arXiv:2304.08414v1 [math.RT] 17 Apr 2023

四周期温和对称代数

KARIN ERDMANN、Adam Hajduk 和 Adam Skowyrski

Abstract. 本文关注四周期温和对称代数（简称 TSP4 代数）的结构。我们主要聚焦于 Gabriel 箭图为双串的情形，即每个顶点至多有两条入箭和两条出箭，不过部分结果也很容易推广到一般情形。本文为后续一系列文章奠定基础，这些文章旨在解决所有具有双串 Gabriel 箭图的 TSP4 代数的分类问题。我们给出了一系列性质（并附有相对简短的证明），这些性质必然适用于四周期温和对称代数的 Gabriel 箭图。除此之外，我们还证明，三角形（以及正方形）会自然地出现在这类代数的 Gabriel 箭图中，加权曲面代数的箭图中也会如此 [6, 8, 9]。

1. Introduction

四周期温和对称代数的经典例子是具有四元数缺陷群的有限维群代数的 2-块。近来人们发现，所有加权曲面代数 [6]（另见 [8] 和 [9]）都是四周期温和对称代数，[11] 中研究的虚拟变异以及所谓的加权广义三角剖分代数 [13]，也具有这一性质；后者推广了上述两类代数。[7] 的主要结果确立了 Gabriel 箭图为 2-正则的四周期温和对称代数的分类，这表明经过一番努力，或许能够实现一般情形的分类。双串情形下的完整分类似乎是一项令人振奋的挑战。

本文旨在为实现这一目标贡献力量。我们在此介绍一系列性质及其简短证明；这些性质将为一般分类工作（正在进行中）提供重要依据。

全文中，我们固定一个代数闭域，并考虑带单位元的有限维结合K代数。我们还假设这些代数是基本且连通的。回顾一下，若代数 A 满足 Λ 作为右侧 Λ-模是内射的，即投射模也是内射模（另见 [12]），则称其为自内射代数。本文重点关注对称代数，即存在非退化对称 K 双线性形式 $\Lambda\times\Lambda\to K$ 的自内射代数。对称代数有许多经典例子，例如有限维群代数的块 [4]，以及与 Coxeter 群相关的 Hecke 代数[1]。任意代数 Λ 都是其平凡扩张 $T(\Lambda)$ 的商，而平凡扩张是对称代数。

对于代数 Λ，我们用 $\operatorname{mod}\Lambda$ 表示有限生成（右）Λ-模的范畴。对于模 $M\in\operatorname{mod}\Lambda$，其上合成为一个模 $\Omega(M)=ker(\pi)$，其中 $\pi\colon P\to M$ 是 M 在 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中的投射覆盖（因此，上合成在同构意义下是唯一的）。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：16D50，16E30，16G20，16G60。*Key words and phrases.* 对称代数，驯代数，周期代数，箭图。1

若模 $M \in \operatorname{mod}\Lambda$ 满足 $\Omega^d(M) \cong M$，其中 $d \geqslant 1$ 为某个数（最小的此类 d 称为 M 的周期），则称其为周期模。回顾一下，若代数 Λ 作为 Λ-双模时是周期的，则称其为周期代数；等价地，Λ 是其包络代数 $\Lambda^e = \Lambda \otimes_K \Lambda$ 上的周期模。代数的周期性意味着所有非投射不可分解的 A-模都是周期的（例如参见 [14, 定理 IV.11.19]）。特别地，若 Λ 是周期代数，则所有单 Λ-模都是周期的。此外，已知（参见定理 1.4] ），$\operatorname{mod}\Lambda$ 中单模的周期性意味着 Λ 是自内射的，因此周期代数构成自内射代数类的一个子类。

本文研究有界箭图代数 $\Lambda = KQ/I$，其 Gabriel 箭图 Q 是双串的：也就是说，每个顶点至多有两支箭从中出发，至多有两支箭以其为终点。我们将考察同时具有对称性和温和性的代数 Λ，并假设 Λ 是周期为四的周期代数。任何此类代数都称为 TSP4 代数。我们将概述这类代数的 Gabriel 箭图 Q 和理想 I 的极小生成元的一般性质。要通过箭图和关系给出完整分类，还需要付出更多努力。特别是，我们将看到三角形（和正方形）自然出现；参见第 4 节。此外，在最后一节中，我们给出部分结果，描述若干特殊类型的顶点。

关于表示论所需的背景知识，请参阅书籍 [2, 14]。

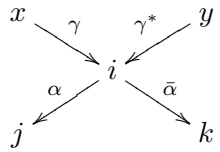
2. Preliminaries

设 $\Lambda = KQ/I$ 是 Λ 的一个容许表示，其中该代数是温和且对称的，并且作为代数具有 Ω-周期 4。特别地，根据 A-模理论，所有简单模都是 Ω-周期的，其周期整除 4 [14, 定理 IV.11.19]。事实上，我们可以假设所有单模的周期都是 4（见注 2.2）。我们还假设 Q 是连通的，即 Λ 作为代数是不可分解的。对于顶点 $i \in Q$，记 P_i 为模范畴 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中与顶点 i 对应的不可分解投射模，其维数向量记为 p_i： $p_i \operatorname{dim}(P_i)$。类似地，我们用 S_i 和 s_i 分别表示与顶点 i 对应的单模及其维数向量。

对于箭图 Q 的顶点 i，记 i^- 为终点是 i 的箭的集合，记 i^+ 为起点是 i 的箭的集合。本文假设集合 $|i^-|$ 和 $i^+|$ 的大小至多为 2。在此条件下，若 $|i^-| = |i^+| = 2$，则称 Q 为 2-正则；若 $1 \leq |i^-|, |i^+| \leq 2$，则称其为双串。若 $|i^-| = |i^+|$（且其大小分别等于 1 或 2），则称 $i \in Q_0$ 为正则顶点（1-正则或 2-正则）。否则，称 i 为非正则顶点。

对于箭，我们将采用以下记号和约定：从顶点 i 出发的箭记作 $\alpha, \bar{\alpha}$，约定在 $|i^+| = 1$ 的情况下 $\bar{\alpha}$ 不存在。类似地，以某个顶点 i 为终点的箭记作 γ, γ^*，这里 γ^* 也可能不存在。

那么 Q 有一个子箭图



考虑单模 S_i, $i \in Q_0$。我们将简要讨论 S_i 的 Ω-周期性所带来的一些基本结果，主要是相关的正合列。回顾一下，有自然同构 $\Omega(S_i) = \mathrm{rad}\, P_i = \alpha\Lambda + \bar{\alpha}\Lambda$ and $\Omega^-(S_i) \cong (\gamma, \gamma^*)\Lambda \subset P_x \oplus P_y$。特别地，由此可知，模 $P_i^+ = P_j \oplus P_k$ 是 $\Omega(S_i)$ 的投射覆盖，而模 $P_i^- = P_x \oplus P_y$ 是 $\Omega^-(S_i)$ 的内包（Λ 是对称的）。因此，结合 S_i 的 Ω-周期性（周期 4），我们得出在 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 中存在如下形式的正合列

$$(*) \qquad 0 \to S_i \to P_i \xrightarrow{d_3} P_i^- \xrightarrow{d_2} P_i^+ \xrightarrow{d_1} P_i \to S_i \to 0$$

其中 $Im(d_k) \cong \Omega^k(S_i)$，对 $k \in \{1, 2, 3\}$ 成立。根据我们的约定， P_y 或 P_k 可能不存在。此外，我们用 p_i^+（分别用 p_i^+）表示维数向量 $\dim(P_i^+)$（分别表示 $\dim(P_i^-)$）。利用上述正合列，很容易得到 $p_i^+ = p_i^-$。在本文余下部分，我们将多次使用这一事实（而不再特别提及）。

现在，我们将展示几个通过使用形如 $(*)$ 的正合列得到的结果示例。首先，来看下面这个引理。

引理 2.1. 如果 Λ 是无限型，那么不存在满足 $i^+ = \{\alpha\} = j^-$ 的箭 $\alpha : i \to j$。

证明。假设存在这样一支箭。那么 $\Omega(S_i) = \alpha\Lambda \cong \Omega^{-1}(S_j)$，且 $\Omega^2(S_i) \cong S_j$。因此，在 S_i 的正合列中，投射模 P_i^- 同构于 P_j，这意味着有唯一一支以 i 为终点的箭，且它始于 j。

同样，在 S_j 的正合列中，我们有 $P_j^+ \cong P_i$，因为 $\Omega^2(S_j) \cong S_i$。因此，有唯一一支始于 j 且终于 i 的箭。现在， Q 是连通的，因此只有两个顶点和两支箭。于是， Λ 是有限表示型的中山代数，从而导出矛盾（例如参见 [14, 定理 I.10.3 和 10.7]）。□

注 2.2。实际上，存在具有上述性质的箭意味着 Λ 是有限型，正如以下注记 [5] 所说明的。还证明了这一条件等价于存在一个周期为 2 的单模。因此，在讨论无限型 TSP4 代数时，我们可以假设所有单模的周期都恰为 4。

我们还有以下观察。

引理 2.3。箭图 Q 不包含如下形式的子箭图：

$$j \rightleftarrows i \longleftarrow t$$

其中，与 i 相连的所有箭均已标出。

证明。假设这种情况确实发生。那么在关于 S_i 的正合列中，我们有 $P_i^+ \cong P_j$ 和 $P_i^- \cong P_j \oplus P_t$。由于 $P_t \neq 0$，可得 $\dim P_i^+ \neq \dim P_i^-$，这与假设矛盾。□

作为本节预备内容的结束，我们将给出一个关于向量 $p_i^+ = p_i^-$ 的简单引理，其中 $i \in Q_0$（模 P_i^+ 和 P_i^- 的这个公共维数向量将记作 $\hat{}p_i$）。

由正合列 $(*)$ 可知，p_i 小于或等于 $\hat{}p_i + s_i$（按乘积序），因为 $p_i - s_i = \dim \Omega^1(S_i)$ 小于 $\dim(R^+) = \hat{}p_i$。此外，$\hat{}p_i$ 在维数意义下更大，具体如下所示（这里我们将 $|x|$ 写作和 $|x| = x_1 + \cdots + x_n$，其中 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$；如果 $x = \dim(X)$，则对于模 X in $\operatorname{mod}\Lambda$，这对应于 K-维数的 X）。

引理 2.4。$|\hat{}p_i| > |p_i|$。

证明。当然，我们有正合列 $0 \to \Omega^2(S_i) \to P_i^+ \to \Omega^1(S_i) \to 0$，其中 $\Omega^1(S_i) = \operatorname{rad} P_i$ 的维数向量等于 $p_i - s_i$。我们断言

$$(\square) \qquad |\hat{p}_i| - \dim_K \Omega^1(S_i) > 1.$$

事实上，若情况并非如此，则差值为 1，因此我们得出 $\Omega^2(S_i) \cong S_i$。另一方面，P_i^+（分别地，P_i^-）是 $\Omega^2(S_i)$ 的内包（分别地，投射覆盖），这意味着二者都同构于 P_i。这表示在 Q 中存在唯一一条以 i 为起点、同时以 i 为终点的箭；对偶地，在 Q 中也存在唯一一条以 i 为终点、同时以 i 为起点的箭。因此，Q 只有一个顶点和两个环，这与我们的假设矛盾。因此，$(\square)$ 成立。特别地，我们得到 $|\hat{}p_i| - \dim_K \Omega^1(S_i) = |\hat{}p_i| - |p_i| + 1 > 1$，从而 $|\hat{}p_i| - |p_i| > 0$，证毕。□

3. Period 4 and minimal relations

本节将进一步探讨上一节所述与单模 S_i相关的正合列 $(*)$ 的结构所带来的推论。实际上，我们将重点放在映射上，并说明它们与定义代数 Λ的极小关系之间的联系。

我们从给定的表示 $\Lambda = KQ/I$ 和一个顶点 $i \in Q_0$出发。简记 J为 Λ的 Jacobson 根 $\operatorname{rad}\Lambda$。考虑相应的正合列

$$(*) \qquad 0 \to S_i \to P_i \xrightarrow{d_3} P_i^- \xrightarrow{d_2} P_i^+ \xrightarrow{d_1} P_i \to S_i \to 0$$

其中 $P_i^+ = P_j \oplus P_k$且 $P_i^- = P_x \oplus P_y$。我们可以假设 $d_1(x, y) := \alpha x + \bar{\alpha} y$，因为诱导满射 $(\alpha\ \bar{\alpha}) : P_j \oplus P_k \to \Omega(S_i) = \alpha\Lambda + \bar{\alpha}\Lambda$ 是 $\operatorname{mod}\Lambda$中 $\Omega(S_i)$ 的投射覆盖。调整箭 γ 或 γ^*（包括对表示的影响，即对 I的生成元的影响）后，我们可以断言，对于某种以 i为终点的箭 γ、γ^*的选取，$d_3(e_i) = (\gamma, \gamma^*)$（见 [7,命题 4.3]）。

d_1 的核于是为 $\Omega^2(S_i) = Im(d_2)$，且至多有两个极小生成元。它们是幂等元 $e_x \in P_x = e_x\Lambda$ 和 $e_y \in P_y$ 经由 d_2 的像：$P_i^- \to P_i^+$。我们分别将它们记作 φ和 ψ，且它们包含于 $P_j \oplus P_k$中，因此我们也可以写成

$$\varphi = d_2(e_x, 0) = (\varphi_{jx},\ \varphi_{kx}) \ \text{ and } \ \psi = d_2(0, e_y) = (\psi_{jy},\ \psi_{ky}),$$

其中 φ_{jx} 属于 $e_j\Lambda e_x$，其他分量 φ、ψ也类似。

该正合列给出了理想 I的极小生成元的信息，我们有时称之为极小关系。按照以下引理的含义，Q 的箭会导出极小关系。

引理 3.1. 若存在一条箭 $x \to i$，则理想 I 有一个极小生成元 $\rho \in e_i\Lambda e_x$（给定该表示）。

证明。考虑 d_1 的核的生成元 φ、ψ。我们有 $\alpha\varphi_{jx} + \bar{\alpha}\varphi_{kx} = 0$ 属于 Λ，等价地，元素 $\alpha\varphi_{jx} + \bar{\alpha}\varphi_{kx} \in KQ$ 属于 I。由于 φ 是一个极小生成元，因此它是一个极小关系。类似地，生成元 ψ 在 $e_i\Lambda e_y$ 中给出一个极小关系。□

回顾一下，任意同态 $d\colon P_x \oplus P_y \to P_j \oplus P_k$ 在 $\mathrm{mod}\ \Lambda$ 中都可以表示为矩阵形式

$$M = \begin{pmatrix} m_{jx} & m_{jy} \\ m_{kx} & m_{ky} \end{pmatrix},$$

其中，m_{ab} 是 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 中的一个同态 $P_b \to P_a$，可识别为一个元素 $m_{ab} \in e_a\Lambda e_b$，对任意 $a \in \{j,k\}$ 和 $b \in \{x,y\}$ 均成立。由此，d 就变成了乘以 M，即 $d(u) = M \cdot u$，其中 $u \in P_i^-$（向量 P_i^- 和 P_i^+ 使用列记号）。

继续讨论 $\Omega^2(S_i)$ 的生成元，令 M_i 为矩阵，其列由 φ 和 ψ 的分量组成，即 d_2 由矩阵给出

$$M_i = \begin{pmatrix} \varphi_{jx} & \psi_{jy} \\ \varphi_{kx} & \psi_{ky} \end{pmatrix}.$$

将复合 $d_1d_2 = 0$ 和 $d_2d_3 = 0$ 改写为矩阵形式，得到恒等式

$$(\alpha\ \bar{\alpha}) \cdot M_i = 0 \text{ and } M_i \cdot \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma^* \end{pmatrix} = 0 \tag{1}$$

对于某些以 i 为终点的箭 γ、γ^*（参见 [7, 命题 4.3]）。

注 3.2。基本上，恒等式 (1) 确定了 $\Omega^2(S_i)$ 的生成元（余生成元），它们分别编码在矩阵 M_i 的列（行）中，并满足以下泛性质：

(i) 若 $\theta = \binom{\theta_1}{\theta 2} \in P_j \oplus P_k$ 是 $\theta \in \Lambda e_z \setminus J^2$ 中的一个元素，且满足 $[\alpha\ \bar{\alpha}] \cdot \theta = 0$，则 $z = x$ 或 y，并且存在一个与 $(*)$ 同构的正合列，其中 θ 是 M_i 的一列；(ii) 若 $\mu \in P_x \oplus P_y$ 是 $\mu \in e_z\Lambda \setminus J^2$ 中的一个元素，且满足 $\mu \cdot \binom{\gamma}{\gamma^*} = 0$，则 $z = j$ 或 k，并且存在一个与 $(*)$ 同构的正合列，其中 μ 是 M_i 的一行。

事实上，对于如 (i) 中的 θ，根据定义，$\theta \in Ker(d_1) = Im(d_2)$，因此 θ 可写为 $\theta = M_i \cdot \eta$，其中 $\eta = \binom{\eta_1}{\eta_2} \in P_x \oplus P_y$、$\eta \in \Lambda e_z$ 为某些元素。还要注意，M_i 的所有元素都属于 J（等价地，d_2 属于 rad_Λ），否则等式 $(\alpha\ \bar{\alpha}) \cdot M_i = 0$ 意味着 α 或 $\bar{\alpha}$ 属于 J^2（或 $\alpha \in K\bar{\alpha}$），这对于一个箭来说是不可能的。但是 $\theta \notin J^2$，即 $\theta_1 \notin e_jJ^2e_z$ 或 $\theta_2 \notin e_kJ^2e_z$，因此我们推知 $\eta \notin J$，因为 $\eta \in J$ 将导致 $\theta = M_i \cdot \eta \in J^2$。由此可得 $\eta_1 \notin e_xJe_z$ 或 $\eta_2 \notin e_yJe_z$。由于对于 Q_0中的 $a \neq b$，我们有 $e_aJe_b \simeq \mathrm{rad}_\Lambda(P_b, P_a) = \mathrm{Hom}_\Lambda(P_b, P_a) \simeq e_a\Lambda e_b$，所以可以得出 $z = x$ 或 y；在这两种情况下，η. 都是局部代数 $e_z\Lambda e_z$的一个单位。我们可以

假设 $z = x$ （ $z = y$ 情形下的证明类似）。特别是，此时 η_1 是 $e_x\Lambda e_x$中的一个单位（即 η_1 是对 e_x的数乘），因此我们得到以下恒等式

$$\begin{pmatrix}\theta_1 & \psi_{jy}\\ \theta_2 & \psi_{ky}\end{pmatrix} = M_i \cdot \begin{pmatrix}\eta_1 & 0\\ \eta_2 & e_y\end{pmatrix}.$$

将左侧矩阵记为 M_i'，并令 $N = \left(\begin{smallmatrix}\eta_1 & 0\\ \eta_2 & e_y\end{smallmatrix}\right)$。因此，上述恒等式 $M_i' = M_i \cdot N$ 可转化为模 Λ 中的下列交换图：

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & S_i & \longrightarrow & P_i & \xrightarrow{d_3} & P_x \oplus P_y & \xrightarrow{d_2} & P_j \oplus P_k & \xrightarrow{d_1} & P_i & \longrightarrow & S_i & \longrightarrow & 0\\
 & & \uparrow{\scriptstyle id} & & \uparrow{\scriptstyle id} & & \uparrow{\scriptstyle v} & & \uparrow{\scriptstyle id} & & \uparrow{\scriptstyle id} & & \uparrow{\scriptstyle id} & & \\
0 & \longrightarrow & S_i & \longrightarrow & P_i & \xrightarrow{d_3'} & P_x \oplus P_y & \xrightarrow{d_2'} & P_j \oplus P_k & \xrightarrow{d_1'=d_1} & P_i & \longrightarrow & S_i & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

其中，我们将 $d_1 = (\alpha\ \bar{\alpha})$、 $d_2 = M_i$、 $d_3 = \left(\begin{smallmatrix}\gamma\\ \gamma^*\end{smallmatrix}\right)$、 $d_2' = M_i'$、 $v = N$ 视为相同（这是一个同构，因为 η_1 和 e_y 是相应局部代数中的单位），并且 $d_3' = v^{-1}d_3$。由此可知，上述图的底行就是所需的正合列。类似地，若 $z = y$，则可以构造类似的矩阵 M_i'，但以 θ 作为第二列。

换言之，可以用新的序列替换原序列，其中 M_i 将 θ 固定为第一列（或第二列）。

类似地，我们可以证明 (ii)，其中使用 d_3 的余核（而不是 d_1 的核）；事实上，根据余核的泛性质，可以将矩阵 $\left(\begin{smallmatrix}\mu_1 & \mu_2\\ \varphi_{kx} & \psi_{ky}\end{smallmatrix}\right)$ 经由 d_3 （$\cong Im$（d_2）） 的余核进行分解，并将这一分解提升为映射 $u\colon P_j \oplus P_k \to P_j \oplus P_k$，由矩阵$N = \left(\begin{smallmatrix}\eta_1 & \eta_2\\ 0 & e_k\end{smallmatrix}\right)$给出，使得 $N \cdot M_i = M_i'$ 和 η_1 是单位。这意味着 $ud_2 = d_2'$，从而得到类似的交换图，其行（正合）同构。

请注意，上述条件 (i)-(ii) 说明了 I 的极小生成元（关系）如何导出 Ω^2（S_i）的生成元，以及这两者如何通过正合列（$*$）联系起来（在同构意义下）；此处所说的同构包括正合列的同构和代数的同构，即改变 Λ 的表示。

也就是说，不失一般性，我们可以从 KQ 的理想 I 的一个极小生成元 ρ 开始，其中 i、 j 是 Q 的顶点。设 α、 $\bar{\alpha}$ 从 i 出发，而 β、 β^* 以顶点 j 为终点。那么我们可以将 ρ 写成 KQ 的一个元素，形式如下

$$\rho = \alpha x_1 \beta + \alpha x_2 \beta^* + \bar{\alpha} x_3 \beta + \bar{\alpha} x_4 \beta^* \tag{2}$$

其中 x_i 是单项式的线性组合；若用 KQ 的单项式基表示，该表达式是唯一的。因此，由 (i) 可推知，一个元素

$$\theta = (x_1\beta + x_2\beta^*,\ x_3\beta + x_4\beta^*)$$

属于 d_1 的核，并且可以将其取作 $\Omega^2(S_i)$ 的一个生成元（ M_i 的一列），例如当 $\theta \notin J^2$ 时。同样，若 $\mu \notin J^2$，则 $\mu = (\alpha x_1 + \bar{\alpha} x_3, \alpha x_2 + \bar{\alpha} x_4)$ 给出一个余生成元（ M_i 的一行）。

注记 3.3. 我们注意到，并非所有极小关系都能以这种方式实现。事实上，如果Λ 是一个加权曲面代数 $\Lambda = \Lambda(Q, f, m_\bullet, c_\bullet)$，且至少有一个箭 $\alpha \in Q_1$ 满足

$m_\alpha n_\alpha = 2$（虚箭头），那么存在一个形如 $\alpha\beta\gamma = 0$ 的极小零关系，而它无法由单模的第二重叠中的元素诱导得到。

4. Triangles and squares

本节讨论 Q 中关于极小关系的三角形和正方形的一些性质。正如我们将在下面的命题 4.1 中看到的，研究箭图 Q 中的三角形是很自然的；这些三角形与涉及极小关系的长度为 2 的路径同时出现（请注意，这曾是 [7, 中的一个重要工具，见命题 4.2]）。类似地，正如相应结果（引理 4.5）所示，正方形伴随着长度为 3 的路径。

如果 p 是 KQ 中的一个单项式，我们记作 $p \prec I$，前提是 p 作为某个定义 I 的极小关系中的一项（加项）出现（即 p 涉及一个极小关系）。长度为二的路径常以这种方式出现，如 [7, 命题 4.2] 所示。

4.1. 长度为 2 的路径与三角形。

命题 4.1. 假设 $\alpha : i \to j$ 和 $\beta : j \to k$ 是满足 $\alpha\beta \prec I$ 的箭。那么，Q 中存在一支从 k 到 i 的箭，使得 α 和 β 构成 Q 中一个三角形的一部分。

证明。回想一下，我们用 $\bar{\alpha}$ 表示从 i 出发的另一条箭（若存在），并用 β^* 表示以 k 为终点的另一条箭（若存在）。那么 $\alpha\beta \prec I$ 表示

$$\alpha\beta + \alpha z_0\beta + \alpha z_1\beta^* + \bar{\alpha} z_2\beta + \bar{\alpha} z_3\beta^* = 0$$

在 Λ 中，其中 $z_0 \in J$，且 $z_i \in \Lambda$。不妨设 $z_0 = 0$，否则我们将 α 替换为 $\alpha(1 + z_0)$。我们使用正合列 $(*)$。于是上面的恒等式给出一个属于 d_1的核的元素 φ，即

$$\varphi = (\beta + z_1\beta^*, z_2\beta + z_3\beta^*)$$

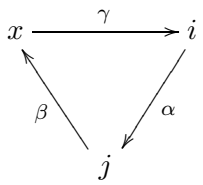
显然，$\varphi \notin J^2$，因为它的第一个坐标包含一条箭。因此，对 $\theta := \varphi$（视为列）应用注 3.2(i)，我们得到 P_k 是 P_i^-的一个直和项，也就是说，k 是以 i为终点的一条箭的起点，结论得证。□

注意，这对任意周期为 4 的对称周期代数都成立（也就是说，对野性代数也成立）).

例4.2。在 [7, 节 11], 中有一个代数的箭图 Q，该代数是对称的，且具有周期 4，但它是野性的（因此不属于我们当前关注的范围；另见 [3] 和 [7,推论 2]）。这被视为 [7], 中分类的一个推论，不过我们已经可以观察到这一点，因为上述命题表明该代数必定是野性的。

也就是说，由命题 4.1 可知，ρ 中任何不涉及环的长度为二的路径都满足 $\rho \not\prec I$。因此，B/J^3 含有一个野子代数，其对应的箭图是$\sim$型且没有任何关系，参见命题 4.2]的证明。

引理 4.3（三角形引理）。假设 Q 含有一个三角形



如果 $\gamma\alpha \not\prec I$，那么 $\alpha\beta \not\prec I$。

证明。考虑单模 S_x 的正合列

$$0 \to S_x \to P_x \to P_j \oplus P_{j^*} \to P_i \oplus P_{\bar{i}} \to P_x \to S_x \to 0,$$

其中 $j^* = s(\beta^*)$ 且 $\bar{i} = t(\bar{\gamma})$。取 $\Omega^2(S_x)$ 的极小生成元，得到矩阵 M_x 的各列，即

$$M_x = \begin{pmatrix} \varphi_{ij} & \psi_{ij^*} \\ \varphi_{\bar{i}j} & \psi_{\bar{i}j^*} \end{pmatrix}.$$

它满足 $(\gamma\ \bar{\gamma}) \cdot M_x = 0$ 且 $M_x \cdot \binom{\beta}{\beta^*} = 0$。

设 $\gamma\alpha \not\prec I$，但（为了导出矛盾） $\alpha\beta \prec I$。那么就存在一个形如.....的极小关系 m

$$\alpha\beta + \alpha z_1\beta + \alpha z_2\beta^* + \bar{\alpha} z_3\beta + \bar{\alpha} z_4\beta^* = 0$$

且满足 $z_1 \in J$，我们再次可以假设 $z_1 = 0$。现在，若我们定义

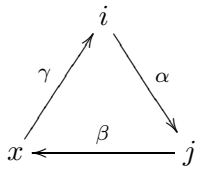
$$\theta := (\alpha + \bar{\alpha} z_3, \alpha z_2 + \bar{\alpha} z_4),$$

那么 $\theta \cdot \binom{\beta}{\beta^*} = 0$ 和 $\theta \notin J^2$（因为它涉及一支箭），因此根据注记 3.2(ii)，我们可以取 θ 作为 M_x的第一行。特别地， $\varphi_{ij} = \alpha + \bar{\alpha} z_3$，由此可得 $\gamma\ (\alpha + \bar{\alpha} z_3) + \bar{\gamma}\varphi_{\bar{i}j} = 0$，于是得到 $\gamma\alpha \prec I$，矛盾。□

因此，对于上述三角形，要么所有路径 $\gamma\alpha$、$\alpha\beta$、$\beta\gamma \prec I$都.....，要么它们全都不.....。于是，Q 中的三角形分为两类：一类三角形，称为 R 型（其中所有 $\gamma\alpha$、$\alpha\beta$、$\beta\gamma \prec I$都.....）；另一类为 N 型三角形。我们还将看到（第 5 节），非正则顶点也有类似的区分。

我们用以下引理结束这一部分。

引理 4.4. 假设 i 是三角形中的一个 1-顶点



那么 x 和 j 都必须是 2-顶点。

证明。根据引理 2.1，必定还有另一支箭，设为 $\bar{\gamma}$，其起点为 x；也必定还有另一支箭，设为 α^*，其终点为 j。由关于 S_i 的正合列可知 $p_x = p_j$。

(i) 假设顶点 x 不是 2-顶点，那么 β 是唯一一支以 x 为终点的箭。因此

$$e_x\Lambda/S_x \cong \beta\Lambda.$$

此外，再由引理 2.1 可知，必定还有另一支箭从 j 出发，记作 β。因此

$$\mathrm{rad}(P_j) = \beta\Lambda + \bar{\beta}\Lambda.$$

由此，我们得到以下维数向量等式:

$$p_x = s_x + \underline{\dim}(\beta\Lambda) \text{ and } p_j = s_j + \underline{\dim}(\beta\Lambda + \bar{\beta}\Lambda) = s_j + \underline{\dim}\beta\Lambda + \underline{\dim}(\bar{\beta}\Lambda/\beta\Lambda \cap \bar{\beta}\Lambda).$$

比较 $p_x = p_j$，可得 $\underline{\dim}(\beta\Lambda/\beta\Lambda \cap \beta\Lambda) = s_x - s_j$，所以它必定为零（即 $x = j$），否则 $s_x - s_j$ 会有一个负坐标，而这对于 Λ-模的维数向量来说是不可能的。

特别地，由于 S_j、S_x 是单模，且 $\beta\Lambda \cap \beta\Lambda$ 的向量空间维数等于 $\beta\Lambda$ 的向量空间维数。然而，这些空间之间存在包含关系，因此它们相等。现在 $\beta\Lambda = \beta\Lambda \cap \beta\Lambda \subseteq \beta\Lambda$，因此 $\beta \in \beta\Lambda$。但这是不可能的，因为 β 是一支箭 $\neq \beta$。

(ii) 证明 j 必须是一个 2-顶点是对偶的。 □

4.2. 长度为 ≥ 3 的路径。本段将考察稍长一些的路径，即长度为 3 或 4 的路径（尤其是诱导方形）。设 Λ 的箭图含有一个子箭图

$$u \xrightarrow{\delta} i \xrightarrow{\alpha} k \xrightarrow{\beta} t \xrightarrow{\gamma} j$$

我们有命题 4.1 的对应结论。

引理 4.5. 设 $\alpha\beta \neq I$ 或 $\beta\gamma \neq I$，且 $\alpha\beta\gamma \prec I$。那么存在一支箭 $j \to i$。

证明。我们在 KQ 中工作，使用由路径组成的基。我们处理 $\alpha\beta \neq I$ 的情形（另一种情形是对偶的，此时在对偶代数中工作）。
经过可能的箭 β 调整后，存在如下形式的极小关系

$$\alpha\beta\gamma + \alpha z_1\gamma^* + \bar{\alpha}z_2\gamma + \bar{\alpha}z_3\gamma^* \in I$$

考虑单模 S_i的正合列，

$$0 \to S_i \to P_i \to P_u \oplus P_{u'} \to P_k \oplus P_l \to P_i \to S_i \to 0$$

这里，$\alpha:\ i \to k$，$\bar{\alpha}:\ i \to l$ 从 i出发，而 $\delta:\ u \to i$ 和 $\delta^*:\ u' \to i$ 是以 i为终点的箭。根据约定，$\bar{\alpha}$ 或 δ^* 可能不存在（此时我们省略 P_l 和 $P_{u'}$）。
我们取 $\Omega(S_i) = \alpha\Lambda + \bar{\alpha}\Lambda$ 和 $\Omega^2(S_i) = \{(x, y) \in P_k \oplus P_l \mid \alpha x + \bar{\alpha}y = 0\}$。由正合列可知，这等于 $\varphi\Lambda + \psi\Lambda$，其中 $\varphi = \varphi e_u$ 且 $\psi = \psi e_{u'}$。令 M_i 为以 φ 和 ψ为列的矩阵。那么（对于箭 δ、δ^*的某种选取）我们有

$$(\alpha\ \bar{\alpha}) \cdot M_i = 0 \quad M_i \cdot \begin{pmatrix} \delta \\ \delta^* \end{pmatrix} = 0.$$

上述极小关系产生了以下元素 θ，它属于 $\Omega^2(S_i)$,

$$\theta = (\beta\gamma + z_1\gamma^*,\ z_2\gamma + z_3\gamma^*)$$

若 $\theta \notin J^2$，则我们可以取 $\varphi := \theta$ 作为 M_i 的第一列，因为 $\beta\gamma \prec \theta_1$ 必须属于 $e_k\Lambda e_u$（另见注 3.2(i)）。由此可得 $j = u$，因此 δ 是从 $j = u$ 到 i 的一条箭。

现在假设 $\theta \in J^2$。我们将证明这会导致矛盾。$\Omega^2(S_i)$ 的根基等于 $\Omega^2(S_i)J = \varphi J + \psi J$。因此我们可以写成 $\theta = \varphi v + \psi w$ and $v, w \in J$，并且可以在 Je_j 中取它们。于是

$$\beta\gamma + z_1\gamma^* = \varphi_{ku}v + \psi_{ku'}w$$

设 $\beta\gamma$ 出现在 $\varphi_{ku}v$ 中。我们可以写成 $v = ve_j = v_1\gamma + v_2\gamma^*$，其中 $v_i \in \Lambda$（它不一定在¯根基中）。我们可以写成 $\varphi_{ku} = \beta y_1 + \beta y_2$，其中 $y_1, y_2 \in KQ$。于是

$$\varphi_{ku}v = \beta y_1 v_1\gamma + \beta y_1 v_2\gamma^* + \bar{\beta}y_2 v$$

于是 $\beta\gamma$ 是 $\beta y_1 v_1\gamma$ 的一项。因此，y_1v_1（我们可以令其等于 $y_1v_1e_t$）模根基等于 e_t。由此可知，y_1v_1 是 $e_t\Lambda e_t$ 中的一个单位。
然而，它经过顶点 u，由此可得 $u = t$。因此，我们有一个三角形 (α, β, δ)，并且 $\alpha\beta \neq I$。由此（根据我们的三角形引理）还可得 $\beta\delta \neq I$。

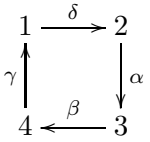
另一方面，我们进一步利用关于 $\varphi_{ku}v$ 的恒等式。由于 y_1v_1 是一个单位，我们可以¯假设 $\beta = \beta y_1$。于是 $\varphi_{ku} = \beta + \beta y_2$，并且回想一下，这是上方矩阵 M_i 左上角的元素。我们有 $M_i\binom{\delta}{\delta^*} = 0$，由此得到

$$\beta\delta + \bar{\beta}y_2\delta + \psi_{ku'}\delta^* = 0,$$

因此 $\beta\delta \prec I$，矛盾。 □

上述命题表明，极小关系中涉及的长度为 3 的路径会在 Q 中诱导出正方形。我们有一个与先前三角形引理类似的结果，陈述如下。

引理 4.6（正方形引理）。假设 Q 包含一个正方形



如果 $\alpha\beta\gamma \prec I$，那么 $\beta\gamma\delta \prec I$。

证明。假设 $\alpha\beta\gamma \prec I$，但 $\beta\gamma\delta \neq I$。特别地，我们还得到 $\beta\gamma \neq I$。考虑 S_2 的正合列。于是 $\Omega^2(S_2)$ 的生成元为矩阵的各列

$$M_2 = \begin{pmatrix} \varphi_{31} & \psi_{3,1^*} \\ \varphi_{\bar{3}1} & \psi_{\bar{3}1^*} \end{pmatrix}.$$

以及 $(\alpha\ \bar{\alpha})M_2 = 0$ 和 $M_2\binom{\delta}{\delta^*} = 0$。根据我们的假设，极小关系 $\alpha(\beta\gamma + x_1\gamma + x_2\bar{\gamma}) + \bar{\alpha}(x_3\gamma + x_4\bar{\gamma}) = 0$，其中 $x_1 \in J^2$。这给出了一个元素

$$\varphi = (\beta\gamma + x_1\gamma + x_2\bar{\gamma},\ x_3\gamma + x_4\bar{\gamma})^t \in \Omega^2(S_2)$$

它不可能属于 $\Omega^2(S_2)$ 的根基，因为 $\beta\gamma \neq I$。因此，我们可以将其作为M_2的第一列。由此可得 $(\beta\gamma + x_1\gamma + x_2\bar{\gamma})\delta + \psi_{31^*}\delta^* = 0$，因此 $\beta\gamma\delta \prec I$，这就产生了矛盾。□

下面的引理表明，有时可以将长度为 3 的路径与长度为 4 的路径联系起来。

引理 4.7。设我们有一条形如下式的路径 Q

$$u \xrightarrow{\delta} i \xrightarrow{\alpha} k \xrightarrow{\beta} t \xrightarrow{\gamma} j$$

其中 $|k^+| = 1$ 和 $\delta\alpha$、$\alpha\beta$、$\beta\gamma \neq I$。若 $\delta\alpha\beta\gamma \prec I$，则 $\alpha\beta\gamma \prec I$。

证明。设 $\delta\alpha\beta\gamma \prec I$，并令 $\delta\colon\ u \to u'$ 和 $\bar{\alpha}\colon\ i \to i'$ 分别表示从 u 和 i 出发的第二条箭（如果存在）。根据关于 k 的假设，我们得出结论：任何从 $\delta\alpha$ 出发的路径 $p \in e_i A$ 都必须经过 $\delta\alpha\beta$。因此，作为 I 的极小生成元的 $\delta\alpha\beta\gamma$ 参与了如下形式的一个极小关系

$$\delta\alpha\beta\gamma + \delta\alpha\beta p + \delta\bar{\alpha}q + \bar{\delta}r = 0,$$

其中 p、q、$r \in J$。调整 $\gamma\colon = \gamma + p$ 后，我们可以改变表示，得到 $p = 0$。因此，元素 $\rho = （\alpha\beta\gamma + \bar{\alpha}q$、$r）$ 属于 $\Omega^2（S_u）= ker（[\delta\ \bar{\delta}]）$。最后，若 $u^- = \{\sigma, \sigma^*\}$，且 $v = s（\sigma）$、$v' = s（\sigma^*）$，则 $\Omega^2（S_u）\cong Im（M_u）$，其中 $M_u\colon\ P_v \oplus P_{v'} \to P_i \oplus P_{i'}$ 由下列矩阵给出

$$\begin{pmatrix} \varphi_{uv} & \psi_{uv'} \\ \varphi_{u'v} & \psi_{u'v'} \end{pmatrix},$$

因此 $\rho = M_u \cdot \binom{\kappa_1}{\kappa_2}$，其中 $\kappa_1 \in P_v$ 和 $\kappa_2 \in P_{v'}$。但这时

$$\alpha\beta\gamma + \bar{\alpha}q = \varphi_{uv}\kappa_1 + \psi_{uv'}\kappa_2,$$

因此，$\alpha\beta\gamma$ 由极小关系生成。但是，$\alpha\beta \neq I$ 和 $\beta\gamma \neq I$，所以 $\alpha\beta\gamma$ 也涉及 I的某个极小关系，正如所声称的那样。□

5. Non-regular vertices

本节给出一些部分结果，用以描述非正则顶点。

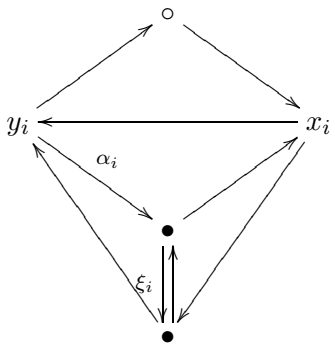
显然，对于 Q 双串，非正则顶点 i 满足 $|i^-| = 1$ 和 $|i^+| = 2$，或 $|i^-| = 2$和 $|i^+| = 1$。在第一种情况下，i 称为 (1, 2)-顶点；在第二种情况下，称为 (2, 1)-顶点。设 i 是形如以下形式的 (1, 2)-顶点

$$\begin{array}{ccccc} j & \xrightarrow{\alpha} & i & \xrightarrow{\beta} & k \\ & & & \searrow^{\bar{\beta}} & \\ & & & & l \end{array}$$

我们称 i 为 R 型顶点（分别为 N 型顶点），若 $\alpha\beta \prec I$ 和 $\alpha\beta \prec I^-$（分别地，$\alpha\beta \neq I$ 和 $\alpha\beta \neq I$）均成立。若 $k \neq l$，则称 i 为真。对于 (2,1)-顶点也可以定义类似概念。每当考虑一个 (1, 2)-顶点 i时，我们沿用上述记号表示以 i为起点和终点的箭。

注记 5.1. 我们回顾一下，存在无穷多个两两不同构的 TSP4 代数A，其中包含任意多个类型为 R 或 N 的 (1, 2)-顶点和 (2, 1)-顶点。事实上，

可以取任意一个加权曲面代数 Λ （见 [8]），其中包含任意多个形如下列形式的“块”：



其中 ξ_i 是一支虚箭头。接着利用 [11, 的结果（另见第 4], 节），我们得出，相对于虚箭头序列 $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 的虚变异 $A = \Lambda(\xi)$ 是一个 TSP4 代数，并且顶点 $x_1, \ldots, x_n$ 是 N 型的 (1, 2)-顶点（在 Q_A 中），而 $y_1, \ldots, y_n$ 是 N 型的 (2, 1)-顶点（在 Λ 的定义中，对于任意 $i \in \{1, \ldots, n\}$，我们必须选取权重 $m_{\xi_i} = m_{\alpha_i} = 1$）。

对于 R 型顶点，需要考虑所谓的加权广义三角剖分代数[13], ，它们由五种类型（I–V）的块粘合而成的箭图给出。不展开细节，我们只提及，对任意此类代数 A （在大多数情况下它是 TSP4 代数），其 Gabriel 箭图中每个 V 型块对应两个 (1, 2)-顶点和两个 (2, 1)-顶点，并且这些顶点全都是 R 型（这可直接由 A 中关系的形式得出）。因此，很容易构造出含有任意多个 R 型非正则顶点的 TSP4 代数（在这种情况下，(1, 2)-顶点的数量等于 (2, 1)-顶点的数量）。但是， A 的 Gabriel 箭图不是双串的。

事实证明，如果 Gabriel 箭图是双串的，则不存在 R 型非正则顶点。对于真顶点，证明这一点相当容易，如下面的引理所示。

引理5.2. 不存在 R 型真非正则顶点。

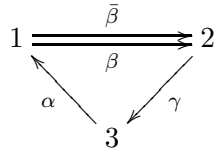
证明。设 i 是一个 R 型 (1, 2)-顶点。特别地，由命题 4.1， $\alpha\beta \prec I$ 产生一条箭 $\gamma\colon\ k \to j$, ¯，而 $\alpha\beta\colon\ l \to j$ 产生一条箭 $\delta\colon\ l \to j$。现在假设 i 是真顶点。由于 Q 是双串的，所以 $j^- = \{\gamma, \delta\}$，从而 $p_j^- = p_k + p_l$。但是， $p_i^- = p_i^+$ 给出 $p_j = p_k + p_l$，因为 i 是一个 (1, 2)-顶点，因此我们得到 $p_j = p_j^- = \hat{}p_j$，这与引理 2.4 矛盾。对偶的论证给出了 (2, 1)-顶点的证明。□

我们如下完成这一论断。

定理5.3. 不存在 R 型非正则顶点。

证明。由前一个引理可知，只需证明不存在带有$k = l$ 的 R 型 (1,2)-顶点 i （即非真顶点）。反设这样的顶点存在。为简单起见，

我们分别用 1、2、3 表示顶点 i、$k=l$ 和 j。由于 $1=i$ 是 R 型的，我们得到一支箭 γ：$2\to 3$（见命题 4.1），因此 Q 含有以下子箭图



当然，根据假设，1 是一个非正则顶点。我们断言 2 也是一个非正则顶点。事实上，若不然，则存在一条箭 $\bar{\gamma}$：$2\to x$, $\bar{\gamma}\neq\gamma$，并且还有$x\neq 3$，因为否则我们将得到一个子箭图 $1\rightrightarrows 2\rightrightarrows 3$，从而 $p_1=p_3$，因为$p_2^-=p_2^+$，于是得到 $\hat{}p_1=p_1^-=p_3=p_1$，这与引理 2.4 矛盾。因此，¯我们没有箭 $x\to 1$，所以根据命题 4.1，$\beta\bar{\gamma}\not\in I$ 和 $\beta\bar{\gamma}\not\in I$都成立。但此时 A有一个形式为 $1\rightrightarrows 2\xrightarrow{\bar{\gamma}} x$ 的野（遗传）因子代数，矛盾。这证明 2 是一个 (2, 1)-顶点。

特别地，利用 $p_1^-=p_1^+$和 $p_2^-=p_2^+$可得 $p_1=p_2$ 和 $p_3=2p_1$。此外还可推出 $3^-\cup 3^+\supsetneq\{\gamma,\alpha\}$，因此 3 是一个 2-顶点（注意：$p_3^-=p_3^+$）。特别地，顶点 3 处可能有一个环_ ρ，此时 $Q_1=\{\alpha,\beta,\bar{\beta},\gamma,\rho\}$）。否则，取代 ρ的是从 3 出发并终止于 3 的箭，以及其他顶点或箭。我们先讨论在这两种情形下都成立的性质。

我们可以假设 $e_1J^3=e_1\beta\gamma J$和 $\bar{\beta}\gamma\in e_1J^3$。由 A的驯性可知，必定存在一个极小关系，其中至少涉及 $\beta\gamma$、$\bar{\beta}\gamma$之一。这意味着 dim $e_1J^2/e_1J^3\leq 1$，显然它¯非零。因此我们可以假设它由 $\beta\gamma$的陪集张成。于是，对于 $c\in K$和 $\psi\in e_1J^3$，有 $\beta\gamma=c\beta\gamma+\psi$。若 $c\neq 0$，则我们用 $\bar{\beta}-c\beta$替换箭 $\bar{\beta}$，即可得到所需结论。
我们将关系写作

$$(*)\qquad \bar{\beta}\gamma=\beta\gamma\Theta_1\gamma+\beta\gamma\Theta_2\rho\quad(\Theta_1\in J^2,\ \ \Theta_2\in\Lambda).$$

另请注意，我们可以假设 $\gamma\alpha=0$。事实上，利用单模S_1的正合列，可以看出第二重叠 Ω²(S_1) 有一个极小生成元，记作 (φ_{23},ψ_{23})，满足 $\varphi_{23}\alpha=0$ 和 $\psi_{23}\alpha=0$。现在应用关系 (*)，我们可以选取形如 (–($\gamma\Theta_1\gamma+\gamma\Theta_2\rho$) γ) 的生成元（此前调整 γ，以得到 $\psi_{23}=\gamma$）。特别地，对于这一选择，$\gamma\alpha=0$。

考虑 S_2 的正合列。这给出

$$0\to\Omega^{-1}(S_2)\cong(\beta,\bar{\beta})\Lambda\to P_1\oplus P_1\to P_3\to\gamma\Lambda\cong\Omega(S_2)\to 0$$

由于 $\gamma\alpha=0$，我们有 $\alpha\Lambda\subset$Ω²(S_2)。它不在 Ω²(S_2) 的根基中，因为 α 是一个箭。从正合列可知，Ω²(S_2) 还多出一个生成元，记作 φ_{31}，并且有极小关系

$$(**)\qquad \alpha\beta+\varphi_{31}\bar{\beta}=0$$

现在假设顶点 3 处有一个环，并考虑 S_3 的正合列。这给出一个正合列

$$0\to\Omega^{-1}(S_3)\cong(\gamma,\rho')\Lambda\to P_2\oplus P_3\to\ P_1\oplus P_3\to\alpha\Lambda\oplus\rho\Lambda\cong\Omega(S_3)\to 0$$

其中 ρ' 是 ρ的一个版本，而中间映射由矩阵 $M_3 = \left(\begin{smallmatrix}\varphi_{12} & \psi_{13}\\ \varphi_{32} & \psi_{33}\end{smallmatrix}\right)$给出，它描述了 $\Omega^2(S_3)$ 的生成元。于是 $(\alpha\ \rho)M_3 = 0$ 且 $M_3\binom{\gamma}{\rho'} = 0$。我们可以将极小关系 (**) 写成 $0 = \alpha\beta + \alpha\phi'\bar{\beta} + \rho\phi''\bar{\beta}$，其中 $\phi' \in \Lambda$ 且 $\phi'' \in J$，因此 $\Omega^2(S_3)$ 有一个生成元$\bar{}$ $\bar{}(\beta + \phi'\beta, \phi''\beta)$。这可以作为 M_3中的第一列。现在， M_3 的第一行给出$\bar{}$ $\bar{}$，因此我们有一个极小关系 $(\beta + \varphi'\beta)$ $\gamma + \psi_{13}\rho' = 0$。现在 $\beta\gamma$ 属于 $\beta\gamma J$，而 $\psi_{13}\rho'$ 也属于 J^3。因此 $\beta\gamma \in J^3$。但我们已知 $e_1J^3 = \beta\gamma J$，所以推得 $e_1J^3 \subseteq e_1J^4$，进而有 $e_1J^3 = 0$。结果， $\beta\gamma J = 0$ 且 $\beta\gamma \in \operatorname{soc}(e_1\Lambda)$ $\cap\, e_1\Lambda e_3 = 0$，这对于对称代数是不可能的（参见 [4, I.3.5]）。

一般而言，我们有箭 $\bar{\alpha} : 3 \to x$ 和 $\gamma^* : y \to 3$。现在， S_3 的正合序列形式如下

$$0 \to \Omega^{-1}(S_3) \cong (\gamma, \gamma^*)\Lambda \to P_2 \oplus P_y \to P_1 \oplus P_x \to \alpha\Lambda \oplus \bar{\alpha}\Lambda \cong \Omega(S_3) \to 0$$

与第一种情况完全相同，我们重写 (**) 得到矩阵 M_3 的第一列。然后$\bar{}$，由第一行可得恒等式 $0 = (\beta + \phi'\beta)\gamma + \psi_{1y}\gamma^*$，从而得到与之前相同的矛盾。□

References

[1] S. Ariki，经典型 Hecke 代数及其表示型。《伦敦数学会会刊》（第 3 辑）91（2005），355–413。[2] I. Assem，D. Simson，A. Skowro ´nski，《结合代数表示论基础 1：表示论技巧》。伦敦数学会学生文本丛书，第 65 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2006。[3] I. Burban，O. Iyama，B. Keller，I. Reiten，一维超曲面奇点的簇倾斜。《数学进展》217（2008），2443–2484。[4] K. Erdmann，温和表示型的块及相关代数。Springer《数学讲义》1428（1990）。[5] K. Erdmann，关于表示有限对称代数的一则注记。预印本。[6] K. Erdmann，A. Skowro ´nski，加权曲面代数。《代数学杂志》505（2018），490–558。[7] K. Erdmann，A. Skowro ´nski，广义四元数型代数。《数学进展》349（2019），1036–1116。[8] K. Erdmann，A. Skowro ´nski，加权曲面代数：一般版本。OWP-2019-07。《代数学杂志》544（2020），170–227。[9] K. Erdmann，A. Skowro ´nski，加权曲面代数：一般版本，勘误。《代数学杂志》569（2021），875–889。[10] E. L. Green，N. Snashall，Ø. Solberg，有限表示型自内射代数的 Hochschild 上同调环。《美国数学会会刊》131（2003），第 11 期，3387–3393。[11] T. Holm，A. Skowro ´nski，A. Skowyrski，加权曲面代数的虚拟变异。《代数学杂志》619（2023），822–859。

[12] *A. Skowro ´*nski，自内射代数：有限型与温和型。《当代数学》**406** （2006），169–238。[13]A. Skowyrski，A. Skowro ´nski，加权广义曲面代数。https://doi.org/10.48550/arXiv.2106.15218。[14] *A. Skowro ´*nski，K. Yamagata，Frobenius 代数。I. 基础表示论。EMS 数学教材。欧洲数学会（EMS），苏黎世¨，2011。xii+650 页。（Karin Erdmann）Mathematical Institute, University of Oxford, UK*Email address*: erdmann@maths.ox.ac.uk（Adam Hajduk）

Faculty of Mathematics and Computer Science, Nicolaus Copernicus University, Chopina 12/18, 87-100 Torun, Poland*Email address*: ahajduk@mat.umk.pl（Adam Skowyrski）

Faculty of Mathematics and Computer Science, Nicolaus Copernicus University, Chopina 12/18, 87-100 Torun, Poland*Email address*: skowyr@mat.umk.pl