arXiv:2304.08437v3 [math.LO] 5 Sep 2024

带迹冯·诺伊曼代数张量积对初等性的保持

ILIJAS FARAH 和 SAEED GHASEMI

摘要。与 I 型代数作张量积运算会在带迹冯·诺伊曼代数范畴中保持初等等价。证明涉及一个针对度量结构直积分的新颖且一般性的 Feferman–Vaught 型定理。

在 [20] 中，已证明约化积及其推广形式能够保持初等等价，也就是说，乘积的一阶理论可以根据各因子的理论以及关于用于构造约化积的理想（若有）的信息计算得出。张量积和自由积能否保持初等性，这个问题稍微复杂一些。有些出人意料的是，在群胚的情形下（[28]）以及在群的情形下（根据 Sela 的一项深刻结果，见 [33]），自由积都能保持初等等价。尚不清楚带迹冯·诺伊曼代数是否也有这种性质（[25, 问题 5.3]）。

另一方面，一般而言，张量积并不能在模范畴（[27]）和 C^*-代数范畴（[15], [12]）中保持初等等价。David Jekel 提出，迹冯·诺伊曼代数的张量积是否保持初等等价（[25, §5.1]）。我们对这一问题给出了一些部分肯定的答案（记号和术语见 §1.2）。

定理 1. 设 M 和 N 是带迹 von Neumann 代数，且至少有一个是 I 型，则它们的张量积的理论仅取决于 M 和 N 的理论。

换言之，如果 $M_1 \equiv M$ 且 $N_1 \equiv N$，那么 $M_1 \bar{\otimes} N_1 \equiv M \bar{\otimes} N$。

更确切地说，如果 $M_1 \preceq M$ 且 $N_1 \preceq N$，那么（在自然的识别下）$M_1 \bar{\otimes} N_1 \preceq M \bar{\otimes} N$。

在证明定理 1 的过程中，我们证明了一个适用于度量结构直积分的 Feferman–Vaught 型定理（定理 3.3）。该证明大致遵循了 [22] 中给出的度量约化积 Feferman–Vaught 定理的证明思路（另见 [11, §16]）。此外，标准结果表明，在 McDuff 因子中，与超有限 II_1

日期：2024年9月9日。

因子作张量积会保持初等性（见 §5）。与 C*-代数不同，在带迹 von Neumann 代数中，目前尚无张量积不保持初等性的已知例子。

致谢。我们感谢 2022年秋季学期在约克大学举办的自由概率与模型论读书研讨班的参与者，也感谢 Tom´as Ibarlucia 提供了非常有用的评论。此外，我们还要感谢 Ita¨ı Ben Ya'acov、David Gao、David Jekel 以及匿名审稿人对本文早期稿件提出的意见。

1. 预备知识

关于算子代数 [9], 、II 型$_1$ 因子 [1], 以及连续模型论 [5], [24], [23], 可参阅以下优秀的综合性文献。

1.1. 直积分。我们最初对度量结构的可测场和度量结构的直积分的定义，类似于希尔伯特空间和 von Neumann 代数的可测场与直积分的定义（[34, 定义 IV.8.9、IV.8.15 和 IV.8.17]）。这里我们采用 [6, §8] 中较为完善的定义。[1] 虽然这一概念可以推广到非可分度量空间的情形，但我们只考虑可分情形。为简便起见，我们仅讨论 $\mathscr{L}$ 为单排序语言的情形；只需作显然的修改，即可将定义推广到多排序语言。

定义 1.1（度量结构的可测场与直积分）。设 $\mathscr{L}$ 是连续语言，$(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 是可分概率测度空间，并且对于 $\omega \in \Omega$，(M_ω, d_ω) 是可分的 $\mathscr{L}$-结构。假设对于 $n \in \mathbb{N}$，e_n 是 $\prod_{\omega\in\Omega} M_\omega$ 中的一个序列，且满足以下两个条件。

(1) 对每个 ω，集合 $\{e_n(\omega) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 在 M_ω 中稠密。(2) 对于 $\mathscr{L}$ 中的每个谓词 $R(\bar{x})$ 以及每个适当类型的元组 $e_{\bar{n}} = \langle e^{n(0)}, \dots, e_{n(j-1)}\rangle$，函数 $\omega \mapsto R^{M_\omega}(e_{\bar{n}}(\omega))$ 都是可测的。

结构 M_ω 与函数 e_n 一起构成一个 $\mathscr{L}$-结构的可测场。

对于 $\omega \in \Omega$，M_ω 的直积分是记作

$$M = \int_\Omega^\oplus M_\omega \, d\mu(\omega)$$

[1]关于此定义与迹冯·诺伊曼代数直积分标准定义之间一个显而易见但最终无关紧要的技术差异，将在第 4 节讨论。

并定义如下。考虑所有满足以下函数条件的 $a \in \prod_{\omega\in\Omega} M_\omega$ 的集合 $\mathscr{M}$

$$\omega \mapsto d_\omega(a(\omega), e_n(\omega))$$

对所有 n 都是可测的。在 $\mathscr{M}$ 上考虑伪度量

$$d^M(a,b) = \int_\Omega d_\omega(a(\omega), b(\omega))\, d\mu(\omega).$$

于是，M 的定义域被定义为 $\mathscr{M}$ 中函数关于由 $a \sim b$ 当且仅当 $d^M(a,b) = 0$所定义的等价关系的等价类集合，并赋予商度量 d。

引理 1.2. 如果 F 是一个 n元函数符号且 $\bar{a} \in \mathscr{M}^n$，那么解释 $\omega \mapsto F^{M_\omega}(\bar{a})$ 是一个可测函数。

如果 R 是一个 n元谓词符号且 $\bar{a} \in \mathscr{M}^n$，那么解释$\omega \mapsto R^{M_\omega}(\bar{a})$ 是一个可测函数。

证明。我们将证明第二个断言。固定一个 n元谓词符号 R 和一个 n元组 $\bar{a}$，且 $\mathscr{M}$。给定 $\varepsilon > 0$，句法要求存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得对于任意 $\mathscr{L}$-结构 N 中的 n元组 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$，都有：$d(\bar{a}\ \bar{b}) < \delta$ 蕴含 $|R^N(\bar{x}) - R^N(\bar{y})| < \varepsilon$。

由于对所有 M_ω 中的 $n \in \mathbb{N}$，$e_n(\omega)$ 都是稠密的，因此存在一个划分 $\Omega = \bigsqcup_i X_i$为可测集，并存在一个函数 $h : \mathbb{N} \times n \to \mathbb{N}$，使得对所有 i 和 j 以及所有 $\omega \in X_i$，都有 $d^{M_\omega}(a_j(\omega) - e_{h(i,j)}(\omega)) < \delta$。将 $\bar{e}(i)$ 记作 $\mathscr{M}$ 中的 n 元组，其第 j 个坐标与 $e_{h(i,j)}(\omega)$ 一致，则解释$\omega \mapsto R^{M_\omega}(\bar{a})$ 可被一致地 ε 逼近为

$$\omega \mapsto \sum_i \chi_{X_i} R^{M_\omega}(\bar{e}(i)).$$

根据定义 1.1 的 (2)，此函数是可测的。因此，R 在 $\bar{a}$ 处的取值作为可测函数的一致极限，也是可测的。

函数符号情形的证明类似。 □

在 M 上，$\mathscr{L}$ 中函数符号和谓词符号的解释以自然方式定义。对于 M 中适当类型的元组 $\bar{a}$，函数符号 $F(\bar{x})$ 在 $\mathscr{L}$ 中的解释，是函数的等价类 $F^M(\bar{a})$，该函数定义在 Ω 上，满足

$$\omega \mapsto F^{M_\omega}(\bar{a}_\omega).$$

如果 $R(\bar{x})$ 是 $\mathscr{L}$ 中的关系符号，且 M 中的 a 属于适当的类型，那么

$$R^M(\bar{a}) = \int_\Omega R^{M_\omega}(\bar{a}_\omega)\, d\mu(\omega).$$

引理 1.3. 若 $\mathscr{L}$ 是一个连续语言，且对于 $\omega \in \Omega$，M_ω 是一个 $\mathscr{L}$-结构的可测场，那么 $\int^{\oplus} M_\omega d\mu(\omega)$ 是一个 $\mathscr{L}$-结构。□

证明。容易验证，M 关于 d 是完备的，并且直积分中每个函数符号和谓词符号的解释关于 d 连续，其连续模满足 $\mathscr{L}$ 中句法的要求。结论由此得出。□

关于随机化的一个注记。凯斯勒对离散结构的随机化 [26] 以及其度量类比（[7], [3, 定义 3.4]）都与可测结构场的直积分密切相关。与直积分不同，随机化是在扩展的双排序语言中呈现的。文中详细讨论了随机化（包括离散结构的随机化，以及理论具有另一项性质的连续结构的随机化：对所有 n，无量词 n-型空间都是鲍尔单纯形 ≥ 1）之间的精确关系，见 [6, §21]。请注意，关于随机化的量词消去结果（[26, 定理 3.6], [7, 定理 2.9], 和 [3, 推论 3.33]）针对的是扩展语言。不难看出，例如，一个 II_1 因子的可测场的非平凡直积分，在带迹 von Neumann 代数的语言中不允许量词消去。事实上，根据 [13] 的主要结果，没有任何 II_1 型带迹 von Neumann 代数允许量词消去。[19] 进一步改进了这一结果，证明这些理论甚至不是模型完备的。

1.2. 初等性。带迹 von Neumann 代数和 C*-代数的模型论是在 [18] 中引入的。对于每个变量元组 $\bar{x} = \langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle$（$n \geq 0$，允许为空元组），都与一个公式代数 $\mathfrak{F}^{\bar{x}}$ 相关联，其中公式的自由变量包含于 $\bar{x}$ 中。若 $\varphi(\bar{x})$ 是一个公式，其自由变量包含于 $\bar{x}$ 中，(N_τ) 是一个带迹 von Neumann 代数，则对 N 中每个适当类型的元组 $\bar{a}$，都定义其解释 $\varphi^N(\bar{a})$。语句是不含自由变量的公式。

对每个带迹 von Neumann 代数 N，定义一个半范数 $\|\cdot\|_N$ on $\mathfrak{F}^x$，如下：

$$\|\varphi(\bar{x})\|_N = \sup \varphi^{N^{\mathscr{U}}}(\bar{a}).$$

这里 $\bar{a}$ 遍历 N 的单位球中的所有 n 元组。（$\|\varphi(\bar{x})\|$ 的标准定义取上确界时，遍历所有与 N 初等等价的结构 M，以及 M 中所有适当类型的 n 元组，但这两个半范数相同。）

定义 1.4. 设 M 和 N 是带迹 von Neumann 代数。如果每个句子 φ 都满足 $\varphi^M = \varphi^N$，则称它们初等等价，记作 $M \equiv N$。

初等嵌入 $\Psi\colon M \to N$ 是满足以下条件的嵌入：对于每个 $\varphi(\bar{x})$ 和每个适当类型的 $\bar{a}$，都有 $\varphi^M(\bar{a}) = \varphi^N(\Psi(\bar{a}))$。

若 M 是 N 的子代数，且恒等映射是一个初等嵌入，则称 M 是 N 的初等子模型，记作 $M \preceq N$。

M 到其超幂 $M^{\mathscr{U}}$ 的对角嵌入是初等的（Łoś 定理）。若 $M \preceq N$ 且 $N \preceq P$，则 $M \preceq P$。若 $M \preceq P$、$N \preceq P$ 且 $M \subseteq N$，则 $M \preceq N$。然而，$M \preceq P$、$M \preceq N$ 且 $P \subseteq N$，一般并不意味着 $P \preceq N$。

2. 概率测度代数中的可定义性

本节开始证明我们在 §3 中陈述并证明的 Feferman–Vaught 定理。应一位审稿人的要求，我们先给出一些关于可定义性的一般结果。令 $\mathscr{L}_{\mathrm{MBA}}$ 表示 [8] 中的概率测度代数的语言。除布尔运算外，该语言还配有一个表示概率测度的谓词，以及由其导出的度量。因此，若 $(\mathscr{B},\mu)$ 是一个测度代数，则距离由 $d_\mu(A, B) = \mu(A \Delta B)$ 给出，该语言也包含（表示）布尔运算。具体而言，若 $(\mathscr{B},\mu)$ 是一个测度代数，则在 $\mathscr{B}^n$ 上我们考虑最大距离，$d_\mu(\bar{A}\ \bar{B}) = \max_{i<n} \mu(A_i \Delta B_i)$。

下面这个简单事实是引理 2.2 的预备内容，该引理用于定理 3.3 的证明。

引理 2.1. 以下各集合在每个测度代数 $(\mathscr{B},\mu)$ 中都是可定义的。

(1) 集合 $\mathscr{X}_1 = \{(A_1,A_2) \mid A_1 \subseteq A_2\}$. (2) 集合 $\mathscr{X}_2 = \{(A, B,C) \mid A \cap B = C\}$. (3) 对于 $A \in \mathscr{B}$，集合 $\mathscr{X}_A = \{B \in \mathscr{B} \mid B \subseteq A\}$ 可定义，其中 A 是一个参数。

证明. 在每种情形中，我们都需要一个公式来界定某个元素（或相应类型的元组）到所讨论集合的距离（见[5,§9]，更具体地说，见 [5, 定义 9.16]）。

(1) 设 $\varphi(X_1,X_2) = \mu(X_1 \setminus X_2)$。显然，$\mathscr{X}_1$ 是 φ 的零点集。此外，对每个 $\bar{A} \in \mathscr{B}^2$，对 $\bar{B} = (A_1 \cap A_2, A_2)$ 都属于 $\mathscr{X}_1$，且 $d_\mu(\bar{A}\ \bar{B}) = \mu(A_1 \Delta (A_1 \cap A_2)) = \varphi(A_1,A_2)$。

(2) 令 $\psi(X_1,X_2,X_3) = \mu((X_1 \cap X_2) \Delta X_3)$。显然，$\mathscr{X}_2$ 是 ψ 的零点集，即 $\mathscr{X}_2$。此外，对于每个 $\bar{A} \in \mathscr{B}^3$，三元组 $\bar{B} = (A_1,A_2,A_1 \cap A_2)$ 属于 $\mathscr{X}_2$，且 $d_\mu(\bar{A}\ \bar{B}) = \psi(\bar{A})$，如所需。

(3) 由 (1) 得出。 □

如果可定义集的交集也是可定义的，那么下面的引理 2.2 和引理 2.3 就是引理 2.1 的推论。（反例可见于尚未发表的论文 [4] and [14]。）这两个引理中的记号，旨在与定理 3.3 的证明中调用引理 2.3 时所用的自然记号保持一致。

引理 2.2. 设 $\ell \geq 1$ and $\bar{U} = (U_j)_{j<\ell}$ 是测度代数 $(\mathscr{B}, \mu)$ 中的一个元组，且满足 $U_0 \geq U_1 \geq \cdots \geq U_{\ell-1}$。那么集合

$$\mathscr{X}[\bar{U}] = \{\bar{Y} \in \mathscr{B}^\ell \mid Y_j \leq U_j \cap \bigcap_{i<j} Y_i \text{ for } j < \ell\}$$

$\bar{}$是一个以参数 U 为参数的可定义集。

证明。与引理 2.1 一样，只需找到一个公式 $\varphi_{\bar{U}}$，使其零点集为 $\mathscr{X}[\bar{U}]$，并且对每个 $\bar{X} = (X_i : i < \ell)$，从 $\mathscr{B}^\ell$ $\bar{X}$ 到$\mathscr{X}[\bar{U}]$的距离至多为 $\varphi_{\bar{U}}(\bar{X})$。对于满足 $U_0 \geq U_1 \geq \cdots \geq U_{\ell-1}$的 ℓ-元组 $\bar{U}$，令

$$\varphi_{\bar{U}}(\bar{X}) = \max_{1\leq m<\ell}(\mu(X_m \setminus \bigcap_{j<m} X_j) + \mu(X_m \setminus U_m)).$$

显然，$\mathscr{X}[\bar{U}]$是 $\varphi_{\bar{U}}$的零点集。取 ℓ中的一个 ℓ-元组 $\bar{X}$。令

$$Y_m = \bigcap_{j\leq m} X_j \cap U_m \text{ for } 1 \leq m < \ell.$$

那么，对所有 $1 \leq m < \ell$，都有 $Y_m \subseteq \bigcap_{j<m} Y_j \cap U_m$，因此 $\bar{Y} \in \mathscr{X}[\bar{U}]$。

为了估计 $d_\mu(\bar{X}\ \bar{Y})$，注意到由于 $Y_m \Delta X_m \subseteq (X_m \setminus \bigcap_{j<m} X_j) \cup (X_m \setminus U_m)$，我们也有 $d_\mu(X_m, Y_m) \leq \varphi_{\bar{U}}(\bar{X})$，如所需。□

一点自然的（尽管稍显繁琐）记法会很有帮助。假设 $\mathbb{F}$ 是一个有限集，$\ell(\zeta) \geq 1$ 对 $\zeta \in \mathbb{F}$成立，并且我们有

$$\bar{U} = (U_j^\zeta)_{\zeta\in\mathbb{F}, j<\ell(\zeta)}.$$

那么，我们将 $\bar{U}^\zeta = (U^\zeta{}_j)_{j<\ell(\zeta)}$记作$\zeta \in \mathbb{F}$。

如上所述，可定义集的交集不一定是可定义的。不过，在下面的引理中，我们讨论的是可定义集的乘积，而非交集。

引理 2.3. 假设 $\mathbb{F}$是一个有限集，且 $\bar{U}^\zeta = (U^\zeta{}_j)_{j<\ell(\zeta)}$，对 $\zeta \in \mathbb{F}$成立；并且 $\ell(\zeta) \geq 1$是测度代数$(\mathscr{B}, \mu)$中的一个元组，满足 $U_0^\zeta \geq U_1^\zeta \geq \cdots \geq U_{\ell(\zeta)-1}^\zeta$。那么集合

$$\mathscr{Y}[\bar{U}] = \{Y_j^\zeta \mid \zeta \in \mathbb{F}, j < \ell(\zeta), \text{ and } (Y_j^\zeta)_{j<\ell(\zeta)} \in \mathscr{X}[\bar{U}^\zeta]\}$$

是由参数 $\bar{U} = (\bar{U}^\zeta)_{\zeta\in\mathbb{F}}$可定义的。

证明。与引理 2.2 的证明中一样，令 $\psi_{\bar{U}}(\bar{X}) = \max_{\zeta\in\mathbb{F}} \varphi_{\bar{U}^\zeta}(\bar{X}^\zeta)$。由于不同 $\zeta \in \mathbb{F}$ 对应的 $\bar{Y}^\zeta$ 之间没有相互作用，并且对所有 $\zeta \in \mathbb{F}\}$，$\mathscr{Y}[\bar{U}]$ 都等于 $\{\bar{Y} \mid \bar{Y}^\zeta \in \mathscr{X}[\bar{U}^\zeta]$，$\psi_{\bar{U}}$ 证明了 $\mathscr{Y}[\bar{U}]$ 可定义，正如所需。□

3. 直积分的 FEFERMAN–VAUGHT 型定理

在本节中，我们固定一个任意的度量语言 $\mathscr{L}$，并令 $\mathscr{L}_{\mathrm{MBA}}$ 为 §2 中研究的概率测度代数的语言。

定义 3.1. 若一个含 m 个变量的 $\mathscr{L}_{\mathrm{MBA}}$-公式 G($\bar{}$X) 中， $\bar{}$X $=\langle$X1, . . . X$_m\rangle$ 满足以下条件，则称其为逐坐标递增的：对于每个测度代数 $(\mathscr{B},\mu)$ 以及其中任意一对 m 元组 $\bar{}$A $=\langle A_i\rangle$ 和 $\bar{}$A′ $=\langle A_i'\rangle$，若对所有 i $\le$ m 都有 $A_i \le A_i'$，则 $G^{(\mathscr{B},\mu)}(\bar{}$A) $\le G^{(\mathscr{B},\mu)}(\bar{}$A′)。

定义 3.2 和定理 3.3 针对值域包含于 $[0,1]$ 的 $\mathscr{L}$-公式陈述。由于每个 $\mathscr{L}$-公式 φ($\bar{}$x) 的值域都是有界区间，因此对于适当选取的实数 r 和 t，r(φ($\bar{}$x) –t) 的值域为 $[0,1]$；这一假设不会限制定理的适用性。特别是，定理 3.3 的结论对带迹 von Neumann 代数也成立。

给定一个概率空间 $(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 和一个可测场 Mω，对于 ω $\in\Omega$，由 $\mathscr{L}$-结构组成，对于一个 $\mathscr{L}$-公式 φ $\in \mathfrak{F}^x$， $\bar{}$一个属于适当类型的 a，以及 t $\in[0,1]$，我们定义

$$Z_t^{\zeta}[\bar{a}] = \{\omega\in\Omega : \zeta(\bar{a}_\omega)^{M_\omega} > t\}. \tag{3.1}$$

定义 3.2. 一个 $\mathscr{L}$-公式 φ($\bar{}$x)，其值域包含于 $[0,1]$，若满足以下对象存在，则称其在 $\mathscr{L}$-结构的直积分中可确定。

(D.1) 一个有限集 $\mathbb{F}[\varphi]$，由 $\mathscr{L}$-公式组成，这些公式的自由变量包含于 φ($\bar{}$x) 的自由变量中，且其值域包含于 $[0,1]$。(D.2) 对每个 k ≥ 2，存在一个整数 l(kφ,ζ) ≥ 1，以及一个坐标逐点递增的 $\mathscr{L}_{\mathrm{MBA}}$-公式 G$_{\varphi,\ k}$($\bar{}$X)，其中有 $\sum_{\zeta\in\mathbb{F}[\varphi]} l(k\varphi,\zeta)$ 个变量 X$^{\zeta}{}_{i/l(k\ \varphi,\zeta)}$，对于 ζ $\in\mathbb{F}[\varphi]$ 以及 i $<$l(k φ,ζ)。

要求这些对象满足以下条件：对于每个概率空间（$\Omega,\mathscr{B},\mu$）和由 $\mathscr{L}$-结构构成的可测场 Mω（其中 ω $\in\Omega$），以及适当类型的 $\bar{}$a，以下条件均成立。（记作 M $=\int_\Omega^{\oplus} M_\omega d\mu(\omega)$。）

(D.3) $\varphi(\bar{a})^M > t/k$ implies

$$G_{\varphi,k}(Z^{\zeta}_{i/l(k,\varphi,\zeta)}[\bar{a}]; i < l(k,\varphi,\zeta), \zeta\in\mathbb{F}[\varphi]) > (t-1)/k.$$

(D.4) $G_{\varphi,k}(Z^{\zeta}_{i/l(k,\varphi,\zeta)}[\bar{a}]; i < l(k,\varphi,\zeta), \zeta\in\mathbb{F}[\varphi]) > t/k$ implies

$$\varphi(\bar{a})^M > (t-1)/k.$$

类似地，如果 (D.1) 成立，且 (D.2)—(D.4) 对某个特定的 k 成立，我们就称 φ是 k-确定的。

特别地，定义 3.2 断言， $\varphi(\bar{a})$ 的值在 $2/k$ 的精度内由 $G_{\varphi,k}$ 的值决定；而后者又由有限集 $\mathbb{F}[\varphi]$ 中公式 ζ 的求值分布决定，其精度约为 $1/l(k\varphi,\zeta)$，且是在可测场 M_ω 中。

在所有 $\mathscr{L}$-公式的集合上，考虑自然的一致度量，

$$d(\varphi(\bar{x}),\psi(\bar{x})) = \sup|\varphi^M(\bar{a}) - \psi^M(\bar{a})|,$$

其中上确界取遍所有 $\mathscr{L}$-结构 M 以及 M 中所有适当类型的元组 $\bar{a}$。

定理 3.3. 对于每一种度量语言 $\mathscr{L}$，所有确定公式在所有 $\mathscr{L}$-公式的集合中稠密。

证明。证明按 φ 的复杂度归纳，同时对所有 $k \geq 2$ 进行。由证明可知，集合 $\mathbb{F}[\varphi]$ 不依赖于 k 的选择。它本质上是 φ 的所有子公式的集合。

根据 [5, 命题 6.6], ，任何包含原子公式并且对乘以 $1/2$、运算 $\varphi \dot{-} \psi = \max(0, \varphi - \psi)$ 以及量词 inf 和 sup 封闭的 $\mathscr{L}$-公式集合，在所有 $\mathscr{L}$-公式的集合中稠密。因此，只需证明所有 k-确定公式的集合满足以下闭包性质：

(1) 所有原子公式都是 k-确定的。(2) 如果 φ 是 k-确定的，那么 $\frac{1}{2}\varphi$ 也是。(3) 如果 φ 和 ψ 是 $3k$-确定的，那么 $\varphi \dot{-} \psi$ 是 k-确定的。(4) 如果 φ 是 k-确定的，那么对每个变量 x，$\sup_x \varphi$ 和 $\inf_x \varphi$ 也都是 k-确定的。

为使下面的证明更易读，我们对所有 $k \geq 2$ 同时按 φ 的复杂度进行归纳，将 $\mathbb{F}[\varphi]$、针对 $\zeta \in \mathbb{F}[\varphi]$ 的 $l(k, \varphi, \zeta)$ 和 $G_{\varphi,k}$ 的递归构造，与证明这些对象对于任意概率空间 $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$、可测的 $\mathscr{L}$-结构族 $(M_\omega)_{\omega\in\Omega}$ 及其直积分都具有所需性质结合起来

$$M = \int_\Omega^\oplus M_\omega \, d\mu(\omega)$$

(不言而喻，所构造的对象不会取决于测度空间或可测族的选择。)

(1) 假设 $\varphi(\bar{x})$ 是原子的或常数（即标量），且 $\bar{a} \in M$ 的类型恰当。令 $\mathbb{F}[\varphi] = \{\varphi\}$，$l(k, \varphi) = k$，并定义

$$G_{\varphi,k}(\bar{X}) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k-1} \mu(X_i).$$

显然，这个公式是逐坐标递增的。那么对于 $0 \leq i < k$,

$$Z^\varphi_{i/k}[\bar{a}] = \{\omega \in \Omega \mid \varphi(\bar{a}_\omega)^{M_\omega} > i/k\}$$

我们有（为简便起见，记 $\bar{Z}^{\varphi}=(Z_0^{\varphi}[\bar{a}],\ldots,Z^{\varphi}{}_{(k-1)/k}[\bar{a}])$ 。由非负函数积分的层蛋糕分解公式，我们得到如下结果。

$$G_{\varphi,k}(\bar{Z}^{\varphi})\le\int_{\Omega}\varphi(\bar{a}_{\omega})^{M_{\omega}}\,d\mu(\omega)\le\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\mu(Z_{i/k}^{\varphi}[\bar{a}])\le G_{\varphi,k}(\bar{Z}^{\varphi})+\frac{1}{k}.$$

因此，条件 (D.3) 和 (D.4) 显然成立。

(2) 假设 $\varphi(\bar{x})=\frac{1}{2}\psi(\bar{x})$ 且 ψ 是 k-确定的。令 $\mathbb{F}[\varphi]=\mathbb{F}[\psi]$, $l(k\varphi,\zeta)=l(k\ \psi,\zeta)$（我们本可以取 $l(k\ \varphi,\zeta)$ 为 $\lceil l(k\ \psi,\zeta)/2\rceil$，但没有必要节省），并定义

$$G_{\varphi,k}(\bar{X})=\frac{1}{2}G_{\psi,k}(\bar{X}).$$

根据定义，这些对象满足要求。

(3) 假设 $\varphi=\psi\dot{-}\eta$，且 ψ 和 η 中的每一个都是 3k-确定的。为了证明 φ 是 k-确定的，令

$$\mathbb{F}[\varphi]=\mathbb{F}[\psi]\cup\{1-\zeta:\zeta\in\mathbb{F}[\eta]\}.$$

(如果 $\zeta\in\mathbb{F}[\eta]$，那么其值域包含在 $[0,1]$, 中，因此 $1-\zeta$ 的值域也包含在 $[0,1]$ 中。) 此外，对 $\zeta\in\mathbb{F}[\psi]$，令 $l(k\ \varphi,\zeta)=l(3k\ \psi,\zeta)$；对 $\zeta\in\mathbb{F}[\eta]$，令 $l(k\varphi,1-\zeta)=l(3k\ \eta,\zeta)$。为了定义 $G_{\varphi,\ k}$，我们还需要引入一个记号。

对于 $\zeta\in\mathbb{F}[\eta]$ 和 $s\in[0,1]$，令（为便于阅读，记 $\ell=l(3k\ \eta,\zeta)$

$$\widetilde{Z}_s^{1-\zeta}=\{\omega\in\Omega:\ 1-\zeta(\bar{a}_{\omega})^{M}\ge s\}.$$

对于元组 $\bar{Z}^{1-\zeta}=(Z_0^{1-\zeta},\ldots,Z_{\underline{\ell-1}}^{1-\zeta})$，令$\ell$

$$\overleftarrow{Z}^{1-\zeta}=(\widetilde{Z}_{\frac{\ell-1}{\ell}}^{1-\zeta},\ldots,\widetilde{Z}_0^{1-\zeta}).$$

首先请注意，对于每个 $0\le i\le\ell$ 和 $\zeta\in\mathbb{F}[\eta]$，都有（$Y^{\complement}$ 表示 Y 的补集；若 Y 是一个元组，则逐点应用）

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{Z}_{(\ell-i)/\ell}^{1-\zeta}[\bar{a}]\right)^{\complement}&=\left\{\omega\in\Omega:\ \left(1-\zeta(\bar{a}_{\omega})\right)^{M_{\omega}}\ge\frac{\ell-i}{\ell}\right\}^{\complement}\\&=\left\{\omega\in\Omega:\ \zeta(\bar{a}_{\omega})^{M_{\omega}}\le\frac{i}{\ell}\right\}^{\complement}\\&=\{\omega\in\Omega:\ \zeta(\bar{a}_{\omega})^{M_{\omega}}>\frac{i}{\ell}\}=Z_{i/\ell}^{\zeta}[\bar{a}].\end{aligned}$$

这表明 $(\longleftarrow Z^{1-\zeta})^{\complement} = {}^{-}Z^{\zeta}$。定义 [2]

$$G_{\varphi,k}\big(\bar{Z}^{\xi},\bar{Z}^{1-\zeta};\xi\in\mathbb{F}[\psi],\zeta\in\mathbb{F}[\eta]\big)$$
$$= G_{\psi,3k}(\bar{Z}^{\xi},\xi\in\mathbb{F}[\psi])\dot{-}G_{\eta,3k}((\overleftarrow{Z}^{1-\zeta})^{\complement},\zeta\in\mathbb{F}[\eta]).$$

于是，$G_{\varphi,k}$ 是逐坐标递增的，因为 $G_{\psi,3k}$和 $G_{\eta,3k}$也具有这一性质。

断言 3.4. 公式 $G_{\varphi,k}$ 满足定义 3.2 的 (D.3) 和 (D.4)。

证明. 假设 $\varphi^{M}({}^{-}a) > t/k$，对于 $M = \int_{\Omega}^{\oplus} M\omega d\mu(\omega)$ 以及 M 中适当类型的 ${}^{-}a$。存在 $m < 3(k-t)$，使得

- $\psi({}^{-}a)M > (3t+m)/3k$，并且
- $\eta({}^{-}a)M \le (m+1)/3k$.

根据归纳假设，

(IH1) $G_{\psi,3k}({}^{-}Z^{\xi};\ \xi\in\mathbb{F}[\psi]) > \frac{3t+m-1}{3k}$，

以及 (IH2) $G_{\eta,3k}({}^{-}Z^{\zeta};\ \zeta\in\mathbb{F}[\eta]) \le \frac{m+2}{3k}$。

由 (IH1) 和 (IH2)，可得

$$\begin{aligned}
&G_{\varphi,k}\big(\bar{Z}^{\xi},\bar{Z}^{1-\zeta};\xi\in\mathbb{F}[\psi],\zeta\in\mathbb{F}[\eta]\big)\\
&\qquad = G_{\psi,3k}(\bar{Z}^{\xi};\xi\in\mathbb{F}[\psi])\dot{-}G_{\eta,3k}((\overleftarrow{Z^{1-\xi}})^{\complement};\zeta\in\mathbb{F}[\eta])\\
&\qquad \ge G_{\psi,3k}(\bar{Z}^{\xi};\xi\in\mathbb{F}[\psi])\dot{-}G_{\eta,3k}(\bar{Z}^{\zeta};\zeta\in\mathbb{F}[\eta])\\
&\qquad > \frac{3t+m-1}{3k}-\frac{m+2}{3k}=\frac{t-1}{k}.
\end{aligned}$$

这就完成了 (D.3) 的证明。

为证明 (D.4)，假设 $G_{\varphi,k}\big({}^{-}Z^{\xi},{}^{-}Z^{1-\zeta};\xi\in\mathbb{F}[\psi],\zeta\in\mathbb{F}[\eta]\big) > t/k$。则根据 $G_{\varphi,k}$ 的定义，对于某个 $m < 3(k-t)$，有

- $G_{\psi,3k}(\bar{Z}^{\xi};\xi\in\mathbb{F}[\psi]) > \frac{3t+m}{3k}$, and
- $G_{\eta,3k}(\bar{Z}^{\zeta};\zeta\in\mathbb{F}[\eta]) \le \frac{m+1}{3k}$.

根据归纳假设，这意味着

(IH3) $\psi(\bar{a})^{M} > \frac{3t+m-1}{3k}$, and

(IH4) $\eta(\bar{a})^{M} \le \frac{m+2}{3k}$.

条件 (IH3) 和 (IH4) 立即推出 $\varphi({}^{-}a)^{M} > (t-1)/k$，从而完成证明。□

[2]为简便起见，我们不将 $G_{\varphi,k}$ 表示为关于一个含有 ${}^{-}X$ 个抽象变量的元组的公式，而是根据这些变量预期的取值来表示。请注意，由于 $(\overleftarrow{Z}^{1-\zeta})^{\complement}$ 由 ${}^{-}Z^{1-\zeta}$ 中集合的补集组成，$G_{\varphi,k}$ 取决于变量的正确选择，${}^{-}Z^{\zeta}$ for$\zeta\in\mathbb{F}[\varphi]$。

(4) 假设 $\varphi(\bar{x}) = \sup_y \Psi(\bar{x}, y)$ 且 ψ 是 k-确定的。令

$$\mathscr{R}[\zeta] = \{i/l(k,\psi,\zeta) \mid i < l(k,\psi,\zeta)\}, \quad \text{for } \zeta \in \mathbb{F}[\psi],$$
$$\mathscr{C} = \{\alpha \mid \text{there is a nonempty } \mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}[\psi] \text{ such that } \alpha \in \prod_{\zeta\in\mathbb{F}} \mathscr{R}[\zeta]\}.$$

可以将 $\alpha \in \mathscr{C}$ 视为从 $\mathbb{F}$ 到 $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ 的函数。之所以要指定 $\alpha(\zeta) \in \mathscr{R}[\zeta]$，是因为每个 $\mathscr{R}[\zeta]$ 都是有限的，所以集合 $\mathscr{C}$ 也是有限的。

对于 $\alpha \in \mathscr{C}$，定义 $\mathscr{L}$-公式

$$\xi_\alpha(\bar{x}) = \sup_y \min_{\zeta\in\mathrm{dom}(\alpha)} (\zeta(\bar{x},y) - \alpha(\zeta)). \tag{3.2}$$

于是，对于每个 $\alpha \in \mathscr{C}$，以及 $\bar{M}$ 中的 $\bar{a}$，我们有

$$\begin{aligned} Z_0^{\xi_\alpha}[\bar{a}] &= \{\omega \mid \xi_\alpha(\bar{a}_\omega)^{M_\omega} > 0\} \\ &= \{\omega \mid \sup_{y\in M_\omega} \min_{\zeta\in\mathrm{dom}(\alpha)}((\zeta(\bar{a},y) - \alpha(\zeta)) > 0\} \\ &\subseteq \bigcap_{\zeta\in\mathrm{dom}(\alpha)} \{\omega \mid \sup_{y\in M_\omega} \zeta(\bar{a},y) > \alpha(\zeta)\} \\ &= \bigcap_{\zeta\in\mathrm{dom}(\alpha)} Z_{\alpha(\zeta)}^{\xi_\zeta}[\bar{a}] \end{aligned}$$

Let

$$\mathbb{F}[\varphi] = \{\xi_\alpha \mid \alpha \in \mathscr{C}\},$$
$$l(k,\xi_\alpha,\varphi) = \max\{l(k,\zeta,\psi) \mid \zeta \in \mathrm{dom}(\alpha)\}, \quad \text{for } k \geq 2 \text{ and } \alpha \in \mathscr{C}.$$

为简化记号，只要不会引起歧义，我们将 $Z_0^{\xi_\alpha}[\bar{a}]$ 记作 $Z_0^{\xi_\alpha}$，更一般地，将 $Z_r^{\eta}[\bar{a}]$ 记作 Z_r^{η}。此外，引入一个缩写也会很有帮助，并对 $\zeta \in \mathbb{F}[\psi]$ 写作：

$$\ell(\zeta) = l(k,\psi,\zeta).$$

在定义 $\mathscr{L}_{\mathrm{MBA}}$-公式 $G_{\varphi,k}$ 之前，我们注意到，$G_{\psi,k}$ 中出现的每个变量都具有 $Z^{\zeta}{}_{i/\ell(\zeta)}$ 的形式，其中 $\zeta \in \mathbb{F}[\psi]$ 且 $i < \ell(\zeta)$。令

$$\bar{Z} = (Z_0^{\xi_\alpha} \mid \alpha \in \mathscr{C}). \tag{3.3}$$

断言 3.5。采用上一段中的记号，所有满足条件的 $\bar{Y} = (Y^{\zeta}{}_i \mid i < \ell(\zeta),\ \zeta \in \mathbb{F}[\psi])$ 所构成的集合 $\mathscr{Y}[\bar{Z}]$

(θ.1) 对所有满足 $\zeta \in \mathrm{dom}(\alpha)$ 且 $\alpha(\zeta) = i < \ell(\zeta)$ 的 $\alpha \in \mathscr{C}$，$Y^{\zeta}{}_i \subseteq Z_0^{\xi_\alpha}$。(θ.2) 若 $i \geq 1$，则 $Y^{\zeta}{}_i \subseteq Y^{\zeta}{}_{i-1}$。

$\bar{Z}$ 如（3.3）所示，可用参数 $\bar{Z}$ 定义。

证明。对于 $m < \ell(\zeta)$，令

$$U^\zeta_m = \bigcap \{Z^{\xi\alpha}_0 \mid \alpha \in \mathscr{C}, \zeta \in \mathrm{dom}(\alpha), \alpha(\zeta) \leq \frac{m}{\ell(\zeta)}\}.$$

那么，对于每个 ζ，$U^\zeta_0 \supseteq U^\zeta_1 \supseteq \cdots \supseteq U^\zeta_{\ell(\zeta)-1}$。令

$$\mathscr{X}[\bar{U}^\zeta] = \{\bar{Y}^\zeta \in \mathscr{B}^{\ell(\zeta)} \mid Y^\zeta_j \leq U^\zeta_j \cap \bigcap_{i<j} Y^\zeta_i \text{ for } j < \ell(\zeta)\}.$$

那么，$\mathscr{Y}[\bar{U}] = \{Y^\zeta_j \mid \zeta \in \mathbb{F}[\psi], j < \ell(\zeta)$，以及 $(Y^\zeta_j)_{j<\ell(\zeta)} \in \mathscr{X}[\bar{U}^\zeta]\}$（如引理 2.3 中所考虑的）是可定义的。此集合等于 $\mathscr{Y}[\bar{Z}]$，并且可用参数 Z 定义。□

因此，下面定义的 $G_{\varphi,k}$ 是一个公式（在右侧的 $G_{\psi,k}$ 中，对所有 $\zeta \in \mathbb{F}[\psi]$ 和 $i < \ell(\zeta)$，变量 $Z^\zeta_{i/l(\zeta)}$ 均替换为 Y^ζ_i）：

$$G_{\varphi,k}(\bar{Z}^\xi : \xi \in \mathbb{F}[\varphi]) = \sup_{\bar{Y} \in \mathscr{Y}[\bar{Z}]} G_{\psi,k}(Y^\zeta_i; \zeta \in \mathbb{F}[\psi], i < l(\zeta)).$$

显然，$G_{\varphi,k}$ 是逐坐标递增的，因为 $G_{\psi,k}$ 具有这一性质，而且集合 $\mathscr{Y}[\bar{Z}]$ 关于 $\bar{Z}$ 也是递增的（即，如果 $\bar{Z} \leq \bar{Z}'$，则 $\mathscr{Y}[\bar{Z}] \subseteq \mathscr{Y}[\bar{Z}']$）。尚需证明 $G_{\varphi,k}$ 满足定义 3.2 的要求。

为证明 (D.3)，假设 $\varphi(\bar{a})^M > t/k$，对于 $M = \int^\oplus_\Omega M_\omega d\mu(\omega)$，且 $\bar{a}$ 属于 M，具有适当的类型。取 $b \in M$，使得 $\psi(\bar{a}, b)^M > t/k$。于是，根据归纳假设

$$G_{\psi,k}\big(\bar{Z}^\zeta[\bar{a}, b]; \zeta \in \mathbb{F}[\psi]\big) > \frac{t-1}{\ell(k)}. \tag{3.4}$$

对于 $\zeta \in \mathbb{F}[\psi]$ and $i < \ell(\zeta)$，令

$$Y^\zeta_i = Z^\zeta_{i/l(\zeta)}[\bar{a}, b].$$

我们断言，以这种方式定义的 $\bar{Y}$ 属于断言 3.5 中的集合 $\mathscr{Y}[\bar{Z}]$。条件 (θ.2) 显然成立，而条件 (θ.1) 也成立，因为对于所有 $\zeta \in \mathbb{F}[\psi]$ 和 $i < l(\zeta)$，我们有

$$\begin{aligned} Y^\zeta_i &= \{\omega \in \Omega\} \mid \zeta(\bar{a}_\omega, b_\omega)^{M_\omega} > i/\ell(\zeta)\} \\ &\subseteq \bigcap_{\substack{\alpha \in \mathscr{C}, \zeta \in \mathrm{dom}(\alpha), \\ \alpha(\zeta) \leq i/\ell(\zeta)}} \{\omega \in \Omega \mid \sup_{y \in M_\omega} \min_{\zeta \in \mathrm{dom}(\alpha)} \eta(\bar{a}_\omega, y)^{M_\omega} - \alpha(\zeta) > 0\} \\ &= \bigcap_{\substack{\alpha \in \mathscr{C}, \zeta \in \mathrm{dom}(\alpha), \\ \alpha(\zeta) \leq i/\ell(\zeta)}} Z^{\xi\alpha}_0. \end{aligned}$$

由 (3.4) 可得

$$G_{\varphi,k}\big(\bar{Z}^{\xi};\xi\in\mathbb{F}[\varphi]\big)\geq G_{\psi,k}(Y_i^{\zeta};\zeta\in\mathbb{F}[\psi],i<\ell(\zeta))>\frac{t-1}{\ell(k)}.$$

这就完成了（D.3）的证明。

为证明（D.4），假设 $G_{\varphi,k}\big(\bar{Z}^{\xi_\zeta}[\bar{a}];\zeta\in\mathbb{F}[\psi]\big)>t/k$。于是存在可测集（同前，为便于阅读省略了 $\bar{a}$）$Y^{\zeta}{}_i$，满足 $\zeta\in\mathbb{F}[\psi]$and i $<\ell(\zeta)$、（θ.1）和（θ.2），使得

$$G_{\psi,k}(Y_i^{\zeta};\zeta\in\mathbb{F}[\psi],i<\ell(\zeta))>\frac{t}{k}. \tag{3.5}$$

对每个 $\omega\in\Omega$，令

$$D_\omega=\{\zeta\in\mathbb{F}[\psi]:\omega\in Y_0^{\zeta}\}.$$

定义 $\mathrm{dom}(\alpha_\omega)=D_\omega$ 上的 $\alpha_\omega\in\mathscr{C}$，如下:

$$\alpha_\omega(\zeta)=\max\{i/\ell(\zeta):\omega\in Y_i^{\zeta}\}. \tag{3.6}$$

若 $D_\omega\neq/0$，则 $\omega\in\bigcap_{\zeta\in D_\omega}Y^{\zeta}_{\alpha_\omega(\zeta)}$，且（θ.1）蕴含 $Y^{\zeta}_{\alpha_\omega(\zeta)}\subseteq Z_0^{\xi_{\alpha_\omega}}$ 对每个$\zeta\in\mathrm{dom}(\alpha_\omega)$均成立，因此 $\bigcap_{\zeta\in D_\omega}Y^{\zeta}_{\alpha_\omega(\zeta)}\subseteq Z_0^{\xi_{\alpha_\omega}}$ 且 $\omega\in Z_0^{\xi_{\alpha_\omega}}$。因此，

$$\sup_y\min_{\zeta\in D_\omega}\zeta(\bar{a}_\omega,y)>\alpha_\omega(\zeta).$$

回顾定义 1.1，所有针对 $\omega\in\Omega$ 的 M_ω 都是可分的，并且针对 $n\in\mathbb{N}$ 的 e_n 枚举了 M 的一个子集，使得针对 $n\in\mathbb{N}$，$e_n(\omega)$ 构成每个 $\omega\in\Omega$ 对应的 M_ω 的稠密子集。因此，若 $D_\omega\neq/0$，则存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得

$$\min_{\zeta\in D_\omega}\zeta^{M_\omega}(\bar{a}_\omega,e_n(\omega))>\alpha_\omega(\zeta).$$

令 n(ω) 为具有此性质的最小 n。对于每个 $n\in\mathbb{N}$，令

$$\Omega_n=\{\omega\in\Omega\mid n(\omega)=n\}$$

并且 $\Omega_\infty=\{\omega\in\Omega\mid D_\omega=\emptyset\}$。注意，$\Omega_\infty=\Omega\setminus\bigcup_{\zeta\in\mathbb{F}[\psi]}Y^{\zeta}_0$。因此，$\{\Omega_n\mid n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}\}$ 是 Ω 划分为可测集的一个划分。定义在 Ω 上的函数 b 为

$$b_\omega=\begin{cases}e_n(\omega) & \text{if } \omega\in\Omega_n\\ e_0(\omega) & \text{if } \omega\in\Omega_\infty\end{cases}$$

是一个可测元素场，因此它定义了 M 的一个元素。根据 n(ω) 的选取，若 $D_\omega\neq/0$，则

$$\min_{\zeta\in D_\omega}\zeta(\bar{a}_\omega,b_\omega)^{M_\omega}>\alpha_\omega(\zeta). \tag{3.7}$$

断言 3.6. 对所有 $\zeta\in\mathbb{F}[\psi]$ 和 $i<\ell(\zeta)$，我们有 $Y^{\zeta}i\subseteq Z^{\zeta}i_{/\ell(\zeta)}[\bar{a},b]$。

证明. 假设 $\omega \in Y^{\zeta}{}_{i}$。那么，由 (3.6) 可得 $i/\ell(\zeta) \leq \alpha_\omega(\zeta)$。根据 b 的选取，

$$\zeta(\bar{a}_\omega, b_\omega)^{M_\omega} > \alpha_\omega(\zeta) \geq \frac{i}{\ell(\zeta)},$$

也就是说，$\omega \in Z^{\zeta}{}_{i/\ell(\zeta)}[\bar{}a, b]$。 □

由于 $G_{\psi,k}$ 是逐坐标递增公式，断言 3.6 和 (3.5) 蕴含

$$G_{\psi,k}\big(\bar{Z}^{\zeta}[\bar{a}, b]; \zeta \in \mathbb{F}[\psi]\big) > \frac{t}{k}.$$

归纳假设蕴含 $\psi(\bar{}a, b)^M > (t-1)/k$，因此$\varphi(\bar{}a)^M > (t-1)/k$，正如所需。

由于 $\inf_y \psi(\bar{}x, y) = 1 - \sup_y(1 - \psi(\bar{}x, y))$，当对于某个满足归纳假设的 ψ，有 $\varphi(\bar{}x) = \inf_y \psi(\bar{}x, y)$ 时，该情形可由前一种情形推出。至此，按 φ 的复杂度归纳的证明完成。□

定理 3.3（或一般而言，Feferman-Vaught 类型定理）之所以“有效”，是因为正如证明所示，定义 3.2 中的对象 (D.1)—(D.2) 可以仅根据 φ 的句法递归地构造出来。为了陈述推论 3.8，我们需要给出一个定义。

定义 3.7（度量结构的可测场与直积分）。设 $\mathscr{L}$ 是连续语言，$(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 是可分概率测度空间，(N_ω, d_ω)（$\omega \in \Omega$）是可分的 $\mathscr{L}$-结构，并且对于一个全测度集 ω，M_ω 是 N_ω 的子结构。假设 e_n（$n \in \mathbb{N}$）是 $\prod_{\omega\in\Omega} N_\omega$ 中的一个序列，且满足以下两个条件。

(1) 对每个 ω，集合 $\{e_{2n}(\omega) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 在 M_ω 中稠密，而集合 $\{e_n(\omega) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 在 N_ω 中稠密。(2) 对于 $\mathscr{L}$ 中的每个谓词 $R(\bar{}x)$，以及每个适当类型的元组 $e_{2\bar{}n} = \langle e_{2n(0)}, \ldots, e_{2n(j-1)}\rangle$，函数 $\omega \mapsto R^{M_\omega}(e_{2\bar{n}}(\omega))$ 都是可测的。(3) 对于 $\mathscr{L}$ 中的每个谓词 $R(\bar{}x)$，以及每个适当类型的元组 $e_{\bar{n}} = \langle e_{n(0)}, \ldots, e_{n(j-1)}\rangle$，函数 $\omega \mapsto R^{N_\omega}(e_{\bar{}n}(\omega))$ 都是可测的。

与定义 1.1 中一样，结构 N_ω 与函数 e_n 共同构成一个 $\mathscr{L}$-结构的可测场，而结构 M_ω 构成此可测场的一个可测子场。

推论 3.8. 假设 $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 是一个可分测度空间，且 M_ω和 N_ω是同一语言的可测结构场，对所有$\omega \in \Omega$均成立。

若对几乎所有 ω，$M_\omega \equiv N_\omega$，则

$$\int_\Omega^\oplus M_\omega \, d\mu(\omega) \equiv \int_\Omega^\oplus N_\omega \, d\mu(\omega).$$

若 M_ω 对于 $\omega \in \Omega$ 是 N_ω 的一个可测子域，且对于 $\omega \in \Omega$，此外 $M_\omega \preceq N_\omega$ 对几乎所有 ω 都成立，那么

$$\int_\Omega^\oplus M_\omega \, d\mu(\omega) \preceq \int_\Omega^\oplus N_\omega \, d\mu(\omega).$$

证明。我们证明第二部分。固定一个公式 $\varphi(\bar{x})$ 和 $k \geq 2$。根据定理 3.3，它可以一致地近似为一个由确定的公式。因此，不失一般性，我们假设 $\varphi(\bar{x})$ 是确定的。令

$$M = \int_\Omega^\oplus M_\omega \, d\mu(\omega) \text{ and } N = \int_\Omega^\oplus N_\omega \, d\mu(\omega).$$

对于 M 中适当类型的每个 $\bar{a}$ 以及每个公式 $\zeta(\bar{x}) \in \mathbb{F}[\varphi]$，满足 $\zeta(\bar{a}_\omega)^{N_\omega} = \zeta(\bar{a}_\omega)^{M_\omega}$ 的 ω 的集合具有全测度。也就是说，在结构 M 和 N 中，对定义 3.2 中的形式 $Z_r^\zeta[\bar{a}]$，求值所得的集合相同。因此 $|\varphi(\bar{a})^N - \varphi(\bar{a})^M| < 2/k$；由于 k 是任意的，可得 $\varphi(\bar{a})^N = \varphi(\bar{a})^M$。既然 φ 和 $\bar{a}$ 都是任意的，$N_\omega \preceq M_\omega$。

第一部分的证明是类似的。 □

正如 Ita¨ı Ben Ya'acov 所指出的，推论 3.8 可以通过消去无原子随机化中的量词来证明，证明见 [7]。此结果仅适用于无原子测度空间，但在这种情况下结论甚至略强，因为它表明这些直积分作为随机化结构也是初等等价的。

推论 3.8 的一个特殊情形是，直积分的所有纤维都是同一个带迹 von Neumann 代数，由此得到以下推论。

推论 3.9. 设 M 和 N 是初等等价的迹冯·诺伊曼代数，且 $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 是一个可分测度空间。那么

$$M \bar{\otimes} L^\infty(\Omega, \mu) \equiv N \bar{\otimes} L^\infty(\Omega, \mu).$$

如果 $M \preceq N$，那么

$$M \bar{\otimes} L^\infty(\Omega, \mu) \preceq N \bar{\otimes} L^\infty(\Omega, \mu).$$

4. 迹冯·诺伊曼代数的应用

本节在讨论一个技术问题后，证明定理 1。

4.1. 带迹 von Neumann 代数的两种语言。带迹 von Neumann 代数配备有一个指定迹态 τ，为使记号简洁，通常将其省略。[3] 在文献中，通常是相对于 $\|\cdot\|_2$-范数来考察带迹 von Neumann 代数的，

$$\|a\|_2 = \tau(a^*a)^{1/2},$$

但在 [6, §29] 中，为方便起见，它们是相对于 $\|\cdot\|_1$范数来考虑的，

$$\|a\|_1 = \tau((a^*a)^{1/2}).$$

我们将相应的语言分别记为 $\mathscr{L}_{\|\cdot\|_2}$ 和 $\mathscr{L}_{\|\cdot\|_1}$。由于连续逻辑的句法要求每个函数符号都配备一个一致连续模，这两种语言之间的差异不仅仅是记号上的差异。根据 [6, 引理 29.1], ，在算子范数有界球上，$\|\cdot\|_1$-范数与强算子拓扑相容（因此等价于 $\|\cdot\|_2$-范数）。因此，在连续逻辑中描述带迹 von Neumann 代数时，我们有两种相互竞争的语言，以及两种相互竞争的公理化方式（标准方式和 [6, 命题 29.4]中的方式）。为便于后续讨论，对于 $j = 1$，2，我们将采用 $\|\cdot\|_j$-范数的公理化方式（公式、可定义谓词等）称为 j-公理化方式（j-公式、j-可定义谓词等）。

引理 4.1。(1) 迹态是 $J = 1,2$ 的一个 j-可定义谓词。

(2) 范数 $\|\cdot\|_2$ 是一个 1-可定义谓词。(3) 范数 $\|\cdot\|_1$ 是一个 2-可定义的仿射谓词。(4) 每个 2-可定义谓词都是一个 1-可定义谓词，反之亦然。

证明。我们通过给出一个具体的定义公式，证明迹态是一个 1-可定义谓词。若 $= a^*$ 且 $\|a\| \leq n$（这些数据可从 a 所属的 sort 看出），则 $|a + n| = a + n$，且 $\tau(a) = \|a + n\|_1 - n$。由于 a 可以写成 $a = a_0 + ia_1$，其中 $a_0 := (a + a^*)/2$ 和 $a_1 := (a - a^*)/2i$ 都是自伴的，因此我们有（仍假设 $\|a\| \leq n$）

$$\tau(a) = \|a_0 + n\|_1 + i\|a_1 + n\| - (1 + i)n.$$

同理，若 $= a^*$ 且 $\|a\| \leq n$，则 $\tau(a) = \|a + n\|_2^2 - n$。由上述论证可知，$\tau$是 2-可定义的。

由于 $\|a\|_2 = \tau(a^*a)^{1/2}$，2-范数是一个 1-可定义谓词。

引理的其余部分得证。 □

[3]为简洁起见，在本证明中，我们允许考虑其指定迹未归一化的带迹 von Neumann 代数。

推论4.2。两个迹冯·诺伊曼代数是1-初等等价的，当且仅当它们是2-初等等价的。

一类带迹 von Neumann 代数在连续逻辑中可用 1-公理化，当且仅当它在连续逻辑中可用 2-公理化。□

4.2. 定理 1 的证明。为了证明定理 1，我们先证明以下结果（这很可能是众所周知的，但并非显而易见）。根据推论4.2，我们无需指出“初等等价”是指上一小节讨论的 1-逻辑还是 2-逻辑。

命题 4.3. 假设 M 和 M_1 是初等等价的带迹 von Neumann 代数，且其中一个是 I 型。那么另一个也是 I 型。

此外，如果 M 和 M_1 都有可分前对偶，那么它们同构。换言之，对于 I 型可分带迹 von Neumann 代数而言，该理论是一个完全同构不变量。

命题 4.3 将由几条澄清性说明之后给出的一个更精确（也更显然）的陈述（引理 4.4）推出。

请注意，在迹冯·诺伊曼代数的语言中，I 型这一性质不可公理化，因为 I 型迹冯·诺伊曼代数构成的范畴在超积下并不封闭。（例如，对于与 $\mathbb{N}$ 上的非主超滤子相对应的每个 $n \in \mathbb{N}$，$\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 的超积是一个有趣的 II_1 因子，不具有性质 Γ。）然而，每个与 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 初等等价的迹冯·诺伊曼代数都与它同构。

根据命题 4.3 的第二部分，I 型迹冯·诺伊曼代数的表现类似于紧致度量结构，或有限维 C^*-代数（其所有类型都是紧致的）。更准确地说，命题 4.3 的第二部分是这样一个事实的简化版本：$\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \equiv$ A 蕴含 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \cong$A：每个具有可分前对偶、且与给定的具有可分前对偶的 I 型迹冯·诺伊曼代数 M 初等等价的迹冯·诺伊曼代数，都与 M 同构。用 [15], 的术语来说，与 M 同构这一性质是可分公理化的。用标准的模型论术语来说，M 的理论是 $\aleph_0$-范畴的（有些作者写作 ω-范畴的，因为序数 ω 通常被视为与基数 $\aleph_0$ 相同）。

引理 4.4. 若 M 是带迹 von Neumann 代数，则存在唯一的函数

$$\rho_M : (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times \mathbb{N} \to [0, 1]$$

满足以下性质。

(1) $\sum_{m,\ n} \rho_M(m,n) \leq 1$，且当且仅当 M 是 I 型时等号成立。

(2) $\rho_M(m, n) \geq \rho_M(m, n+1)$，只要 $n \geq 1$。(3) $M = \prod_{m\geq 1} \mathbb{M}_m(L^\infty(X_m,\mu_m))$，其中 (X_m,μ_m) 是一个测度空间，其原子的测度为 $\rho_M(m, n)$，对应于 $n \geq 1$（含重数），弥散部分的测度为 $\rho_M(m, 0)$（且 $\mu(X_m) = \sum_n \rho_M(m, n)$）。

此外，函数 ρ_M 可以从 M 的理论中计算得到。

证明。根据有限 von Neumann 代数的类型分解（[34,§V]），M 同构于直和 $M_I \oplus M_{II}$，其中 M_I 是 I 型，而 M_{II} 是 II 型。

根据同一分解结果，M_I 具有 $\prod_{m\geq 1} \mathbb{M}_m(L^\infty(X_m,\mu_m))$ 的形式，其中 $\sum_m \mu_m(X_m) = 1$（可能还带有某个 m 的 $\mu_m(X_m) = 0$）。由于每个有限测度空间都可以按所述分解为无弥散部分和原子部分，从而得到 ρ_M。为确保（2）成立，原子的测度按递减顺序列出，从而保证函数 ρ_M 的唯一性。具体来说，令 $Y_{m,\,n}$，对 $n \in \mathbb{N}$，枚举测度空间 (X_m,μ_m) 中的所有原子，并按测度递减顺序列出，同时计入重数。如果只有 k 个原子，则令 $Y_{m,\,n} = /0$，对 $n \geq k$。最后令 $\rho_M(m, n) = \mu_m(Y_{m,\,n})$。因此，我们只需说明如何从 M 的理论中确定 ρ_M。

首先，我们利用迹 von Neumann 代数 M 的中心 Z(M) 是可定义的这一事实（这本质上就是 [17, 引理 4.1]）。证明表明，中心中的投影格也是可定义的（这并不是投影集也是可定义集这一事实的直接推论，因为根据 Henson 在连续逻辑中的一个未发表结果，可定义集的交集不一定是可定义的）。

正如 [15, 定理 2.5.1], 中所观察到的，m-子齐次 C^*-代数是可公理化的。通过使用同一个公式，这显然可以推广到 von Neumann 代数。因此，对于每个 $m \geq 1$ 该集合（用 τ表示 M 的指定迹态）

$$\{\tau(p) \mid p \in Z(M) \text{ 是一个投影，并且 } pMp \text{ 是 m-子齐次的}\}$$

可以从 M 的理论中读出。该集合的上确界等于 $\sum_{j\leq m}\sum_n \rho_M(j, n)$。因此，$\mu_m(X_m)$ 由 Th(M) 决定。

接下来要计算每个 μ_m 中原子的测度。再次利用 Z(M) 中的投影构成一个可定义集这一事实，这些测度就是满足 $pMp \cong \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ 的中心投影 p 所对应的 $\tau(p)$ 值。重数的处理方式类似。□

命题 4.3 的证明。设 M 和 M_1 是初等等价的带迹 von Neumann 代数，且 M 为 I 型。引理 4.4 推出 $\rho_M = \rho_{M_1}$。由引理 4.4 的 (1) 可得 $\sum_{m,\,n} \rho_{M_1}(m, n) = \sum_{m,\,n} \rho_M(m, n) = 1$，因此 M_1 也为 I 型。

注意，$\rho_M = \rho_{M_1}$ 意味着 M 和 M_1 的原子部分同构。由于每个弥散阿贝尔迹冯诺依曼代数都同构于

$L^\infty([0,1])$，如果 M 和 M_1 除了都是 I 型且初等等价之外，还都具有可分前对偶，那么它们便同构。□

下面这个众所周知的引理用到了度量结构的 eq 概念，该概念在 [15, §3] 中有所研究。简而言之，若 M 是一个度量结构，则 M^{eq} 由 M 扩张而成，具体如下（详见 [15, §3.3] ）。首先，加入 M 中所有可数个类型的乘积，并为其赋予自然的乘积度量。其次，加入这类乘积的所有可定义子集。第三，对这类可定义集上的所有可定义等价关系取商。由此得到的结构记作 M^{eq}。其理论 T eq 仅取决于 $T = Th(M)$，T^{eq} 的模型范畴与 T 的模型范畴等价，并且在抽象意义上，它是 T 的模型范畴最大的保守扩张（即 [15, 定理 3.3.5]）。与其 C^*-代数类比版本 [15, 引理 3.10.2] 相比，这个引理更容易证明。

引理 4.5. 若 N 和 F 是带迹 von Neumann 代数，且 F 是有限维的，则 $F \bar{\otimes} N$ 属于 N^{eq}。因此，若 M 也是带迹 von Neumann 代数，且 $M \equiv N$ ($M \preceq M$)，则 $F \bar{\otimes} M \equiv F \bar{\otimes} N$ ($F \bar{\otimes} M \preceq F \bar{\otimes} N$)。

证明。我们先考虑 $F = \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ 的情形，其中 $m \geq 1$。那么，$F \bar{\otimes} N$ 的指定迹态为 $\sigma = tr_m \otimes \tau$ （其中 tr_m 是 $\mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ 上的归一化迹态，而 τ 是 N 的指定迹态）。于是，$(F \bar{\otimes} N, \sigma)$ 的单位球可识别为 N^{m^2} 的单位球的一个子集，并具有自然定义的矩阵算术运算和迹态 $\sigma((a_{ij})_{i,j\leq m}) = \sum_{i\leq m} \tau(a_{ii})$。

对于一般情形，注意到 F 是全矩阵代数的直和，$F = \bigoplus_{j\leq k} \mathbb{M}_{l(j)}(\mathbb{C})$，且其指定迹态是 $tr^{l(j)}$（$j \leq k$）的凸组合。根据与 $\mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ 情形类似的论证，$F \bar{\otimes} N$ 可识别为 $N^{\sum_{j\leq k} l(j)^2}$，其中定义了适当的算术运算和指定迹态。□

定理 1 的证明。我们将证明 $\preceq$ 的定理。$\equiv$ 的证明是类似的；或者也可由如下事实推出：初等等价的结构可以初等嵌入到同一个结构中。

该结果由以下两个陈述的合取得到。

(1) 如果 M、N、N_1 是迹冯·诺伊曼代数，$N_1 \preceq N$，且 M 是 I 型的，那么 $M \bar{\otimes} N_1 \preceq M \bar{\otimes} N$。(2) 如果 M、N、$N_1$ 是迹冯·诺伊曼代数，$N_1 \preceq N$，且 N 是 I 型的，那么 $M \bar{\otimes} N_1 \preceq M \bar{\otimes} N$。

(1) 与命题 4.3 的证明相同，$M = \prod_{m\geq 1} \mathbb{M}_m(L^\infty(X_m, \mu_m))$。由推论 3.9，$N_1 \preceq N$ 意味着 $N_1(m) = L^\infty(X_m, \mu_m) \bar{\otimes} N_1$ 是 $N(m) = L^\infty(X_m, \mu_m) \bar{\otimes} N$ 的一个初等子模型。

引理 4.5 的矩阵情形推出，对所有 m 均有 $\mathbb{M}_m(N_1(m)) \preceq \mathbb{M}_m(N(m))$。将推论 3.8 应用于测度空间 $(\mathbb{N},\mu)$，其中 μ是概率 Radon 测度，可得 $M \bar{\otimes} N_1 \preceq M \bar{\otimes} N$。

(2) 与情形 (1) 类似，对于某个交换 von Neumann 代数 P_m，$N = \prod_{m\geq 1} \mathbb{M}_m(P_m)$。由命题 4.3，$N_1 = \prod_{m\geq 1} \mathbb{M}_m(P1_{,m})$，其中对于所有 m，$P1_{,m} \equiv P_m$；此外，代数 P_m 和 $P1_{,m}$ 具有测度相同的原子和弥散部分。这意味着 P_m 和 $P1_{,m}$ 同构。因此，$P1_{,m} \bar{\otimes} M \preceq P \bar{\otimes} M$。引理 4.5 表明，进一步与 $\mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ 作张量积仍保持初等性，因此推论 3.8 表明，$\prod_{m\geq 1} \mathbb{M}_m(P1_{,m} \bar{\otimes} M)$ 是 $\prod_{m\geq 1} \mathbb{M}_m(P_m \bar{\otimes} M)$ 的初等子模型。也就是说，$M \bar{\otimes} N_1 \preceq M \bar{\otimes} N$。□

5. 总结

一般而言，与强自吸收 C*-代数作张量积（[35]）并不保持初等性（[12, 命题 6.2]）。所有已知的关于张量积不保持初等等价的例子，都依赖于 C*-代数的正则性性质失效，例如迹态的可定义性（[12, 命题 6.2]）以及稳定秩大于 1（[15, 推论 3.10.4],见 [32, 定理 3.1]）。

然而，已有结果表明，与强自吸收 C*-代数 D 作张量积，可以在一大类 C*-代数中保持初等等价。由 [15, 推论 2.7.2] 可知，若 A 是张量意义下 D-吸收的，则 $A \preceq A \otimes D$（通过将 a 映射为 $a \otimes 1_D$，对所有 $a \in A$ 均成立；因为 $D \cong D^{\otimes \mathbb{N}}$，由 [35, 命题 1.9]）。根据 [15, 定理 2.5.2], 张量意义下 D-吸收是可分公理化的。（若存在一个理论 T，使得 T 的所有可分模型都具有某一性质，则称该性质是可分公理化的。）令 $\mathbb{T}_D$ 为可分 D-吸收 C*-代数的理论（见 [16, §2.1]）。$\mathbb{T}_D$ 的模型称为潜在 D-吸收（[16, 定义 2.4]），并具有这样的性质：其所有可分初等子模型都是 D-吸收的。因此，向下 Löwenheim–Skolem 定理蕴含，若 A 是潜在 D-吸收的且 $A \equiv B$，则 $A \otimes D \equiv B \otimes D$。

如果 $A \preceq B$ 且 A 是潜在 D-吸收的，那么通过将 A 识别为 $A \otimes 1_D$ in $A \otimes D$, 我们有 $A \preceq B \otimes D$。利用 [16,Lemma 1.4] 对包含关系 $A \subseteq A \otimes D \subseteq B \otimes D$ 作稍微精细一些的分析（或直接使用塔斯基-沃特检验），可得 $A \otimes D \preceq B \otimes D$。

命题 5.1. 如果 $A \preceq B$ 且 A 是潜在 D-吸收的，那么通过固定 $1 \otimes D$ 的自然嵌入，可得 $A \otimes D \preceq B \otimes D$。

根据康nes的一项结果，超有限 II_1 因子 R 是唯一具有强自吸收性的 II_1 因子。可能吸收 R 的带迹 von Neumann 代数是 McDuff 因子；与前一段

类似的论证表明，若 M $\equiv$N 且 M 是 McDuff 因子，则 M $\bar{\otimes}$R $\equiv$N $\bar{\otimes}$R；若 M $\preceq$N 且 M 是 McDuff 因子，则 M $\bar{\otimes}$R $\preceq$ N $\bar{\otimes}$R。

目前尚不清楚迹冯·诺伊曼代数的张量积是否保持初等性。II 型$_1$ 迹冯·诺伊曼代数的理论不允许量词消去（参见 [13] 和 [19]，其中给出了更精细的结果），这一事实使初等性保持问题变得更加复杂。

定义 5.2. 若 $M = \int_\Omega^\oplus M_\omega d\mu(x)$ 是一个直积分，则对于 $\omega \in \Omega$，可测场 M_ω 中各理论的分布是函数α，它将每个 $n \geq 1$ 以及每个由 $\mathscr{L}$ 个语句组成的 n 元组 $\bar{\varphi} = \langle \varphi_j : j \leq n \rangle$，对应到分布 $\alpha_{\bar{\varphi}}$: $[0,1]^n \to [0,1]$，其定义如下：

$$\alpha_{\bar{\varphi}}(\bar{r}) = \mu\{\omega \mid \varphi_j^{M_\omega} > r_j \text{ for all } j \leq n\}.$$

定理 3.3（连同引理 4.1；引理 4.1 提供了语言 $\mathscr{L}_{\|\cdot\|_2}$ 与 $\mathscr{L}_{\|\cdot\|_1}$之间的转换）有如下自然推论。

推论 5.3。直积分 $M = \int_\Omega^\oplus M_\omega d\mu(\omega)$ 的理论由可测场 M_ω 中各理论的分布唯一确定，其中 $\omega \in \Omega$。□

这个推论的逆命题一般不成立：无法将直积分的理论分解，以恢复几乎处处的 M_ω 的理论。然而，每个具有可分前对偶的带迹 von Neumann 代数都可以分解为因子的可测场，且这种分解在本质上是唯一的（[34, §IV]）。为证实本文初稿中的猜想 4.5，David Gao 和 David Jekel 证明了：若 M 是 II_1 因子的一个可测场的直积分，则其理论唯一确定该可测场中 II_1 因子的理论分布。证明采用了 [7] 的一种变体。结合一个简单的 Fubini 型论证，便可推出以下结论。

推论 5.4. 迹冯·诺伊曼代数的张量积保持初等等价，当且仅当 II_1 因子的张量积保持初等等价。□

尽管 Feferman–Vaught 型定理从技术上解决了如何计算给定结构的理论这一问题，但我们仍希望得到更高效的步骤。在 [30] 和 [31], 中，Palyutin 提出了一类所谓的 h-公式，并证明它们在每个约化积 $M = \prod_{i\in I} M_i/\mathscr{I}$中都满足 Łoś 定理的一个版本；此外，若布尔代数$\mathscr{P}(I)/\mathscr{I}$是无原子的，那么 M 的语言中的每个公式都等价于 h-公式的布尔组合。例如，这一结果已被用于

为 $\aleph_1$ 中与可数理想相关联的约化积提供了一种简洁得多的 $\aleph_1$-饱和性证明。连续逻辑中帕柳京理论的对应版本已在 [21] 中得到发展。

理想情况下，应当发展一种类似的理论，以结构的直积分取代约化积。现在我们将介绍这方面的一些部分性成果。在 [2], 巴盖里证明了仿射公式在直积分下的一个保留定理。他引入了连续逻辑的一种变体，如今称为仿射逻辑；对其进行了系统研究的文献见 [6] 。仿射公式由原子公式递归定义。逻辑联结词限于仿射函数，而量词仍由上确界和下确界充当（[6, §2]）。结构以及公式的解释与连续逻辑中的类似。对可测仿射结构场取直积分的运算保留仿射理论（请注意，对于带迹 von Neumann 代数，只有相对于 $\|\cdot\|_1$ 范数来考虑时，这一结论才成立，见引理 4.1）。 [14] 中已证明，迹冯·诺伊曼代数的直积分对某些凸公式具有保留性；这项工作旨在满足系统化研究带迹完备 C*- 代数理论的需求（ [10] ）。

转向另一类重要的自伴算子代数，我们要问，定理 1 是否存在一个 C*-代数的类比？与有限维 C*-代数作张量积会保持初等等价。根据引理 4.5 的 C*-代数类比，若 A 和 F 是 C*-代数，且 F 有限维，则 $A \otimes F$ 属于 A^{eq} ([15, §3])，因此可以根据 A 的理论计算 $A \otimes F$ 的理论。然而，与 $C([0,1])$ 作张量积并不能保持初等等价（[15, 推论 3.10.4]）。就我们目前（遗憾地说相当有限的）理解而言，以下猜想或许是定理 1 一个合理的类比。

猜想 5.5. 设 A 是一个 C*-代数，其所有不可约表示均为有限维，且其中心的盖尔范德谱全不连通。若 B 和 C 是初等等价的 C*-代数，则 $A \otimes B$ 与 $A \otimes C$ 初等等价。

参考文献

1. C. Anantharaman 和 S. Popa，《II_1 因子的导论》，见 https://idpoisson.fr/anantharaman/publications/IIun.pdf，2017。2. S.-M. Bagheri，线性度量公式的 Łoś 型定理，《数理逻辑季刊》56（2010），第 1 期，78–84。3. I. Ben Yaacov，论随机变量理论，《以色列数学杂志》194（2013），957–1012。4. ，连续逻辑与 $\aleph_0$-范畴性，预印本（2021）。5. I. Ben Yaacov、A. Berenstein、C.W. Henson 和 A. Usvyatsov，度量结构的模型论，《模型论及其在代数与分析中的应用》第二卷

（Z. Chatzidakis 等编），伦敦数学会讲义系列第 350 号，伦敦数学会，2008，第 315–427 页。6. I. Ben Yaacov、T. Ibarluc´ıa 和 T. Tsankov，仿射逻辑中的极端模型与直积分，arXiv 预印本 arXiv:2407.13344（2024）。7. I. Ben Yaacov 和 H.J. Keisler，作为度量结构的模型随机化，《Confluentes Mathematici》1（2009），第 02 期，197–223。8. A. Berenstein 和 C.W. Henson，概率空间的模型论，arXiv 预印本 arXiv:2302.01519（2023）。9. B. Blackadar，《算子代数》，《数学科学百科全书》第 122 卷，施普林格出版社，柏林，2006，C*-代数与 von Neumann 代数理论，《算子代数与非交换几何》III。10. J.R. Carri´on、J. Castillejos、S. Evington、J. Gabe、C. Schafhauser、A. Tikuisis 和 S. White，迹完备 C*-代数，arXiv 预印本 arXiv:2310.20594（2023）。11. I. Farah，组合集合论与 C*-代数，《施普林格数学专著》，施普林格出版社，2019。12.，介于约化幂与超幂之间，《欧洲数学会杂志》25（2022），第 11 期，4369–4394。13.，II_1 因子中的量词消去，《明斯特数学杂志》（即将出版）。14. I Farah、B. Hart、I. Hirshberg、C. Schafhauser、A. Tikuisis 和 A. Vaccaro，迹转移，准备中（3024）。15. I. Farah、B. Hart、M. Lupini、L. Robert、A. Tikuisis、A. Vignati 和 W. Winter，C*-代数的模型论，《美国数学会回忆录》271（2021），第 1324 号。16. I. Farah、B. Hart、M. Rørdam 和 A. Tikuisis，强自吸收 C*-代数的相对化子，《数学精选》23（2017），第 1 期，363–387。17. I. Farah、B. Hart 和 D. Sherman，算子代数的模型论 I：稳定性，《伦敦数学会通报》45（2013），825–838。18.，算子代数的模型论 II：模型论，《以色列数学杂志》201（2014），477–505。19. I. Farah、D. Jekel 和 J. Pi，迹冯·诺伊曼代数的量子扩张器与量词约化，arXiv 预印本 arXiv:2310.06197（2023）。20. S. Feferman 和 R. Vaught，代数系统乘积的一阶性质，《Fundamenta Mathematicae》47（1959），第 1 期，57–103。21. I. Fronteau，连续逻辑中的约化积，硕士论文，巴黎大学，2023。22. S. Ghasemi，度量结构的约化积：度量版 Feferman–Vaught 定理，《符号逻辑杂志》81（2016），第 3 期，856–875。23. I. Goldbring 和 B. Hart，迹冯·诺伊曼代数模型论综述，arXiv 预印本 arXiv:2210.15508（2022）。24. B. Hart，《连续模型论导论》，arXiv 预印本 arXiv:2303.03969（2023）。25. D. Jekel，迹 W*-代数的自由概率与模型论，第 11 卷，Walter de Gruyter GmbH & Co KG，2023，第 215 页。26. H.J. Keisler，模型随机化，《数学进展》143（1999），第 1 期，124–158。27. P. Olin，模的直倍数与幂，《Fund. Math.》73（1971/72），第 2 期，113–124。28.，自由积与初等等价，《太平洋数学杂志》52（1974），第 1 期，175–184。

29. E. Palmgren，某些约化积可数饱和性的直接证明，U.U.D.M. 报告 27 (1994), 1–7。30. E. A. Palyutin，范畴霍恩类 I，Algebra Logika 19 (1980), 582–614。31. ，范畴霍恩类 II，Algebra Logika 49 (2010), 782–802。32. N. Christopher Phillips，指数长度与迹，爱丁堡皇家学会会刊 A 辑 125 (1995), no. 1, 13–29。33. Z. Sela，群上的丢番图几何 X：群的自由积的初等理论，arXiv 预印本 arXiv:1012.0044 (2010)。34. M. Takesaki，算子代数理论 I，数学科学百科全书，第 125 卷，施普林格出版社，柏林，2003，算子代数与非交换几何，8。35. A.S. Toms 和 W. Winter，强自吸收 C*-代数，美国数学会汇刊 359 (2007), no. 8, 3999–4029。

约克大学数学与统计系，加拿大安大略省北约克基尔街4700号，邮编M3J 1P3；塞尔维亚贝尔格莱德米哈伊洛亲王街36号，邮编11 000，P.P. 367，SANU数学研究所

电子邮箱：ifarah@yorku.ca 网址：https://ifarah.mathstats.yorku.ca

约克大学数学与统计系，加拿大安大略省北约克基尔街4700号，邮编M3J 1P3；湖首大学，加拿大安大略省桑德贝奥利弗路955号，邮编P7B 5E1（现地址）

网址：https://www.lakeheadu.ca/users/G/sghasem2/node/201808 电子邮箱：sghasem2@lakeheadu.ca