为 $T(100)$，由于 $T(100)$是自对偶的，因此可得 $Y_5<C_4<A_7$。根据 [23, 第333页表 3，引理 4.9]，$C_G(C_4)=A_1$，因而 $A_1\leq C_G(Y_5)$。对于 Y_6，注意到 $Y_6<B_3^2<B_6<D_7$。于是，根据 [23, 第333页表 3] 可知，$C_G(B_6)=A_1$，因而 $A_1\leq C_G(Y_6)$。

我们现在已有足够的信息，可以得出结论：$C_G(Y_3)=U_6A_1$，$C_G(Y_4)=U_5A_1$，$C_G(Y_5)=U_5A_1$ 以及 $C_G(Y_6)=U_3A_1$。

5.4.2. L' 型的 A_7。设 $P=P_{1345678}=QL$ 和 $X_0=B_3<L'=A_7$ 通过 001 嵌入。则幺幂根基 Q 有三个层，其作用为 X_0

$Q/Q(2)$	$Q(2)/Q(3)$	$Q(3)$
$101+001$	$0\vert100\vert010\vert100\vert0$	001

根据命题 3.8，$H^1(X_0, Q(2)/Q(3)) = K$，因此 dim $H^1(X_0, Q) \leq 1$，并考虑到 $Z(L)$ 的作用，我们发现，在 G 中共轭的意义下，QX_0 中至多有一个非 G-cr 的 Q 补子群。
设 Y 是 $B_3 < D_8$ 的一个子群，通过 $001+001$ 嵌入。由命题 3.12 和注 3.13 可知，这类子群有两个 D_8- 共轭类，且二者都不是 D_8- 完全可约的。现在，D_8 有两类 Levi 子群 A_7，其中一类是 G 的 Levi 子群，另一类是子群 A_7'。因此，考察这些非-D_8-完全可约子群在这些 Levi 因子中的像，其中一类来自包含在子群 E_7中的一个 G-完全可约子群。所以，即使这类子群不是 G-完全可约的，它们也来自 Levi 因子不与 L 共轭的极小抛物子群。然而，另一类在 A_7 中的像是不可约的，而 A_7 仍是 G 的 Levi 子群，因此我们只需证明这些非-D_8-完全可约子群仍然不是 G-完全可约的。由于 $(Q/Q(2))^{X_0} = \{0\}$ 和 $Q(2)$ 是 D_8 的一个 A_7-抛物子群的完整幺幂根基，这由推论 3.4 得出。

由引理 3.16 可得 $C_G(Y)^\circ = C_Q(Y)^\circ$。在 D_8 的一个 A_7-抛物子群中，幺幂根基是 28 维模 $V_{A_7}(\lambda_2)$，因此它是 Q 的一个子群，且同构于 $Q(2)/Q(3)$。由于在 Y 作用下，它的不动点空间是一维的，我们得出$C_G(Y)^\circ = U_1$。

5.4.3. L'，类型为 D_7。在这种情况下，L' 有类型为 B_3 和 B_3^2 的不可约子群需要考虑；我们先考察 B_3^2。设 $P = P_{2345678} = QL$ 和 $X_0 = B_3^2 < L' = D_7$，由 $0|((100,0) + (0,100))|0$ 得到。于是幺幂根基 Q 有两层，其中 $Q/Q(2) \cong \lambda_6$ 和 $Q(2) \cong \lambda_1$ 是 L'-模，因此 $Q/Q(2)\downarrow X_0 \cong (001,001)$ 且 $Q(2) \downarrow X_0 = 0|((100,0) + (0,100))|0$。
由命题 3.8，我们有 $H^1(X_0, Q(2)) \cong K$和 $H^1(X_0, Q/Q(2)) = \{0\}$。考虑到 $Z(L)$ 的作用，可推出在 G 中按共轭计，至多存在一个非 G-cr 的 Q 在 QX_0 中的补子群。

考虑子群 $Y = B_3^2 < D_8$，它来自 16 维 B_3^2-模 $(0|(100,0)|0) + (0|(0,100)|0)$。每个 8 维因子都含有一个被 B_3^2 固定的非奇异向量。因此，由这些向量张成的 2 维子空间含有一个被 B_3 固定的奇异向量，故该子群 B_3^2 包含于 D_8 的一个 D_7-抛物子群中。由于这是被 B_3^2 固定的唯一非零全奇异子空间，我们可推出该子群是非 D_8-cr。由于 $Q/Q(2)$ 是一个不可约 Y-模，推论 3.4 适用，因此 Y 也是非 G-cr。直接应用引理 3.16 可得 $C_G(Y)^\circ = U_1$。

现在，若 $X_0 = B_3 < L'$ 通过 $100 \otimes 100^{[r]}$ $(r > 0)$，则与上述相同的论证表明，在共轭意义下，P中至多包含一个非-G-cr 的 Q 补子群。取子群 $Z < D_8$ 通过 $T(100) + T(100)^{[r]}$，即可得到一个代表元。同样，推论 3.4 告诉我们，这个非-D_8-cr 子群是非-G-cr 的，而引理 3.16 告诉我们 $C_G(Z)^\circ = U_1$。注意，对每个 $r > 0$，类代表元 Z 是 Y的一个对角子群。

6. Type B_4

设 $P = P_{1345678} = QL$ 和 X_0 是嵌入 L' 中的 C_4 型子群，嵌入方式为 1000。那么，X_0在 Q各层上的作用如下：

$Q/Q(2)$	$Q(2)/Q(3)$	$Q(3)$
$1000 + 0100$	$\bigwedge^2(1000)$	1000

由于 0010 和 $\bigwedge^2(1000) = T(0100) = 0|0100|0$ 均为倾斜模，它们的第一上同调群均消失，因此 $\mathbb{V} \cong K^2$。第 2 层中的平凡子模可提升为 Q^{X_0} 的一个子群，因为根据 [23, 第 333 页表 3]，$C_G(X_0)^\circ = A_1$。由此容易得出，这诱导了一个非零的 X_0-模同态$Q/Q(2) \to Q(3)$。我们推得，补子群由 $(k_1, k_2) \in \mathbb{V}$ 参数化，其中 $k_1 k_2 = 0$。考察 $Z(L)$ 的作用后可知，在这样的抛物子群中，至多有两个类型为 B_4 的非-G-完全可约子群（模共轭）。

令 Y_1 为通过 $V_{A_8}(\lambda_1) \downarrow Y_1 = 1000|0$ 嵌入 A_8 的 B_4 型子群。由于 $p \neq 3$，且 A_8 是一个阶为 $3, [2,$ 的元素的中心化子，推论 3.1] 表明 Y_1 是非-G-完全可约的。存在两个 D_8-共轭类的 B_4 型子群，它们在 D_8 的自然模上的作用为 $V_{B_4}(\lambda_4)$。根据 $[45,$ 引理 7.4], ，其中一个子群（在同一文献中记作 $B_4(\ddagger)$）是非-G-完全可约的，且不与 Y_1 共轭；记该子群为 Y_2。因此，Y_1 和 Y_2 是 P 中两个互不共轭的非-G-完全可约子群类的代表元。

由于 P 是极大抛物子群，由引理 3.16 可知，$C_G(Y_1)^\circ$ 和 $C_G(Y_2)^\circ$ 分别等于 Q^{Y_1} 和 Q^{Y_2}。由表 8 可知，对于 $i = 1$，$C_{L(G)}(Y_i) = 1$ 维。由于 $Y_2 < D_8$ 和 $C_{L(G)}(D_8)$ 是由半单向量生成的一维子代数，因此 $C_G(Y_2)^\circ$ 是平凡的。现在，P 中对应于 (0,1) $\in \mathbb{V}$ 的 Q 的补子群中心化了第 2 层中平凡子模的提升，因为 $Q(2)$ 是阿贝尔的。因此，Y_1 与这个非 G-cr 子群共轭，且 $C_G(Y_1)^\circ = U_1$。

7. Type C_3

回想命题 3.8 中，这是唯一满足 $p = 3$ 的情形。设 $P = P_{2345678} = QL$ 是 G 的唯一标准 D_7-抛物子群，并令 $X_0 = C_3 < L'$ 由 010 给出。于是 $Q/Q(2) \downarrow X_0 = 110 + 001$ 且 $Q(2) \downarrow X_0 = 010 + 0$。由命题 3.8 可得 $\mathbb{V} \cong K$，因此考察 $Z(L)$ 的作用后可知，QX_0 中 Q 的非 G-cr 补子群至多有一个 G-共轭类。

令 Y 是通过 $V_{D_8}(\lambda_1) = T(010)+0$ 嵌入 D_8 中的 C_3 型子群。由引理 3.11，Y 不是 D_8-cr，因而也不是 E_8-cr，因为当 $p \neq 2$ 时，D_8 是 E_8 中一个对合的中心化子。因此，Y 必须包含于 P 中，因为当 $p = 3$ 时，它是唯一可能包含 C_3 型非 G-cr 子群的抛物子群。

由于 P 是极大的，利用引理 3.16 可得 $C_G(Y)^\circ = C_Q(X_0) = Q(2)^{X_0} = U_1$。

8. Type C_4

情形 $G = E_7$ 已由 $[22,$ 引理 2.7], 处理，得到一个非 G-cr 子群的共轭类，其代表元 $Y = C_4 < A_7$ 通过 1000 嵌入。Y 的连通中心化子是 U_1，见 $[23,$ 第 333 页表 $3]$。因此，我们可以假设 $G = E_8$。

令 $P = P_{123456} = QL$ 为 G 的唯一标准 E_6-抛物子群，并令 X_0 为类型为C_4 的代表元，它代表唯一的 E_6-不可约子群共轭类。则 X_0 在 Q 的各层上的作用如下:

$Q/Q(2)$	$Q(2)/Q(3)$	$Q(3)/Q(4)$	$Q(4)/Q(5)$	$Q(5)$
$0100 + 0^2$	$0100 + 0$	$0100 + 0$	0	0

由命题 3.8，得 $\mathbb{V} \cong K^3$。U_{α_7}、$U_{\alpha_7+\alpha_8}$和 $U_{01122221}$ 的像分别生成第 1、2、3 层中的X_0-模 0100。此外，第 1 层和第 2 层中的三个平凡直和项分别由元素 $x_{\alpha_8}(c)$、$x_{11221110}(c)$ $x_{11122110}(c)x_{01122210}(c)$ 以及 $x_{11221111}(c)$ $x_{11122111}(c)$ $x_{01122211}(c)$的像生成。因此，我们可以假设 $k_1k_2 = k_1k_3 = k_2k_3 = 0$。元素 $n_8 \in N_G(T)$中心化 X_0，同时交换 U_{α_7} 和$U_{\alpha_7+\alpha_8}$，而元素

$$n_7n_6n_5n_4n_3n_2n_4n_5n_6n_7n_1n_3n_4n_5n_6n_2n_4n_5n_3n_4n_1n_3n_2n_4n_5n_6n_7$$

中心化 X_0，同时交换 $U_{\alpha_7+\alpha_8}$ 和 $U_{01122221}$。因此我们得出结论：在 QX_0 中，Q 的非-G-cr 补子群至多有一个 G-共轭类。

令 Y 为包含在 E_7 中的类型为 C_4 的非-G-cr 子群。由引理 3.11，Y 是非-G-cr 的，因此 Y 的一个共轭包含在 P 中。Y 的连通中心化子在 $[23,$ 引理 4.9] 中计算得为 U_5A_1。

9. Type D_4

本节通过考察类型为 D_4 的子群，完成对非-G-cr 子群的分析。因此，根据引理 3.5，我们有 $p = 2$ 和 $G = E_7$ 或 E_8。

9.1. G 类型为 E_7。在这种情况下，根据 [22, 定理 1], ，有无穷多个包含于 G 的一个 E_6-抛物子群中的 D_4 类型子群共轭类，且每个子群在 Levi 因子中的像都不可约。其中恰有一个共轭类由 G-完全可约子群组成。令 $P = QL$ 为一个 E_6-抛物子群。那么 Q 是阿贝尔群，并且是一个高权为 λ_1 的不可约 L'-模。因此，出现的非 G-完全可约子群是 Q 在 QX_0 中的补子群，其中 X_0 由 $F_4 < L'$的短根子群生成。我们有 $Q \downarrow X_0 = 0100+0$，因此 $H^1(X_0, Q)$ 是二维的。选取一个基，使得每个 $(a, b) \in K^2$ 都给出 Q 在 QX_0 中的一个补子群。一维环面 $Z(L)$ 的作用表明，当 μ 遍历 K^* 时，对应于 $(a\mu, b\mu)$ 的补子群全都彼此 G-共轭。接下来注意到 L' 包含一个子群$D_4.S_3$。这个外自同构群 S_3 作用于 Q，因而也作用于 Q 在 QX_0 中的补子群集。具体而言，这可由一个三阶元素实现，它将对应于 (a, b) 的补子群映到对应于 $(b, a + b)$ 的补子群；还可由一个二阶元素实现，它交换对应于 (a, b) 和 (b, a) 的补子群。因此，所有非 G-完全可约补子群的 G-共轭类都对应于一对 $(1, a)$，其中 a 遍历 K。

接下来，我们考察这些非-G-cr 子群可能的上群。首先注意到，根据引理 3.14，每个此类子群的连通中心化子都是幺幂的。设 M 是 G 的一个约化极大连通子群，且包含一个 D_4 型的非-G-cr 子群 Z。那么， M 的每个单因子的秩都至少为 4，否则 Z 在某个单因子 M_0 上的投影将是平凡的，从而得到 $M_0 < C_G(Z)$。因此，根据 [27, 定理 1]， M 必须是 A_7 型。令 $Y = D_4 < A_7 < G$ via 1000。由于 $N_G(A_7)/A_7$ 的阶为 2， Y 中心化 G 中的一个对合，因此包含于 G 的某个抛物子群中。由表 8 可知， Y 在 V_{56} 上作用为两个 28 维不可分解直和项。因此， Y 不包含于 G 的任何 Levi 子群中，故为非-G-cr。

因此，我们已经证明，在 G 中，恰有一个非-G-cr 子群包含于某个真约化上群中，其余无限多个共轭类都是极大约化子群。
接下来计算连通中心化子。由于 Q 是阿贝尔的，对于包含于 P 中的任意非-G-cr 子群 Z，$Q^{X_0} = Q^Z$。由引理 3.16(ii) 可得 $C_G(Z)^\circ = U_1$。

9.2. G 型的 E_8。

9.2.1. L' 型的 A_7。设 $P = QL$，其中 L' 为 A_7 型，且 $X_0 < L'$ 通过 1000 嵌入。于是 Q 有三个层，其作用为 X_0

$Q/Q(2)$	$Q(2)/Q(3)$	$Q(3)$
$1000 + 0011$	$0\|0100\|0$	1000

命题 3.8 意味着 $\mathbb{V} \cong K$，因此 QX_0 中至多存在一类非 G-cr 的 Q 补子群。由命题 3.12 和注 3.13 可知，有两类 D_8 的非 D_8-cr 子群，其类型为 D_4，并且它们在 $V_{D_8}(\lambda_1)$ 上的作用为 $1000 + 1000$。嵌入 $D_8 < G$，由于这些子群包含于 D_8 的一个真抛物子群中，因此它们也包含于 G 的一个真抛物子群中。现在我们证明这两个子群均为非 G-cr。首先注意，每个子群在 $L(G)$ 上的作用（见表 8）有三个维数为 64 的不可分解直和项，且没有维数小于 28 的不可分解直和项。为导出矛盾，假设 Y 是属于任一类的子群，且 L 是包含 Y 的 G 的极小真 Levi 子群。由于 L' 的秩至多为 7，而 Y 的秩为 4，可知 L' 是单的；事实上， L' 的类型为 A_7、 D_4、 D_5、 D_6、 D_7、 E_6 或 E_7。关于 $L(G)$ 上最高权的知识 [24,表 10。1] 表明，只有 D_7 可能具有一个以三个维数为 64 的不可分解直和项作用的子群。但在这种情况下， $L(G) \downarrow D_7 = \lambda_1^2 + T(\lambda_2) + \lambda_6 + \lambda_7$，且任何

D_7 的子群在 $L(G)$ 上的作用有一个维数至多为 14 的不可分解直和项。这个矛盾证明，类型为 D_4 的两类非 D_8-cr 子群均不包含于 G 的任何真 Levi 子群中，因此它们是非 G-cr。

这两个共轭类代表元在 $L(G)$ 上具有不同的合成因子。根据命题 3.8，只有 A_7-抛物子群和 E_6-抛物子群能够包含类型为 D_4 的非 G-cr 子群，因此每个抛物子群类恰好对应一个这类非 G-cr 子群共轭类。子群 $X_0 < A_7$ 具有高权 0011 的合成因子，这一事实表明，表 8 中的第一个子群包含于 P。

最后，我们计算这一类非 G-cr 子群中 Y 的 $C_G(Y)^\circ$。由于 P 是极大的，我们可以应用引理 3.16。在 A_7 中，X_0 有一个 C_4 上超群，并且根据 [23, p.333 表 3]，$C_G(C_4)^\circ = A_1$。由此可知，$Q(2)/Q(3)$ 中的平凡子模提升为 Q 的一个子群，因此 Q^{X_0} 是一维的。此外，$Y < Q(2)X_0$ 和 $Q^{X_0} \leq Q(2)$ 是阿贝尔的，所以 $Q^Y = Q^{X_0}$。因此 $C_G(Y) = U_1$。

9.2.2. L' 型 E_6。设 $P = QL$ 是 G 的标准 E_6-抛物子群，X_0 是由 E_6中的一个 F_4 子群内的短根子群生成的 E_6-不可约 D_4 型子群。那么，Q 有五个层，其上的 L' 和 X_0 作用如下。

	$Q/Q(2)$	$Q(2)/Q(3)$	$Q(3)/Q(4)$	$Q(4)/Q(5)$	$Q(5)$
L'	$\lambda_1 + 0$	λ_1	λ_6	0	0
X_0	$0100 + 0^2$	$0100 + 0$	$0100 + 0$	0	0

$Q/Q(2)$中的平凡直和项由根群 U_{α_8}的像生成，并诱导一个非零的 E_6-模同态 $Q/Q(2) \to Q(2)/Q(3)$。在 X_0 对 λ_1 和 λ_6的作用中，三个层里高权 0100 的模分别由根群 U_{α_7}、$U_{\alpha_7+\alpha_8}$ 和 $U_{01122221}$的像生成。注意，X_0 包含在子群 $Y_0 = C_4 < E_6$中；如第 8 节所述，$Q/Q(2)$和 $Q(2)/Q(3)$中出现的额外平凡模分别诱导非零的 Y_0-模同态 $\psi: Q(2)/Q(3) \to Q(3)/Q(4)$以及 $\psi': Q/Q(2) \to Q(3)/Q(4)$。

现在 $H^1(X_0,0100) \cong K^2$，因此 $\mathbb{V} \cong K^6$，我们用 (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) 表示 $\mathbb{V}$ 的元素，其中$\phi_i \in H^1(X_0, Q(i)/Q(i+1))$。我们将 $H^1(X_0, 0100)$ 的不同副本中的元素作如下对应，使得 $x_{\alpha_8}(c)$ 诱导出映射

$$(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \mapsto (\phi_1, \phi_2 + c\phi_1, \phi_3)$$

而分别来自 $Q/Q(2)$ 和 $Q(2)/Q(3)$ 的额外平凡模诱导出映射

$$(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \mapsto (\phi_1, \phi_2, \phi_3 + c\phi_2), \qquad (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \mapsto (\phi_1, \phi_2, \phi_3 + c\phi_1).$$

同样，由于 $X_0 < Y_0$，可知 X_0 被 $n_8 \in N_G(T)$ 中心化；后者交换根群 U_{α_7} 和 $U_{\alpha_7+\alpha_8}$，并中心化 $U_{01122221}$。此外，元素

$$w = n_7n_6n_5n_4n_3n_2n_4n_5n_6n_7n_1n_3n_4n_5n_6n_2n_4n_5n_3n_4n_1n_3n_2n_4n_5n_6n_7$$

也中心化 X_0，并交换 $U_{\alpha_7+\alpha_8}$ 和 $U_{01122221}$，同时将 U_{α_7} 映射到一个负根子群。类似地，元素

$$w' = n_7n_6n_5n_4n_2n_3n_1n_4n_3n_5n_4n_2n_6n_5n_4n_3n_1n_7n_6n_5n_4n_2n_3n_4n_5n_6n_7$$

中心化 X_0，交换 U_{α_7} 和 $U_{01122221}$，并将 $U_{\alpha_7+\alpha_8}$ 映射到一个负根子群。

现在，我们利用上述元素，通过 $\mathbb{P}^1 \cup \{3 \text{ points}\}$ 的元素对 Q 在 QX_0 中的补子群（包括 X_0 本身）进行参数化。为此，我们分几种情况讨论。

在 $(\phi_1, \phi_2) = (0,0)$ 的情形下，通过 w' 共轭可将相应的补子群变为对应于 $(\phi_3,0,0) \in \mathbb{V}$ 的补子群。这样的子群包含于 G 中一个 E_7 型的 Levi 子群内，并且是非-E_7-完全可约的。我们很快将证明，当且仅当这些子群是 G-共轭时，

它们才是 E_7-共轭的，因此这样的子群有无穷多个，正如第9.1节所述。

现在假设 $(\phi_1,\phi_2) \neq (0,0)$，但在上述对 $H^1(X_0,0100)$ 各个副本的识别下， ϕ_1 和 ϕ_2 互为倍数。那么，必要时用 n_8 作共轭后，可以假设 $\phi_1 \neq 0$。再用适当的 $x_{\alpha_8}(c)$中的元素作共轭，便可假设 $\phi_2 = 0$。因此，此补子群对应于形如 $(\phi_1,0,\phi_3) \in \mathbb{V}$的元素，其中 $\phi_1 \neq 0$。若在上述识别下，ϕ_3 是 ϕ_1 的倍数，那么用 $Q(2)/Q(3)$中的适当 X_0-不动点作共轭，便可知该补子群对应于 $(\phi_1,0,0)$，而这再次包含在如上所述的 G 的一个 E_7 Levi 子群中。因此，我们可以假设 $\{\phi_1,\phi_3\}$ 构成 $H^1(X_0,0100)$的一组基。现在，元素 w' 连同 $Q(2)/Q(3)$以及 $Z(L)$中的 X_0-不动点，可以融合所有对应于 $H^1(X_0,0100)$任意此类基的共轭类（这实质上是指 $\mathrm{GL}_2(K)$在其自然模的有序基上具有传递性）。因此，此情形至多产生一个新的子群共轭类。在引理10.8中，我们将证明，这种群在 $L(G)$上的不可分解直和项与 $L(G)\downarrow E_7$不相容，因此这些子群不包含于 E_7型子群中。

最后，假设 $\{\phi_1,\phi_2\}$ 构成 $H^1(X_0,0100)$ 的一组基。通过 X_0-不动点进行共轭（这些不动点产生了上面的映射 ψ 和 ψ'），我们不妨假设 $\phi_3 = 0$。于是，元素 n_8连同 U_{α_8} 和 $Z(L)$，再次将所有对应于三元组 $(\phi_1,\phi_2,0)$ 的共轭类融合在一起，其中 $\{\phi_1,\phi_2\}$ 是 $H^1(X_0,0100)$ 的一组基。因此，在这种情形下，至多还能找到一个非 G-cr 子群（按共轭计）。同样，在引理10.8中，我们推导出这些子群在 $L(G)$ 上的作用，并发现这些作用与该子群包含于 E_7 中，或与上面找到的任一非 G-cr 子群共轭，都不相容。因此，这些确实对应于一个不同的非 G-cr 子群共轭类。

总而言之，假设上面所有可能的补子群确实存在，我们已经证明，非 G-cr 子群对应于以下情形之一：$(\phi,0,0)$，其中 ϕ 是 $H^1(X_0,0100)$ 中的一个非零点；或者是 $(\phi,0,\psi)$；或者是 $(\phi,\psi,0)$，其中 $\{\phi,\psi\}$ 是 $H^1(X_0,0100)\cong K^2$的一组固定基。在前一种情形下，这些子群由元素 (a,b)参数化，并按 $Z(L)$ 的作用以及一个子群 S_3取商，如上文9.1节所述。在后两种情形中，我们至多各得到一个额外的非 G-cr 子群。

我们首先考虑与元素 $(\phi,0,0) \in \mathbb{V}$ 对应的无穷多个非-G-cr 子群，它们各自包含于一个类型为 E_7 的 Levi 子群 M 中。我们将证明，这样的两个子群在 G 下共轭，当且仅当它们在 M' 下共轭。设 Y 为这样一个非-G-cr 子群。首先，注意到 M' 中心化一个由对应于 $\pm\alpha_0$ 的根子群生成的连通单群 A_1，因此 Y 也中心化它。此外，注意到经 w' 共轭会将 Y 变为对应于 $(0,0,\phi) \in \mathbb{V}$ 的子群；由于该子群包含于 $Q(3)X_0$，可知 Y 与 6 维幺幂子群 Q^{X_0} 交换（由 Q^{X_0} 中元素诱导的 Y- 模同态 $Q(3) \to Q$ 全为零，因为其像包含于 $Q(4)$，且 $Q(4)/Q(5)$ 和 $Q(5)$ 均没有非平凡的合成因子）。由引理 3.15， Q^{X_0} 是 $C_G(Y)$ 的极大幺幂子群，对应于元素 $(0,0,\phi) \in \mathbb{V}$ 的所有子群 Y 均如此。引理 3.14 表明 $C_G(Y)$ 的秩为 1。由于 Q^{X_0} 与子群 $\bar{A_1}^-$ 的交是一个一维连通幺幂群，我们得出 $C_G(Y)^\circ = U_5A_1$。

因此，若 Y 和 Z 是 QX_0中 Q 的两个非-G-cr 补子群，且都包含在 M'（ E_7的一个固定副本）中，则有 $C_G(Y)^\circ = C_G(Z)^\circ = UH$，其中 U 是一个 5 维幺幂子群，而 H 是 A_1型单子群。现在假设对某个 $g \in G$有 $g\cdot Y = Z$。那么 g 正规化 $C_G(Y)^\circ$，因此 H和 $g\cdot H$是 UH中的 A_1 型单子群。简单计算可知， UH与由 Q^{X_0} 和 $U_{-\alpha_8}$生成的子群在 G下共轭，其中子群 A_1 由根子群 $U_{\pm\alpha_8}$生成。利用 G中的交换子关系可知， U 有一个由高权 0 和 1 的 H-模构成的滤过。这些模的第一上同调群均为零，因此 $H^1(H,U)$ 消失，且 $g\cdot H$与 H在 U下共轭（注意，尽管 $H^1(H,1^{[1]})$ 是 1 维的，但由此得到的非平凡补子群不可能与 H 在 G下共轭，因为它们与 H并非代数同构；投影 $UH \to H$ 在限制到 H时有一个概形论核）。因此，对某个 $u \in U$ 有 $(ug)\cdot H = H$。由于 $U \leq C_G(Y) = C_G(Z)$，我们

有 $(ug)\cdot Y = u\cdot Z = Z$，且 $ug \in N_G(H) = HE_7$。最后，这意味着我们可以取某个 $h \in H$，使得 $(hug)\cdot Y = h\cdot Z = Z$ 且 $hug \in E_7$；因此 Y 和 Z 在 E_7 的某个元素作用下共轭。

现在我们断言，确实存在两个不同的非-G-cr 的 D_4 型子群类，它们包含于 P 中，但不包含于 E_7 中；我们已在 $P_{1345678}$ 的前一种情形中展示了其中第一类。事实上，存在一个非-D_8-cr 子群 Y_1，它在 $V_{D_8}(\lambda_1)$ 上的作用为 $1000+1000$，且包含于 P 中。现在令 Y_2 为由八个切瓦莱生成元 $y_{\pm\beta_i}(t)$ 生成的子群，这些生成元对应于命题 10.5 中 $i=1$ 的 1、...、4，以及 $a_1=a_4=1$ 和对应于 $i=2$ 的 3、5、6 的 $a_i=0$。根据构造，这是一个 D_4 型子群，包含于 $P_{1345678}$ 中。此外，在引理10.8中，我们证明 Y_2 作用于一个维数为 188 的不可分解直和项。G 的任何极大约化子群或 G 的任何真 Levi 子群都没有维数达到或超过该值的不可分解直和项，因此 Y_2 是非-G-cr 的，并且是 G 的真连通约化子群中极大的。

最后我们计算 $C_G(Y_1)^\circ$ 和 $C_G(Y_2)^\circ$。它们是幺幂群，因为 Y_1 和 Y_2 都不包含在 G 的任何 Levi 子群中。查看表 8，我们发现 $\dim C_G(Y_1) \le 5$。由于 $Y_1 < D_8$，可知（与第5.4.1节中的子群 Y_7 一样）$\dim C_G(Y_1) \le 4$。再次查看表 8，我们发现 $\dim C_G(Y_2) \le 5$。根据上述分析，我们知道这两个额外的子群来自情形 $(\phi_1, 0, \phi_3) \in \mathbb{V}$，它与 $(0, \phi_1, \phi_3) \in \mathbb{V}$ 共轭；以及 $(\phi_1, \phi_2, 0) \in \mathbb{V}$，其中 ϕ_1, ϕ_3 和 ϕ_1, ϕ_2 分别构成 K^2 的一组基（不过我们尚不知道哪一个对应于 Y_1 或 Y_2）。容易验证，对应于 $(0, \phi_1, \phi_3)$ 的子群中心化了 Q^{X_0} 的一个 5 维子群，因此这样的子群与 Y_2 和 $C_G(Y_2)^\circ = U_5$ 共轭。另一个简单的验证表明，对应于 $(\phi_1, \phi_2, 0)$ 的子群中心化了 Q^{X_0} 的一个 4 维子群；因此它是 Y_1 和 $C_G(Y_1)^\circ = U_4$ 的一个共轭子群。

10. Actions of non-G-cr subgroups

本节将确定定理 1 中出现的非-G-完全约化子群 X 的限制 $L(G)\downarrow X$ 和 $V_{\min}\downarrow X$。当 X 不是 D_4 型时，它在 G 中有一个真约化上群，我们利用这一点推导所需的限制。关于此方法的更多细节见第 9 节 [31, 第 10] 节。X 为 D_4 型且 $p=2$ 时，是迄今最难分析的情形；本节余下部分将全面讨论这一情形。

现在设 $p=2$，并首先假设 $G=E_7$，其中 X 包含于 $P=QL$，且 L' 为 E_6 型，使得 X 在 L 中的像 X_0 包含于一个 F_4 型子群，并由该子群的短根子群生成。回顾第 9 节 Q 为阿贝尔群，且 $Q\downarrow X_0 = 0100+0$；X 的 G-共轭类对应于 $\phi\in K^2$，其中可取 $\phi=(1,a)$，且 $a\neq 0$。此外，这无穷多个共轭类中，恰有一个由包含在某个 A_7 型真约化上群中的子群构成，其余均为 G 的极大约化子群（即在真连通约化子群中极大的子群）。

引理 10.1. 在上述设定中，设 $Y<X$ 是类型为 B_3 的子群。那么 Y 是非 G-cr 的，并且通过表 6 中给出的 001 与子群 $B_3<A_7$ 共轭。

证明。设 X_0 是 X 在 Levi 子群 L 中的（G-cr）像，并设 $Z_0<Y_0<X_0$，其中 Z_0 是类型为 A_3 的单群，而 Y_0 是 Y（类型为 B_3 的单群）的像。我们将证明，可以选择 Z_0，使得限制映射 $H^1(X_0, 0100)\to H^1(Z_0, 0100)$ 将导出 X 的非零上同调类映到非零类。由此可知，相应的补子群 Z 是非 G-cr 的，并且此类在 $H^1(Y_0, 0100)$ 上的限制也非零，因此 Y 也是非 G-cr 的。

在单连通群中，Levi 因子的导出子群仍然是单连通的。因此，在类型为 D_4 的单连通群中，A_3-Levi 子群的李代数作为 A_3-模具有底层级数 $101|0$。由于 $L(A_3)$ 是 $L(D_4)=0100|0^2$ 的子模，且 $H^1(D_4, 0100)\cong K^2$ 和 $H^1(A_3, 101)\cong K$，可得限制映射 $H^1(D_4, 0100)\to$

$H^1(L', 0100)$ 的核是一维的，对每一种 A_3-Levi 子群 L 的选择都是如此。此外，图自同构群 S_3 作用于 $L(D_4)$ 的中心以及 $H^1(D_4, 0100)$，使二者各自成为不可约的二维 S_3-模。特别是，这一作用不保留任何一维子空间，因此对于 $H^1(D_4, 0100)$ 中每个非平凡上同调类，都存在一个单子群 A_3，使得该类不在限制映射的核中。

如上，令 $Z_0 < Y_0 < X_0$，其中 Y_0 的类型为 B_3，而 Z_0 的类型为 A_3。选取 Z_0，使得导出 X 的上同调类不属于 $H^1(X_0, Q) \to H^1(Z_0, Q)$ 的核，该类对 Y_0 和 Z_0 均仍非平凡。因此，相应的补子群$Z < Y < X$ 分别不与 Z_0、Y_0 和 X_0 共轭（模 Q），故均非 G-cr。考察 Z 和 Y 在 $L(G)$ 及 $V_{\min}$ 上的合成因子，我们将 Z 确认为表 6 中满足 $V_{\min} \downarrow Z = 010^4 + T(101)^2$ 的子群。于是 $\dim(V^Z_{\min}) = 2$。查看表 6 中前三个子群 B_3，相应的子群 A_3 在 $V_{\min}$ 上有一个四维的不动点空间，因此 Y 是最后一个子群 B_3 的一个共轭，通过 001 嵌入 G 的 A_7 型子系统子群中，如所述。□

命题 10.2. 在上述设定下：

(i) *If* $X < A_7$ *then* $V_{\min} \downarrow X = (0|\lambda_2|0)^2$.
(ii) *If* X *is MR then* $V_{\min} \downarrow X = 0^2|\lambda_2^2|0^2$ *is indecomposable.*

证明。由于 A_7 在 $V_{\min}$ 上的作用分解为两个直和项，即自然 8 维 A_7 模的外平方及其对偶，因此 $X < A_7$ 的限制显然成立。

因此，设 X 是极大约化子群，并取一个 B_3 型子群 $Y < X$；由引理 10.1 可知，这是一个非 G-cr 子群，它经由 001 包含在一个 A_7 型子系统子群 H 中。考察表 6 可知，模 $V_{\min} \downarrow Y$ 是两个不可分解的 28 维模的直和，二者都是 H- 子模。由于 H 是 G 的真连通子群中的极大者，故 H 是 G 中保持 $V_{\min}$ 这一直和分解的全稳定子的单位连通分支。由于 X 不包含在这样的 G 子系统子群中，可知 X 不能保持这样的直和分解，因此 $V_{\min} \downarrow X$ 如所述不可分解。为求得此情形下的底层级数，注意到 $V_{\min} \downarrow X$ 是自对偶的，其合成因子为 $0^4/\lambda_2^2$。对于 $i \geq 0$，不存在形状为 $\lambda_2|0^i|\lambda_2$ 的单列 X 模，因为这类模由一个最高权向量生成，因而必是韦尔模 $\lambda_2|0^2$ 的像，这显然荒谬。由于 $V_{\min} \downarrow X$ 不可分解，它不可能有不可约商模 λ_2；又由命题 4.13], , $\mathrm{Ext}^1(\lambda_2|0^2, 0^2|\lambda_2) = \{0\}$，因此所述底层级数是唯一剩下的可能性。□

命题 10.3. 在上述设定下：

(i) 若 $X < A_7$，则

$$L(G) \downarrow X = (\lambda_2|(2\lambda_1 + 0^2)|\lambda_2) + (\lambda_2|(2\lambda_3 + 2\lambda_4 + 0)|(\lambda_2 + 0)) + 0.$$

(ii) 若 X 是极大约化子群，则 $L(G) \downarrow X$ 不可分解，且其底层级数为

$$\lambda_2^2|(2\lambda_1 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 + 0^3)|(0^2 + \lambda_2^2).$$

证明. 在命题 10.2 中，我们证明了 (i) 中的子群 X 包含于子群 A_7中；该子群在 $L(G)$ 上的作用为直和 $V_{A_7}(\lambda_1 + \lambda_7) + V_{A_7}(\lambda_4) + 0$。取一个类型为 B_3 的 $Y < X$，回忆引理 10.1，这与表 6 中最后一个子群共轭）。X 在 $L(G)$ 上的不可分解直和项，其维数与所述模的维数相同。模结构本身可通过考察 $L(G) \downarrow Y$ 并将其与 Y 在每个X-合成因子上的作用进行比较，立即得出。

对于 (ii)，我们再次取 $Y < X$（类型为 B_3），并考察其在表 6 中的 $L(G)$ 上的作用。它有三个不可分解直和项，记作 $M_1 = Z(L(A_7)) = Z(L(G))$、$M_{62}$ 和 M_{70}，其中下标表示维数。现在，Y 包含于 G 中一个类型为 A_7 的子系统子群 H，而 M_{62}、M_{70} 和 $M_{62} + M_{70}$ 的稳定子都包含 H。由于 H 是 G 中的极大子群，它实际上等于上述每个稳定子。然而，我们在第 9 节证明了 X 不包含于

任何类型为 A_7 的子群中，因此 X 不稳定 M_{62}、 M_{70} 或 $M_{62}+M_{70}$。这表明 $L(G)\downarrow X$ 是不可分解的。同样，由于 X 不稳定 132 维 A_7-模 $L(G)/M_1\cong M_{62}+M_{70}$ 的两个不可分解 Y-直和项中的任何一个，我们看到 X 在 $L(G)/Z(L(G))$ 上是不可分解的。最后，考虑 G-模 $T(\lambda_2)$。它有一个 133 维的不可分解子模 $L(G)$，因此 X 在 $T(\lambda_2)$ 上要么不可分解，要么 X 保持 $L(G)$ 的一个一维补子群。然而，注意作为 H-模， $T(\lambda_2)$ 有维数为 1、1、63 和 70 的不可分解直和项，而子群 Y 只保持这些直和项，不保持其他部分。因此， $T(\lambda_2)$ 中 $L(G)$ 的每个 X-模补子群都是一个 H-子模，而 H 再次是此类子模的全稳定子。由于 X 不包含于任何类型为 A_7 的子群中，我们再次得出结论： $T(\lambda_2)$ 是一个不可分解的 X-模。

为了确定底层级数，我们首先考察 G-模 $T_{E_7}(\lambda_2)$，它是自对偶且不可分解，并且包含 $L(G)$ 作为子模。首先，由于 $T_{E_7}(\lambda_2)$ 恰有一个X合成因子对应于每个高权 $2\lambda_1$、 $2\lambda_3$ 和 $2\lambda_4$，这些高权都不可能作为子模或商出现，因为 $T_{E_7}(\lambda_2)$ 的自对偶性意味着必然存在一个具有其中某个权的直和项。

接下来， $L(G)$ 的中心是一维的，因为 $p=2$ 和 G 是单连通的；而 $L(Q)\downarrow X=0+\lambda_2$，它与 $Z(L(G))$ 不相交，因此提供了第二个平凡子模以及一个子模 λ_2；后两个子模完全由 $L(G)$ 的幂零元构成。子群 $Y<X$ 在其对 $L(G)$ 的作用中没有三维平凡子模，因此我们得出， X 在 $L(G)$ 上的不动点空间是二维的。接下来注意，对于有理余循环 ϕ，映射 $x\mapsto\phi(x)x$ 和 $\phi(x)x\mapsto x$ 是代数群 X 与其在 G 的 E_6-Levi 子群中的像之间互为逆映射的同构。该像在 Levi 子群中是伴随型的，因为它在 $V(\lambda_7)$ 上的作用是直和 $0^2+\lambda_2^2$。因此X 是伴随的，所以 $L(G)$ 有一个子模 $L(X)=0^2|\lambda_2$；此外，该子模 λ_2 并非完全由幂零元构成，因此不等于由$L(Q)$提供的子模 λ_2 。现在注意，由于 $T_{E_7}(\lambda_2)$ 恰有四个 X合成因子具有高权 λ_2，其底中不可能有三个这样的因子，否则便意味着存在一个真直和项。因此 $L(G)\downarrow X$ 的底是 $0^2+\lambda_2^2$。由此可知， $T(\lambda_2)$的底也是 $0^2+\lambda_2$；否则其底将是 $0^3+\lambda^3$，这将意味着 $T(\lambda_2)=L(G)+0$，而我们知道它对于 X 实际上是不可分解的。

利用 $T_{E_7}(\lambda_2)$ 有商 λ_2^2 这一事实，再结合 $2\lambda_1$、 $2\lambda_3$ 和 $2\lambda_4$ 的第一上同调均为平凡这一事实，我们看到，除去 $T_{E_7}(\lambda_2)$ 的底之后，所有合成因子 $2\lambda_1$、 $2\lambda_3$ 和 $2\lambda_4$ 都必须作为子模出现，剩余的平凡合成因子也同样如此。因此，对 $L(G)$ 也有同样的结论。最后，由于 $T_{E_7}(\lambda_2)$ 自对偶，可知剩下的两个合成因子 λ_2^2 不会出现在 $T(\lambda_2)$ 的第二底层中，因此它们也不会出现在 $L(G)$ 的第二底层中。由此得到 $L(G)\downarrow X$ 给出的底层级数，以及

$$T_{E_7}(\lambda_2)\downarrow X=\lambda_2^2|(2\lambda_1+2\lambda_3+2\lambda_4+0^4)|(0^2+\lambda_2^2).$$

□

注 10.4. 注意，将上面的 $T_{E_7}(\lambda_2)\downarrow X$ 与命题 10.2(ii) 结合起来，我们立即可以推出 $L(E_8)\downarrow X$ 的模结构。

最后，我们需要确定当 X 不包含于任何约化上群时， $G=E_8$ 中 D_4 类型的 X 的作用。为此，我们需要在 G的一个 E_6-抛物子群 P 中显式构造这样一个子群。为完整起见，我们构造 P中每个非 G-cr 的 D_4 类型子群的一个共轭子群。

命题 10.5. 设 G 属于类型 E_8, $p=2$ ，并设 $P=QL$ 是 G 的标准 E_6-抛物子群。设 X 是包含于 P 中的一个 D_4 型子群，且其在 L 中的像 X_0 不可约。将 $\mathbb{V}=(H^1(X_0,\lambda_2))^3=K^6$ 视为已识别，则存在 $\mathrm{v}=(\phi_1,\phi_2,\phi_3)=(a_1,\dots,a_6)\in\mathbb{V}$

使得 X 与以下元素 $y_{\pm i}(t)$ 的 $X_{\mathbf{v}} = \langle y_{\pm i}(t) : t \in K, 1 \le i \le 4\rangle$ 共轭 .

$$y_{\pm 1}(t) = x_{\pm 3}(t)x_{\pm 5}(t), y_{\pm 2}(t) = x_{\pm 1}(t)x_{\pm 6}(t), y_3(t) = x_{0011000}(t)x_{0001100}(t)$$
$$x_{11232110}(a_1 t)x_{11232111}(a_3 t)x_{12354321}(a_5 t), y_{-3}(t) = x_{-0011000}(t)x_{-0001100}(t)$$
$$x_{11111110}(a_1 t)x_{11111111}(a_3 t)x_{12233321}(a_5 t), y_4(t) = x_{0111000}(t)x_{0101100}(t)$$
$$x_{12232110}(a_2 t)x_{12232111}(a_4 t)x_{13354321}(a_6 t), y_{-4}(t) = x_{-0111000}(t)x_{-0101100}(t)$$
$$x_{10111110}(a_2 t)x_{10111111}(a_4 t)x_{11233321}(a_6 t)。$$

证明。根据构造，给定的元素属于 P；当 a_1、.....、a_6 均为零时，它们生成 L-不可约子群 X_0，如 [22, 第 444] 页所示。显然，余循环在 Q 的各层上的像属于相应的模。因此，只需证明每个这样的子群确实是类型为 D_4 的群。利用 [10,定理 12.1.1]，这只是常规计算；我们的计算借助了 Magma。□

注 10.6. 上述构造中余循环的形式，是利用限制 $H^1(X_0, 0100) \to H^1(Y_0, 0100 \downarrow Y_0)$ 推导出来的，其中 Y_0 是 X_0 中由 $x_{\pm 0011000}(t)x_{\pm 0001100}(t)$ 和 $x_{\pm 0111000}(t)x_{\pm 0101100}(t)$ 生成的 A_1^2 型子群。于是 Y_0 是 X_0 的某个 Levi 子群的导出子群。由于 $1000 \downarrow Y_0 = (1, 1) + 0^4$，可知 $0100 \downarrow Y_0 = (2, 0) + (0, 2) + (1, 1)^4 + 0^6$ 是一个完全可约模。如前所述，在单连通半单代数群中，任意 Levi 子群的导出子群仍是单连通的。D_4 型单连通单群的李代数形状为 $0100|0^2$，而 A_1A_1 型单连通半单群的李代数形状为 $((2, 0)|0) + ((0, 2)|0)$。由此可知，X_0-模 $0100|0^2$ 限制到 Y_0 后为 $(2, 0)|0 + (0, 2)|0 + (1, 1)^4 + 0^6$，特别地，映射 $H^1(X_0, 0100) \to H^1(Y_0, 0100 \downarrow Y_0)$ 是单射。最后，我们使用了 [44, 引理 3.6 中 A_1 型子群的余循环的显式描述。2]

有了这一构造，下面的结果使我们能够借助精心选择的有限子群来推导代数群的作用。

引理 10.7（[25, 命题 1.4]）。设 X 是一个连通单代数群，且 Y是 X的一个有限子群。设 V 是满足以下条件的有限维 X-模:

（i）每个 X-合成因子对 Y都是不可约的；（ii）对于 V的每一对 X-合成因子 M、N，限制映射 $\mathrm{Ext}^1_X(M, N) \to \mathrm{Ext}^1_Y(M, N)$ 是单射；（iii）对于 V的每一对 X-合成因子 M、N，若 $M \downarrow Y \cong N \downarrow Y$，则作为 X-模，$M \cong N$。

则 X 和 Y 在 V中固定的子空间完全相同。

引理10.8。设 $G = E_8$、$p = 2$ 和 X 是一个类型为 D_4的 MR 非G-cr 子群。则$L(G) \downarrow X$ 具有如下底层级数:

$$T(\lambda_2)^2 + (0|\lambda_2^3|(0^4 + 2\lambda_1 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4)|(\lambda_2^2 + 0^2)|(\lambda_2 + 0)).$$

证明。我们将引理 10.7 应用于 X 及其有限子群 $Y := X(4) \cong \mathrm{SO}_8^+(4)$，其作用于 $L(G)$。为此，我们必须验证三个条件均成立。通过检查 $L(G)$ 的 X-合成因子，可立即得出条件 (i) 和 (iii)。条件 (ii) 则由 [12, 定理 7.4],得出，注意到 $\langle \lambda, \alpha_j \rangle \le 3$ 对于 $L(G) \downarrow X$中出现的所有最高权 λ，均有 $j \in \{1, \ldots, 4\}$。

因此，X 和 Y 稳定 $L(G)$的恰好相同的子空间。特别地，$L(G) \downarrow X$ 所声称的底层级数可由 $L(G) \downarrow Y$的底层级数推出。后者的底层级数可在 Magma中计算，使用命题 10.5 中的生成元，并将 $a_1 = a_4 = 1$ 和 $a_i = 0$分别代入 $i = 2$、3、5、6。□

引理 10.9。设 G 为类型 E_8，$p = 2$ 和 X 为类型 D_4的极大约化子群非G-完全可约子群。若 $Y < X$ 为类型 B_3，则 Y 非G-完全可约，且在 $L(G)$上的作用有五个直和项，其维数分别为30、30、62、63、63。

证明。类型为 D_4 的群包含三个共轭类的 B_3 型极大子群。根据命题 10.5 中 X 的构造，我们可以写出这三个共轭类的生成元。利用 Magma，我们发现它们各自都包含一个有限子群 $SO_7(4)$，该子群在 $L(G)$ 上作用，并分解为五个维数分别为 30、30、62、63、63 的直和项。再例行应用引理 10.7，可得这些实际上就是每个 B_3 型极大子群的直和项。由于没有 Levi 子群能包含一个作用时具有上述维数的直和项的子群，因此这些子群不是 G-cr。□

注 10.10。从 $G = E_8$ 中 $p = 2$ 时 B_3 型非 G-cr 子群的分类可知，D_4 型 MR 子群中的所有 B_3 型子群彼此共轭。我们没有在前一个引理中陈述这一点，因为该引理本身是在分类证明中用到的。

11. Tables of embeddings for Theorem 1

现在我们给出表格，列出如定理 1 中所述的单代数群的非-G-cr 子群 X，这些子群已在第 4–9 节中枚举。对于每个表格，除非另有明确说明，每个给出的 X 表示一个唯一的 G-共轭类子群。

每个表格的第一列给出 X 的李型。对于每一种类型，我们从第 2 列开始使用横线，以区分极小包含于抛物子群不同关联类中的非-G-cr 子群。为方便起见，排列顺序与我们在证明中考察抛物子群的顺序相同。

第二列给出 M 的一个真约化上群 X，或者给出“MR”，表示X 在 G 的连通约化子群中是极大的，参见推论 2 和 3。当 M 为经典型时，我们使用第 2.7 节的记号来表示其嵌入。当 M 为例外型时，事实证明 X 总是非-M-cr 的，并且我们给出与 M 表中 X 相同的上群（当 X 在 M 中为 MR 时，我们只列出 M）。

接下来的各列给出 X 在最小维数的非平凡 G-模上的作用，以及在伴随模 $L(G)$上的作用（当这两种模不同时）；这些列中韦尔模和倾斜模的结构见附录A。

最后一列给出 $C_G(X)^\circ$ 的结构，所用记号见第2.5节。符号 (†) 表示 X 在 G中是可分的，即 $L_{C_G(X)}(X) = L(C_G(X))$. 我们回顾一下，$G$ 是单连通的，因此在 $G = E_7$的情形下，G 不是自身的可分子群，许多子群 X 的不可分性只是这一选择造成的假象。

	$C_G(X)^\circ$
	U_1
$00) + 0$	U_1 (†)

	$C_G(X)^\circ$
$0)\|(100 + 0)$	U_1 (†)

	$C_G(X)^\circ$
	$U_5\bar{A}_1$
	$U_1\bar{A}_1$
	U_1A_1 (†)
$00\|010\|100)^2 + 0^3$	
	U_2T_1 (†)
$\|100\|(010 + 0))+$	
	U_2
	U_1
	U_1

	U_1
	U_1

$C_G(X)^\circ$
(†)

	$C_G(X)^\circ$
$+0^6$	$U_5\bar{A}_1^2$ (†)
	1
$010\|100)^6+0^{14}$	U_1G_2 (†)
$10)\|100)^2+$	$U_6\bar{A}_1T_1$ (†)
$+0^4$	
	U_5A_1 (†)
$0)\|(100+0))^4+$	$U_6\bar{A}_1$
	$U_5\bar{A}_1$
$10)\|100\|0)+$	U_3A_1 (†)
	U_5
	U_6 (†)
$0)\|100\|(010+0)\|100)$	
	U_1 (†)

	U_1
$)+$ $,001)^2$	U_1 (†)
	U_1 (†)
	1
	$U_5\bar{A}_1$
	U_1
	$U_5\bar{A}_1$ (†)
$00+0))+0^4$	$U_5\bar{A}_1$
	U_4
$0))$	U_5 (†)

Appendix A. Ancillary data

这里给出了表 4–8 中出现的 Weyl 模和倾斜模的底层级数。这些结果大多可由 Weyl 特征标公式以及低维不可约模的权的相关知识推出，例如 [33]中所给出的知识。借助 S. Doty 的软件包 [18]，还可以更方便地进行显式计算。对于倾斜模，我们重点关注不可分解模 $T(\lambda)$，因为倾斜模的直和及直和项仍是倾斜模；此外，倾斜模的张量积也是倾斜模。最后，对于每个支配权 λ ， $T(\lambda)$的唯一性意味着 $T(\lambda) \cong T(-w_0\lambda)^*$ 其中 w_0 是 Weyl 群的最长元素；对我们而言，这通常已足以确定 $T(\lambda)$ 的子模结构。

本文中出现的两个最复杂的倾斜模来自特征 2 下的B_3 型群，具体而言是 $T(200)$ 和 $T(002)$。前者是 $T(100) \otimes T(100)$，后者是 $001 \otimes 001$。通过使用足够大的有限子群，我们可以利用引理 10.7 进行显式计算，例如在 Magma中，从而获得精确的模结构。根据 [12,推论 7.5], ，子群 $\Omega_7(4)$ 对我们的目的而言是“足够大”的。

X	p	λ	$W(\lambda)$的底层级数
A_3	2	101	$101\|0$
B_3	2	100	$100\|0$
C_3	3	110	$110\|001$
B_4	2	1000	$1000\|0$

X	p	λ	$T(\lambda)$的底层级数
A_3	2	101	$0\|101\|0$
		020	$101\|(020+0)\|(101+0)$
		200	$010\|200\|010$
		002	$010\|002\|010$
B_3	2	100	$0\|100\|0$
		010	$0\|100\|(010+0)\|100\|0^2$
		200	$100\|(010+0^2)\|(200+100+0)\|(100+010+0)\|(100+0^2)$
		002	$0\|100\|101\|100\|(002+0)\|100\|(101+0)\|100\|0$
C_3	3	010	$0\|010\|0$
		101	$010\|(101+0)\|010$
C_4	2	0100	$0\|0100\|0$
D_4	2	$2\lambda_i$, $i=1,3,4$	$0\|0100\|0\|(2\lambda_i+0)\|0100\|0$
		0100	$0^2\|0100\|0^2$
		0011	$1000\|0011\|1000$

Acknowledgements

作者感谢伦敦数学会通过 Scheme 4 资助提供支持，并感谢 MFO 提供 Research in Pairs 访问。他们还感谢艾萨克·牛顿数学科学研究所，在「群、表示与应用：新视角」项目期间提供支持与款待；本文的大部分工作是在此期间完成的。该项目获得了英国工程与自然科学研究委员会（EPSRC）资助，资助编号为 EP/R014604/1。

第一作者感谢亚历山大·冯·洪堡基金会（德国）提供支持，并感谢伦敦数学会提供的第9方案研究重启资助。

第二作者获得英国工程与自然科学研究委员会资助，项目编号 EP/W000466/1。

References

1. H. Azad、M. Barry 和 G. Seitz, *On the structure of parabolic subgroups* **18** 1990 2, , 《代数通讯》 551 562 1047327 91 20048 （）， 第 – 期。极大约化子群（d: ）2. Michael Bate、Benjamin Martin 和 Gerhard R¨ohrle, *A geometric approach to complete reducibility*, 《数学发明》161（2005），第 1 期，177–218。极大约化子群 2178661（2007k:20101）3. , *Complete reducibility and commuting subgroups*, 《纯粹与应用数学杂志》621（2008），213–235。极大约化子群 2431255（2009h:20051）4. Michael Bate、Benjamin Martin、Gerhard R¨ohrle 和 Rudolf Tange, *Complete reducibility and separability*, 《美国数学会汇刊》362（2010），第 8 期，4283–4311。极大约化子群 2608407（2011i:20068）5. , *Closed orbits and uniform S-instability in geometric invariant theory*, 《美国数学会汇刊》365（2013 3042598 6 7, 3643 3673），第 – 期。极大约化子群。A. Borel 和 J. De Siebenthal, *Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos*, Comment. Math. Helv. 23（1949），200–221。极大约化子群 0032659（11,326d）7. A. Borel 和 J. Tits, *Éléments unipotents et sous-groupes paraboliques de groupes réductifs. I*, 《数学发明》12（1971），95–104。极大约化子群 0294349（45 #3419）8. Armand Borel, *Linear algebraic groups*, 第二版，数学研究生教材，第 126 卷，Springer-Verlag，纽约，1991。极大约化子群 1102012（92d:20001）9. N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV: Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V: Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI: systèmes de racines* 1337, 1968 0240238 39 1590 , Actualites Scientifiques et Industrielles，第 No.，Hermann，巴黎，。极大约化子群（#）10. Roger W. Carter, *Simple groups of Lie type*, John Wiley & Sons，伦敦—纽约—悉尼，1972，纯粹与应用数学，第 28 卷。极大约化子群 0407163（53 #10946）11. , *Finite groups of Lie type*, 纯粹与应用数学（纽约），John Wiley & Sons Inc.，纽约，1985，共轭类与复特征，Wiley-Interscience 出版物。极大约化子群 794307（87d:20060）12. E. Cline、B. Parshall、L. Scott 和 W. van der Kallen, *Rational and generic cohomology*, 《数学发明》39（1977），第 2 期，143–163。极大约化子群 0439856（55 #12737）13. David A. Craven, *The maximal subgroups of the exceptional groups F_4 q E_6 q and $^2E_6$ q and related* () () () , 。*almost simple groups* 2021 14. , *Maximal* PSL_2 *subgroups of exceptional groups of Lie type*, 《美国数学会回忆录》276（2022），第 1355, +155 4386346 v 期。极大约化子群。, *On the maximal subgroups of $E_7(q)$* 15 *and related almost simple groups*, 2022。16. Stephen Donkin, *A filtration for rational modules*, 《数学杂志》177（1981），第 1 期，1–8。极大约化子群 611465 17. , *Rational representations of algebraic groups*, 数学讲义，第 1140 卷，Springer-Verlag，柏林，1985，张量积与滤过。极大约化子群 804233（87b:20054）18. Stephen Doty, *Weyl modules*, GAP 软件包，版本 1.1。19. E. B. Dynkin, *Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras*, 《数学文集》新系列 30(72)（1952），349–462（3 幅插图）。极大约化子群 0047629（13,904c）20. Sebastian Herpel, *On the smoothness of centralizers in reductive groups*, 《美国数学会汇刊》365（2013），第 7 期，3753 3042602 21 3774–。极大约化子群。Jens Carsten Jantzen, *Representations of algebraic groups*, 第二版，数学调查与专著，第 107 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2003。极大约化子群 2015057（2004h:20061）22. Martin W. Liebeck、Jan Saxl 和 Donna M. Testerman, *Simple subgroups of large rank in groups of Lie type*, 《伦敦数学会会刊》（3）72（1996），第 2 期，425–457。极大约化子群 1367085（96k:20087）23. Martin W. Liebeck 和 Gary M. Seitz, *Subgroups generated by root elements in groups of Lie type*, 《数学年刊》（2）139（1994），第 2 期，293–361。极大约化子群 1274094（95d:20078）24. , *Reductive subgroups of exceptional algebraic groups*, 《美国数学会回忆录》121（1996），第 580 期，vi+111。极大约化子群 1329942（96i:20059）25. , *On the subgroup structure of exceptional groups of Lie type*, 《美国数学会汇刊》350（1998），第 9 期，3409–3482。极大约化子群 1458329（99j:20055）26. , *The maximal subgroups of positive dimension in exceptional algebraic groups*, 《美国数学会回忆录》169（2004），第 802 期，vi+227。极大约化子群 2044850（2005b:20082）27. , *Subgroups of exceptional algebraic groups which are irreducible on an adjoint or minimal module*, 《群论杂志》7 2063402 28（2004），第 3 期，347–372。极大约化子群。, *Unipotent and nilpotent classes in simple algebraic groups and Lie algebras*, 数学调查与专著，第 180 卷，2883501 29 2012 美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，。极大约化子群。Martin W. Liebeck 和 Donna M. Testerman, *Irreducible subgroups of algebraic groups*, 《季刊数学杂志》55（2004），第 1 期，47–55。极大约化子群 2043006（2005b:20087）30. Alastair J. Litterick、David I. Stewart 和 Adam R. Thomas, *Complete reducibility and subgroups of exceptional algebraic groups* 2209 11310 ，审稿中。 https://arxiv.org/pdf/ . .pdf。

31. Alastair J. Litterick 和 Adam R. Thomas, *Complete reducibility in good characteristic*, 《美国数学会汇刊》370 (2018), 第 8 期, 5279–5340。32. , *Reducible subgroups of exceptional algebraic groups*, 《纯粹与应用代数杂志》(2018)。33. Frank L¨ubeck, *Small degree representations of finite Chevalley groups in defining characteristic*, 《LMS 计算数学杂志》4 (2001), 135–169（电子版）。极大约化子群 1901354 (2003e:20013) 34. George J. McNinch,

Levi decompositions of a linear algebraic group **15** 2010 4, , 《变换群》( ), 937 964 2753264 2012 20110
第 – 期。极大约化子群 (b:) 35. R. W. Richardson,

Affine coset spaces of reductive algebraic groups **9** 1977 1, , 《伦敦数学会通报》( ), 第 – 期。极大约化子群 36. ,
38 41 437549

_____ *Conjugacy classes of n-tuples in Lie algebras and algebraic groups* **57** 1988 1, , 《杜克数学杂志》( ), 第 – 期。极大约化子群 37. Gary M. Seitz, *The maximal subgroups of classical algebraic groups*, 《美国数学会回忆录》67 (1987), 第 365 期, iv+286。极大约化子群 888704 (88g:20092) 38. ,
1 35 952224

Maximal subgroups of exceptional algebraic groups, 《美国数学会回忆录》90 (1991), 第 441 期, iv+197。极大约化子群 1048074 (91g:20038) 39. Jean-Pierre Serre, *Galois cohomology*, 英文版, Springer数学专著, Springer-Verlag, 柏林, 2002, 由 Patrick Ion 从法文翻译并由作者修订。极大约化子群 1867431 (2002i:12004) 40. , *Complète réductibilité*, Ast´erisque (2005), 第 299 期, 报告编号 932, viii, 195–217, S´eminaire Bourbaki。2003/2004 卷。极大约化子群 2167207 (2006d:20084) 41. David I. Stewart, *The reductive subgroups of G_2*, 《群论杂志》13 (2010), 第 1 期, 117–130。极大约化子群 2604850 (2011c:20099) 42. , *Non-G-completely reducible subgroups of the exceptional algebraic groups*, 《国际数学研究通知》(2013)。43. ,

_____ *On unipotent algebraic G-groups and 1-cohomology* **365** 2013 12, , 《美国数学会汇刊》( ), 第 – 期。极大约化子群
6343 6365 3105754

44 _____ *The reductive subgroups of F_4* **223** 2013 1049, +88 3075783 。 , , 《美国数学会回忆录》( ), 第 vi 期。极大约化子群。Adam R. Thomas,
45 **423** 2015 190

Simple irreducible subgroups of exceptional algebraic groups, 《代数杂志》( ), – 238。46. ,

The irreducible subgroups of exceptional algebraic groups, 《美国数学会回忆录》268 (2020), 第 1307 期, v+191。极大约化子群 4218306