arXiv:2304.08407v1 [math.AP] 17 Apr 2023

具有孤立奇点的 (k − 1)-伪凸区域上的齐次复 k-Hessian 方程的狄利克雷问题

高正欢、马西南和张德凯

摘要。本文研究 Ω \ {0} 中的齐次复 k-Hessian 方程。通过构造逼近解，我们证明了 $C^{1,\alpha}$ 解的存在性和唯一性。关键在于为逼近问题构造次解，并建立与逼近无关的一致梯度估计和复海森估计。

1. 引言

设 Ω 是一个光滑有界域，$\mathbb{C}^n$ 是一个整数，且满足 $1 \le k \le n$。我们考虑齐次复 k-Hessian 方程

$$(dd^c u)^k \wedge \omega^{n-k} = 0 \quad \text{in } \Omega \setminus \{0\}.$$

设 u 是 $\mathbb{C}^n$ 中的实值 C^2 函数，且 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 是复Hessian ($\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}$) 的特征值，复 k-Hessian 算子定义为

$$H_k[u] := \sum_{1 \le i_1 < \cdots i_k \le n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k},$$

其中 $1 \le k \le n$。利用算子 $d = \partial + \bar{\partial}$ 和 $d^c = \sqrt{-1}(\partial - \bar{\partial})$，使得 $dd^c = 2\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}$，可得

$$(dd^c u)^k \wedge \omega^{n-k} = 4^n k!(n-k)! H_k[u] d\lambda,$$

其中 $\omega = dd^c|z|^2$ 是基本 Kähler 形式，而 $d\lambda$ 是体积形式。当 $k = 1$时，$H_1[u] = \frac{1}{4}\Delta u$。当 $k = n$ 时，$H_n[u] = \det u_{i\bar{j}}$是复 Monge-Amp`ère 算子。

1.1. 一些已知结果与研究动机。设 $S_k(D^2u)$ 是区域 $\mathbb{R}^n$ 中实值 C^2函数 u 的 k-海森算子。当 $k > 1$时，海森方程 $S_k(D^2u) = f$ 和 $H_k[u] = f$ 都是非线性的。当 $f > 0$ 时，Hessian 方程是非退化的。当 f 在某处为零时，Hessian 方程是退化的。

1.1.1. 有界域上的结果。对于 $\mathbb{R}^n$ 上的 Hessian 方程，其正 f 的狄利克雷问题

$$\begin{cases} S_k(D^2u) = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

Ivochkina [21] 研究了凸区域上的 $k = 1, 2, 3, n$ 情形，并对 f 作了进一步假设；Caffarelli-Nirenberg-Spruck [10] 在假设 Ω 为 $(k-1)$-凸的条件下，研究了一般 $f > 0$ 和 $k = 1, 2, \cdots, n$ 的情形。B. Guan [16] 证明，通过假设严格次解存在，可以去除对 Ω 的几何条件。在 [35], Trudinger-Wang 为 Hessian 算子建立了 Hessian 测度理论。关于更多相关主题，可参见 Wang [38] 的综述。对于 $\mathbb{C}^n$中的复 k-Hessian 方程，Li [30]通过次解方法求解了其狄利克雷问题。

对于 $\mathbb{R}^n$有界域上的 Monge-Amp`ere 方程，当 $f = 0$时，Caffarelli-Nirenberg-Spruck [11] 证明了有界凸区域中的 $C^{1,1}$ 正则性。对于一般 $f \geq 0$，Guan-Trudinger-Wang [20] 证明了当 $f^{\frac{1}{n-1}} \in C^{1,1}$时的 $C^{1,1}$ 正则性结果。Wang [37],给出的反例表明，$C^{1,1}$ 正则性是最优的。对于 $\mathbb{R}^n$中的 k-Hessian 方程，Krylov [24, 25] 和 Ivochkina-Trudinger-Wang [22]得到了 $C^{1,1}$ 正则性。

对于复 Monge-Amp`ère 方程，Lempert [26, 27] 证明，在严格凸穿孔区域 $\Omega\backslash\{0\}$ 上，当 $f = 0$时，狄利克雷问题存在一个在原点具有对数极点的光滑解。对于强伪凸区域，Guan [17] 和 Błocki[5] 证明了解属于 $C^{1,1}$。在 [19], 中，Guan 得到了环域上解的 $C^{1,1}$ 正则性。对于一般的 $f \geq 0$，强伪凸区域上最优的 $C^{1,1}$ 正则性由 Caffarelli-Kohn-Nirenberg-Spruck [8],和 Krylov [24, 25] 得到。

1.1.2. 无界区域上的结果。无界区域上的非退化 k-Hessian 方程的黏性解已得到广泛研究。Caffarelli-Li [9] 求得了 Monge-Amp`ère 方程 $\det D^2u = 1$ 的黏性解，并规定了其在无穷远处的渐近行为。Bao-Li-Li [2] 研究了 k-Hessian 方程的情形。关于其他类型非退化全非线性方程的相关结果，可参见 [1,28,31]。

在 [29], Li-Wang 中，考虑条带区域 $\Omega := R^n \times [0, 1]$ 上的 $\det D^2u = 0$。通过假设两个边界函数均为严格凸的 $C^{1,1}(\mathbb{R}^{n-1})$ 函数，他们得到了属于 $C^{1,1}(\Omega)$ 的解。如果边界函数是局部一致凸的 $C^{k+2,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$ 函数，那么 u 是唯一的 $C^{k+2,\alpha}(\Omega)$ 函数。

最近，Xiao [39] 和 Ma-Zhang [34] 在假设 Ω 为星形、$(k-1)$-凸且 $k < \frac{n}{2}$，或分别假设 Ω 为 $(k-1)$-凸且 $1 \leq k \leq n$ 的条件下，证明了 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$外齐次 k-Hessian 方程的狄利克雷问题具有 $C^{1,1}$正则性。对于齐次复 k-Hessian 方程，Gao-Ma-Zhang [15] 证明了其具有 $C^{1,1}$正则性。

1.1.3. 研究动机。 本文的研究动机源于对极值函数或格林函数正则性的研究。在 [23], Klimek 引入了以下极值函数

$$g_\Omega(z,\xi) = \sup\{v \in \mathcal{PSH}(\Omega) : v < 0,\ v(z) \le \log|z-\xi| + O(1)\}.$$

$g_\Omega(z,\xi)$ 也称为 Ω 上在 ξ 处具有对数极点的多复变格林函数。如果 Ω 是超凸的，Demailly [13] 证明了 $u(z) = g_\Omega(z,\xi)$ 是连续的，并且是齐次复 Monge-Amp´ère 方程的唯一解,

$$\begin{cases} (dd^c u)^n = 0 & \text{in } \Omega \setminus \{\xi\}, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ u(z) = \log|z-\xi| + O(1) & \text{as } z \to \xi. \end{cases} \tag{1.1}$$

如果 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中具有光滑边界的严格凸域，Lempert [26] 证明了（1.1）存在唯一的光滑多重次调和解。在强拟凸情形下，B. Guan [17] 证明了 $g_\Omega(z,\xi) \in C^{1,\alpha}(\Omega \setminus \{\xi\})$，随后 Błocki 将其改进为 [5] 中的 $C^{1,1}(\Omega \setminus \{\xi\})$，并将其推广到 [6] 中的多个极点。由于 Bedford-Demailly [3],发现的反例，$C^{1,1}$ 正则性已是最优的。

P. Guan [19] 通过考察 Chen-Levine-Nirenberg [12] 和 Beford-Taylor [4] 的内在范数，建立了相关极值函数的 $C^{1,1}$ 正则性

$$\begin{cases} (dd^c u)^n = 0 & \text{in } \Omega_0 \setminus (\cup_{i=1}^m \Omega_i), \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega_i,\ i = 1, \cdots, n \\ u = 1 & \text{on } \partial\Omega_0. \end{cases}$$

运用 [19], 中的技巧，B. Guan 证明了$\mathbb{C}^n$中有限个强伪凸区域的并集上的多复变格林函数具有 $C^{1,1}$ 正则性。

在[14], 中，我们研究了穿孔区域中的以下齐次（实）k-Hessian 方程

$$\begin{cases} S_k(D^2 u) = 0 & \text{in } \Omega\setminus\{0\}, \\ u = c_k & \text{on } \partial\Omega, \\ u(x) = h_k(x) & \text{as } x \to 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

其中，当 $k > n/2$ 时，$c_k = 1$ 且 $h_k(x) = 0$；当 $k < n/2$ 时，$c_k = -1$ 且 $h_k(x) = -|x|^{2-\frac{n}{k}} + O(1)$；当 $k = n/2$ 时，$c_k = 0$ 且 $h_k(x) = \log|x| + O(1)$。假设 Ω 是 $(k-1)$-凸的，我们证明了方程 (1.2) 存在唯一的 $C^{1,1}$ 解。此外，该解可以通过齐次 k-Hessian 方程的基本解进行点态控制，直至二阶。如果 Ω 关于原点也是星形的，我们证明了解的梯度具有正下界，并进一步沿近似解的水平集证明了一个近似单调性公式。

1.2. 我们的结果。本节中，我们研究如下复 k-Hessian 方程问题

$$\begin{cases} (dd^c u)^k \wedge \omega^{n-k} = 0 & \text{in } \Omega \setminus \{0\}, \\ u = -1 & \text{on } \partial\Omega, \\ u(z) = -|z|^{2-\frac{2n}{k}} + O(1) & \text{as } z \to 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

定理 1.1. 假设 $1 \le k < n$。设 Ω 是一个光滑的 $(k-1)$-伪凸区域，且包含原点。那么，存在唯一的 k-次调和解 u，使得 (1.3) 在 $C^{1,\alpha}(\Omega \setminus \{0\})$ 中成立。此外，u 满足估计式

$$-C \le u + |z|^{2-\frac{2n}{k}} \le 0, \tag{1.4}$$

$$|Du| + |z||\Delta u| \le C|z|^{1-\frac{2n}{k}}. \tag{1.5}$$

这里 k-次调和函数和 $(k-1)$-伪凸区域在第 2 节中介绍。我们假设 Ω 包含原点，并采用记号 $\Omega_r = \Omega \setminus B_r(0)$。为简洁起见，我们用 B_r 代替 $B_r(0)$。为证明定理 1.1，我们考虑逼近问题

$$\begin{cases} H_k[u^{\varepsilon,r}] = \varepsilon & \text{in } \Omega_r, \\ u = \underline{u} & \text{on } \partial B_r, \end{cases} \tag{1.6}$$

其中，$\underline{u}$ 是第3节中构造的次解。通过逼近满足 (1.6) 的解 $u^{\varepsilon,r}$，可以得到满足 (1.3) 的解 u。$u^{\varepsilon,r}$ 的存在性由 [30]下解方法得出。

本文其余部分安排如下。在第 2 节中，我们首先给出定义和一些记号。然后回顾 [15] 受 B. Guan [18]，启发提出的一些新梯度估计和复海森估计，这些结果将在证明（1.5）时用到。在第 3 节中，我们建立一致梯度估计和复海森估计。定理 1.1 将在最后一节中得到证明。

2. 预备知识

2.1. 初等对称函数。对于任意的 $k = 1, \cdots, n$ 和 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$，$\lambda$ 上的第 k 个初等对称函数定义为

$$S_k(\lambda) := \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}.$$

令 $S_k(\lambda|i)$ 为具有 $\lambda_i = 0$ 的对称函数。令 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为一个 $n \times n$ 矩阵。令 $S_k(A)$ 为 A 的第 k 个初等对称函数，即 A 的 $k \times k$ 阶主子式之和。我们约定 $S_0(A) = 1$。显然，$S_k(A) = S_k(\lambda(A))$，其中 $\lambda(A)$ 是 A 的特征值。

该 e 初等对称函数具有以下来自 [32] 的简单性质 .

$$S_k(\lambda) = S_k(\lambda|i) + \lambda_i S_{k-1}(\lambda|i), \tag{2.1}$$

and

$$\sum_{i=1}^{n} S_k(\lambda|i) = (n-k)S_k(\lambda). \tag{2.2}$$

回顾一下， Γ_k-锥定义为

$$\Gamma_k := \{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid S_i(\lambda) > 0, 1 \le i \le k\}$$

对于 $\lambda \in \Gamma_k$ 和 $1 \le l \le k$，著名的 MacLaurin 不等式（见 [32]）表明

$$\left(\frac{S_k(\lambda)}{C_n^k}\right)^{\frac{1}{k}} \le \left(\frac{S_l(\lambda)}{C_n^l}\right)^{\frac{1}{l}}.$$

[1]在[10]中可以发现 $S_{\bar{k}k}$ 的凹性。

[1]命题 2.1。$S_{\bar{k}k}$ 在 Γ_k中是一个凹函数。

2.2. k-次调和解。本节给出 k-次调和函数和 k-伪凸域的定义。关于 k-Hessian 算子的更多性质，可参阅 Wang [38] 的讲义；关于复 k-Hessian 算子的性质，可参阅 Błocki [7] 。我们遵循 Błocki [7] 的定义，给出 k-次调和函数的定义。

定义 2.2. 设 α 是 $\mathbb{C}^n$中的一个实 (1, 1)-形式，其中 U 是一个区域。若下列不等式成立，则称 α 在 U 中是 k-正的

$$\alpha^j \wedge \omega^{n-j} \ge 0, \forall\, j = 1, \cdots, k.$$

定义 2.3. 设 U 是 $\mathbb{C}^n$中的一个区域。

(1). 若函数 $u : U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 是次调和的，且对于 U 中所有 k-正的实 (1, 1)-形式 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{k-1}$，

$$dd^c u \wedge \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{k-1} \wedge \omega^{n-k} \ge 0.$$

U 中所有 k-次调和函数构成的类记为 $\mathcal{SH}_k(U)$。

(2). 若函数 $u \in C^2(U)$ 满足 $\lambda(\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}) \in \Gamma_k$ ($\lambda(\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}) \in \Gamma_k$)，则称 u 为 k-次调和（严格 k-次调和）。

若 $u \in \mathcal{SH}_k(U) \cap C(U), (dd^c u)^k \wedge \omega^{n-k}$在多复势理论中由 Błocki 定义良好[7]。为证明问题（1.3）的连续解的唯一性，我们需要以下由 Błocki 提出的比较原理 [7] 。

引理 2.4. 设 U 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个有界域，$u, v \in \mathcal{SH}_k(U) \cap C(\overline{U})$ 满足

$$\begin{cases} (dd^c u)^k \wedge \omega^{n-k} \geq (dd^c v)^k \wedge \omega^{n-k} & in\ U, \\ u \leq v & on\ \partial U. \end{cases}$$

那么 $u \leq v$ 在 U 中。

2.3. 梯度估计和复海森估计。受 [18], 的启发，我们在 [15]中证明了以下新的梯度估计和复海森估计。

定理 2.5. 设 $u \in C^3(U) \cap C^1(\overline{U}) \cap \mathcal{SH}_k(U)$ 是 $H_k[u] = f$ 在 U 中的一个负解，其中 $f \in C^1(\overline{U})$ 为正。记

$$P = |Du|^2(-u)^{-\frac{2n-k}{n-k}}.$$

Then

$$\max_{\overline{U}} P \leq \max\left\{ \max_{\partial U} P, \max_{\overline{U}} \left(\frac{2(n-k)}{k(2n-k)}\right)^2 (-u)^{-\frac{k}{n-k}} |D \log f|^2 \right\} \tag{2.3}$$

定理 2.6. 设 $u \in C^4(U) \cap C^2(U) \cap \mathcal{SH}_k(\overline{U})$ 是 $H_k[u] = f$ 在 U 中的一个负解，其中 $f \in C^2(\overline{U})$ 为正。假设 $P = |Du|^2(-u)^{-\frac{2n-k}{n-k}}$，$(-u)^{-kn-k}|D \log f|^2$ 和 $(-u)^{-kn-k}|D^2 \log f|$ 有界。记

$$H = u_{\xi\bar{\xi}}(-u)^{-\frac{n}{n-k}}(M-P)^{-\sigma},$$

其中 $M = 2\max_{\overline{U}} P + 1, \sigma \leq \frac{n(n-k)}{8(2n-k)^2}$。于是我们有

$$\max_{\overline{U}} H \leq C + \max_{\partial U} H, \tag{2.4}$$

其中 C 是仅依赖于 n、k、P、$(-u)^{-kn-k}|D \log f|^2$ 和 $(-u)^{-kn-k}|D^2 \log f|$ 的正常数。

我们需要以下 P. Guan 的引理 [19] 来构造环域中的复 k-Hessian 方程的次解。

引理 2.7. 设 U 是 $\mathbb{C}^n$ 中的有界光滑域。对于 $h、g \in C^m(\overline{U})、m \geq 2$，对所有 $\delta > 0$，存在 $H \in C^m(\overline{U})$ 使得
(1) $H \geq \max\{h, g\}$ and

$$H(z) = \begin{cases} h(z), & if\ h(z) - g(z) > \delta, \\ g(z), & if\ g(z) - h(z) > \delta; \end{cases}$$

(2) 存在 $|t(z)| \leq 1$，使得

$$\left\{H_{i\bar{j}}(z)\right\} \geq \left\{\frac{1+t(z)}{2} g_{i\bar{j}} + \frac{1-t(z)}{2} h_{i\bar{j}}\right\},\ for\ all\ x \in \{|g-h| < \delta\}.$$

我们可以证明H是k-次调和的，如果f和g均为k-次调和的，这可由命题$S^{\frac{1}{k}}$中的2.1得出。

在本小节最后，我们回顾一下（k − 1）-伪凸区域的定义。

定义 2.8。若存在 $C_U > 0$，使得 $\lambda(-d_{i\bar{j}} + C_U(d^2)_{i\bar{j}}) \in \Gamma_k$ on ∂U，则称 C^2 区域 U 为（k − 1）-伪凸区域，其中 d(z) = dist(z, ∂U) 是点 z 到 ∂U 的距离函数。

3. 在 Ω \ B_r 中求解逼近问题

本节中，我们将通过先验估计和次解方法来求解逼近问题。在此之前，我们对 Ω 作一个假设。

假设 3.1。假设 Ω 包含原点，且 $B_{r_0} \subset\subset \Omega \subset\subset B_{(1-\tau_0)R_0}$，其中$\tau_0 \in (0, 1\ 2)$。

记 $\Omega^{\mu} = \{z \in \Omega : d(z) < \mu\}$。本节中，我们用带下标的 C 和 c 表示某个与 ε 和 r 无关的正常数。

下面关于 $\mathbb{C}^n$ 中 (k − 1)-伪凸区域的引理，是 $\mathbb{R}^n$ 中 (k − 1)-凸区域对应版本的平行结果，可见 [10, 第 3] 节。它在构造次解时起着重要作用。

引理 3.2. 设 Ω 是一个光滑的 (k − 1)-伪凸有界域。存在足够小的 $\mu_0 \in (0, 1\ 2C_\Omega)$，使得 $B_{r_0} \subset\subset \{z \in \Omega : d(z) > 2\mu_0\}$。此外，$\rho := -d + C_\Omega d^2$ 光滑且严格 k-次调和，并且 $H_k[\rho] \geq \varrho_0$ 在 $\Omega^{2\mu_0}$ 中，对某个 $\varrho_0 > 0$ 成立。

3.1. 逼近方程。我们将用 Ω\{0} 中一列非退化方程的解来逼近齐次复 k-Hessian 方程在 Ω_r 中的解。若能构造一个光滑次解，便可得到逼近解的存在性。下文中，我们采用 P. Guan [19] 的技巧来构造次解。

记 $w := -|z|^{2-\frac{2n}{k}} + R^{2-\frac{2n}{k}}{}_0 - 1 + a_0 \frac{|z|^2}{R_0^2}$，其中 $a_0 = \frac{1}{2}\left((1-\tau_0)^{2-\frac{2n}{k}} - 1\right)R^{2-\frac{2n}{k}}{}_0$。于是，由 $\Omega \subset B_{(1-\tau_0)R_0}$，，可得

$$w \leq -\frac{1}{2}\left((1-\tau_0)^{2-\frac{2n}{k}} - 1\right)R_0^{2-\frac{2n}{k}} - 1 \quad \text{in } \overline{\Omega}.$$

由命题2.1，可得

$$H_k^{\frac{1}{k}}[w] \geq H_k^{\frac{1}{k}}[-|z|^{2-\frac{2n}{k}}] + H_k^{\frac{1}{k}}[a_0\frac{|z|^2}{R_0^2}] = (C_n^k)^{\frac{1}{k}} a_0 R_0^{-2} \quad \text{in } \Omega.$$

由引理 2.7，我们可以由 k-次调和函数 u和 w构造一个光滑且严格 ρ。

引理 3.3。存在一个严格 k-次调和函数 $u \in C^\infty(\Omega_r)$, 满足

$$\underline{u}(z) = \begin{cases} K_0\rho(z) - 1 & if \quad d(z) \le \frac{\mu_0}{M_0}, \\ w(z) & if \quad d(z) > \mu_0, \end{cases}$$

$$\underline{u}(z) \ge \max\{K_0\rho(z) - 1, w(z)\} \quad if \quad \frac{\mu_0}{M_0} \le d(z) \le \mu_0,$$

$$H_k[\underline{u}] \ge \epsilon_1 := \min\{C_n^k a_0^k R_0^{-2k}, K_0^k \epsilon_0\} \quad in \quad \Omega,$$

其中 K_0 和 M_0 是一致常数。

证明。由于 $B_{r_0} \subset \{z \in \Omega : d(z) > 2\mu_0\}$, 通过选取 $K_0 = r_0^{2-\frac{2n}{k}} C_\Omega \mu_0^2 - \mu_0$, 我们发现 $\forall z \in \Omega^{2\mu_0} \setminus \Omega^{\mu_0}$, 有

$$\begin{aligned} w - (K_0\rho - 1) &= -|z|^{2-\frac{2n}{k}} + R_0^{2-\frac{2n}{k}} + a_0\frac{|z|^2}{R_0^2} - K_0\rho \\ &\ge -r_0^{2-\frac{2n}{k}} + R_0^{2-\frac{2n}{k}} - K_0(-\mu_0 + C_\Omega\mu_0^2) \\ &\ge R_0^{2-\frac{2n}{k}}, \end{aligned}$$

对于任意 $z \in \Omega_{\mu_0 M_0} := \{z \in \Omega : d(z) \le \mu_0 M_0\}$, 同样有

$$(K_0\rho - 1) - w \ge \frac{1}{2}\Big((1-\tau_0)^{2-\frac{2n}{k}} - 1\Big)R_0^{2-\frac{2n}{k}} + K_0\Big(-\frac{\mu_0}{M_0} + C_\Omega(\frac{\mu_0}{M_0})^2\Big) \ge \frac{1}{4}\Big((1-\tau_0)^{2-\frac{2n}{k}} - 1\Big)R_0^{2-\frac{2n}{k}},$$

前提是 M_0 是下列方程的正解:

$$K_0(-\frac{\mu_0}{M_0} + C_\Omega(\frac{\mu_0}{M_0})^2) \ge -\frac{1}{4}((1-\tau_0)^{2-\frac{2n}{k}} - 1)R_0^{2-\frac{2n}{k}} \tag{3.1}$$

事实上，我们可以选取 τ_0 足够小，使得当(3.1) 成立，如果 $M_0 > 1$。

取 $\delta := \min\{\frac{1}{4}\Big((1-\tau_0)^{2-\frac{2n}{k}} - 1\Big)R_0^{2-\frac{2n}{k}}, R_0^{2-\frac{2n}{k}}\}$，并在 $\Omega^{2\mu_0}$ 上令 $g = K_0\rho - 1$、$h = w$ 和 δ，应用引理 2.7，可得 $\Omega^{2\mu_0}$ 中一个光滑且严格 k-次调和函数 u。此外，在 $\Omega_{\mu_0 M_0}$ 中 $u = K_0\rho - 1$，且在 $\Omega^{2\mu_0} \setminus \Omega^{\mu_0}$ 中 $u = w$。最后，我们在 $\Omega_r \setminus \Omega^{2\mu_0}$ 中令 $u = w$。由引理 2.7，得到

$$H_k[\underline{u}] \ge \min\{H_k[w], H_k[K_0\rho]\} \ge \min\{C_n^k a_0^k R_0^{-2k}, K_0^k \epsilon_0\}.$$

□

现在我们考虑逼近方程

$$\begin{cases} H_k[u] = \varepsilon & \text{in } \Omega_r, \\ u = \underline{u} & \text{on } \partial\Omega_r \end{cases} \tag{3.2}$$

于是 $\underline{u}$ 是上述方程的严格次调和解，对任意 $\varepsilon < \epsilon_1$。由 Li [30],(3.2) 可得一个严格 k-次调和解 $u^{\varepsilon,r} \in C^\infty(\Omega_r)$。令 $r_1 = \min\{2^{\frac{2}{kk-n}} R_0, (\frac{2a_0}{R_0^2})^{\frac{1}{k2n}}\}$，

$\forall r \le r_1$, 由于 $\underline{u} = -1$ 在 $\partial\Omega$ 上，且 $\underline{u} = -r^{2-\frac{2n}{k}} + R^{2^{\frac{2}{nk}}}_0 - 1 + a_0 r^2 R_0^2$ 在 ∂B_r 上，因此有 $\underline{u}|_{\partial\Omega_r} \le -1$。根据最大值原理，当 $r \le r_1, \varepsilon \le \varrho_1$ 时，我们有 $u^{\varepsilon,r} \le -1$。

接下来，我们希望推导出一个与 (ε, r) 无关的、一致的 C^2 估计，使其适用于 $u^{\varepsilon,r}$。我们证明如下

定理 3.4. 设 Ω 是一个光滑的 $(k-1)$-拟凸有界域。假设 Ω 满足假设*3.1*。当 $r > 0$ 和 $\varepsilon > 0$充分小时，(3.2) 存在一个 k-次调和解 $u^{\varepsilon,r}$，其中 u 如上构造。此外，$u^{\varepsilon,r}$ 满足以下估计，

$$-|z|^{2-\frac{2n}{k}} + R_0^{2-\frac{2n}{k}} - 1 + a_0\frac{|z|^2}{R_0^2} \le u^{\varepsilon,r} \le -|z|^{2-\frac{2n}{k}} + r_0^{2-\frac{2n}{k}} - 1, \tag{3.3}$$

$$|Du^{\varepsilon,r}| \le C|z|^{1-\frac{2n}{k}}, \tag{3.4}$$

$$|\partial\bar{\partial}u^{\varepsilon,r}| \le C|z|^{-\frac{2n}{k}}, \tag{3.5}$$

其中，C 是与 ε 和 r 无关的一致正数。

此外，若 Ω 关于原点是星形的，则存在一个与 ε 和 r 无关的一致正数 c，使得

$$|Du^{\varepsilon,r}| \ge c_0|z|^{1-\frac{2n}{k}}. \tag{3.6}$$

3.2. C^0 估计。由于 u 是 (3.2) 的次解，我们得到

$$u^{\varepsilon,r} \ge \underline{u} \quad \text{in } \Omega_r. \tag{3.7}$$

Let

$$\overline{u} = -|z|^{2-\frac{2n}{k}} + r_0^{2-\frac{2n}{k}} - 1.$$

取 $r \le \min\{r_1, r_2\}$，其中 $r_2 = R_0(r_0^{2-\frac{2n}{k}} - R_0^{2-\frac{2n}{k}})^{\frac{1}{2}} a_0^{-\frac{1}{2}}$，可得

$$u^{\varepsilon,r} \le \overline{u} \quad \text{on } \partial\Omega_r.$$

注意到 $H_k[u^{\varepsilon,r}] = \varepsilon > 0 = H_k[\overline{u}]$ 在 Ω_r 中，可得

$$u^{\varepsilon,r} \le \overline{u} \quad \text{in } \Omega_r. \tag{3.8}$$

由 (3.7) 和 (3.8)，我们得到

$$-|z|^{2-\frac{2n}{k}} + R_0^{2-\frac{2n}{k}} - 1 + a_0\frac{|z|^2}{R_0^2} \le u^{\varepsilon,r} \le -|z|^{2-\frac{2n}{k}} + r_0^{2-\frac{2n}{k}} - 1.$$

由此得到C^0 估计（3.3）。

3.3. 梯度估计。基于关键估计（2.3），我们可以在本小节中证明全局梯度估计。

3.3.1. 将全局梯度估计归结为边界梯度估计。 由于$u^{\varepsilon,r} < 0$, $f = \varepsilon$, 根据定理 2.5, 我们有

$$\max_{\overline{\Omega_r}} P = \max_{\partial\Omega_r} P.$$

3.3.2. 边界梯度估计。为证明边界梯度估计，我们将在 $\partial\Omega$和 ∂B_r 附近分别构造屏障函数。

由于 $u^{\varepsilon,r} = \underline{u} = -1$ 在 $\partial\Omega$ 上，且 $u^{\varepsilon,r} \geq \underline{u}$ 在 Ω_r 中，我们有

$$|Du^{\varepsilon,r}| = u_\nu^{\varepsilon,r} \leq \underline{u}_\nu \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{3.9}$$

其中， ν 是 $\partial\Omega$的单位外法向量。令 $r_3 \leq \min\{r_1, r_2, 1\}$ 并令 h_1 为 $\Omega \setminus B_{r_3}$ 中的调和函数 h_1, 满足 $h_1 = -1$ 在 $\partial\Omega$ 上，且 $h_1 = -r_3^{2-\frac{2n}{k}} + r_0^{2-\frac{2n}{k}} - 1$ 在 ∂B_{r_3}上。于是 $h_1 \geq u^{\varepsilon,r}$ 在 $\partial\Omega_{r_3}$上。因此 $h_1 \geq u^{\varepsilon,r}$ 在 Ω_{r_3}中，从而

$$u_\nu^{\varepsilon,r} \geq h_{1,\nu} > 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{3.10}$$

也就是说，存在一个正常数 C，使得

$$0 < C^{-1} \leq u_\nu^{\varepsilon,r} \leq C \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{3.11}$$

令 h_2是一个调和函数，在 ∂B_r 上满足 $h_2 = \underline{u}$，并且在 ∂B_{2r} 上有 $h_2 = u = -\frac{1}{2}|z|^{2-2nk}$。令 t

$$\tilde{h}_2(z) = r^{\frac{2n}{k}-2}(h_2(rz) + r^{2-\frac{2n}{k}}) = r^{\frac{2n}{k}-2}h_2(rz) + 1.$$

那么， $\tilde{h}_2$ 是 $B_2 \setminus B_1$ 中的调和函数，其中 $\tilde{h}_2 = a_0 r^{2nk} R_0^{-2} + r^{2nk-2}(R_0^{2-\frac{2n}{k}} - 1)$ 在 ∂B_1 上，而 $\tilde{h}_2 = -2^{1-\frac{2n}{k}}$ 在 ∂B_2 上。令

$$\tilde{u} = r^{\frac{2n}{k}-2}u^{\varepsilon,r}(rz) + 1, \tag{3.12}$$

and

$$\underline{\tilde{u}} = r^{\frac{2n}{k}-2}\underline{u}(rz) + 1. \tag{3.13}$$

由最大值原理可得

$$\underline{\tilde{u}} \leq \tilde{u} \leq \tilde{h}_2 \text{ in } B_2 \setminus B_1.$$

注意到

$$\underline{\tilde{u}} = \tilde{u} = \tilde{h}_2 = a_0 r^{\frac{2n}{k}} R_0^{-2} + r^{\frac{2n}{k}-2}(R_0^{2-\frac{2n}{k}} - 1) \text{ in } \partial B_1.$$

我们得到

$$D'\tilde{u} = D'\underline{\tilde{u}} = D'\tilde{h}_2 = 0 \quad \text{on } \partial B_1,$$

and

$$0 < c(n,k) \leq \underline{\tilde{u}}_\nu \leq \tilde{u}_\nu \leq \tilde{h}_{2,\nu} \leq \tilde{C} \quad \text{on } \partial B_1,$$

其中， ν 是 ∂的单位外法向量， B_1,C与r及 ε无关。因此我们得到

$$C^{-1} \leq |D\tilde{u}| \leq C \quad \text{on } \partial B_1.$$

根据（3.3），我们有

$$|Du^{\varepsilon,r}| \le Cr^{1-\frac{2n}{k}} = C|z|^{1-\frac{2n}{k}} \le C(-u^{\varepsilon,r})^a \quad \text{on } \partial B_r, \tag{3.14}$$

and

$$|Du^{\varepsilon,r}| \ge C^{-1}r^{1-\frac{2n}{k}} \quad \text{on } \partial B_r. \tag{3.15}$$

根据（2.3）、（3.3）、（3.9）和（3.14），我们得到

$$|Du^{\varepsilon,r}| \le C(-u^{\varepsilon,r})^a \le C(|z|^{2-\frac{2n}{k}} - R_0^{2-\frac{2n}{k}} + 1 - a_0\frac{|z|^2}{R_0^2}) \le C|z|^{1-\frac{2n}{k}} \quad \text{in } \Omega_r.$$

3.3.3. $|Du^{\varepsilon,r}|$ 的正下界。由于 $\partial\Omega$ 关于原点是星形的，我们在 $\partial\Omega$ 上有 $t\cdot\nu > 0$，其中 ν 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，$t = (t_1,\cdots,t_{2n}) = (y_1,\cdots,y_n,x_1,\cdots,x_n)$，$z_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_i + \sqrt{-1}y_i)$。由（3.11），在 $\partial\Omega$ 上，$|Du|$ 对某个一致的常数 c 有正下界。于是我们得到

$$\sum_{l=1}^{n}(z_l u_l^{\varepsilon,r} + \bar{z}_l u_{\bar{l}}^{\varepsilon,r}) = \sum_{l=1}^{2n} t_l u_{t_l}^{\varepsilon,r} = t\cdot\nu|Du^{\varepsilon,r}| \ge c\min_{\partial\Omega} t\cdot\nu := c_1 > 0.$$

令 $F^{i\bar{j}} = \frac{\partial}{\partial u_{i\bar{j}}^{\varepsilon,r}}(\log H_k[u^{\varepsilon,r}])$，$L = F^{i\bar{j}}\partial_{i\bar{j}}$。考虑函数

$$G := 2\mathrm{Re}\{z_l u_l^{\varepsilon,r}\} + Au^{\varepsilon,r} - B|z|^2,$$

其中 A、B 是待定常数。经过计算，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{F} := \sum_{l=1}^{n} F^{i\bar{i}} &= \sum_{l=1}^{n}\frac{S_k^{\bar{l}l}(\{u_{i\bar{j}}^{\varepsilon,r}\}_{1\le i,j\le n})}{S_k(\{u_{i\bar{j}}^{\varepsilon,r}\}_{1\le i,j\le n})} = (n-k+1)\frac{S_{k-1}(\{u_{i\bar{j}}^{\varepsilon,r}\}_{1\le i,j\le n})}{S_k(\{u_{i\bar{j}}^{\varepsilon,r}\}_{1\le i,j\le n})}\\ &\ge k(C_n^k)^{\frac{1}{k}}S_k^{-\frac{1}{k}}(\{u_{i\bar{j}}^{\varepsilon,r}\}_{1\le i,j\le n}) = k(C_n^k)^{\frac{1}{k}}\varepsilon^{-\frac{1}{k}}.\end{aligned}$$

在 ∂B_r 上，我们有 $Du^{\varepsilon,r} = |Du^{\varepsilon,r}|\nu = |Du^{\varepsilon,r}|_{tr}$。由（3.15）可得

$$t\cdot Du^{\varepsilon,r} = r|Du^{\varepsilon,r}| \ge c_2 r^{2-\frac{2n}{k}} \quad \text{on } \partial B_r.$$

取 $r_4 = \min\{4^{\frac{2}{k-2n}}R_0, (\frac{4a_0}{R_0^2})^{-\frac{1}{2n}}\}$，我们有

$$\underline{u} \le -\frac{1}{2}r^{2-\frac{2n}{k}} \quad \text{on } \partial B_r.$$

因此，若取 $A \le \min\{\frac{c_1}{2}, c_2\}$，$B \le c_2\frac{1}{R_{20}}$，$\varepsilon < \min\{\varrho_1,\varrho_2\}$，$r \le \min\{r_3,r_4,r_5\}$，其中 $\varrho_2 := C_n^k B^k(2+A)^k$，$r_5 = (\frac{2}{c_2}B)^{\frac{1}{k-2n}}$，则有

$$G \ge c_1 - A - BR_0^2 \ge 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

$$G \ge (c_2 - \frac{A}{2})r^{2-\frac{2n}{k}} - Br^2 \ge 0 \quad \text{on } \partial B_r.$$

and

$$LG = (2+A)k - B\mathcal{F} = (2+A)k - Bk(C_n^k)^{\frac{1}{k}}\varepsilon^{-\frac{1}{k}} < 0 \quad \text{in } \Omega_r.$$

根据最大值原理,

$$G \geq \min_{\partial\Omega_r} G > 0.$$

因此，我们证明$G > 0$ 在$\overline{\Omega}_r$ 并且（3.6）得证。

3.4. 二阶估计。 基于关键估计（2.4），我们可以在本小节证明全局二阶估计。

3.4.1. 全局二阶估计可归结为边界二阶估计。 由定理2.6，我们有

$$\max_{\overline{\Omega}_r} H = \max_{\partial\Omega_r} H + C.$$

So

$$u^{\varepsilon,r}_{\xi\bar{\xi}}(-u)^{-\frac{n}{n-k}} \leq C(\max_{\partial\Omega_r} H + C) \leq C(\max_{\partial\Omega_r} |\partial\bar{\partial}u^{\varepsilon,r}(-u^{\varepsilon,r})^{-\frac{n}{n-k}}| + 1). \tag{3.16}$$

另一方面，令 $\mathrm{D}_\tau = \sum_{i=1}^{2n} a^i \frac{\partial}{\partial t_i}$，其中 $\sum_{i=1}^{2n} a_i^2 = 1$，根据 $\mathrm{Lu}^{\varepsilon r}_{\tau\tau} \geq 0$.，我们得到

$$u^{\varepsilon,r}_{\tau\tau} \leq \max_{\partial\Omega_r} |D^2 u^{\varepsilon,r}| \quad \text{in } \Omega_r.$$

由于 u 是次调和函数，我们有

$$-(2n-1)\max_{\partial\Omega_r} |D^2 u^{\varepsilon,r}| \leq u_{t_i t_i} \leq \max_{\partial\Omega_r} |D^2 u^{\varepsilon,r}| \quad \text{in } \Omega_r.$$

取 $\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\partial}{\partial t_i} \pm \frac{\partial}{\partial t_j})$，我们得到

$$|u^{\varepsilon,r}_{t_i t_j}| \leq C \max_{\partial\Omega_r} |D^2 u^{\varepsilon,r}| \quad \text{in } \Omega_r.$$

因此

$$|D^2 u^{\varepsilon,r}| \leq C \max_{\partial\Omega_r} |D^2 u^{\varepsilon,r}| \quad \text{in } \Omega_r.$$

3.4.2. 边界 $\partial\Omega_r$ 上的二阶估计。$\partial\Omega$ 上的二阶估计与 [15] 中的几乎相同。因此，我们只需证明 $\partial\mathrm{B}_r$ 上的二阶估计。

步骤 1. 纯切向导数估计

在 $\mathrm{p} \in \partial\mathrm{B}_r$ 附近，不妨设 $\mathrm{p} = (0, \cdots, 0, \mathrm{r})$。在 $\tilde{\mathrm{p}} = (0, \cdots, 0, 1)$ 附近，$\partial\mathrm{B}_1$ 可表示为图像

$$x_n = \rho(t') = \left(1 - \sum_{i=1}^{2n-1} t_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\mathrm{t}' = (1, \cdots, \mathrm{t}_{2n-1})$。

令 $\tilde{u}$ 和 $\underline{\tilde{u}}$ 分别为式（3.12）和式（3.13）中定义的函数。由于 $\tilde{u}$ 在 ∂B_1, 上等于某个常数，我们有

$$\tilde{u}_{t_i t_j}(\tilde{p}) = \tilde{u}_{x_n}(\tilde{p})\delta_{ij}.$$

由此可得

$$|\tilde{u}_{t_i t_j}(\tilde{p})| \le C.$$

因此

$$|u^{\varepsilon,r}_{t_i t_j}(p)| \le C r^{-\frac{2n}{k}}.$$

此外，我们有

$$\tilde{u}_{i\bar{j}}(\tilde{p}) = \tilde{u}_{x_n}(\tilde{p})\delta_{ij}. \tag{3.17}$$

步骤 2：切向-法向导数估计

为了估计 ∂B_r 上的切向-法向二阶导数，我们只需估计 $\tilde{u}_{t_\alpha x_n}(\tilde{p})$，其中 $\alpha = 1, \cdots, 2n-1$。注意，$F^{i}{}_{j}$和 $\tilde{u}_{i\bar{j}}$都是厄米矩阵，且可以由同一个酉矩阵对角化，因此 $F^{ik}u_{\bar{j}\bar{k}}$ 也是厄米矩阵。由此可得

$$F^{i\bar{j}}(z_r\tilde{u}_s - \bar{z}_s\tilde{u}_{\bar{r}})_{i\bar{j}} = 0.$$

现在我们估计当 $\tilde{p} \in \partial B_1$ 时的混合切向-法向导数 $\tilde{u}_{t_\alpha x_n}(\tilde{p})$。由于 $\tilde{u}(t', \rho(t'))$ 在 $\partial B_1(0)$ 上为常数，我们有

$$0 = \tilde{u}_{t_\alpha} + \tilde{u}_{t_{2n}}\rho_{t_\alpha} = \tilde{u}_{t_\alpha} - \frac{t_\alpha}{\rho}\tilde{u}_{t_{2n}}, \quad \alpha = 1, \cdots, 2n-1.$$

也就是说，在 $\partial B_1 \cap B_{\frac{1}{2}}(\tilde{p})$ 上，

$$x_n\tilde{u}_{x_i} - x_i\tilde{u}_{x_n} = 0 \quad i = 1, \cdots, n-1 \quad \text{and} \quad x_n\tilde{u}_{y_i} - y_i\tilde{u}_{x_n} = 0 \quad i = 1 \cdots, n.$$

由此可得

$$y_n\tilde{u}_{x_i} - x_i\tilde{u}_{y_n} = 0 \quad i = 1, \cdots, n-1 \quad \text{and} \quad y_n\tilde{u}_{y_i} - y_i\tilde{u}_{y_n} = 0 \quad i = 1, \cdots, n.$$

为估计 $i = 1, \cdots, n-1$ 时的 $\tilde{u}_{x_i x_n}(\tilde{p})$，令

$$g^1 = 2\mathrm{Re}(z_i\tilde{u}_n - \bar{z}_n\tilde{u}_{\bar{i}}) = x_i\tilde{u}_{x_n} - x_n\tilde{u}_{x_i} + y_i\tilde{u}_{y_n} - y_n\tilde{u}_{y_i}.$$

注意到

$$F^{i\bar{j}}g_{i\bar{j}} = F^{i\bar{j}}(z_i\tilde{u}_n - \bar{z}_n\tilde{u}_{\bar{i}})_{i\bar{j}} + F^{i\bar{j}}(\bar{z}_i\tilde{u}_{\bar{n}} - z_n\tilde{u}_i)_{i\bar{j}} = 0.$$

在 $\partial B_1(0) \cap B_{\frac{1}{2}}(\tilde{p})$ 上，考虑障碍函数

$$\Phi = A(1 - x_n) \pm g^1.$$

由于 g_1 在 $\partial B_1(0) \cap B_{\frac{1}{2}}(\tilde{p})$ 上有界，$1 - x_n$ 在 $\partial B_{\frac{1}{2}}(\tilde{p}) \cap B_1(0)$ 上有下界，因此我们可以选取一个正数 A，使得 $\Phi \ge 0$ 在 $\partial(\partial B_1(0) \cap B_{\frac{1}{2}}(\tilde{p}))$ 上成立。由此可得

$$|g^1_{x_n}(\tilde{p})| \le C.$$

然而，在 ˜p 处，我们有

$$g^1_{x_n} = -\tilde{u}_{x_i} - \tilde{u}_{x_i x_n}.$$

Thus

$$\tilde{u}_{x_i x_n}(\tilde{p}) \le C, \quad i = 1, \cdots, n-1.$$

为估计 $\tilde{u}_{y_i x_n}(\tilde{p})$（其中 $i = 1, \cdots, n$），令

$$g^2 = 2\mathrm{Im}(z_i \tilde{u}_n - \bar{z}_n \tilde{u}_{\bar{i}}) = y_i \tilde{u}_{x_n} - x_n \tilde{u}_{y_i} + y_n \tilde{u}_{x_i} - x_i \tilde{u}_{y_n}.$$

类似地推导可得

$$|\tilde{u}_{y_i x_n}(\tilde{p})| \le C, \quad i = 1, \cdots, n.$$

步骤 3. 二阶法向导数估计

根据 ∂B_1，上的纯切向导数估计，我们有

$$|\tilde{u}_{y_n y_n}(p)| \le C.$$

为估计 $\tilde{u}_{x_n x_n}(\tilde{p})$，只需估计 $\tilde{u}_{n\bar{n}}(\tilde{p})$。通过旋转 $\{z_1, \cdots, z_{n-1}\}$，我们可以假设 $\{\tilde{u}_{i\bar{j}}(\tilde{p})\}_{1 \le i,j \le n-1}$ 为对角矩阵。于是

$$r^{2n}\varepsilon = H_k[\tilde{u}] = \tilde{u}_{n\bar{n}} S_{k-1}(\{\tilde{u}_{i\bar{j}}\}_{1 \le i,j \le n-1}) - \sum_{\beta=1}^{n-1} |\tilde{u}_{\beta n}|^2 S_{k-2}(\{\tilde{u}_{i\bar{j}}\}_{1 \le i,j \le n-1}).$$

由（3.17），可得

$$\begin{aligned} S_{k-1}(\{\tilde{u}_{i\bar{j}}\}_{1 \le i,j \le n-1}) =& S_{k-1}(\{\underline{\tilde{u}}_{i\bar{j}}\}_{1 \le i,j \le n-1} + \frac{1}{2}(\tilde{u} - \underline{\tilde{u}})_{x_n} I_{n-1}) \\ \ge& S_{k-1}(\{\underline{\tilde{u}}_{i\bar{j}}\}_{1 \le i,j \le n-1}) \\ \ge& C_n^{k-1} (C_n^k)^{\frac{1-k}{k}} \min_{\partial\Omega} H_k^{\frac{k-1}{k}}[\underline{\tilde{u}}] := c_1. \end{aligned}$$

So

$$\tilde{u}_{n\bar{n}}(p) \le C.$$

综合这三种情形，并注意到 ˜u 是次调和的，可得

$$|\partial\bar{\partial}\tilde{u}| \le C \quad \text{on } \partial B_1.$$

因此

$$|\partial\bar{\partial} u^{\varepsilon,r}| \le C r^{-\frac{2n}{k}} \quad \text{on } \partial B_r.$$

由（3.16）和 C^0 估计可得

$$|\partial\bar{\partial} u^{\varepsilon,r}| \le C|z|^{-\frac{2n}{k}} \quad \text{in } \Omega_r.$$

4. 证明定理1.1

4.1. 唯一性。 唯一性可由比较定理 2.4得出。

设 u、v 是 $\Omega \setminus \{0\}$ 中方程 (1.3) 的两个解。对于任意 $z_0 \in \Omega \setminus \{0\}$，我们先证明 $u(z_0) \le v(z_0)$。事实上，对于任意 $t \in (0,1)$，由于 $u - tv = -(1-t)|z|^{2-\frac{2n}{k}} + C$，存在充分小的 r，使得 $z_0 \in \Omega \setminus B_r$ 且在 ∂B_r 上 $u < tv$。注意，在 Ω 上 $u = -1 < -t = tv$。由比较定理2.4可得，在 $\Omega \setminus B_r$ 中 $u < tv$。因此 $u(z_0) \le tv(z_0)$。令 $t \to 1$，得到 $u(z_0) \le v(z_0)$。于是 $u \le v$ 在 $\Omega \setminus \{0\}$ 中成立。类似地，可得 $u \ge v$ 在 $\Omega \setminus \{0\}$ 中成立。因此 $u = v$ 在 $\Omega \setminus \{0\}$ 中成立。

4.2. 存在性。存在性由 $u^{\varepsilon,r}$ 的一致的 C^2 估计得出。

对于 $K = \Omega \setminus B_{r_0}$，对于方程 (3.2) 的解，由估计式 (3.3) 可得

$$|u^{\varepsilon,r}|_{C^1(K)} + |\Delta u^{\varepsilon,r}| \le C(K).$$

由 Evans-Krylov理论，对于任意 $0 < \alpha < 1$，我们得到:

$$|u^{\varepsilon,r}|_{C^{2,\alpha}(K)} \le C(K,\varepsilon).$$

由紧性，我们可以找到一个序列 $r_i \to 0$，使得

$$u^{\varepsilon,r_i} \to u^{\varepsilon} \quad \text{in } C^2(K).$$

其中 u^{ε} 满足

$$\begin{cases} H_k[u^{\varepsilon}] = \varepsilon & \text{in } K, \\ u = -1 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

and

$$\begin{aligned} &-C - |z|^{2-\frac{2n}{k}} \le u^{\varepsilon}(z) \le -|z|^{2-\frac{2n}{k}}, \\ &|Du^{\varepsilon}(z)| \le C|z|^{1-\frac{2n}{k}}, \\ &|\partial\bar{\partial}u^{\varepsilon}(z)| \le C|z|^{-\frac{2n}{k}}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

此外,

$$|u^{\varepsilon}|_{C^{2,\alpha}(K)} \le C(K,\varepsilon).$$

根据经典Schauder理论，u^{ε} 是光滑的。

由 u^{ε} 的上述估计 (4.1) 可知，对任意序列 $\varepsilon_j \to 0$，都存在其子序列 {，使得 $u^{\varepsilon_j}\}$ 在 $\Omega \setminus \{0\}$ 的任意紧子集上以 $C^{1,\alpha}$ 范数收敛到一个函数 u。因此，$u \in C^{1,\alpha}(\Omega \setminus \{0\})$，并满足估计 (1.4) 和 (1.5)。根据 Trudinger-Zhang [36] 证明的复 k-Hessian 算子的收敛定理（另见 Lu [33]），u 是方程 (1.3) 的一个解。

致谢:

第二作者得到国家自然科学基金委员会（项目编号 11721101 和 12141105）以及国家重点研发计划（项目编号 SQ2020YFA070080）的资助。第三作者得到国家自然科学基金委员会项目（编号 11901102）的资助。

参考文献

[1] 包继光和李海港。维数为 n ≤ 4 时特殊 Lagrange 方程的外部狄利克雷问题。《非线性分析》，89:219–229，2013。[2] 包继光、李海港和李燕燕。海森方程的外部狄利克雷问题。《美国数学会汇刊》，366(12):6183–6200，2014。[3] 埃里克·贝德福德和让-皮埃尔·德马伊。关于 C^n 中多复变格林函数的两个反例。《印第安纳大学数学杂志》，37(4):865–867，1988。[4] 埃里克·贝德福德和 B. A. 泰勒。复 Monge-Amp`ere 方程的变分性质。II. 内在范数。《美国数学杂志》，101(5):1131–1166，1979。[5] 兹比格涅夫·布沃茨基。多复变格林函数的 $C^{1,1}$ 正则性。《密歇根数学杂志》，47(2):211–215，2000。[6] 兹比格涅夫·布沃茨基。具有多个极点的多复变格林函数的正则性。《印第安纳大学数学杂志》，50(1):335–351，2001。[7] 兹比格涅夫·布沃茨基。复Hessian方程的弱解。《傅里叶研究所年刊（格勒诺布尔）》，55(5):1735–1756，2005。[8] L. 卡法雷利、J. J. 科恩、L. 尼伦伯格和 J. 斯普鲁克。非线性二阶椭圆方程的狄利克雷问题。II. 复 Monge-Amp`ere 方程及一致椭圆方程。《纯粹与应用数学通讯》，38(2):209–252，1985。[9] L. 卡法雷利和李燕燕。对 J¨orgens、卡拉比和波戈列洛夫定理的推广。《纯粹与应用数学通讯》，56(5):549–583，2003。[10] L. 卡法雷利、L. 尼伦伯格和 J. 斯普鲁克。非线性二阶椭圆方程的狄利克雷问题。III. Hessian 特征值的函数。《数学学报》，155(3-4):261–301，1985。[11] L. 卡法雷利、L. 尼伦伯格和 J. 斯普鲁克。退化 Monge-Amp`ere 方程的狄利克雷问题。《伊比利亚美洲数学评论》，2(1-2):19–27，1986。[12] 陈省身、哈罗德·I·莱文和路易斯·尼伦伯格。复流形上的内在范数。载于《整体分析》（纪念小平邦彦论文集），第 119–139 页。东京大学出版社，东京，1969。[13]让-皮埃尔·德马伊。Monge-Amp`ere 测度与多调和测度。《数学杂志》，194(4):519–564，1987。[14] 高正欢、Xi-Nan Ma 和张德凯。去心区域中齐次 k-Hessian 方程的狄利克雷问题。arXiv:2303.07976，2023。[15] 高正欢、Xi-Nan Ma 和张德凯。齐次复 k-Hessian 方程的外部狄利克雷问题。《非线性研究进展》，23(1):论文编号 20220039，33 页，2023。[16] 管波。一类全非线性椭圆方程的狄利克雷问题。《偏微分方程通讯》，19(3-4):399–416，1994。[17] 管波。复 Monge-Amp`ere 方程的狄利克雷问题及多复变格林函数的正则性。《分析与几何通讯》，6(4):687–703，1998。[18] 管波。关于多复变格林函数的正则性。《国际数学研究通知》，(22):文章编号 rnm106，19 页，2007。[19] 管鹏飞。与内在范数相关的极值函数。《数学年刊》(2)，156(1):197–211，2002。[20] 管鹏飞、Neil S. Trudinger 和 Xu-Jia Wang。退化 Monge-Amp`ere 方程的狄利克雷问题。《数学学报》，182(1):87–104，1999。[21] N. M. 伊沃奇金。某些 Monge-Amp`ere 型方程的狄利克雷问题解。《数学文集》(新辑)，128(170)(3):403–415，447，1985。[22] 妮娜·伊沃奇金娜、尼尔·特鲁金格和 Xu-Jia Wang。退化 Hessian 方程的狄利克雷问题。《偏微分方程通讯》，29(1-2):219–235，2004。

[23] M. Klimek. 极值多重次调和函数与不变伪距离。法国数学会通报，113(2):231–240，1985。[24] N. V. Krylov. 区域内可控扩散过程的收益函数光滑性。苏联科学院数学系列通报，53(1):66–96，1989。[25] N. V. Krylov. 退化非线性椭圆方程的弱内点二阶导数估计。微分积分方程，7(1):133–156，1994。[26] L´aszl´o Lempert. Kobayashi度量与区域到球的表示。法国数学会通报，109(4):427–474，1981。[27] L´aszl´o Lempert. 求解具有一个集中奇点的退化复 Monge-Amp`ere 方程。数学年刊，263(4):515–532，1983。[28] Dongsheng Li 和 Zhisu Li. 关于Hessian商方程的外部Dirichlet问题。微分方程杂志，264(11):6633–6662，2018。[29] Qi-Rui Li 和 Xu-Jia Wang. 齐次 Monge-Amp`ere 方程的正则性。离散与连续动力系统，35(12):6069–6084，2015。[30] Song-Ying Li. 关于复Hessian特征值对称函数方程的Dirichlet问题。亚洲数学杂志，8(1):87–106，2004。[31] Zhisu Li. 关于特殊Lagrange方程的外部Dirichlet问题。《美国数学会汇刊》，372(2):889–924，2019。[32] Gary M. Lieberman. 二阶抛物型微分方程。世界科学出版社，1996。[33] Chinh H. Lu. 在 $\mathbb{C}^n$中求解复Hessian方程的变分方法。数学分析与应用杂志，431(1):228–259，2015。[34] Xi-Nan Ma 和张德凯。齐次 k-Hessian 方程的外部Dirichlet问题。arXiv:2207.13504，2022。[35] Neil S. Trudinger 和 Xu-Jia Wang. Hessian测度 I. 第10卷，第225–239页，1997。谨以此文献献给 Olga Ladyzhenskaya。[36] Neil S. Trudinger 和 Wei Zhang. 关于局部一致收敛的复 k-Hessian 算子的弱连续性。澳大利亚数学会通报，89(2):227–233，2014。[37] Xu Jia Wang. 关于 Monge-Amp`ere 方程正则性的若干反例。美国数学会会刊，123(3):841–845，1995。[38] Xu-Jia Wang. k-Hessian 方程。载于《几何分析与偏微分方程》，数学讲义第1977卷，第177–252页。Springer，Dordrecht，2009。[39] Ling Xiao. 外部区域上通过退化Hessian方程得到的广义Minkowski不等式。arXiv:2207.05637，2022。

上海大学数学系，上海，200444，中国 电子邮箱：gzh@shu.edu.cn

中国科学技术大学数学科学学院，中国安徽省合肥市 230026 电子邮箱：xinan@ustc.edu.cn

上海大学数学系，上海，200444，中国 电子邮箱：dkzhang@shu.edu.cn