arXiv:2304.08417v1 [math.RT] 17 Apr 2023

带有幻影的有限维代数（J. Krah 一个例子的推论）

Martin Kalck

Abstract. 我们注意到，存在一个具有有限整体维数的结合有限维 $\mathbb{C}$-代数 A，使得有限维 A-模的有界导出范畴 $D^b(A)$ 存在一个可容许子范畴 $\mathcal{P}$，其格罗滕迪克群 $K_0(\mathcal{P})$ 消失。换言之，$\mathcal{P} \subseteq D^b(A)$ 是一个幻影。

利用倾斜理论，这可直接由 Krah 最近给出的一个关于光滑有理曲面上幻影的例子推出。

根据 Aihara 和 Iyama 的工作，这也带来了新的预倾斜对象实例：它们无法补全为倾斜对象。

1. Phantoms

我们首先回顾 Krah 的主要结果[5, 定理 1.1。]。

定理 1.1. 设 X 是 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 在 10 个处于一般位置的闭点处的爆破。则 $D^b(\mathrm{coh}\ X)$中存在一个例外序列 $(E_1, \dots, E_{13})$，但它不是满的。由于 $K_0(X) \cong \mathbb{Z}^{13}$，他得到了以下结果，参见 [5, 推论 5.1.]。

推论 1.2. $D^b(\mathrm{coh}\ X)$ 的可容许子范畴 $\mathcal{A} = \langle E_1, \dots, E_{13}\rangle^{\perp}$ 的格罗滕迪克群为零。换言之，$\mathcal{A} \subseteq D^b(\mathrm{coh}\, X)$是一个幻影子范畴。

接下来，我们回顾 Hille 和 Perling 的以下定理 [3]。

定理 1.3. 设 S 是代数闭域上的光滑射影有理曲面。则 S上存在一个倾斜丛。

结合定理 1.1，可得如下推论。

推论 1.4. 存在一个结合有限维 $\mathbb{C}$-代数 A，其有限整体维数有限，使得有限维 A-模的有界导出范畴 $D^b(A)$ 存在一个可容许子范畴 $\mathcal{P}$，其格罗滕迪克群 $K_0(\mathcal{P})$ 为零。

证明。 设 X 是定理 1.1中的光滑射影有理曲面。由定理 1.3，X 存在一个倾斜丛[1] $\mathcal{T}$。因此，倾斜理论给出一个三角等价

$$\Phi := \mathrm{Hom}_{D^b(X)}(\mathcal{T}, -)\colon D^b(\mathrm{coh}\, X) \xrightarrow{\cong} D^b(\mathrm{End}_X(\mathcal{T})), \tag{1.1}$$

其中 $\mathrm{End}_X(\mathcal{T})$ 是一个有限维代数，由于 X是光滑的，因此它具有有限整体维数。根据定理 $\mathcal{P} = \Phi(\mathcal{A})$ 具有所需性质。1.1。 □

注1.5。 根据 [3], 代数 A 是强拟遗传的；事实上，他们证明标准模 Δ_i 满足 $\mathrm{Ext}^{>1}_A(\Delta_i, \Delta_j) = 0$——尤其是，$\mathrm{pr.dim}_A \Delta_i \leq 1$ 对所有 i。

本文中的观察可视为 Krah 论文 [5] 的附录。感谢 Henning Krause 鼓励我将本文投稿至 arXiv。本文得到 DFG 项目 KA4049/2-1 的资助。[1]或者，正如 Krah 在我准备本文时指出的那样，X 甚至存在一个满的 *strong*例外丛集，因此有一个倾斜对象。

2. Presilting objects without completion

我们首先介绍相关定义。

定义 2.1. 设 $\mathcal{D}$ 是一个三角范畴。若对象 $P \in \mathcal{D}$ 满足

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(P, P[>0]) = 0. \tag{2.1}$$

若预倾斜对象 S 还满足

$$\mathsf{thick}(S) = \mathcal{D}. \tag{2.2}$$

若存在对象 $C' \in \mathcal{D}$，使得$C \oplus C'$ 是一个半刚性生成对象，则称预倾斜对象 C 为部分半刚性生成对象。

近年来，通过部分缠绕 Fukaya 范畴，人们在某些带有 silting 对象的有限维代数的导出范畴中发现了并非部分半刚性生成的预倾斜对象的实例，参见 [6] 以及 [4]。这些实例中都出现了一个三角子范畴 $\mathcal{U}$，这是其中的关键要素。它没有任何预倾斜对象，并且 $K_0(\mathcal{U}) \cong \mathbb{Z}^2$。我们的推论 2.6 给出了一个无法补全为 silting 对象的预倾斜对象实例，其建立在推论 $\mathcal{P}$ 1.4 中幻影范畴的存在之上——尤其是，它具有截然不同的特点。

更准确地说，[6] 和 [4] 中的例子都是温和代数。在下面的命题中，我们总结了这类代数的预silting对象的一些性质。特别地，陈述 (a) 表明，对于温和代数，不存在与预silting对象正交的幻影范畴，这与推论2.6中的例子形成对比。

命题 2.2. 设 A 是一个有限维温和代数，并设 $r = \mathrm{rk}\, K_0(D^b(A))$。令 S in $D^b(A)$ 为一个预倾斜对象。

(a) 如果 S 具有 r 个两两非同构的不可分解直和项，那么 S 是 silting。（参见[2,命题 3。7]）(b) 如果 S 具有 $r-1$ 个两两非同构的不可分解直和项，那么 S 是部分半刚性生成（参见 [4,命题 4。15] 特殊情形下还参见 [6, 命题 1.4。]）。

例 2.3。 设 $\mathcal{D}$ 是一个真[2] k-线性三角范畴，并假设 $E_1,\dots,E_t \in \mathcal{D}$ 是一个例外序列，即

(a) 对所有 $i > j$，$\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(E_i, E_j[\mathbb{Z}]) = 0$。 (b) 对所有 i，$\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(E_i, E_i[\neq 0]) = 0$ 且 $\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(E_i, E_i) = \mathbb{C}$。

那么 $\mathcal{D}$ 含有一个预silting对象。

事实上，由于 $\mathcal{D}$ 是真，对于每个 i，存在一个极大 $s_i \in \mathbb{Z}$，使得 $\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(\bigoplus_j E_j, E_i[s_i]) \neq 0$。根据性质 (a)，并对 E_i作适当移位后，我们可以假设所有这些$s_i \leq 0$。那么 $\bigoplus_j E_j$ 是厚子范畴 $\mathsf{thick}(E_1,\dots,E_t)$ 中的 silting 对象，并且是 $\mathcal{D}$ 中的预silting 对象。当且仅当该例外序列是满的，即 $\mathsf{thick}(E_1,\dots,E_t) = \mathcal{D}$时，它才是 $\mathcal{D}$ 中的半刚性生成对象。

将此例应用于定理 X 中的1.1 所述光滑曲面的例外序列，以及推论 $\mathbb{C}$中的有限维 A 代数 A 中的1.4 相应例外序列，可得到 $D^b(\mathsf{coh}\, X)$ 和 $D^b(A$中的预倾斜对象，但它们并非silting。

[2]~~也就是说，~~对于所有 $X, Y \in \mathcal{D}$，都有 $\dim_k \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \text{同态}_{\mathcal{D}}(X, Y[i]) < \infty$。例如，对于域 $\mathbb{C}$ 上的光滑射影簇 X，这对 $\mathcal{D} = D^b(\mathsf{coh}\ X)$ 成立；对于有限整体维数的有限维 $\mathbb{C}$-代数 B，这对 $\mathcal{D} = D^b(B)$ 也成立。

现在注意到，这些预倾斜对象无法补全为倾斜对象，也就是说，它们不是部分半刚性生成对象。

我们需要 Aihara 和 Iyama 的以下结果 [1, 定理2.27 和推论2.28]。

定理2.4. 设 $\mathcal{D}$ 是一个具有半刚性生成对象的 Krull–Schmidt三角范畴。那么$K_0(\mathcal{D}) \cong \mathbb{Z}^r$，且 $\mathcal{D}$ 中的所有倾斜对象恰有 r 个两两不同构的不可分解直和项。

结合例2.3，我们得到以下结论。

引理2.5. 设 $\mathcal{D}$ 是一个具有半刚性生成对象的真 k-线性 Krull–Schmidt三角范畴。若存在一个长度为 rk $K_0(\mathcal{D})$ 的非满例外序列 $\mathbb{M}$，则存在一个不是部分半刚性生成的预silting对象。

证明。由例2.3可知， $D^b(A)$ 中每个非满例外序列 $\mathbb{E}$ 都会产生一个预silting对象 $P(\mathbb{E})$，该对象不是 silting。根据构造， $P(\mathbb{E})$ 的两两不同构的不可分解直和项的数量等于 $\mathbb{E}$ 的长度。特别地，预silting对象 $P(\mathbb{M})$ 已经有 rk $K_0(\mathcal{D})$ 个两两不同构的不可分解直和项。因此，根据定理2.4，不存在对象 C 属于 $\mathcal{D}$，使得 $P(\mathbb{M}) \oplus C$ 是 silting。□

推论 2.6。 设 X 和 A 分别如定理 *1.1* 和推论 *1.4*所述。则$D^b(A)$ 和 D^b(凝聚层 X) 具有 silting 对象。此外，它们包含并非 部分 silting 的预倾斜对象。

证明。 我们证明引理 2.5 中的假设均成立。由三角等价 Φ（1.1）可知，只需给出关于 D^b(凝聚层 X) 的论证。范畴 $\mathbb{C}$-线性范畴 D^b(凝聚层 X) 是 Krull–Schmidt 范畴，因为它是 Hom 有限且幂等完备的。由于 X 是光滑的，D^b(凝聚层 X) 是真范畴，而定理 $\mathcal{T}$1.3 中的倾斜对象是 silting。最后，我们可以将定理 1.1 中的非满例外序列用作 $\mathbb{M}$。 □

References

[1] T. Aihara，O. Iyama， *Silting mutation in triangulated categories*，《伦敦数学学会杂志》85(3)（2012），633–668。[2] C. Amiot，P-G. Plamondon，S. Schroll，
A complete derived invariant for gentle algebras via windingnumbers and Arf invariants，《数学精选》（新系列）29（2023）。[3] L. Hille，M. Perling，
Tilting bundles on rational surfaces and quasi-hereditary algebras，《傅里叶研究所年刊》第64卷第2期，2014，625–644。[4] H. Jin，S. Schroll，Z Wang，
A complete derived invariant and silting theory for graded gentle algebras，arXiv:2303.17474。[5] J. Krah， *A Phantom on a Rational Surface*，arXiv:2304.01269。[6] Y. -Z. Liu，Y. Zhou，
A negative answer to Complement Question for presilting complexes，arXiv: 2302.12502。
Email address: martin.kalck@math.uni-freiburg.de