arXiv:2304.08489v1 [astro-ph.SR] 17 Apr 2023

恒星变异的统计模型

FENRIR：一种基于物理的恒星活动模型及其快速高斯过程近似

Nathan C. Hara[1],Jean-Baptiste Delisle[1]

日内瓦大学天文台，瑞士韦尔苏瓦佩加西路51号，邮编1290 电子邮件：nathan.hara@unige.ch

2023年4月18日

摘要

背景。 利用径向速度和测光探测类地行星，会受到恒星信号的干扰。这些信号通常被建模为平稳高斯过程，其核函数基于定性考量，未能充分利用现有的恒星物理知识。

目标。 我们的目标是构建一种形式体系，将关于恒星活动的知识转化为实用的数据分析方法。具体而言，我们希望获得具有物理参数的核函数。这有两个目的：更好地建模恒星起源的信号，以发现更小的系外行星；以及从数据的统计性质中提取有关恒星的信息。

方法。 我们考虑测光、径向速度、活动指标等多个观测通道，并构建名为 FENRIR 的模型，用以表示恒星表面非均匀性导致的随机变化。我们以解析方式计算这一多通道随机过程的协方差，并将其实现于 S+LEAF 框架中，将似然评估的计算成本从$O(N^3)$ 降至$O(N)$。我们还以解析方式计算了 FENRIR 模型的高阶累积量，用以量化其非高斯性。

结果。 我们构建了一个包含物理参数的快速高斯过程框架，并将其应用于 HARPS-N 和 SORCE 对太阳的观测数据，从而约束出与观测几何相符的太阳倾角。随后，我们讨论了该形式体系在颗粒化研究中的应用。我们展示了太阳 HARPS 径向速度中的非高斯性，并指出，若将恒星活动信号假设为高斯信号，就会丢失信息。最后，我们探讨径向速度与指标之间相位偏移的成因，以及如何构建合适的活动指标。我们提供了 FENRIR 高斯过程模型的开源实现，并配有 Python 接口。

1。引言

B除少数例外，已知的最小系外行星
b均通过凌日法或径向速度（RV）
o观测方法探测到。遗憾的是，这两种技术迄今都尚未
y探测到地球孪生体。在未来十年中，
b利用径向速度和测光来提高探测极限至关重要——
t测光。PLATO任务将于2026年发射，届时将搜寻
E地球孪生行星。通过测光进行观测，并以精确度为——的方式测量其
s度为10%的径向速度后续观测，也是该任务核心科学
o目标之一（Rauer 等，2016）。要准确解读观测结果，
t还需要精确测定其质量
o其大气（约 20%，Batalha 等，2019）。这
i在数个天文单位处存在类地行星种群，可能
b是卵石吸积形成模型的一个结果，而研
c究这一参数空间将有助于进一步检验行星形
f成情景（Lambrechts 等，2019）。最后，对
t　在 20 pc 范围内通过径向速度法探测地球孪生体，将为借助宜居世界天文台（Crass 等，2021）和 LIFE（Quanz 等，2021）对其大气进行表征、进而搜寻太阳系之外的生命铺平道路。

凌星和径向速度法都依赖于观测行星对恒星产生的影响，而恒星表面随时间变化的非均匀性会引发复杂信号，严重限制类地行星的探测。更广泛地说，这些信号会妨碍系外行星的探测，并使其轨道要素的估算失真（Hara et al. 2019; Damasso et al. 2019; Luhn et al. 2022）。因此，准确理解恒星的影响至关重要这样才能更好地从数据中区分恒星、仪器和行星的特征。

已知有几类恒星信号会影响光谱数据和测光数据，以下按变化频率从高到低列出。声波在恒星内部传播，并产生持续数分钟的振荡。在径向速度巡天中，通过将积分时间调整为涵盖数个振荡（~ 15 分钟；Dumusque 等人，2011；Chaplin 等人，2019），可以平均掉星震信号。也有人提出，使用具有准周期核的高斯过程对其进行建模（Luhn 等人，2022）。其次，恒星表面的对流会形成所谓的米粒组织模式：炽热的等离子体上升至表面，冷却后再向下沉降，形成由相连的颗粒构成的、起伏不平的恒星表面。整体而言，炽热的上升气体比冷却后下沉的气体更明亮，由此产生所谓的对流蓝移效应（Dravins 等人，1981，见图 1.a ）。至少存在两种对流时间尺度，分别对应颗粒本身和所谓的超颗粒，其对应的结构整体运动尺度为 $\approx 3\times10^7$ 米。无论是在测光数据、径向速度还是从光谱推导出的其他量中，颗粒化都表现为相关噪声，其功率谱密度渐近地按幂律衰减，并由一个时间尺度和一个振幅表征（Cegla 等人，2013；Kallinger 等人，2014；Cegla，2019；Sulis 等，2020；Dravins 等人，2021）。

此外，恒星还可能出现磁通量增强的区域，分别表现为星斑或光斑，其亮度比恒星表面的连续谱更暗或更亮（见图 1.b 和 c）。这些结构的寿命与其

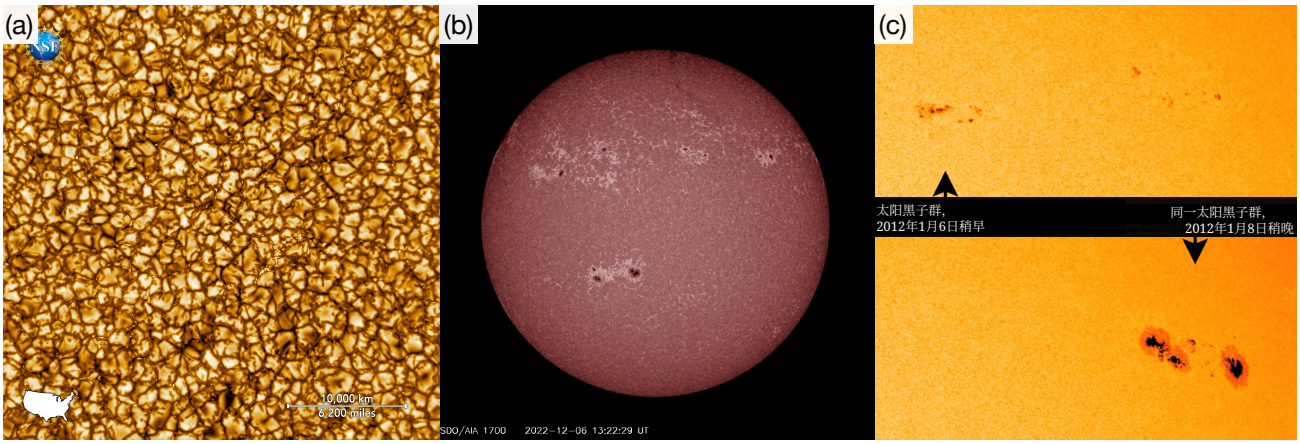


图1：（a）InouyeSolar 波前校正（WFC）图像，拍摄于2020年1月28日，波长为789nm。星斑周围的颗粒结构由对流造成：热等离子体在颗粒中心向上运动，冷却后在颗粒之间向下运动（较暗的颗粒间区域）。较亮的颗粒内区域的贡献超过颗粒间区域，从而在观测光谱中产生所谓的对流蓝移。图片来源：美国国家太阳天文台/美国大学天文研究协会/美国国家科学基金会。（b）太阳动力学天文台在波长 1700 $\odot A$ 处对太阳的观测。明亮区域称为光斑；请注意，光斑区域围绕着星斑（较暗区域）。光斑和星斑都会抑制气体向上的对流运动。光斑覆盖的面积大于星斑，但其与连续谱的温度反差较小。星斑的纬度、数量和寿命会随恒星磁周期变化，时间尺度为数年（太阳的周期为11年）。图片由美国国家航空航天局/太阳动力学天文台及大气成像组件、极紫外变异实验和日震与磁成像仪科学团队提供。（c）在两个不同日期观测到的太阳黑子群，上图：2012年1月6日；下图：2012年1月8日。图片来源：美国国家航空航天局/太阳动力学天文台。

大小有关，并且会因恒星类型而异，从几天到几个月不等（Meyer 等，1974；Martinez Pillet 等，1993）。磁区会改变测光测得的总通量。此外，它们会打破恒星趋近侧与远离侧恒星边缘之间的对称性，并局部抑制对流蓝移。因此，磁区的存在会改变光谱的形状，尤其会影响测得的恒星径向速度（Saar & Donahue 1997；Desort 等，2007；Meunier 等人，2010b；Boisse 等，2012；Dumusque 等（2014）；Borgniet 等，2015；Meunier 等人，2019；Meunier & Lagrange 2019a,b）。星斑和光斑的出现率及其性质会随着恒星的磁活动周期而变化，时间尺度为数年（太阳上为 ~ 11 年）。恒星经向风（Becker 等，2011；Meunier & Lagrange 2020）和相对论效应（Cegla 等人，2012）也会产生径向速度特征，但振幅小得多。

在本研究中，我们旨在详细模拟恒星活动的影响：星斑和光斑，以及它们与磁活动周期之间的相互作用。我们还提出了一个颗粒化模型（见第 5.1 节），但不讨论声学振荡。

为了将径向速度和测光中的恒星信号与行星信号区分开来，我们可以利用这样一个事实：恒星信号具有一定的时间结构。如今，使用平稳高斯过程对这些信号建模已是标准做法。该过程由相隔时间区间 Δt 的两个时刻所采样的恒星信号之间的协方差（即核函数）来表征；等价地，也可以用其傅里叶变换——功率谱密度——来表征，它描述了恒星信号的自相似性。磁活动导致的信号可由核函数描述，这种核函数是一个衰减函数与一个以恒星平均自转周期为周期的函数的乘积，体现了恒星表面在旋转一周后与自身相似这一特征（Aigrain 等人（2012）；Haywood 等人（2014）；Foreman-Mackey 等，2017；Perger 等，2021）。这些模型无法直接映射到物理参数；而 Luger 等（2021c）则给出了直接源自恒星表面统计模型、适用于测光的核函数。

分析径向速度时，我们还可以利用另一条信息：行星只会造成纯粹的多普勒频移，而恒星信号还会影响光谱形状（Hara 与 Ford，2023）。具体而言，当恒星斑经过可见半球时，我们预期谱线的不对称性或宽度会发生变化（Queloz 等，2001、2009）。这两者是所谓光谱指标的例子：它们是根据光谱计算得出的量，用于表征光谱形状的变化。光谱指标可以作为线性预测变量，用于拟合径向速度时间序列（Haywood 等，2022；Cretignier 等，2022；Zhao 等，2022）。然而，一方面，指标本身含有噪声，对它们进行线性拟合并不会传递其不确定性。此外，目前尚不清楚径向速度是否应位于由少数指标张成的向量空间中。特别是，我们预期径向速度与指标之间存在相位偏移等非线性依赖关系（Bonfils 等，2007；Forveille 等，2009；Santerne 等，2015；Lanza 等，2018）。Aigrain 等人（2012）将径向速度变化建模为测光信号的平方与该信号和其一阶时间导数之乘积的线性组合。

规避这些问题的一种方法是，在可能的情况下，同时对径向速度、指标和测光进行建模。这已在高斯过程框架中得到实现（Rajpaul 等，2015；Gilbertson 等，2020；Jones 等，2022；Barragán 等，2022；Delisle 等人（2022））。通常，每个时间序列都被建模为一个高斯过程及其一阶、可能还有二阶导数的线性组合。这样一来，高斯过程就不太可能滤除行星信号，因为它受到的约束更强。然而，无论是“恒星活动对不同通道的影响是该过程及其导数的线性组合”这一假设，还是用于描述该过程的核函数，都没有建立在物理模型的基础上。Luger 等（2021c、a、b）构建了一个基于物理的测光和光谱高斯过程模型，但没有考虑对流蓝移抑制，而这对径向速度测量十分重要。最后值得指出的是，关于信号为高斯且平稳的假设，很少得到讨论。

我们考虑若干时间序列：测光、径向速度、光谱指标，或不同波长处的完整光谱时间序列，我们将其称为通道。这些数据不必在相同的历元采样。将不同通道表示为一个联合随机过程是合适的，因为恒星表面过程具有随机性。我们的目标是构建一种形式体系，将关于恒星过程的物理假设转化为针对可用通道的实用、快速数据分析方法。我们的模型并非从高斯性假设出发，而是解析地计算其均值和协方差，再用高斯过程对其进行近似。我们还计算模型的高阶累积量，并表明恒星信号的非高斯性中蕴含着可供利用的信息。

除了系外行星探测与表征之外，理解恒星信号的另一个更显而易见的动机，是获取有关恒星的信息。在多普勒成像中，可以根据磁区引起的光谱形状变化，推断磁区的位置和大小。通常，这种推断基于谱线的加权平均（Deutsch 1958年；Khokhlova 1976年；Goncharskii 等 1977年、1982年；Vogt 与 Penrod 1983年；Vogt 等 1987年）。在近期的一项研究中，Luger 等人（2021b年）表明，在高斯过程框架下，可以从光谱轮廓反演以球谐函数分解的表面亮度。要通过多普勒成像约束某一时刻的恒星表面，磁区的影响必须足够显著，而且恒星的自转速度必须足够快。与 Luger 等人（2021b年）类似，我们的框架允许进行“统计多普勒成像”（其确切含义将在后文阐明），也就是即使无法从各个磁区微弱的信号中确定其瞬时位置，仍可获取磁区的统计属性。

本文结构如下。第 2 节介绍一般性的统计形式框架。第 3 节讨论用于模拟磁活动效应的物理假设。第 4 节将该形式框架应用于 HARPS-N 和 SORCE 对太阳的观测数据分析，并讨论其反演恒星倾角的能力。第 5 节探讨本研究的各种扩展。我们讨论
第 5.1 节中颗粒化信号与单个颗粒属性之间的联系。我们展示了如何利用模型来解读第 5.2 节太阳径向速度观测数据中的非高斯性。第 5.3 节提出径向速度与测光之间的相位偏移和星斑与谱斑之比之间的联系。第 5.4 节讨论指标之间的闭环关系，第 5.5 节探讨本研究与多普勒成像的关系。最后，第 6 节总结全文。我们算法的开源参考实现以 Python 软件包的形式公开提供：[1]

2. 统计框架

2.1. 有限能量随机脉冲响应（*FENRIR*）

我们考虑恒星活动会影响多个观测量：径向速度、测光和活动指标。与某个观测量对应的时间序列称为一个通道。由于恒星表面会以不可预测的方式变化，因此可以将这些通道视为随机过程，而这正是我们在此旨在描述的对象。我们的目标是将关于磁活动和颗粒化的物理知识转化为实用的数据分析方法。我们认为，恒星活动的影响可以

[1] https://gitlab.unige.ch/jean-baptiste.delisle/ spleaf

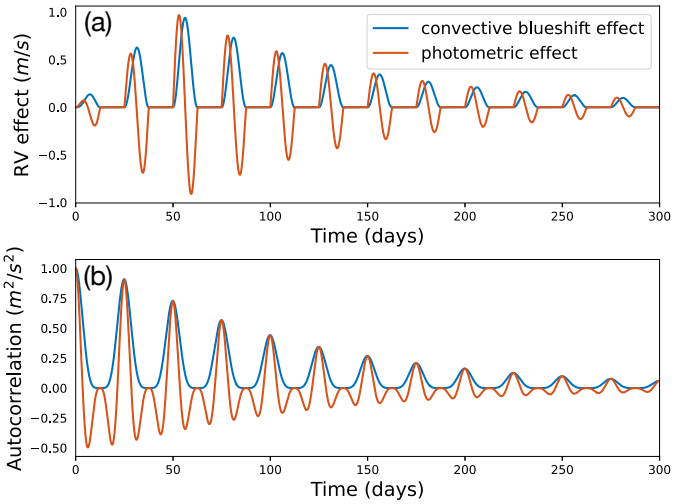


图 2：（a）对于一颗具有赤道星斑、且星斑大小先增大后减小的恒星，径向速度效应$g(t)$随时间的变化。蓝色和红色曲线分别表示星斑磁场抑制对流向上运动所产生的径向速度效应，以及打破趋近和远离恒星边缘两侧不平衡的测光效应。（b）式（1）中定义的随机过程的自相关，其中函数g 对应于（a）。

建模为特征（磁区或米粒组织细胞）。为了尽可能贴近现实，我们的模型必须满足若干要求。(i) 恒星特征对各通道的影响应取决于其物理参数（大小、位置等）以及恒星参数。(ii) 特征参数应允许从参数化分布中抽取。(iii) 恒星特征的分布及其出现率应随时间变化，尤其可能随磁活动周期而改变。(iv) 恒星特征的属性应允许取决于已经存在的特征。

为清晰起见，我们假设存在两个通道，例如径向速度和测光，或径向速度和活动指标（如 $\log R'_{HK}$ （Noyes 1984））。恒星活动对这两个通道的影响分别记为$y(t)$和$z(t)$。我们假设一个恒星特征具有参数 γ，并分别通过函数$g(t,\gamma)$和$h(t,\gamma)$影响通道y 和z。参数向量 γ 包括但不限于经度、面积和寿命。图 2（a）展示了$g(t,\gamma)$随t 变化的示例，其中g 表示赤道星斑引起的径向速度随时间的变化。

恒星特征是瞬态的，假设它们在时间t_0,出现，其对y 和z的影响随时间的变化可用函数$g(t-t_0,\gamma(t_0))$和$h(t-t_0,\gamma(t_0))$建模。如果这些特征出现在t_k时刻，它们对通道y 和z 的影响为

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t - t_k, \gamma(t_k)) \tag{1}$$

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(t - t_k, \gamma(t_k)) \tag{2}$$

$$\gamma(t_k) \sim p(\gamma, | \, t_k, \eta) \tag{3}$$

其中，公式 (3) 表示：如果某个特征出现在时间t_k，那么它的参数将从概率分布$p(\gamma, | \, t_k, \eta)$ 中抽取，其中η 是描述该分布的参数向量，之后将

其解释为用于对$y(t)$和$z(t)$建模的高斯过程的超参数向量。

我们假设特征以非平稳发生率$\lambda(t)$出现，这意味着，假设某个特征在时间t_0, 出现，那么下一个特征在$t_0 + \Delta t$出现的概率为

$$p(t \mid t_0) = \lambda(t_0 + \Delta t)\, \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \lambda(t)\mathrm{d}t}. \quad (4)$$

等价地，出现时间的分布可以定义如下。在时间区间$[t_1,t_2]$内，特征的数量N服从参数为$\Lambda = \int_{t_2\, t_1} \lambda(t)\mathrm{d}t$的泊松分布，而星斑$t_i, i = 1..N$的出现时间则相互独立地从分布$\lambda(t)/\Lambda$中抽取。非恒定发生率$\lambda(t)$或许有助于模拟磁活动周期，因为众所周知，星斑在周期峰值时出现得更频繁。至此，条件（i）、（ii）和（iii）均已满足。我们将看到，特征之间的相关性（要求（iv））可以通过选择脉冲响应h和g来建模。

我们选择“有限能量随机脉冲响应”这一名称，是因为如果γ为常数，我们可以将方程 (1) 和 (2) 写为$\sum_k \delta(t - t_k) * g$，并将 (2) 写为$\sum_k \delta(t - t_k) * h$，其中$*$是卷积积，$\delta(t)$是狄拉克函数。在这种表述中，狄拉克函数之和是输入信号，$y(t)$和$z(t)$是输出，而g和h是脉冲响应。我们允许它们是随机的，但要求其能量有限，从而确保输出的协方差始终有限，这也正是我们选择这一方法名称的原因。

2.2. 使用 *FENRIR* 模型

搜索系外行星时，必须尽可能精确地估计恒星贡献，以便将其去除。反之，数据中的恒星特征也可用于获取有关恒星的信息。FENRIR 模型可用于这两种目的。

原则上，我们可以尝试准确确定有多少个特征N会影响数据集，找出它们出现的时间（t_k）$_{k=1,\ ..,\ N}$，并估计它们的参数γ（t_k），从而最大限度地发挥模型在系外行星探测和推断恒星性质方面的能力。这将为恒星提供最多的信息，但正如 Luger 等人（2021c,b）所示，多个星斑结构可能对应相同的数据。从计算角度来看，处理这种简并性和大量参数并不切实际。

另一方面，我们可以简化问题，尝试找到一种光谱变化指标，其对数据h（t,γ）的影响，使得特征对所关注信号（测光或径向速度）的影响g（t,γ）与h（t,γ）成正比。如果这种指标的信噪比足够高，我们或许只需通过与该指标进行线性缩放，就能估计恒星变化对径向速度或测光的影响。已知无符号磁场是一种良好的变化指标（Haywood 等，2022），我们将看到，这是因为它大致与对流蓝移抑制造成的径向速度效应成正比。另外请注意，如果对于所有特征参数γ，g（t,γ）与h（t,γ）之间存在相位偏移，那么y（t）与z（t）之间也存在相位偏移。已知活动指标与径向速度之间存在此类相位偏移，更广义地说，还存在闭环关系（Bonfils 等，2007；Forveille 等人，2009；Santerne 等，2015；Lanza 等，2018；Collier Cameron 等人，2019）；我们将看到，可以通过 FENRIR 框架对其作出物理解释。

将恒星信号表示为活动指标的线性组合，是否足够符合实际情况尚不明确。此外，如果活动指标含有噪声，将其用作线性预测变量就会引入噪声，因此必须考虑这一不确定性。更严谨地处理恒星信号的方法是同时对通道 y(t) 和 z(t) 进行建模，更一般地说，是对 M 个通道 y_j(t)、j = 1...M 进行建模，并使用似然函数。给定观测时刻 t_i、i = 1...N，我们希望根据式（3）中特征的统计性质η，刻画含有 MN 个分量的向量 Y =(y j(t_i))$_{i=1...N, j=1...M}$ 的联合统计分布。理想情况下，我们希望得到似然函数 p(Y |η)，或该函数的近似形式。由于行星和恒星产生的信号是相加的，我们还可以将似然函数表达式推广为 p(Y |η, x)，其中 x 表示行星数量、周期、质量、半径、偏心率等。为了获取关于η和 x 的信息，我们可以通过适当的数值方法计算后验分布 p(η, x |Y)。根据我们的目标是获取关于行星还是恒星的信息，后验分布将分别对η或 x 进行边缘化（积分），从而得到 p(x |Y) 和 p(η |Y)。

如果要研究的恒星特征是磁区，那么目标就是找出磁区的数量及其参数（γ_k 见（1）），这就是多普勒成像。然而，对于宁静恒星或自转速度不够快的恒星，多普勒成像无法分辨恒星表面。在这里，我们的目标并非直接找出各个特征属性，而是刻画其参数（寿命、大小、位置等）的统计分布，并在某种意义上进行“统计多普勒成像”。

在 Rajpaul 等（2015）；Jones 等（2022）；Gilbertson 等（2020）；Barragán 等（2022）；Delisle 等（2022）中，不同通道由多元高斯过程描述。在这种情况下，对于任意一组观测时刻，其似然都是一个多元高斯分布。将$\mathbb{E}$记为数学期望，并以$y_i(t), i = 1..n$表示不同通道，高斯过程便完全由均值函数$\mathbb{E}\{y_i(t)\}$和协方差函数确定。考虑两个时刻t和t'，协方差为$\mathbb{E}\{y_i(t)y_j(t')\} - \mathbb{E}\{y_i(t)\}\mathbb{E}\{y_j(t')\}$，其中$(i,j)$取遍通道对的所有可能组合。根据第 2.1 节列出的假设，我们在附录 A.1 中证明，$y(t)$过程的均值为

$$\mathbb{E}_\eta\{y(t_a)\} = \iint g(t_a - t, \gamma)\lambda(t)p(\gamma \mid t, \eta)\mathrm{d}t\mathrm{d}\gamma\,. \quad (5)$$

时间$y(t)$在时间t_a和t_b处的协方差为

$$\mathrm{Cov}_\eta(y(t_a), y(t_b)) = \iint g(t_a - t, \gamma)g(t_b - t, \gamma)\lambda(t)p(\gamma \mid t, \eta)\mathrm{d}t\mathrm{d}\gamma. \quad (6)$$

$z(t)$的均值和协方差分别通过在公式（5）和（6）中将$g(t)$替换为$h(t)$得到。$y(t_a)$和$z(t_b)$的协方差为

$$\mathrm{Cov}_\eta(y(t_a), z(t_b)) = \iint g(t_a - t, \gamma)h(t_b - t, \gamma)\lambda(t)p(\gamma \mid t, \eta)\mathrm{d}t\mathrm{d}\gamma. \quad (7)$$

请注意，均值和方差都与λ成正比，这再现了这样一个事实：随着恒星活动沿磁周期增强，式 (5) 中会产生系统性效应，同时式 (6) 中的方差也会增加。假设$\lambda(t)$为常数，且$p(\gamma \mid t, \eta)$不依赖于t，则该过程是平稳的，其协方差可写为 Cov($y(t_a)$,$y(t_b)$) $= k(|t_a - t_b|)$。在这一假设下，图 2 (a) 所示函数g对应的核函数$k(\tau)$如图 2 (b) 所示。

我们可以构建一个恒星变异信号的高斯过程模型，并令超参数 η 具有来自式 (5) 和式 (6) 的物理解释。不过，这只是对 FENRIR 模型的近似。Jenkins和Watts（1969）解释了为什么在我们的情形下，高斯近似可能会导致信息丢失。他们考察了一个移动平均过程，它对应于离散时间且 g 固定的FENRIR过程。在这种情况下，根据 $y(n)$ 的一次实现来估计 $g(n)$，是一个移动平均过程的辨识问题，而 $y(n)$ 的协方差只能给出g 的互相关。然而，多个不同的函数可能具有相同的自相关。即使式 (1) 中的g 是常数，将 $y(t)$ 建模为由其协方差表征的高斯过程，也无法明确确定g 。要消除简并性，必须计算 $y(t)$ 的协方差以及更高阶累积量。第 5.2 节对这一概念进行了定义和讨论。在附录 A.2 中，我们证明，对于我们的 FENRIR 模型，过程 $y(t)$ 和 $z(t)$ 的 $n+m$ 阶累积量，分别在 $n \geqslant 0$ 个时刻 $(t_i)_{i=1..n}$ 和 $m \geqslant 0$ 个时刻 $(t'_i)_{i=1..m}$ 采样，

$$\kappa_\eta(y(t_1), y(t_2), ..., y(t_n), z(t'_1), z(t'_2), ..., z(t'_m)) = \iint g(t-t_1,\gamma)...g(t-t_n,\gamma)h(t-t'_1,\gamma)...h(t-t'_m,\gamma)\lambda(t)p(\gamma \mid t,\eta)\mathrm{d}t\mathrm{d}\gamma. \tag{8}$$

其中，式（5）、（6）和（10）是特殊情形，此时$n = 1$ 且$n = 2$，并且（m，n）=（1，1）。如果$m = 0$，将式（8）视为t_1,...、t_n的函数，它就是所谓的n点y（t）相关函数。理解恒星信号的非高斯性，或许有助于改进用于模拟光谱信号的高斯网络回归方法（Camacho 等，2022）。

为了模拟径向速度和测光中的恒星变异信号，我们至少需要将两个 FENRIR过程相加，一个用于描述颗粒化，另一个用于描述星斑和光斑的影响。如果这些过程相互独立，其和的累积量等于各过程累积量之和。协方差尤其满足这一性质。

现在有几个值得探索的方向：(1) 如何表示各通道的均值和协方差，才能得到具有物理依据的高斯过程模型？(2) 我们能从这个模型中了解到关于恒星的哪些信息？(3) 恒星信号是高斯信号吗？(4) 哪些活动指标会受到某种恒星特征的影响，且影响与径向速度或光度效应成正比？我们在第 4 节展示，这一形式体系能够约束恒星相对于天空平面的倾角。问题 3–4 留待第 5 节讨论。下文将重点介绍 FENRIR 模型的高斯过程近似。

2.3. 高斯过程表示

假设我们有在时刻（t_i）$_{i=1..q}$采样得到的$y(t)$和$z(t)$时间序列。如果我们想联合分析这些时间序列，就必须计算向量$Y = (y(t_i),z(t_i))_{i=1..q}$ 的似然。该向量包含 $2q$ 个分量，由两个列向量$y(t_i)_{i=1..q}$ 和$z(t_i)_{i=1..q}$上下堆叠而成。

$$p(Y \mid \eta) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}Y^T V^{-1}(\eta) Y}}{\sqrt{2\pi^{2q}|V(\eta)|}} \tag{9}$$

协方差矩阵V 是一个 $2q \times 2q$ 矩阵。

更一般地，如果我们联合分析通道 $y(t)$ 和 $z_j(t)$，其中 $j = 1..p$ 对应的脉冲响应分别为 g 和 h_j，$j = 1..p$，则我们的数据集 Y 由堆叠的 $m+1$ 个向量组成，我们要计算其 $pq \times pq$ 协方差矩阵，该矩阵可视为由 $p \times p$ 个 $q \times q$ 矩阵块组成。每个块由 i、j 参数化，其第n行、第m 列的元素根据式（10）为：

$$V^{ij}_{nm}(\eta) = \iint g(t_n - t,\gamma)h_j(t_m - t,\gamma)\lambda(t)p(\gamma \mid t,\eta)\mathrm{d}t\mathrm{d}\gamma. \tag{10}$$

实际上，使用新的协方差与使用现有核函数完全相同，例如所谓的准周期核函数（Aigrain 等人（2012）；Haywood 等人（2014）），

$$k^{\mathrm{QP}}(|t_i - t_j|,\eta) = \eta_1^2 \exp\left[-\frac{(t_k - t_l)^2}{2\eta_2^2} - \frac{2\sin^2\frac{\pi(t_k - t_l)}{\eta_3}}{\eta_4^2}\right]. \tag{11}$$

只是我们的超参数 η 将是恒星特征分布的参数：恒星的倾角、磁区出现时通常所在的经度、它们的寿命、米粒组织细胞的寿命等（方程（10）中的参数向量 η ）。

为了探索 η 的参数空间，无论是计算系外行星探测的贝叶斯证据，还是估计行星参数，我们都需要多次评估似然。评估似然需要对方程（9）中的协方差矩阵V 求逆；一般来说，这一计算的复杂度随矩阵行数的立方增长。为了高效分析数万个太阳径向速度数据点，我们需要降低这一成本。协方差矩阵采用 S+LEAF 框架（Delisle 等，2020、2022）表示，因此，其逆矩阵和行列式的计算复杂度随矩阵行数线性增长：即数据点数乘以所考虑的时间序列数，而非矩阵求逆通常所需的立方复杂度。

为了使我们的形式体系适用于广泛的物理假设，我们希望计算过程尽可能多地实现自动化步骤，其中由用户定义的部分仅涉及物理假设。在附录 C 中，我们展示了如果满足以下条件，就可以在线性时间内计算似然。这些条件可以放宽，但代价是更高的计算时间。

1. 单个不考虑边缘昏暗的特征所产生的影响表示为

$$g_0(t,\gamma) = W(t)\mathbf{1}_{\mathrm{vis}}(t)\sum_{k=0}^{d} a_k(\gamma)\cos k\omega t + b_k(\gamma)\sin k\omega t, \tag{12}$$

其中，ω 是恒星的自转频率，$W(t)$ 调制信号的强度，$\mathbf{1}_{\mathrm{vis}}(t)$ 是一个函数：当特征可见时等于 1，否则等于 0。这并不是一个很强的假设，因为这种形式自然地由物理模型产生（见第 3 节）。

2. 特征达到其最大大小时所在的经度在 $[0, 2\pi]$ 上是随机的。

3. 忽略差分自转的影响。

我们计算似然所采用的不同步骤详见附录 C。

3. 磁活动信号的物理模型

FENRIR 模型由其不同通道的脉冲响应定义，g 见式（1）。其次，我们需要定义脉冲响应参数的概率分布 γ（见式（3）），尤其是特征的大小和寿命。最后，我们需要定义特征的出现率 $\lambda(t)$（见式（4））。

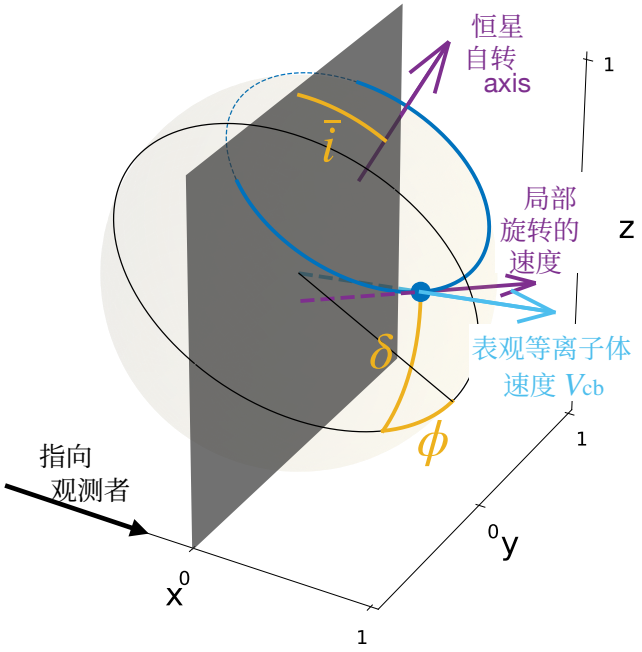


图 3：问题的几何示意图：深蓝色点表示一个恒星特征，它随恒星自转而移动，且仅在部分时间内可见。它会改变局部发射以及等离子体的速度；由于对流运动，等离子体看起来向外运动。我们用天球平面与自转轴之间的夹角i、该特征的经度¯和纬度δ来参数化特征¯的位置ϕ。补充说明，$i = \pi/2 - i$，其中i是投影质量和速度中通常使用的倾角，即$m\sin i$和$V\sin i$。

本节中，我们在第 3.1 节对星斑和光斑进行建模，并在第 5.1 节对颗粒化进行建模。恒星活动的分布很复杂。本节的目的并非构建尽可能逼真的模型，而是说明如何将若干物理假设转化为我们的形式体系。

3.1. 星斑和光斑

星斑和光斑是恒星上磁场强于连续谱的区域。星斑比周围区域暗，而光斑则更亮。因此，当它们扫过恒星的可见半球时，会影响通过测光测得的恒星总通量。其次，由于它们打破了恒星靠近侧与远离侧边缘之间的不平衡，因此会产生多普勒特征。最后，它们的磁场会抑制恒星光球层中等离子体的对流运动。炽热的等离子体向上运动，冷却后再移回恒星中心。由于向外运动的等离子体温度更高，它对总通量的贡献比例也更大，从而使恒星光产生整体蓝移。在星斑和光斑中，磁场往往会整体减缓这种运动，从而导致所谓的对流蓝移抑制（Meunier 等人 2010a）。图 3 展示了我们所研究问题的几何构型。

3.2. 脉冲响应

我们首先假设，恒星的径向速度是各局部径向速度按其通量加权后的总和。为了对脉冲响应 g 建模，我们遵循 Aigrain 等人（2012）的做法，假设

星斑和光斑统称为磁区，它们是恒星表面上的无穷小区域。我们进一步完善 Aigrain 等人（2012）的模型，并假设恒星磁区的影响会乘以某个边缘昏暗定律。

在附录 B 中，我们表明，基于这些假设，式（1）中用于描述测光和径向速度中对流蓝移抑制效应的g 表达式g^{ph}和g_{cb}，以及测光效应h 为

$$g_{ph}(\bar{i},\delta,\phi,\omega,a,\tau) = W^{\tau}(t) l^{a}_{ph}(J(\bar{i},\delta,\phi))\Delta f \omega R^{\star} J(\bar{i},\delta,\phi)\cos\bar{i}\sin\phi\cos\delta \tag{13}$$

$$g_{cb}(\bar{i},\delta,\phi,\omega,a,\tau) = W^{\tau}(t) l^{a}_{cb}(J(\bar{i},\delta,\phi))(\Delta f V_{cb} + \Delta V_{cb}(f+\Delta f)) J(\bar{i},\delta,\phi)^2 \tag{14}$$

$$h(\bar{i},\delta,\phi,\omega,a,\tau) = W^{\tau}(t) l^{a}_{f}(J(\bar{i},\delta,\phi))\Delta f J(\bar{i},\delta,\phi). \tag{15}$$

其中，ϕ 和 δ 分别是恒星表面磁区的纬度和经度，i 是恒星相对于天球平面的倾角，ω 是恒星的角旋转速度。请注意，我们定义的倾角$i = \pi/2 - i$，其中i是投影质量和速度$m\sin i$及$V\sin i$中经典定义的倾角。Δf是磁区与连续谱通量之间的通量差，ΔV_{cb} 是连续谱流动与磁区流动的平均速度之差。函数$W(t)$描述磁区振幅随时间的变化，并以星斑出现的时间尺度 τ为参数。函数l_{ph}、l_{cb} 和l_f 是由系数a参数化的边缘昏暗定律。量J 是磁区在天球平面上的投影面积与其实际表面积之比，其表达式为

$$J(\bar{i},\delta,\phi) = \sin\bar{i}\sin\delta + \cos\bar{i}\cos\delta\cos\phi. \tag{16}$$

此外，$J = \cos\psi$，其中 ψ 是视线与磁区法线之间的夹角。因此，该量通常用于表示边缘昏暗——或边缘增亮——定律。在图 4 中，我们展示了不同黑子纬度和恒星倾角下，恒定边缘昏暗时g^{ph}、g_{cb} 和h 随时间的变化。经度取为 $\phi = \omega t$。

磁区对径向速度的影响，是光度效应和对流蓝移抑制效应的加权总和。对太阳类恒星而言，对流蓝移抑制似乎起主导作用（Meunier 等人 2010a；Haywood 等人 2016），但在其他恒星中，光度效应可能占主导。根据磁区是星斑还是光斑，Δf 的值分别为正或负，而对流蓝移抑制效应始终为正。如图 1.b 所示，星斑往往周围有光斑，我们可能希望对它们的综合效应进行建模。

3.3. 边缘昏暗

太阳的中心区域比边缘更明亮，这种现象称为边缘昏暗，在其他恒星上也存在。在我们的模型中，我们假设这一效应是一个乘法因子，会改变径向速度和光度信号的振幅。我们的边缘昏暗定律用 J 的幂表示，

$$l(J) = \sum_{k=0}^{d} a_k J^k. \tag{17}$$

对流蓝移抑制、光度效应和通量效应的边缘昏暗定律不一定相同。对于对流模式，米粒组织起伏不平的形态会遮挡

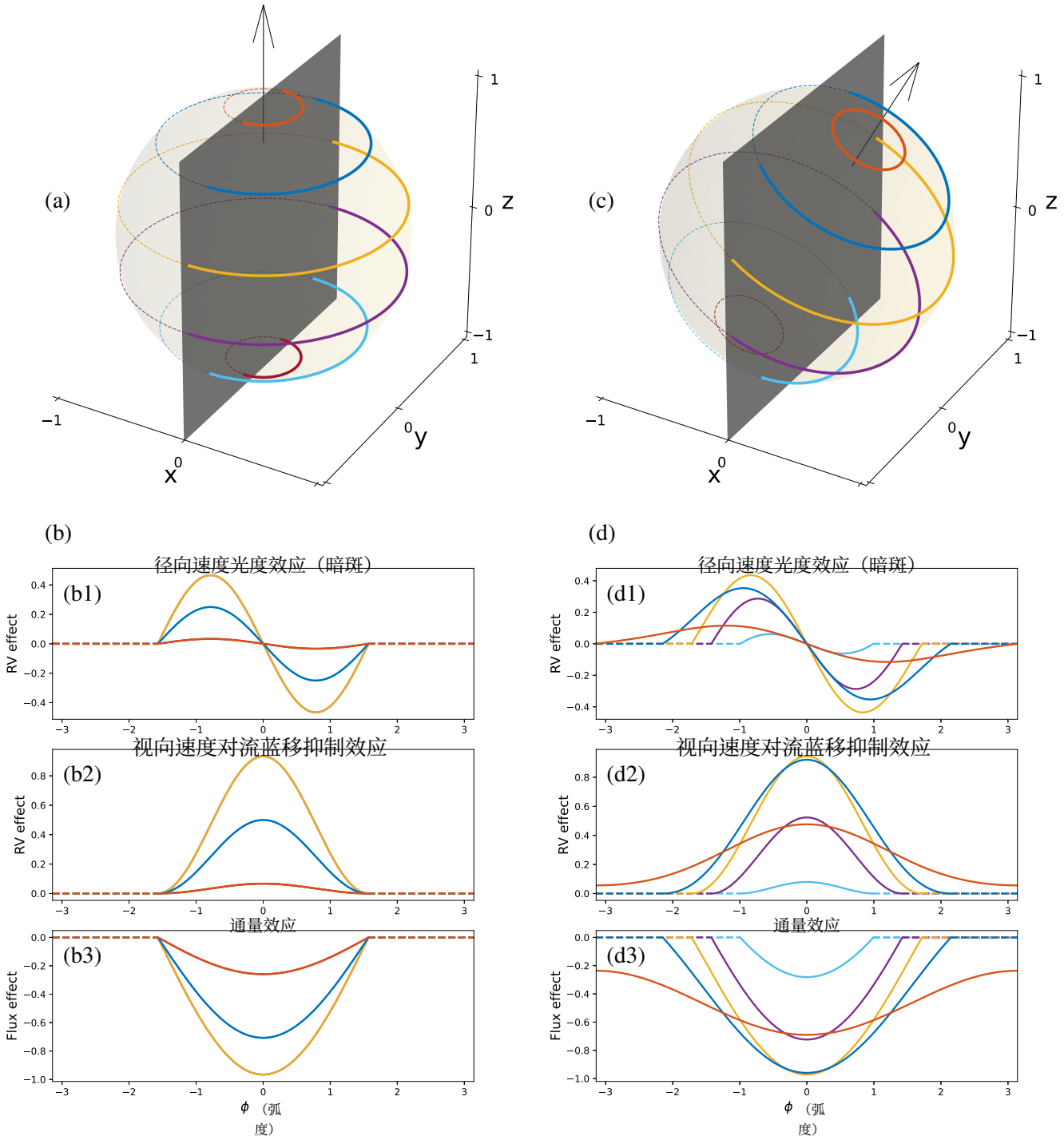


图 4：（a）和（b）中的彩色线条表示恒星以不同倾角逆时针旋转时暗斑的位置。（c）和（d）表示在边缘昏暗定律保持不变时，暗斑产生的相应效应。上：光度径向速度效应；中：视向速度对流蓝移抑制效应；下：通量效应。

一部分朝向恒星边缘的通量（Beckers & Nelson 1978；Cegla 等人 2019）。此外，光斑及其在色球层中的对应结构——谱斑，具有边缘增亮效应，会抵消通量的边缘昏暗行为（Frazier 1971；Unruh 等人 1999；Meunier 等人 2010a）。在图 5 中，我们展示了不同边缘昏暗定律的选择如何影响赤道暗斑的径向速度效应。边缘昏暗效应会使星斑的影响趋于平缓，并将最大影响移向观测者所在的经度。

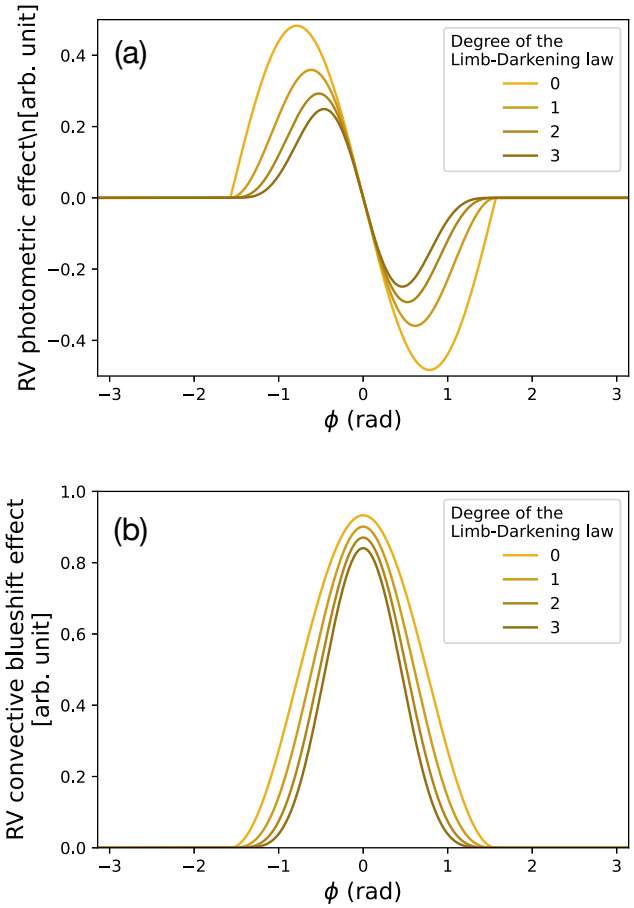


图 5：赤道暗斑产生的不同径向速度效应：由光度效应（图 a）和对流蓝移抑制（图 b）引起，采用不同程度的边缘昏暗定律。按照公式（17）的符号表示，黄色依次加深时，我们取 $d = 0$、1、2、3；对于 $j < d$，则取 $a_j = 0$。

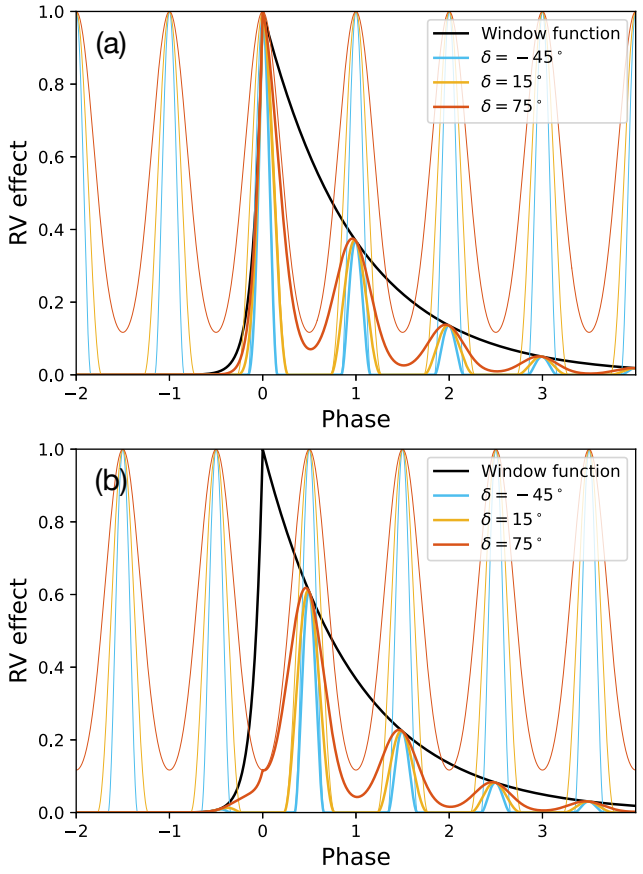


图 6：随自转相位变化的径向速度中，对流蓝移抑制的影响；恒星倾角与图 4(d) 相同，振幅先增大后衰减。黑线：由两个指数函数组成的窗函数；细线：振幅不变时星斑的影响；粗线：振幅变化时星斑的影响。不同颜色表示不同纬度处星斑的影响（颜色编码与图 4(d) 相同）。在 (a) 中，星斑的最大振幅出现在可见半球上观测者所在经度处；在 (b) 中，最大振幅出现在星斑与观测者相距 180° 时。

3.4. 窗函数

在公式（13）—（15）中，我们定义了函数 $W^\tau(t)$，用于描述星斑和光斑生长与消失时强度的增减。随着恒星自转，投影到可见圆面上的特征面积会发生变化。我们已经对这一几何效应进行了建模，使得窗口大致正比于磁区面积与该特征和连续谱之间的温差之积。Bumba（1963）描述了太阳上黑子面积的演化，发现寿命短于一次太阳自转的星斑，其衰减率呈指数变化；其他星斑的衰减率则呈线性变化。

在太阳上，星斑出现的速度比消失快 10–11 倍（Howard 1992；Javaraiah 2011）。对于寿命较长的光斑，这一比值更接近 3（Howard 1991）。Petrovay 与 van Driel-Gesztelyi（1997）指出，太阳黑子面积呈抛物线式衰减；这与 Gómez 等（2014）的观测一致：太阳黑子的面积会先快速减小，随后发生率趋于稳定。

在本研究中，我们希望高效地表示不同过程的协方差。为此，我们将协方差矩阵表示为半可分形式，这限制了可用窗函数的类型。我们特别考虑三种窗函数：单边指数函数（先为零，随后指数衰减）、非对称指数函数，以及对称指数函数。图6展示了使用两个指数函数构造的窗函数示例，其中增长的时间尺度比衰减的时间尺度短十倍。指数函数也能再现观测到的衰减发生率随时间降低这一现象。

3.5. 星斑与光斑群

在我们的模型中，我们假设恒星特征可能以可变速率出现，但彼此独立。不过，磁区之间可能以某种特定构型出现。为考虑这一点，我们调整了表示方式，并考虑g 一组星斑的影响。在太阳上，星斑通常出现在经度偏移 180° 的位置（Borgniet et al., 2015），而且有证据表明，这种行为会对太阳的 HARPS-N 径向速度测量产生影响（Hara et al., 2022）。在我们的公开代码中，我们实现了这一特例，并假设脉冲响应的形式为

$$\tilde{g}(t;\gamma,(a_i)_{i=1..n}) = g(t;\gamma_i) + \alpha g(t - P/2;\gamma_i) \tag{18}$$

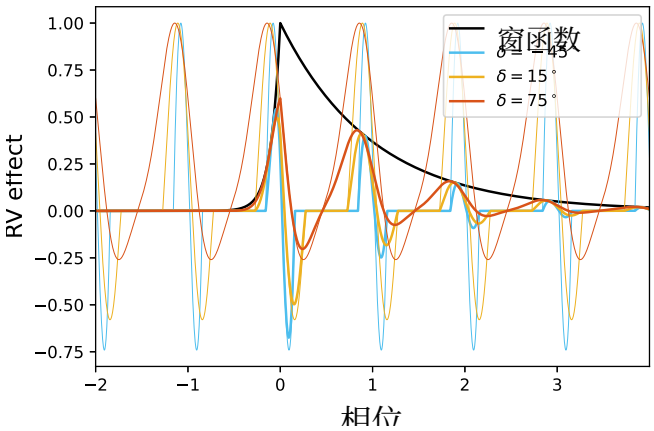


图 7：暗斑的径向速度效应，其对流蓝移抑制效应和径向速度光度效应的振幅相等；在倾角与图 4(d) 相同的恒星上，振幅逐渐增大后又逐渐减小。黑线：由两个指数函数组成的窗函数；细线：振幅不变的星斑效应；粗线：振幅变化的星斑效应。不同颜色对应不同纬度星斑的效应（颜色代码与图 4(d) 相同）。星斑的最大振幅出现在可见半球上、观测者所在的经度处。

参数 α 可以是随机的，由概率分布$p(\alpha \mid \eta)$控制。

3.6. 总体脉冲响应

星斑或光斑对径向速度的整体效应是g^{ph} 和g_{cb}的线性组合。由于某些参数之间存在退化，我们简化了g^{ph}、g_{cb} 和h的振幅系数。此外，我们假设三个信号具有相同的边缘昏暗定律，并令 $\phi = \omega t$。星斑或光斑的效应是

$$g_1(t;\bar{i},\delta,\omega,a,\tau,\sigma_g,\beta) = \sigma_g l^a_{cb}(J(\bar{i},\delta,\omega t))W^\tau(t)\left(J(\bar{i},\delta,\omega t)^2 + \beta J(\bar{i},\delta,\omega t)\cos\bar{i}\sin\omega t\right) \tag{19}$$

径向速度和通量的脉冲响应表达式为

$$g(t;\bar{i},\delta,\omega,a,\tau,\sigma_g,\beta,\alpha) = g_1(t) + \alpha g_1\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) \tag{20}$$

$$h(t;\bar{i},\delta,\omega,a,\tau,\sigma_h,\alpha) = \sigma_h W^\tau(t) l^a_f(J(\bar{i},\delta,\omega t))J(\bar{i},\delta,\phi) \tag{21}$$

因此，我们的模型取决于恒星倾角i、星斑纬度 δ、纬度 δ处的恒星自转频率 ω、边缘昏暗系数a、磁区寿命的时间尺度 τ，以及振幅σ_g 或 σ_h（分别对应径向速度效应或通量效应）；对于径向速度，还取决于光度效应与对流蓝移效应之比 β。恒星表面的角速度取决于纬度，这种现象称为差异自转。我们的模型可以纳入这一因素，但本文不予考虑。

式（20）和（21）中的模型可用于联合模拟星斑和光斑的综合影响。我们也可以选择使用两个或更多独立过程，分别模拟孤立的星斑、孤立的光斑、被光斑环绕的星斑等。如何在灵活性与简洁性之间找到最佳权衡，将留待未来研究。

3.7. 发生率 λ（t）

活动区在表面上的出现率会随磁活动周期而变化。这是太阳上众所周知的现象，对活动区的计数已成为许多研究的主题。在本节中，我们将星斑的出现率设为 $\lambda(t) = A(1 + \cos 2\pi/Pt)$，其中$P = 11$年，$t$ 表示时间。图 8 中的红色曲线显示了星斑每日出现数量随时间的变化。蓝色曲线表示模拟径向速度数据，其中活动区以发生率λ出现，详见下一节。在这项特定模拟中，所考虑的活动区仅包括星斑群及其周围的光斑。常数A 取值使得每天平均有 ~ 5 个可见星斑群。图 9 中，星斑群的数量为每天 ~ 50 个可见星斑群。

另一种选择是将 $\lambda(t)$视为高斯过程，类似于 Camacho 等（2022）所采用的方法。该方法详见附录 C.7。

3.8. 星斑和光斑参数的分布

在式（13）、（14）和（15）的模型中，我们选择只将每次新抽取一个星斑或光斑时随机抽取的经度作为变量。在本研究中，我们进一步假设，特征达到最大面积时所处的经度在 $[0, 2\pi]$上均匀分布。至少对于太阳而言，这一假设并不完全成立，因为活动区往往出现在已有活动区附近以及活跃经度上；未来的工作将对此假设进行改进。

我们将过程中的超参数定义为不会随星斑的出现而变化的量：恒星自转频率 ω、倾角i、边缘昏暗系数（a_k）$_{k=1..d}$、窗函数的时间尺度 τ、对侧经度处星斑的相对振幅 α，以及描述恒星纬度概率分布的参数。

在拉拉古纳分类中（参见 Martinez Pillet 等（1993）），星斑分为两种：孤立星斑（拉拉古纳 3 型）和星斑群（拉拉古纳 2 型）。在拉拉古纳 2 型中，有证据表明太阳黑子群分为两个群体（Muñoz-Jaramillo 等，2015；Nagovitsyn 和 Pevtsov，2016），其寿命在 $\tau = 5$ 天处分界。磁区的寿命取决于其最大面积。Gnevyshev-Waldmeier 定律指出，太阳黑子的寿命 τ 与最大面积 $A_{\max}$ 成正比，$A_{\max} = a\tau$，其中 $a = 10$ 的单位是每天百万分之一太阳半球（MSH）。然而，该定律的散布范围很大，如 Henwood 等（2010）的图 5 和 Forgács-Dajka 等（2021）的图 8 所示。

星斑和光斑的统计分布应随时间变化。首先，在太阳活动最低时，太阳黑子平均出现在远离赤道 $30 - 45°$ 的纬度。随着活动水平升高，太阳黑子的平均纬度会向赤道移动。其次，星斑与光斑覆盖面积之比会随恒星活动而变化（Nèmec 等，2022），因此，控制它们效应的参数应以非平稳的方式随时间变化。

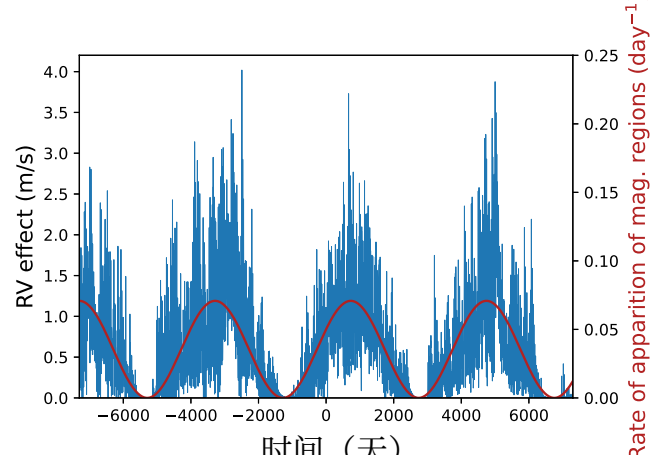


图 8：当径向速度效应由对流蓝移抑制与径向速度光度效应共同造成时，模拟的径向速度随时间的变化。磁区的平均寿命为 15 天。发生率按 $A/2(1+\cos 2\pi t/P_{magc})$ 变化，其中 P_{magc} = 11年，且 A 使得平均每天可见 50 个星斑。

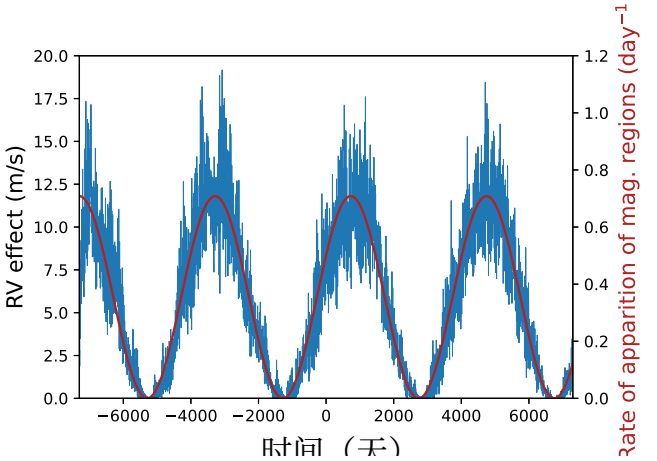


图 9：当径向速度效应由对流蓝移抑制和径向速度光度效应共同造成时，模拟的径向速度随时间的变化。磁区的平均寿命为 15 天。发生率按 $A/2(1+\cos 2\pi t/P_{magc})$变化，其中 P_{magc} = 11年，A 使得每天平均有 $50o$ 颗星斑可见。

3.9. 改进模型：扩展至活动指标

在上一节中，我们假设测得的径向速度是各局部恒星径向速度按其相对通量加权后的总和。然而，这一假设过于简单。在附录 B.2 中，我们推导了径向速度以及辅助指标的表达式，并假设测得的互相关函数（互相关函数）是局部恒星互相关函数的加权总和，这与 SOAP2.0（Dumusque 等（2014））中的处理方式一致。这一形式体系尤其考虑了速度、对比度和互相关函数宽度之间的相互依赖关系。

3.10. 未纳入的效应

太阳表面的角速度取决于纬度，这种现象称为差分自转。这意味着我们的参数 ω 与 δ相关。其次，对于非常大的星斑，将它们视为点状的假设不再成立。这些特征

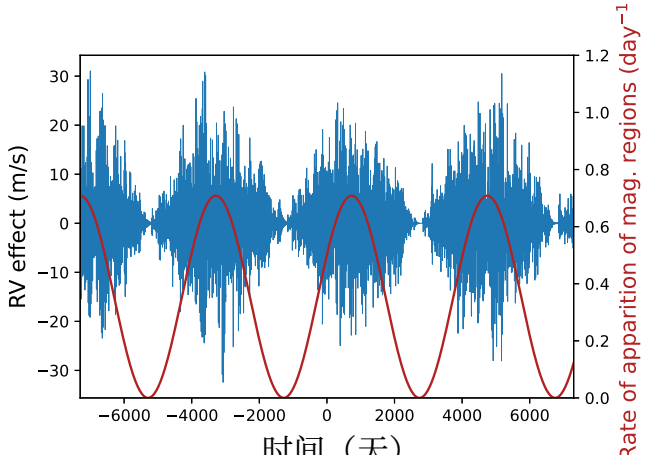


图 10：当径向速度效应仅由径向速度光度效应造成时，模拟的径向速度随时间的变化。

尚未在 FENRIR 中实现。我们注意到，根据初步分析，差分自转的一阶效应是缩短信号的相干时间尺度，换言之，就是缩短第 3.4 节所述的窗函数。目前，已有磁区的存在与新磁区位置之间的相关性，仅在 g 的定义中予以考虑，以计入经度相对的星斑。我们没有考虑其他类型的相关性。

4. HARPS-N太阳径向速度和SORCE总太阳辐照度分析

为展示 FENRIR高斯过程核的用法，我们分析了 Du- musque 等（2020）提供的 HARPS-N太阳径向速度时间序列，以及SORCE总太阳辐照度时间序列（Kopp 2020）。我们使用FENRIR核函数对径向速度和测光时间序列进行了联合建模。SORCE测光数据按日分箱，因此为保持一致，我们也将HARPS-N数据按日分箱。SORCE时间序列覆盖了从2003年2月至2020年2月的17年时间跨度，而 HARPS-N数据覆盖了从2015年7月至2018年7月的3年时间。我们考虑了星斑/光斑群体，其纬度在两个半球呈对称分布。假设该分布服从由两个高斯分布混合而成的分布，其均值为 $\pm\mu_\delta$，标准差为σ_δ。我们采用二次边缘昏暗定律（见公式（17）），其系数为a_0 = 0.3、a_1 = 0.93、a_2 = −0.23（例如，Livingston 2002）。由于光斑往往出现在星斑附近，因此我们在模型中考虑了活动区内星斑和光斑的联合效应。光斑受到边缘增亮效应的影响（例如，Dumusque 等（2014）），我们采用与边缘昏暗相同的方法，用二次定律对其建模，系数为（见 Meunier 等，2010b）：

$$
\begin{aligned}
b_{\text{plage},0} &= 1 - b_{\text{plage},1} - b_{\text{plage},2},\\
b_{\text{plage},1} &= -\frac{407.7}{250.9 - 407.7 + 190.9},\\
b_{\text{plage},2} &= \frac{190.9}{250.9 - 407.7 + 190.9}.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

采用这种设定时，光斑位于恒星中心时，增亮值为 1。相比之下，星斑的对比度近似为常数（即，$b_{\text{spot},0} = -1b_{\text{spot},1} = b_{\text{spot},2} = 0$）。我们

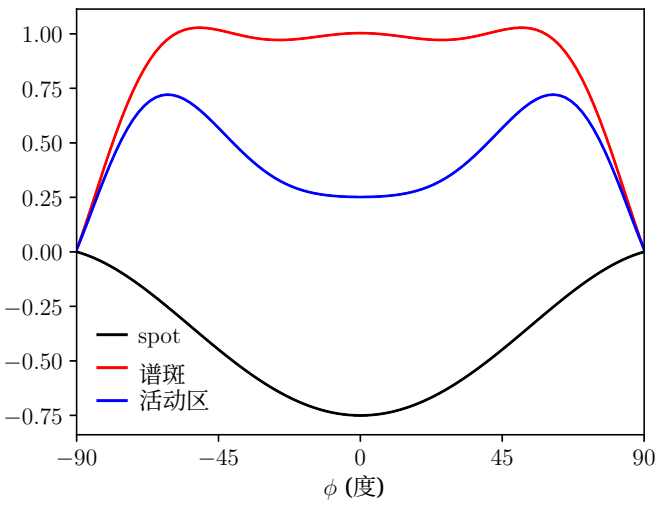


图 11：展示了星斑、谱斑的光度效应，以及考虑恒星边缘增亮效应、边缘昏暗效应和投影效应时活动区的整体效应。

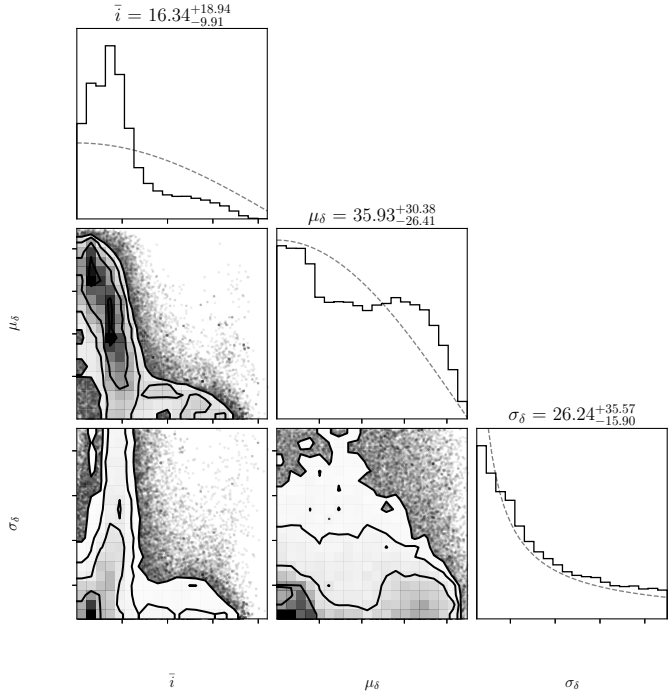


图 12：太阳自转轴倾角及星斑纬度分布参数的马尔可夫链蒙特卡洛样本角图。虚线表示先验分布。

现在需要对活动区中星斑和光斑的贡献进行缩放。尽管星斑造成的光通量下降约比同等大小的谱斑造成的光通量增加强 15 倍，但谱斑覆盖的表面面积约大 20 倍（例如 Meunier 等，2010b）。因此，我们采用以下适用于同时含有星斑和光斑的活动区的增亮定律：

$$
\begin{aligned}
b_0 &= \frac{1}{4} - b_1 - b_2, \\
b_1 &= b_{\mathrm{plage},1}, \\
b_2 &= b_{\mathrm{plage},2}.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

我们在图 11 中展示了星斑、谱斑的光度效应，以及活动区的整体效应。我们预先计算了核函数周期部分的前五个傅里叶系数（常数项、基频和前三个谐波），计算所用的网格取值涵盖 i、μ_δ 和 σ_δ。

我们在 $[0, \pi/2]$，范围内，以 51 个值构成的规则网格对 i 和 μ_δ 进行采样；在 $[\pi/36, \pi/2]$ 范围内，以 51 个值构成的规则网格对 σ_δ 进行采样。对于网格中的每个点，我们在 $[i-\pi/2, \pi/2]$ 范围内对 δ 采样 101 个值（即观测者可见的纬度），以便对星斑/光斑群体的傅里叶系数进行积分（见附录 C.6）。我们还计算由星斑出现率变化（即磁活动周期，见附录 C.7）引起的项的两个系数（平均光度效应和平均径向速度对流蓝移效应）最后，我们便可以在网格中插值得到 i、μ_δ、σ_δ 任意取值对应的结果，并对插值得到的系数重新归一化，以按需设定各效应的振幅。我们首先纳入位于相反经度处的星斑所产生的效应（参数 α_{180}，见公式 (18)）。随后将磁活动周期的两个振幅乘以因子 $\gamma_{\mathrm{mag.}}$。该参数衡量磁活动周期变化的振幅与恒星自转导致的周期变化振幅之比。最后，我们对所有系数进行归一化，使测光中的总振幅（同时考虑周期分量和磁活动周期分量）为 $\sigma_{\mathrm{spot,phot.}}$，径向速度对流蓝移效应的总振幅为 $\sigma_{\mathrm{spot,rv-cb}}$，径向速度光度效应的振幅为 $\sigma_{\mathrm{spot,rv-phot.}}$。需要指出的是，在我们的模型中，磁活动周期不会产生径向速度光度效应，因为该效应会相互抵消。

我们对周期分量的窗函数使用单个时间尺度为 ρ_{spot} 的 Matérn 1/2 核（即星斑/光斑突然出现并呈指数衰减，见附录 C.5），并对磁活动周期使用另一个时间尺度为 ρ_{mag} 的 Matérn 1/2 核。

我们使用时间尺度为 $\rho_{\mathrm{gran.}}$、振幅为 $\sigma_{\mathrm{phot,\ gran.}}$ 的 Matérn 1/2 核对超颗粒进行建模，其中这两个振幅分别对应测光和径向速度；两个时间序列之间不存在相关性。此外，我们为两个时间序列都加入了一个抖动项（白噪声）。由于使用了按日分箱数据，我们假定振荡和短时间尺度颗粒化都由该抖动项捕获。最后，我们为每个时间序列引入了一个偏移量。

总体而言，这个高斯过程可以用秩为 $r = 21$的稀疏协方差矩阵建模。模型似然评估的计算成本随 $O(r^2 n)$ 变化（参见 Foreman-Mackey 等（2016）；Delisle 等人（2022）），其中n 为测量值总数（包括径向速度和测光数据）。

我们使用 samsam 马尔可夫链蒙特卡罗采样器（例如，Delisle 等（2018））探索参数空间。表 1 给出了所有已探索参数的先验分布和后验分布。图12中，我们展示了恒星倾角 i 以及纬度方向星斑分布参数的角图。图13和图14展示了对应于最大后验参数组的核函数。最后，图15展示了对应于最大后验参数组的高斯过程条件分布。

从图 12 中可以清楚地看出，我们的模型存在简并，无法很好地约束星斑的纬度分布。由于我们从地球上观测太阳，太阳的倾角并非常数，而是全年不断振荡（$i \in [-7, 7]$ 度）。我们确实发现，较小的倾角i 略受偏好（见图 12），但在我们的模型中，这个参数仍然受到较差的约束。

参数	先验分布	后验分布
	偏移量	
$\gamma_{\rm rv}$	$\mathcal{U}(-10^5, 10_5)$	$-20.20^{+8.82}_{-8\ 85}$
$\gamma_{\rm phot.}$	$\mathcal{U}(-10^5, 10_5)$	$1360.82^{+0.99}_{-1\ 00}$
	抖动	
$\sigma_{\rm jit.,rv}$	截断$\mathcal{N}(0, 200)$	$0.193^{+0.147}_{-0.130}$
$\sigma_{\rm jit.,phot.}$	截断$\mathcal{N}(0, 200)$	$0.00505^{+0.00552}_{-0\ 00357}$
	超粒化	
$\rho_{\rm gran.}$	$\log\mathcal{U}(0.5, 10)$	$1.667^{+0.332}_{-0.276}$
$\sigma_{\rm gran.,rv}$	trunc$\mathcal{N}(0, 200)$	$0.9767^{+0.0679}_{-0\ 0714}$
$\sigma_{\rm gran.,phot.}$	截断$\mathcal{N}(0, 200)$	$0.00614^{+0.00677}_{-0\ 00434}$
	星斑/光斑	
i	$\cos(i)$ ($i \in [0, 90]$)	$16.3^{+19.1}_{-10.0}$
μ_δ	$\cos(\mu_\delta)$ ($\mu_\delta \in [0, 90]$)	$36.0^{+30.5}_{-26.5}$
σ_δ	$\log\mathcal{U}(5, 90)$	$26.2^{+35.8}_{-15\ 9}$
$P_{\rm rot.}$	$\log\ \mathcal{U}(20, 60)$	$26.979^{+0.108}_{-0.108}$
$\rho_{\rm spot}$	$\log\mathcal{U}(10, 10^5)$	257^{+135}_{-87}
$\sigma_{\rm spot,rv-phot.}$	$\mathcal{N}(0, 200)$	$-0.026^{+0.453}_{-0.440}$
$\sigma_{\rm spot,rv-cb}$	$\mathcal{N}(0, 200)$	$10.50^{+3.99}_{-4\ 43}$
$\sigma_{\rm spot,phot.}$	$\mathcal{N}(0, 200)$	$1.189^{+0.425}_{-0.501}$
α_{180}	$\mathcal{U}(0, 1)$	$0.092^{+0.110}_{-0\ 066}$
	磁活动周期	
$\rho_{\rm mag.}$	$\log\ \mathcal{U}(50, 10^5)$	46095^{+35264}_{-30714}
$\gamma_{\rm mag.}$	$\log\ \mathcal{U}(10^{-5}, 10_5)$	$27.2^{+13.5}_{-12\ 0}$

表 1：在马尔可夫链蒙特卡洛中探索的参数集合及其先验和后验（中位数和 68.27% 区间）。

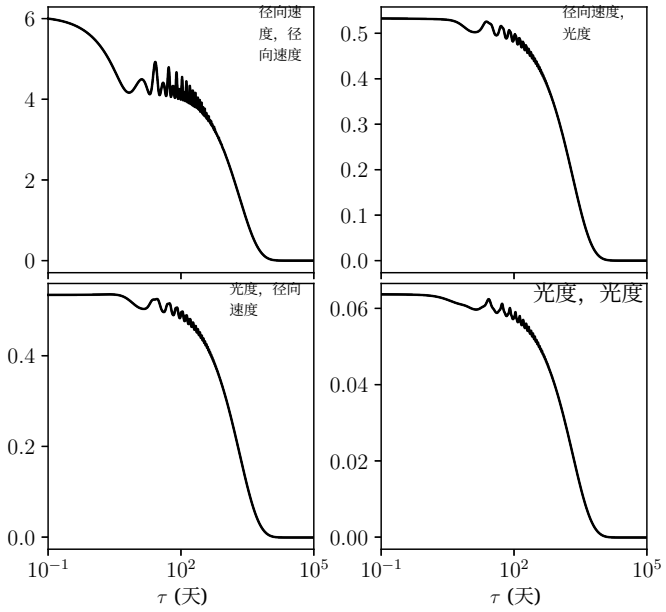


图13：使用马尔可夫链蒙特卡洛的最大后验参数得到的核函数。

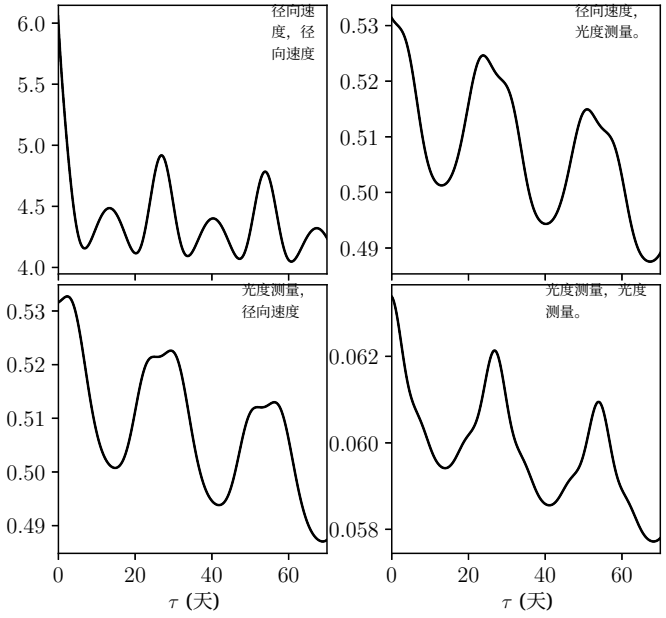


图14：图13在 $\tau \in [0, 70]$ d 范围内的放大图。

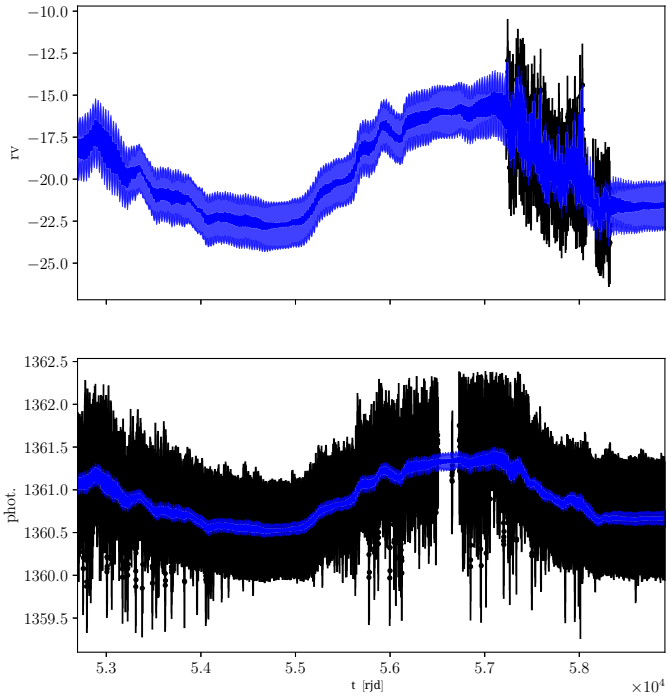


图15：叠加在径向速度（顶部）和光度（底部）数据上的最大后验解。

5. 讨论

5.1. 颗粒化

我们在第 3.1 节提到，恒星表面存在一种对流模式，由此形成了所谓的颗粒化模式。恒星表面由彼此相连的米粒组织构成，热气体在米粒组织中心上升并冷却向下运动，并在其外围向下沉降。除了颗粒化现象之外，太阳还呈现出所谓的超米粒组织模式。太阳的大片区域平均而言都在向上运动。这种现象的时间尺度较长，为 1.8 天。中间尺度的中米粒组织效应是否存在，仍有争议。

由于常规颗粒化、中尺度颗粒化和超粒化的过程相似，且从经验上看它们的影响也相当，因此我们以相同的方式对它们进行建模。单个米粒组织、中尺度米粒组织或超粒化结构随时间产生的影响可以建模为

by

$$g'(t,\gamma) = P(t,\gamma)W(t,\gamma) \tag{24}$$

其中，$W(t,\gamma)$ 表示米粒组织的亮度和面积变化随时间产生的综合影响，而$P(t,\gamma)$ 则表示由恒星自转和投影效应引起的周期部分。

在太阳上，米粒组织通常会持续 15 分钟；然而，将太阳图像取一小时的平均并不会使表面变得均匀，因为米粒组织往往会在同一位置出现（Cegla 等，2013、2018）。为将这一点考虑在内，我们假设在时间t_0, N 出现一个米粒组织时，具有相同属性（位置、最大振幅、寿命）的颗粒会在t_i时刻陆续出现。这些颗粒以 λ 的发生率出现在t_0 至$t_0 + T$ 之间，因此其数量N 服从参数为 λT 的泊松分布。由此，颗粒化的脉冲响应为

$$g_{gran}(t,\gamma) = \sum_{i=0}^{N} P(t,\gamma)W(t-t_i). \tag{25}$$

所有颗粒的周期部分都相同，因为它们在恒星参考系中保持在同一位置，但它们会随机生长和消失。我们将出现在同一位置的N 个颗粒构成的集合称为一个米粒组织包。

若在时间 t_0, 出现一个数据包，那么在时间t_0 到$t_0 + T$ 之间，颗粒会按照带有窗函数$W(t)$的泊松过程出现；该窗函数近似表示颗粒的速度与通量乘积随时间的演化曲线。在附录 C.8 中，我们推导了与这一过程相对应的核函数形式。在本节中，为简化讨论，我们假设 T 相对于恒星自转周期足够短，因此在数据包的寿命期间可将恒星视为静止。于是，颗粒化核函数为

$$k_{gran}(\tau,\gamma) \propto \lambda T \int_{-\infty}^{\infty} W(t)W(t+\tau)\mathrm{d}t + (\lambda T)^2 \int_{-\infty}^{\infty} w(t)w(t+\tau)\mathrm{d}t, \tag{26}$$

其中

$$w(t) = \frac{1}{T}\int_0^T W(t-u)\mathrm{d}u. \tag{27}$$

在式 (26) 中，有两项：颗粒的速度与通量乘积随时间演化曲线的互相关，以及 $w(t)$ 的互相关。后者的时间尺度约为 T，而颗粒的寿命为 $1/\lambda$。若考虑到颗粒会在同一位置持续出现一段时间T，就会出现这一项；这应当会产生比颗粒寿命更长时间尺度的相关性。在 VIRGO 数据中，颗粒化的功率谱密度似乎在 30 分钟至 8 分钟的时间尺度范围内以不同的发生率衰减；而在 4 分钟以上（Sulis 等，2020），4 至 8 分钟之间的功率谱由星震振荡主导。这些不同的斜率可能是由单个颗粒的时间尺度以及颗粒位置相关性的时间尺度造成的。

这个模型在几个方面都只是近似的。首先，我们假设颗粒包可以出现在任何位置。然而，如果某处存在米粒组织，就应禁止颗粒包出现在同一位置。换言之，我们的模型类似于一个可重复抽取的 urnmodel（同一位置可以抽取两次），而实际上应是不放回抽取。表示颗粒化的另一种方法是同时对若干米粒组织进行建模。其次，在一个颗粒包内，我们应禁止两个米粒组织相互重叠。如果我们对多个米粒组织进行整体建模，并假设在米粒组织出现在同一位置的时间尺度内，脉冲响应保持相干，那么我们应将其视为单一时间尺度，并得到一种简单幂律衰减的协方差。

光度测量和径向速度中的颗粒化效应，其功率谱似乎可以用一种所谓的超洛伦兹函数来描述，其功率谱 $P(\omega) = S_0/(1+\omega^a/\omega_0^a)$, 其中$S_0$、$\omega_0$ 和a 是自由参数（Harvey 1985；Dumusque 等人 2011；Kallinger 等人 2014；Cegla 等人 2018；Guo 等人 2022）。光度观测和径向速度观测似乎都倾向于取$a \sim 4$，并将至少两个此类过程相加（分别见 Kallinger 等人 2014；Guo 等人 2022；Luhn 等人 2022），尽管不同研究之间可能存在较大差异（Dumusque 等人 2011；Cegla 等人 2018）。所谓的超颗粒化和中尺度粒化似乎也可以很好地近似为一种随机过程，其功率谱密度为超洛伦兹函数，且$a = 4$，但时间尺度和振幅不同。在公式 26 中，核函数由颗粒化轮廓的形式决定。值得注意的是，如果$W(t)$是单边指数函数，这意味着米粒组织突然出现，其视向速度特征呈指数衰减，那么核函数就是 Matérn-3/2。这类核函数对应的功率谱密度渐近递减为 $1/\omega^4$，与$a \sim 4$时的超洛伦兹轮廓相同。关于颗粒化的详细讨论留待未来开展。

5.2. 恒星信号是高斯的吗？

5.2.1. 描述非高斯过程

如果对于任意有限组时间 $t_1, ..., t_n$，$X(t_1), ..., X(t_n)$ 都服从多元高斯分布，则称随机过程 X(t) 为高斯过程。如果 $X(t+\tau_1), ..., X(t+\tau_n)$ 的分布不依赖于 t，则称该过程为平稳过程。当一个过程既是高斯过程又是平稳过程时，它完全由其均值函数 $\mu(t) = \mathbb{E}\{X(t)\}$ 和核函数 $k(\tau) = \mathbb{E}\{(X(t)-\mu(t))(X(t+\tau)-\mu(t+\tau))\}$表征，后者不依赖于 t。正如我们所见，恒星活动通常被假设为平稳高斯过程。在第 2.2 节中，我们为恒星活动模型建立了一个协方差函数，可用于参数化高斯过程，但我们的计算并不能保证对于任意有限组时间 $(t_i)_{i=1..N}$，$y(t_1), ...y(t_N)$ 的分布都应为高斯分布。

恒星活动信号不可能严格服从高斯分布。事实上，如果$X(t)$是均值为零的高斯过程，那么$X(t)$和 $-X(t)$具有完全相同的协方差，因而概率也相同。然而，对流蓝移抑制在径向速度上的特征并不对称，它始终表现为净红移（见图 4 (b2)）。此外，只要亮于或暗于连续谱的区域所产生的效应占优，通量效应和径向速度光度效应的分布就不会对称。

核函数的傅里叶变换称为功率谱密度，它还有另一种解释：它是过程的傅里叶变换模平方的期望。我们考察从t_0 到$t_0 + \Delta t$的时间跨度。如果一个随机过程是高斯且平稳的，那么它在该时间跨度上的局部傅里叶变换，对于所有t_0,，其模的期望都相同，但我们无法得知相位：在所有频率上，相位均匀分布。如果该过程是高斯但非平稳的，那么在t_0 到$t_0 + \Delta t$ 上计算得到的傅里叶变换模的期望取决于t_0,，但相位完全随机。尤其是，知道某一频率上的相位，并不能提供其他频率上相位的信息。

当我们不再假设高斯性时，这可能意味着过程的相位彼此关联。为了探究这一点，我们采用累积量及其傅里叶变换——多谱的概念。

这里简要介绍累积量的概念；如需更深入的介绍，请参阅 Mendel (1991)。假设有一个随机过程 $X(t)$。给定 n 个时间戳 $(t_i)_{i=1,...,n}$， $X(t_1),..., X(t_n)$ 的累积量生成函数为

$$K^n_{(t_i)_{i=1,...,n}}(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \ln \mathbb{E}\{e^{\alpha_1 X(t_1)+...+\alpha_n X(t_n)}\} \quad (28)$$

在将 K 作为 α_is 的函数进行泰勒展开时，n 阶累积量 n， κ_n，是其乘积项的系数， $\alpha_1\alpha_2...\alpha_n$。平稳高斯过程的一个性质是，阶数大于或等于 3 的累积量均为零。因此，累积量也可用于高斯性检验。确定恒星活动在多大程度上偏离高斯行为，超出了本文的讨论范围。这里我们只讨论第 3 节中采用的 FENRIR过程是否为高斯过程，并说明其行为与太阳上观测到的径向速度不对称性相符。

当 FENRIR过程平稳时，其n点相关函数，或n 阶累积量，可表示为$n-1$ 个点与一个参考点之间时间滞后的函数，

$$C(\tau_1, ..., \tau_{n-1}) = \lambda \iint_{-\infty}^{\infty} g(t,\gamma)g(t+\tau_1,\gamma)...g(t+\tau_{n-1},\gamma)p(\gamma \mid \eta)\mathrm{d}t\mathrm{d}\gamma \quad (29)$$

在此表达式中， λ 是恒星特征的发生率，$g(t, \gamma(t))$ 是脉冲响应：参数为 γ 的特征在时间t 产生的影响；$p(\gamma \mid \eta)$ 是特征参数的分布，它取决于超参数 η，例如恒星倾角和特征的平均纬度。对式 (29)应用傅里叶变换，可得到 F ENRIR过程的多谱

$$S_n(\omega_1, ..., \omega_{n-1}; \eta) = \lambda \iint \hat{g}(\omega_1,\gamma)...\hat{g}(\omega_{n-1},\gamma)\hat{g}\left(-\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i, \gamma\right)p(\gamma \mid \eta)\mathrm{d}\gamma, \quad (30)$$

其中 $\hat{}g$ 是g的傅里叶变换。

5.2.2. 泊松率与不对称性

根据表达式 (29) 和 (30)，我们可以立即看出，提高发生率 λ 会使信号趋于高斯分布。事实上，假设我们有一个高斯过程（GP），其均值和协方差与 FENRIR过程相同（即一阶和二阶累积量相同）。由于该过程平稳，根据式 (29)，其每个时刻的方差都将保持恒定，等于 λg^2,，其中$E g^2$ 表示对参数取值求得的g^2 的期望

γ 并在t上积分。如果我们对这个高斯过程的累积量进行经验估计，由于统计波动，它们不会恰好为零，而是具有一定的标准差。高斯过程的n 阶累积量的标准差与 σ^n成正比，进而与 $\lambda^{n/2}$成正比。因此，FENRIR过程的$n \geqslant 2$ 阶累积量与其高斯过程近似的比值，与 $\lambda/\lambda^{n/2}$成正比；对于所有$n \geqslant 3$，当 λ 增大时，该比值趋于零。直观地说，如果发生率很低，那么任一时刻只有一个特征。如果我们看到特征的起始部分，就能以无限精度预测信号的相位和振幅。随着发生率增加，预测信号相位会变得更加困难

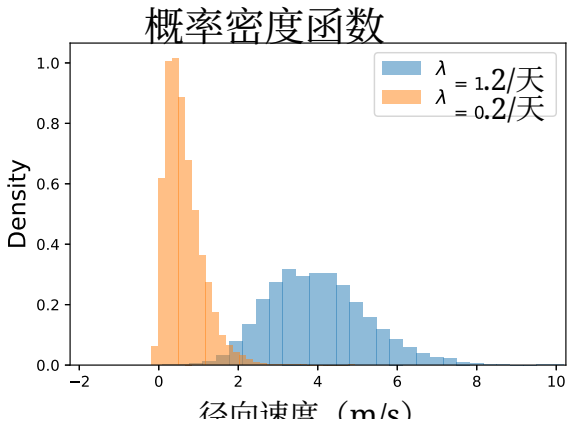


图 16：使用 FENRIR 过程模拟的径向速度直方图，其中每天出现 $\lambda = 1.2$ 和 $\lambda = 0.2$ 个磁区（分别对应蓝色和橙色直方图）。

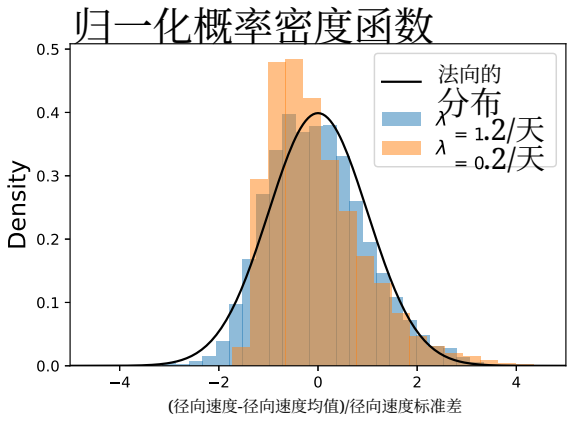


图 17：使用 FENRIR 过程模拟的归一化视向速度直方图，其中每天出现 $\lambda = 1.2$ 和 $\lambda = 0.2$ 个磁区（分别对应蓝色和橙色直方图）。径向速度通过减去时间序列的均值并除以其经验标准差进行归一化。黑线表示均值为零、方差为 1 的高斯分布。

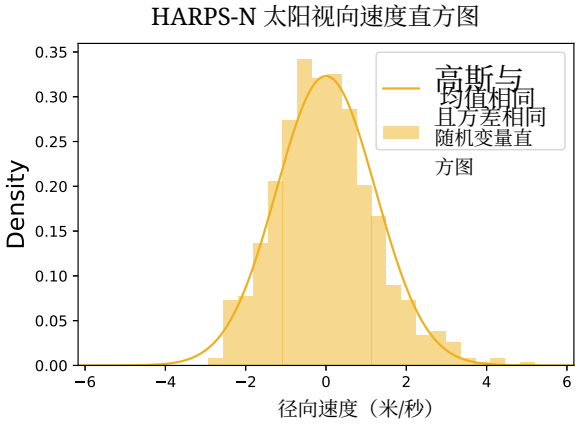


图 18：黄色直方图：HARPS-N 对太阳进行测量所得的径向速度直方图（Dumusque 等（2020）公开数据），数据按 15 小时分箱，并拟合和减去 9 阶多项式。黄色实线为与数据具有相同均值和方差的高斯分布。

因为任意时刻我们看到的都是多个特征的叠加。

作为示例，我们生成具有与第 3.7 节相同属性的 FENRIR 过程，其中泊松率为每天出现 λ 1.2 个磁区和每天 0.2 个磁区，并以每天 1 个点的频率进行采样，持续 20 年。图 16 展示了模拟径向速度的直方图。正如预期，方差的方差随 λ 增大。此外，速率为 λ = 1.2/天的模拟径向速度似乎比以较低速率 λ = 0.2/天得到的径向速度更接近高斯分布。为了更清楚地展示这一点，我们减去每条模拟径向速度时间序列的均值，并用其均值对其进行归一化。图 17 展示了这些归一化视向速度的直方图。正如预期，λ = 1.2/天的径向速度分布更接近正态分布。有趣的是，这两个分布似乎都略微偏向负径向速度，但在正值一侧有较重的尾部，而在负径向速度一侧则骤然截断。

FENRIR模拟旨在大致再现太阳磁区的特征。我们使用 HARPS 获取的公开三年径向速度时间序列（Dumusque 等（2020）），按 15 小时分箱，减去一个 9 阶多项式，以去除低于 $\approx$ 1年的频率，并进一步分离恒星自转的贡献。在图 18 中，我们展示了径向速度残差的直方图，其行为与 FENRIR过程相似：负径向速度一侧急剧截断，正径向速度一侧的尾部更重，且峰值略微偏向负径向速度。这种行为不受所拟合多项式的阶数或分箱策略影响。然而，正如预期的那样，当按较短的时间区间分箱时，高频噪声往往会使分布略微趋近高斯分布。

λ = 1.2/天的模拟与太阳径向速度具有大致相同的标准差（分别为 1.237 m/s 和 1.234 m/s）。有趣的是，它们的经验三阶矩非常相似：对于 FENRIR 和太阳径向速度，分别为 1.02 m^3/s^3 和 0.91 m^3/s^3 。如果生成一个与太阳 15 小时分箱径向速度具有相同标准差和观测数量的高斯白噪声，其三阶矩的标准差为 0.18 m^3/s^3, , 因此太阳径向速度的三阶矩在 5 西格玛水平上显著不为零。这一点需要加以审慎看待
这是因为太阳径向速度存在时间相关性，这会增大三阶矩的离散程度。对非高斯性的精确估计留待未来研究。

5.2.3. 双谱

二阶多谱称为双谱，常用于检验时间序列的非高斯性。根据文献30，我们得到 FENRIR过程的双谱表达式：

$$S_3(\omega_1,\omega_2;\eta) = \lambda \int s(\omega_1,\omega_2,\gamma)p(\gamma \mid \eta)\mathrm{d}\gamma, \tag{31}$$

$$s(\omega_1,\omega_2,\gamma) = \hat{g}(\omega_1,\gamma)\hat{g}(\omega_2,\gamma)\hat{g}(-\omega_1-\omega_2,\gamma). \tag{32}$$

双谱是脉冲响应g的傅里叶变换的函数，可以表示为三个项的乘积：磁区可见时的效应、磁区可见时取值为 1、否则取值为 0 的指示函数，以及我们所称的窗函数；随着磁区大小的增大和减小，窗函数会调制信号的振幅（见第3.4节）。我们首先假设没有衰减。前两项的乘积是周期性的，可以表示为

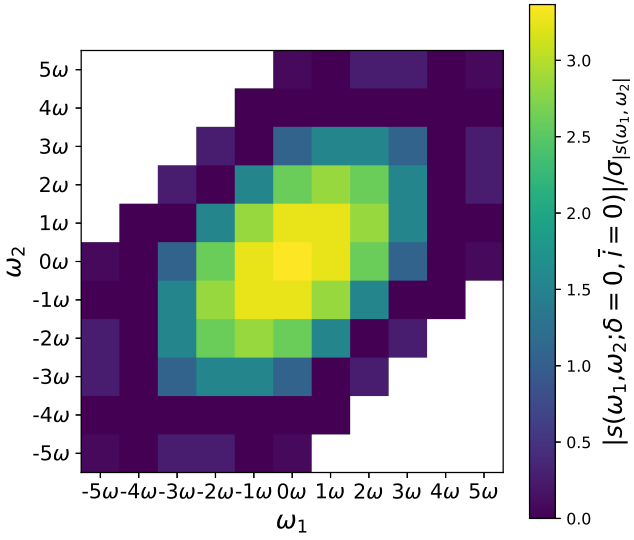


图19：对于纯周期性的赤道星斑信号，若对流蓝移抑制效应是径向速度光度效应的两倍，且倾角为$\bar{i} = 0$，双谱绝对值与其均方误差上界之比。

截断到任意阶数的傅里叶级数

$$g(t) = \sum_{k=-k_{max}}^{k=k_{max}} a_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}. \tag{33}$$

这意味着，g 的傅里叶变换仅在频率 kω、k = –k*max*、……、k*max*处非零，而方程（31）的被积函数中，只有满足以下条件的乘积才非零： ω_1 = k1ω、k2ω2 ，使得 k1,k2 和 –k1 – k2 均为 –k*max* 与 k*max* 之间的整数。实际上，我们只能估计 ĝ。根据其振幅的不确定度，可以计算方程（32）中定义的 s(ω_1, ω_2, γ) 的均方误差。图19展示了在倾角为$\bar{i}$ = 0、纬度为 δ = 0 ，且光度径向速度效应与对流蓝移抑制效应之比 B = 1 的假设下，s 与其均方误差上界之比。在这种情况下，我们假设对于所有 ω，ĝ(ω) 的已知精度为 15%，且 ĝ(ω)、ĝ(ω') 的不确定度相互独立。结果显示，多个双谱系数的值超过其均方误差的三倍。

图 20 所示的双谱涉及一个纬度固定的单个磁区，且恒星倾角给定。在图 20 中，我们展示了式 (32) 的实部对于 $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ 作为倾角 i 和纬度 δ的函数。i = –90° 表示恒星的一个极朝向观测者，而 i = 90°，即另一极，i = 0° 表示恒星自转轴垂直于视线。对于每个倾角，只有满足–tan$i$ tan $\delta \leqslant 1$ 的磁区才可见（见附录 B）。双谱（式 (31)）需要对出现的磁区的参数分布进行积分；在图 20 底部，我们展示了对纬度取均值后的 s 值，并假设所有纬度出现的概率相等。显然，无论 δ采用何种具体分布，双谱的实部都不会相互抵消。

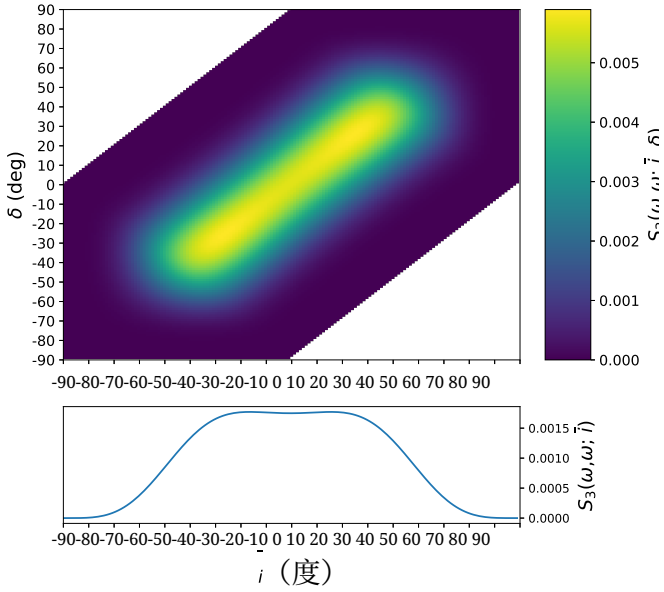


图20：上图：双谱中 ω,ω 系数的实部随恒星倾角 i 和星斑纬度 δ 的变化。下图显示沿着 δ 对双谱取平均后的值。

在窗函数（黑子面积的增长和衰减）取非恒定值的情况下，借助卷积定理，g的傅里叶变换为

$$\hat{g}(\nu) = \sum_{k=-k_{max}}^{k=k_{max}} a_k \hat{W}(\nu - k\omega). \tag{34}$$

考虑窗函数会得到图19的一个平滑版本。

5.3. 相位偏移可能与星斑和光斑的比例有关

.

根据 (16) 中 J 的定义，并假设边缘昏暗恒定（如 Aigrain 等人（2012）所述），由光度效应（式 (13)）导致的径向速度效应与对流蓝移抑制效应（式 (14)）的导数成正比。我们可以将径向速度脉冲响应 g 写作 $g(t + \Delta t) = g_{cb}(t) + g'_{cb}(t)\Delta t$ 和 $g'_{cb}(t) = \alpha g^{ph}(t)$。这只是用另一种方式改写 Aigrain 等人（2012）的 FF' 近似，而且仅当径向速度光度效应与对流蓝移抑制径向速度效应具有相同的边缘昏暗效应时才成立。这个假设并不正确，尤其是因为谱斑具有边缘增亮效应（Meunier 等人 2010a）。尽管如此，我们仍以边缘昏暗恒定这一假设为出发点，阐述推理过程，以便构建一个更现实的模型。

式 (15) 中通量脉冲响应的相反数，如图 4 所示，与对流蓝移抑制同相。只要径向速度光度效应比对流蓝移抑制小 $3-4$ 倍，我们就可以作如下近似

$$\Delta t \approx -\frac{\Delta f R^\star}{2(\Delta f V_{cb} + \Delta V_{cb}(f + \Delta f))}. \tag{35}$$

相位偏移的绝对值取决于若干参数。其符号可通过星斑与光斑之比，更稳健地由 Δf 的符号确定。无论如何，ΔV_{cb} 为正，因为红移为正，且 Δf 相较于 f 较小。如果 Δf 为负，那么 Δt 为正。

我们预期，RV 中的 $\log R'_{HK}$ 效应与磁区的投影面积近似成正比。因此，它与通量近似成正比。如果磁区较亮，那么 RV 应滞后于测光；如果该区域较暗，那么 RV 则超前于 $\log R'_{HK}$。在 Hara 等人（2022）中，我们展示了，在 HARPS-N 对太阳的 RV 观测数据中（Dumusque 等（2020）），RV 始终超前于 $20 \pm 6°$；这与太阳上的 RV 光度效应由星斑主导这一事实相符。借助星斑和光斑模型，例如 Dumusque 等（2014）的模型，这又可能与恒星是星斑主导还是光斑主导有关（例如 Nèmec 等人，2022）。

我们再次强调，本节的模型依赖于若干并不成立的假设，但目前的论述可作为将相位偏移与恒星处于谱斑主导还是星斑主导状态联系起来的起点。

5.4. 构建相关指标

如第 2.2 节所述，我们可以尝试寻找一种光谱变异指标，使得恒星特征 $h(t,\gamma)$ 在该指标中的脉冲响应满足：对于所有 γ，该特征对感兴趣信号（测光或径向速度）$g(t,\gamma)$ 的影响，都与 $h(t,\gamma)$ 成正比。然而，在大多数情况下，指标并不呈现线性关系。众所周知，径向速度与测光，或径向速度与指标之间可能呈现所谓的闭环关系（Bonfils 等，2007；Forveille 等，2009；Santerne 等，2015；Lanza 等，2018；Collier Cameron 等人，2019）。这意味着，当将其中一个量对另一个量作图时，图形似乎会自行闭合。图 21 展示了按照第 3.6 节中的方法建模时，径向速度与测光之间的变化行为。

另一种方法是构建多个指标，使感兴趣信号中恒星特征的脉冲响应成为不同通道中响应的线性组合。Haywood 等人（2022）指出，无符号磁通量是由对流蓝移抑制造成的径向速度分量的良好替代指标。忽略边缘昏暗效应时，投影到视线方向上的径向磁场与径向速度中的对流蓝移效应成正比。由于这一效应在太阳上占主导地位，我们预计它会是一个良好的指标。然而，速度和磁场的边缘昏暗定律可能不同，因此我们不认为二者的相关性会完全吻合。

5.5. 与多普勒成像的联系

我们的工作与 Luger 等人（2021c、a、b）的目的相似，都是构建一个植根于物理量的观测挑战统计模型。具体而言，Luger 等人（2021b）重点研究多普勒成像问题。

多普勒成像是通过考察一组谱线分解（最小二乘去卷积，LSD）的时间序列来实现的，这与互相关函数（CCF）的时间序列类似。LSD 的时间变化被映射为恒星表面温度和磁场的时间变化。此方法可应用于强度光谱（斯托克斯 I 轮廓，Deutsch 1958年；Khokhlova 1976年；Goncharskii 等 1977年、1982年；Vogt 与 Penrod 1983年；Vogt 等 1987年）或偏振光谱（斯托克斯 I 轮廓，Donati 等 1997年）。鉴于

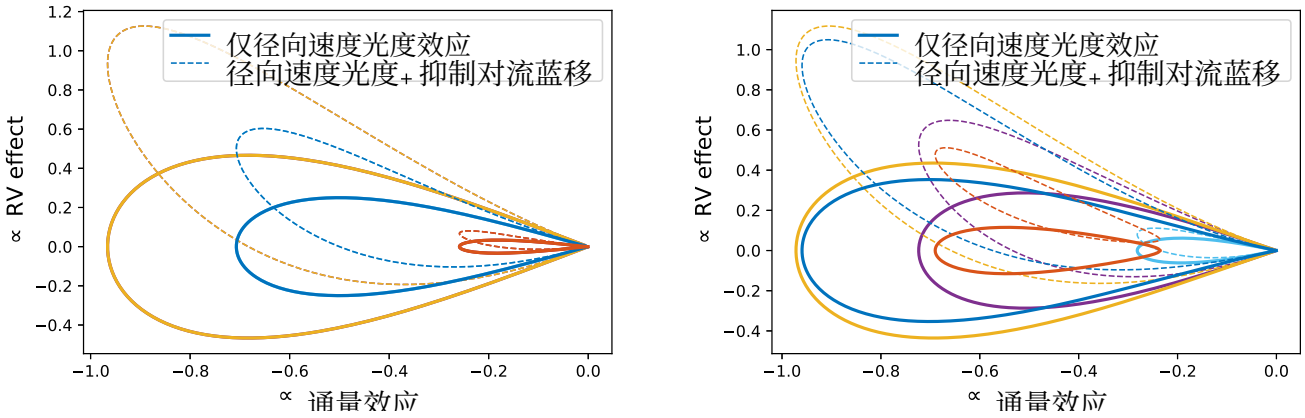


图 21：径向速度效应随通量效应的变化。实线表示径向速度效应仅由对流蓝移抑制引起，虚线表示径向速度信号由对流蓝移抑制和光度效应等量贡献。左图：$i = 0$，右图 $i = 0.5$ 弧度。颜色与图 4 一致

给定恒星的某种温度分布、以球谐函数表示的化学成分以及磁性特征，对最小二乘去卷积（LSD）的形状进行正向建模，并与测量结果进行比较。逆问题——通过最小化测得的最小二乘去卷积（LSD）轮廓与正向模型之间的平方差来求出恒星表面——是退化的。经典的多普勒成像方法会在最小二乘最小化过程中加入熵正则化项（例如 Petit 等，2015；Yu 等，2019）。

正如 Luger 等人（2021b年）所指出的，最大熵过程给出的是点估计，无法对恒星表面剖面进行精确的不确定性测量。他们的方法是构建恒星表面属性的高斯过程表示，并将其转换为前向建模光谱、互相关函数或最小二乘去卷积时间序列的高斯过程表示，然后计算恒星表面属性的后验分布。因此，该方法能够提供表面亮度的瞬时映射。

不过，我们的框架可以扩展以实现更传统的多普勒成像。Luger 等人（2021b年）将以球谐函数展开的恒星表面亮度线性映射到光谱上。在 Lehmann 和 Donati（2022）的研究中，作者将最小二乘去卷积时间序列映射到主成分上，这可以看作一种数据驱动的球谐函数提取方法。通过将观测通道定义为投影到与球谐函数对应基上的光谱，我们可以估计其系数随时间的变化。

目前，我们的工作主要面向两个目标：分析数据以探测系外行星，以及提取恒星表面的统计性质，而非其瞬时性质。我们既不对完整光谱建模，也不对完整恒星表面建模，而是提供一个灵活的框架，用于检验关于磁区影响的不同假设，包括对流蓝移的抑制；我们还将框架实现为 S+LEAF 形式，以进一步提升运行速度。如图 4 所示，我们可以根据星斑的统计性质，估算恒星自转轴与天球平面之间的倾角。

6. 结论

我们的初衷是构建一种恒星活动的表述形式，其形式由物理考量决定。我们假设

我们有多个观测通道，例如径向速度、光度测量、活动指标，甚至光谱时间序列。我们提出的有限能量随机脉冲响应（FENRIR）模型通过三个要素来表述这些观测：第一，给定恒星特征（恒星斑、谱斑或它们的组合、米粒组织单元）的影响随其参数（大小、纬度等）变化的情况，我们称之为脉冲。第二，已知某些超参数 η（例如斑点平均纬度和恒星倾角）时，特征参数的统计分布。第三，特征出现的发生率，它可能随磁活动周期而变化。

FENRIR 模型利用物理超参数 η，为不同通道提供高斯过程表示。我们在 S+LEAF 框架（Delisle 等，2020、2022）中表达这一形式体系，使似然评估的计算成本与观测数量呈线性关系，因此我们的算法适用于多种数据集。这些数据集包括太阳观测数据，这对校准我们的模型至关重要。此外，FENRIR 框架有助于解释太阳数据中存在的非高斯性，并且从长远来看，有望突破高斯过程框架的限制。

如果我们能够通过模拟和对现有数据集的分析，根据恒星类型精确约束这三个要素，就能建立一个有理有据且高效的恒星活动模型，它有两大优势：更有效地校正恒星信号并发现更小的行星；还可以进行“统计多普勒成像”，即推断星斑的统计性质，而非其瞬时值。我们利用 HARPS-N 径向速度观测和 SORCE 测光数据，测试了模型对太阳倾角的推断能力，并得到一个受约束的估计值。不过，我们注意到，结果仍取决于对磁区效应所采用的参数化形式的具体选择，因此还需要进一步研究，才能使倾角估计更加稳健。

在第 5 节中，我们提出了几个值得进一步思考的方向：如上文所述，基于单个米粒组织或超米粒效应建立颗粒化的统计模型；利用信号中的非高斯性；将 RV 与测光或 $\log R'_{HK}$ 之间的相位偏移解释为星斑与谱斑填充因子之比的特征；探讨如何构建相关的活动指标；以及讨论将我们的工作扩展至多普勒成像。

所有这些方面都需要进一步研究，才能充分发挥其潜力。

致谢。 作者谨向 Vincent Bourrier 和 Xavier Dumusque 致以诚挚谢意，感谢他们提出的宝贵建议。

参考文献

Aigrain, S., Pont, F., & Zucker, S. 2012,《皇家天文学会月报》, 419, 3147

Barragán, O., Aigrain, S., Rajpaul, V. M., & Zicher, N. 2022,《皇家天文学会月报》, 509, 866

Batalha, N. E., Lewis, T., Fortney, J. J., et al. 2019,《天体物理学杂志》, 885, L25

Becker, S., Bobin, J., & Candès, E. J. 2011, 《工业与应用数学学会成像科学杂志》, 4, 1

Beckers, J. M. & Nelson, G. D. 1978, 《太阳物理学》, 58, 243

Boisse, I., Bonfils, X., & Santos, N. C. 2012, 《天文学与天体物理学》, 545, A109

Bonfils, X., Mayor, M., Delfosse, X., et al. 2007, 《天文学与天体物理学》, 474, 293

Borgniet, S., Meunier, N., & Lagrange, A. M. 2015, 《天文学与天体物理学》, 581, A133

Bumba, V. 1963，捷克斯洛伐克天文研究所通报，14, 91

Camacho, J. D., Faria, J. P., & Viana, P. T. P. 2022, arXiv 电子预印本, arXiv:2205.06627

Cegla, H. 2019,《地球科学》, 9, 114

Cegla, H. Shelyag, S., Watson, C. & Mathioudakis, M. 2013,《天体物理学杂志》, 763, 95

Cegla, H. M., Watson, C. A., Marsh, T. R., 等 2012,《皇家天文学会月报》, 421, L54

Cegla, H. M., Watson, C. A., Shelyag, S., 等 2018,《天体物理学杂志》, 866, 55

Cegla, H. M., Watson, C. A., Shelyag, S., Mathioudakis, M., & Moutari, S. 2019,《天体物理学杂志》, 879, 55

Chaplin, W. J., Cegla, H. M., Watson, C. A., Davies, G. R., & Ball, W. H. 2019,《天文学杂志》, 157, 163 Collier Cameron, A., Mortier, A., Phillips, D., 等 2019,《皇家天文学会月报》, 487, 1082 Crass, J., Gaudi, B. S., Leifer, S., 等 2021, arXiv 电子预印本, arXiv:2107.14291 Cretignier, M., Dumusque, X., & Pepe, F. 2022,《天文学与天体物理学》, 659, A68 Damasso, M., Pinamonti, M., Scandariato, G., & Sozzetti, A. 2019,《皇家天文学会月报》, 489, 2555 Delisle, J. B., Hara, N., & Ségransan, D. 2020,《天文学与天体物理学》, 638, A95 Delisle, J.-B., Ségransan, D., Dumusque, X., 等 2018,《天文学与天体物理学》, 614, A133 Delisle, J. B., Unger, N., Hara, N. C., & Ségransan, D. 2022,《天文学与天体物理学》, 659, A182 Desort, M., Lagrange, A. M., Galland, F., Udry, S., & Mayor, M. 2007,《天文学与天体物理学》, 473, 983 Deutsch, A. J. 1958年, 载于《宇宙物理学中的电磁现象》, 编者 B. Lehnert，第 6 卷，209 Donati, J. F., Semel, M., Carter, B. D., Rees, D. E., & Collier Cameron,A.1997,《皇家天文学会月报》, 291, 658 Dravins, D., Lindegren, L., & Nordlund, A. 1981,《天文学与天体物理学》, 96, 345 Dravins, D., Ludwig, H.-G., & Freytag, B. 2021,《天文学与天体物理学》, 649, A17 Dumusque, X., Boisse, I., & Santos, N. C. 2014,《天体物理学杂志》, 796, 132 Dumusque, X., Cretignier, M., Sosnowska, D., 等 2020, arXiv 电子预印本, arXiv:2009.01945

Dumusque, X., Udry, S., Lovis, C., Santos, N. C., & Monteiro, M. J. P. F. G. 2011,《天文学与天体物理学》, 525，A140 Foreman-Mackey, D., Agol, E., Ambikasaran, S., & Angus, R. 2017,《天文学杂志》, 154，220 Foreman-Mackey, D., Morton, T. D., Hogg, D. W., Agol, E., & Schölkopf, B. 2016,《天文学杂志》, 152，206 Forgács-Dajka, E., Dobos, L., & Ballai, I. 2021,《天文学与天体物理学》, 653，A50 Forveille, T., Bonfils, X., Delfosse, X., et al. 2009,《天文学与天体物理学》, 493，645 Frazier, E. N. 1971,《太阳物理学》, 21，42 Gilbertson, C., Ford, E. B., Jones, D. E., & Stenning, D. C. 2020,《天体物理学杂志》, 905，155 Gómez, A., Curto, J. J., & Gras, C. 2014,《太阳物理学》, 289，91 Goncharskii, A. V., Stepanov, V. V., Khokhlova, V. L., & Yagola, A. G. 1982,《苏联天文学》, 26，690 Goncharskii, A. V., Stepanov, V. V., Kokhlova, V. L., & Yagola, A. G. 1977,《苏联天文学快报》, 3，147 Guo, Z., Ford, E. B., Stello, D., et al. 2022，arXiv 电子预印本，arXiv:2202.06094 Hara, N. C., Bouchy, F., Boisse, I., et al. 2019，准备中。Hara, N. C., Delisle, J.-B., Unger, N., & Dumusque, X. 2022,《天文学与天体物理学》, 658，A177 Hara, N. C. & Ford, E. B. 2023,《统计学及其应用年度评论》, 10，623 Harvey, J. 1985，载于欧洲航天局特别出版物第235卷《太阳、日球层与空间等离子体物理学未来任务》，编者 E. Rolfe & B. Battrick Haywood, R. D., Collier Cameron, A., Queloz, D., et al. 2014,《皇家天文学会月报》, 443，2517 Haywood, R. D., Collier Cameron, A., Unruh, Y. C., et al. 2016,《皇家天文学会月报》, 457，3637 Haywood, R. D., Milbourne, T. W., Saar, S. H., et al. 2022,《天体物理学杂志》, 935，6 Henwood, R., Chapman, S. C., & Willis, D. M. 2010,《太阳物理学》, 262，299 Howard, R. F. 1991,《太阳物理学》, 131，239 Howard, R. F. 1992,《太阳物理学》, 137，51 Javaraiah, J. 2011,《太阳物理学》, 270，463 Jenkins, G. M. & Watts, D. G. 1969，谱分析及其应用 Jones, D. E., Stenning, D. C., Ford, E. B., et al. 2022,《应用统计年鉴》, arXiv:1711.01318 Kallinger, T., De Ridder, J., Hekker, S., et al. 2014,《天文学与天体物理学》, 570，A41 Khokhlova, V. L. 1976,《天文学消息》, 297，203 Kopp, G. 2020，SORCE 第3级每日总太阳辐照度平均值 V019，美国马里兰州格林贝尔特，戈达德地球科学数据与信息服务中心（GES DISC），访问日期：2023-01-10 Lambrechts, M., Morbidelli, A., Jacobson, S. A., et al. 2019,《天文学与天体物理学》, 627，A83 Lanza, A. F., Malavolta, L., Benatti, S., et al. 2018,《天文学与天体物理学》, 616，A155 Lehmann, L. T. & Donati, J. F. 2022,《皇家天文学会月报》, 514，2333 Livingston, W. C. 2002,《太阳》, 编者 A. N. Cox（纽约，纽约州：施普林格纽约）, 339–380 Luger, R., Foreman-Mackey, D., & Hedges, C. 2021a,《天文学杂志》, 162，124 Luger, R., Foreman-Mackey, D., & Hedges, C. 2021b,《天文学杂志》, 162，124 Luger, R., Foreman-Mackey, D., Hedges, C., & Hogg, D. W. 2021c,《天文学杂志》, 162，123 Luhn, J. K., Ford, E. B., Guo, Z., et al. 2022，arXiv 电子预印本，arXiv:2204.12512

Martinez Pillet, V., Moreno-Insertis, F., & Vazquez, M. 1993，《天文学与天体物理学》，274，521 Mendel, J. M. 1991，《IEEE会刊》，79，278 Meunier, N., Desort, M., & Lagrange, A.-M. 2010a，《天文学与天体物理学》，512，A39 Meunier, N. & Lagrange, A. M. 2019a，《天文学与天体物理学》，628，A125 Meunier, N. & Lagrange, A. M. 2019b，《天文学与天体物理学》，629，A42 Meunier, N. & Lagrange, A. M. 2020，《天文学与天体物理学》，638，A54 Meunier, N., Lagrange, A. M., Boulet, T., & Borgniet, S. 2019，《天文学与天体物理学》，627，A56 Meunier, N., Lagrange, A. M., &Desort, M. 2010b，《天文学与天体物理学》，519，A66 Meyer, F., Schmidt, H. U., Weiss, N. O., & Wilson, P. R. 1974，《皇家天文学会月报》，169，35 Muñoz-Jaramillo, A., Senkpeil, R. R., Longcope, D. W., et al. 2015，《天体物理学杂志》，804，68 Nagovitsyn, Y. A. & Pevtsov, A. A. 2016，《天体物理学杂志》，833，94 Nèmec, N. E., Shapiro, A. I., I. sık, E., et al. 2022，《天体物理学杂志》，934，L23 Noyes, R. W. 1984，载于《恒星活动与变异空间研究》，编者 A. Mangeney & F. Praderie，113 Perger, M., Anglada-Escudé, G., Ribas, I., et al. 2021，《天文学与天体物理学》，645，A58 Petit, P., Donati, J. F., Hébrard, E., etal. 2015，《天文学与天体物理学》，584，A84

Petrovay, K. & van Driel-Gesztelyi, L. 1997, 176, 249

Quanz, S. P., Ottiger, M., Fontanet, E. 等。2021，arXiv 电子预印本，arXiv:2101.07500 Queloz, D., Bouchy, F., Moutou, C. 等。2009，《天文学与天体物理学》，506，303 Queloz, D., Henry, G. W., Sivan, J. P. 等。2001，《天文学与天体物理学》，379，279 Rajpaul, V., Aigrain, S., Osborne, M. A., Reece, S. 与 Roberts, S. 2015，《皇家天文学会月报》，452，2269 Rauer, H., Aerts, C., Cabrera, J. 与 PLATO团队。2016，《天文学消息》，337，961 Saar, S. H. 与 Donahue, R. A. 1997，《天体物理学杂志》，485，319 Santerne, A., Díaz, R. F., Almenara, J.-M. 等。2015，《皇家天文学会月报》，451，2337 Sulis, S., Lendl, M., Hofmeister, S. 等。2020，《天文学与天体物理学》，636，A70 Unruh, Y. C., Solanki, S. K. 与 Fligge, M. 1999，《天文学与天体物理学》，345，635 Vogt, S. S. 与 Penrod, G. D. 1983，《太平洋天文学会刊》，95，565 Vogt, S. S., Penrod, G. D. 与 Hatzes, A. P. 1987，《天体物理学杂志》，321，496 Yu, L., Donati, J. F., Grankin, K. 等。2019，《皇家天文学会月报》，489，5556 Zhao, L. L., Fischer, D. A., Ford, E. B. 等。2022，《天文学杂志》，163，171

附录 A：协方差与累积量

附录 *A.1*：一般非平稳情形下的协方差

在本附录中，我们计算给出过程$y(t)$的均值和自协方差，以及$y(t)$与$z(t)$的协方差的表达式。这些表达式是 A.2 节中推导的 nn 阶累积量一般公式的特例。由于累积量的运算对读者而言可能并不熟悉，因此这里给出一个使用较熟悉表达式的计算过程。

设星斑在时间区间 $[-L/2,L/2]$ 内独立出现，发生率为$\lambda(t)$。那么，星斑出现的时间服从分布 $p(t) = \lambda(t)/\int_{-L/2}^{L/2}\lambda(t)\mathrm{d}t$。信号建模为

$$y^L(t) = \sum_{k=1}^{n} g(t - t_k, \gamma_k) \tag{A.1}$$

并将$y(t)$记为$y^L(t)$在L 趋于无穷大时依概率收敛的极限（$y^L(t)$是一个随机变量）。这里，n 是满足$t_k \in [-L/2,L/2]$, 的星斑数量，并服从参数为$I_\lambda^L := \int_{-L/2}^{L/2}\lambda(t)\mathrm{d}t$的泊松分布。为计算$y$的协方差（按定义为

$$\mathrm{Cov}(y(t_a), y(t_b)) = \mathbb{E}\{y(t_a)y(t_b)\} - \mathbb{E}\{y(t_a)\}\mathbb{E}\{y(t_b)\} \tag{A.2}$$

我们首先计算y 在t时的平均值， $\mathbb{E}\{y(t_a)\}$，然后计算乘积期望， $\mathbb{E}\{y(t_a)y(t_b)\}$。两种情况下，我们都先对$y^L$ 进行计算，再令L 趋于无穷大。

y过程的平均值为

$$\mathbb{E}\{y^L(t)\} = \mathrm{e}^{-I_\lambda^L}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(I_\lambda^L)^n}{n!}\iint\sum_{k=1}^{n} g(t - t_k, \gamma_k)\frac{\lambda(t_k)}{I_\lambda^L}p(\gamma_k)\mathrm{d}(t)\mathrm{d}(\gamma) \tag{A.3}$$

并且我们有

$$\iint\sum_{k=1}^{n} g(t - t_k, \gamma_k)\frac{\lambda(t_k)}{I_\lambda^L}p(\gamma_k)\mathrm{d}(t)\mathrm{d}(\gamma) = \tag{A.4}$$

$$\frac{n}{I_\lambda^L}\iint g(t - t_0, \gamma)p(\gamma \mid t_0)\lambda(t_0)\mathrm{d}t_0\mathrm{d}\gamma. \tag{A.5}$$

So

$$\mathbb{E}\{y^L(t)\} = \mathrm{e}^{-I_\lambda^L}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(I_\lambda^L)^{n-1}}{(n-1)!}\iint_{-L/2}^{L/2} g(t - t_0, \gamma)p(\gamma \mid t_0)\lambda(t_0)\mathrm{d}t_0\mathrm{d}\gamma \tag{A.6}$$

$$= \iint_{-L/2}^{L/2} g(t - t_0, \gamma_k)\lambda(t_0)p(\gamma \mid t_0)\mathrm{d}t_0\mathrm{d}\gamma. \tag{A.7}$$

如果该积分在L 趋于无穷大时收敛，

$$\mathbb{E}\{y(t)\} = \iint g(t - t_0, \gamma)p(\gamma \mid t_0)\lambda(t_0)\mathrm{d}t_0\mathrm{d}\gamma. \tag{A.8}$$

现在计算乘积 $y^L(t_a)y^L(t_b)$ 的期望值。同样，假设可以交换无穷级数与积分的顺序，由于当 $k \neq j$ 时，t_k 和 t_j 在统计上相互独立，

$$\mathbb{E}\{y^L(t_a)y^L(t_b)\} = \mathrm{e}^{-I_\lambda^L}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(I_\lambda^L)^n}{n!}\times \tag{A.9}$$

$$\sum_{k,j=1,k\neq j}^{n}\iint_{-L/2}^{L/2} g(t_a - t_k, \gamma_k)\frac{\lambda(t_k)}{I_\lambda^L}p(\gamma_k)\mathrm{d}t_k\mathrm{d}\gamma_k\iint_{-L/2}^{L/2} g(t_b - t_j, \gamma_j)\frac{\lambda(t_j)}{I_\lambda^L}p(\gamma_j)\mathrm{d}t_j\mathrm{d}\gamma_j \tag{A.10}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\iint_{-L/2}^{L/2} g(t_a - t_k, \gamma_k)g(t_b - t_k, \gamma_k)\frac{\lambda(t_k)}{(I_\lambda^L)^2}p(\gamma_k)\mathrm{d}t_k\mathrm{d}\gamma_k. \tag{A.11}$$

将乘积分配到各项 (A.11) 和 (A.10) 上；由于有 $n(n-1)$ 对 k、j，其中 $k \neq j$， $\mathbb{E}\{y^L(t_a)y^L(t_b)\}$ 可写成两项之和C^L 和 D^L，

$$C^L(t_a, t_b) = \mathrm{e}^{-I_\lambda^L}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(I_\lambda^L)^n}{n!}\frac{n(n-1)}{(I_\lambda^L)^2} \tag{A.12}$$

$$\times\iint_{-L/2}^{L/2} g(t_a - t_0, \gamma)\lambda(t_0)p(\gamma)\mathrm{d}t_0\mathrm{d}\gamma\iint_{-L/2}^{L/2} g(t_b - t_0)\lambda(t_0)p(\gamma)\mathrm{d}t_0\mathrm{d}\gamma \tag{A.13}$$

(A.14)

and

$$D^L(t_a, t_b) = \iint_{-L/2}^{L/2} g(t_a - t_0)g(t_b - t_0)\lambda(t_0)p(\gamma|t_0)\mathrm{d}t_0\mathrm{d}\gamma. \tag{A.15}$$

需要指出的是，当L 趋于无穷大时，只要对t_k 的积分收敛，$C^L(t_a,t_b)$就是 $\mathbb{E}\{y(t_a)\}$ 与$\mathbb{E}\{y(t_b)\}$的乘积。如果$D^L(t_a,t_b)$在L 趋于无穷大时存在极限，则y的协方差为

$$\mathrm{Cov}(y(t_a), y(t_b)) = \iint g(t_a - t_0, \gamma)g(t_b - t_0, \gamma)\lambda(t_0)p(\gamma|t_0)\mathrm{d}t_0\mathrm{d}\gamma \tag{A.16}$$

在这个公式中， γ 的分布可能取决于t_0。

请注意，如果我们将$y(t_b)$替换为$z(t_b)$，其中z 用于描述恒星活动对另一项辅助指标的影响，

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(t - t_k, \gamma(t_k)) \tag{A.17}$$

推理过程不变；并且只要L趋于无穷时的所有极限都收敛，

$$\mathrm{Cov}(y(t_a), z(t_b)) = \iint g(t_a - t, \gamma)h(t_b - t, \gamma)\lambda(t)p(\gamma|t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}\gamma \tag{A.18}$$

附录 *A.2*：累积量与多谱

附录 A.2.1：目的

本节将计算 FENRIR过程$y(t)$的累积量和多谱的解析公式，其定义为

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t - t_k, \gamma(t_k)). \tag{A.19}$$

我们已经看到，对于平稳的 FENRIR过程，自协方差的形式为$k(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, \gamma)g(t + \tau, \gamma)p(\gamma)\mathrm{d}t$。即使 γ 只能取一个值，已知$k(\tau)$也无法唯一确定g：多个函数可能具有相同的自相关。如果$y(t)$服从高斯分布，那么据此我们能做的最好是估计$k(\tau)$。如果$y(t)$不服从高斯分布，我们就能更精确地刻画g ，从而不仅减少偏差，还能利用更多信息。累积量的目的是揭示非高斯行为。

$y(t_1)$,$y(t_1)$.....$y(t_n)$的累积量生成函数为（无论t为何值），

$$K^n_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \ln\mathbb{E}\{\mathrm{e}^{\alpha_1 y(t_1)+\ldots+\alpha_n y(t_n)}\} \tag{A.20}$$

在将K 作为 α_is的函数进行泰勒展开时，n阶累积量 κ_n是其乘积 $\alpha_1\alpha_2$.....α_n的系数。将其视为$t_1, t_2, \ldots..t_n$ 的函数时，有时称为n

点相关函数。对于高斯过程，3 阶和 4 阶累积量为零。我们的主要结果是

定理 1。

$$\kappa_n(y(t_1), y(t_2), ..., y(t_n)) = \iint g(t-t_1,\gamma)g(t-t_2,\gamma)...g(t-t_n,\gamma)\lambda(t)p(\gamma,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\gamma. \quad \text{(A.21)}$$

协方差就是二点相关函数。当高斯过程为平稳过程时，我们有 $\kappa_n(t_1,t_2) = \kappa_n(|t_1 - t_2|)$，因此它们等价地表示为核函数 $\kappa(\tau)$ 的傅里叶变换：即其功率谱密度（PSD）。类似地，在过程平稳性的假设下，量 $\kappa_n(t、t+\tau_1、...、t+\tau_{n-1})$ 不依赖于 t。将 n 点相关函数视为 $n-1$ 个变量 $\tau_1、...、\tau_{n-1}$ 的函数后，我们可以将多谱定义为 $\kappa_n(t、t+\tau_1、...、t+\tau_{n-1})$ 的 n 维傅里叶变换。

公式（A.22）的证明可以直接修改，以证明一个更一般的结果，

$$\kappa_n(x_1(x_1), x_2(t_2), ..., x_n(t_n)) = \iint f_1(t-t_1,\gamma)f_2(t-t_2,\gamma)...f_n(t-t_n,\gamma)\lambda(t)p(\gamma,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\gamma. \quad \text{(A.22)}$$

其中 $x_i(t) = y(t)$或 $x_i(t) = z(t)$。若 $x_i(t) = y(t)$，则 $f_i(t) = g(t =$；若 $x_i(t) = z(t)$，则 $f_i(t) = h(t)$。这个表达式推广了公式（A.18）。它的优点在于，即使过程是非平稳的，该表达式仍然有效，并且可以探究不同通道之间的非高斯依赖关系。不过，在实际应用中，同时考察所有这些方面不太可能实现。

如果模式以恒定的泊松率出现，且 $\gamma(t_k)$ 所遵循的分布不随时间变化，即 $\gamma(t_k) \sim p(\gamma)$，那么随机过程 $y(t)$ 是平稳的。我们可以将公式（A.22）表示为时间差 $\tau_i = t_i - t_1$ 的函数。通过变量替换 $t \leftarrow t - t_1$，

$$\kappa_n(\tau_1, ..., \tau_{n-1}; \eta) = \lambda \iint g(t,\gamma)g(t+\tau_1,\gamma)...g(t+\tau_{n-1},\gamma)p(\gamma \mid \eta)\mathrm{d}t\mathrm{d}\gamma, \quad \text{(A.23)}$$

在这种情况下，κ_n 关于 $\tau_1、...、\tau_{n-1}$ 的傅里叶变换称为 n 阶多谱。此处，若关于 γ 和 $\tau_1、...、\tau_{n-1}$ 的积分可逆，则其等于

$$S_n(\omega_1, ..., \omega_{n-1}; \eta) = \lambda \int \hat{g}(\omega_1,\gamma)...\hat{g}(\omega_{n-1},\gamma)\hat{g}\left(-\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i, \gamma\right)p(\gamma \mid \eta)\mathrm{d}\gamma. \quad \text{(A.24)}$$

为了理解多谱的用途，我们回到高斯过程的情形。功率谱密度除了可解释为核函数的傅里叶变换外，还有另一种解释：它是过程的傅里叶变换模平方的期望值，因此平稳高斯过程具有完全随机的相位。假设我们分别计算平稳高斯过程在时间 t_1 与 t_2 之间，以及在 t_3 与 t_4 之间的相位，并且 $t_3 - t_2$ 远大于过程的相关时间，那么在第一个和第二个时间区间得到的相位在统计上相互独立。对于平稳高斯过程，对所有 $n \geqslant 3$，公式（A.24）对于任意频率选择 $\omega_1、...、\omega_{n-1}$ 都应等于零。因此，非零多谱意味着非高斯性。考虑一个量 ν 以及所有满足 $\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i = \nu$ 的 $n-1$ 个频率的组合。在公式（A.24）中，在 ν 处求得的傅里叶变换相位可视为一个参照点。如果频率 $\omega_1、...、\omega_{n-1}$ 和 ν 并非独立，则多谱非零。

附录 A.2.2：证明

为推导公式（A.22），我们将使用累积量的若干性质，下面对此作出说明。

定理 2. 考虑 n 个随机变量 $Y_1, Y_2, ..., Y_n$（定义在同一个 σ 代数上）。*(i)* 对所有 i，以及任意两个实数 a 和 b，累积量具有多重线性性质：$\kappa(Y_1, ..., aY_i + bY_i', ..., Y_n) = a\kappa(Y_1, ..., Y_i, ..., X_n) + b\kappa(Y_1, ..., Y_i', ..., Y_n)$。

(ii) 如果存在至少两个指标 $i \neq j$，使得 Y_i 和 Y_j 相互独立，则 $\kappa(Y_1, ..., Y_i, ..., Y_j, ..., Y_n) = 0$。

(iii) 如果 N 是一个服从参数为 Λ 的泊松分布的随机变量，那么无论 N 重复出现多少次，$\kappa(N, N....., N) = \Lambda$。

(iv) 全累积量定律。假设有一个随机变量 Y，并且可以定义已知 X 时 Y_is 的条件分布。那么

$$\kappa(Y_1, ..., Y_n) = \sum_{\pi \in \mathbb{P}(n)} \kappa(\kappa(Y_i : i \in B \mid X) : B \in \pi) \quad \text{(A.25)}$$

其中，$\pi \in \mathbb{P}(n)$表示 π 遍历指标 $\{1,...,n\}$的所有可能划分。$B \in \pi$表示B遍历划分 π 的各个块，而$\kappa(Y_i : i \in B \mid X)$是给定$X$时$Y_i : i \in B$的累积量，它是随机变量$X$的函数，也是一个随机变量。例如，假设我们要计算 $\kappa(Y_1,Y_2,Y_3)$。指标 $\{1,2,3\}$的划分为 $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$、$\{\{1\},\{2,3\}\}$、$\{\{2\},\{1,3\}\}$、$\{\{3\},\{1,2\}\}$、$\{\{1,2,3\}\}$。在划分 $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ 中有三个块：$\{1\}$、$\{2\}$ 和$\{3\}$。在划分 $\{\{1\},\{2,3\}\}$ 中有两个块：$\{1\}$ 和 $\{2,3\}$。对于$n = 3$，全累积量定律可写为

$$\begin{aligned}\kappa(Y_1,Y_2,Y_3) = {} & \kappa(\kappa(Y_1,Y_2,Y_3 \mid X)) \\ & + \kappa(\kappa(Y_1,Y_2 \mid X),\kappa(Y_3 \mid X)) \\ & + \kappa(\kappa(Y_1,Y_3 \mid X),\kappa(Y_2 \mid X)) \\ & + \kappa(\kappa(Y_2,Y_3 \mid X),\kappa(Y_1 \mid X)) \\ & + \kappa(\kappa(Y_1 \mid X),\kappa(Y_2 \mid X),\kappa(Y_3 \mid X))\end{aligned}$$

其中，量 $\kappa(Y_i : i \in B \mid X)$ 是随机变量，因为它们是随机变量 X 的函数。*(v)* 使用相同的记号，累积量与非中心矩之间的关系如下

$$\mathbb{E}\{Y_1Y_2...Y_3\} = \sum_{\pi \in \mathbb{P}(n)} \prod_{B \in \pi} \kappa(Y_i : i \in B \mid Y). \quad \text{(A.26)}$$

例如

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{Y_1Y_2Y_3\} = {} & \kappa(Y_1,Y_2,Y_3) \\ & + \kappa(Y_1,Y_2)\kappa(Y_3) \\ & + \kappa(Y_1,Y_3)\kappa(Y_2) \\ & + \kappa(Y_2,Y_3),\kappa(Y_1) \\ & + \kappa(Y_1)\kappa(Y_2)\kappa(Y_3)\end{aligned}$$

公式 (A.25) 和 (A.26) 类似。第一种情况下，对分布的不同块求累积量；第二种情况下，则直接取乘积。这将在式 (A.22) 的证明中发挥作用。

考虑递增排序的n个$T_1,...,T_n$时间点。假设g 具有紧支集，也就是说，对于某个T，当$x \in [-T/2,T/2],$时，$g(x,\gamma) = 0$。由于g 具有紧支集，

对于y（定义见公式 (A.27)），计算n阶$y(T_1)$, ...,$y(T_n)$的累积量，等价于计算变量Y_i的累积量

$$Y_i = \sum_{k=1}^{N} g(T_i - t_k, \gamma(t_k)). \tag{A.27}$$

其中特征出现在t_k，在$t_1 - T/2$ 与$t_n + T/2$ 之间按可变速率 $\lambda(t)$ 发生泊松过程。N表示此区间内特征的数量，服从参数为 $\Lambda = \int^{t_n+}{}_{T/2\ t_1-T/2}\ ^{\lambda}(t)$ 的泊松分布。在时间t_k 出现的特征，其参数取自分布$p(\gamma,t)$。

根据累积量的多重线性（定理 A.2.2 中的性质（i）），我们有

$$\kappa(Y_1, ..., Y_n \mid N) = \sum_{i_1=1}^{N} ... \sum_{i_n=1}^{N} \kappa(G(T_1 - t_{i_1}), ..., G(T_n - t_{i_n} \mid N) \tag{A.28}$$

独立变量的可测函数彼此独立。由于t_i和t_j在$i \neq j$时相互独立，因此$G(T_1 - t_i)$ 和$G(T_1 - t_j)$ 不独立，当且仅当$i = j$。现在，由于当两个或更多变量相互独立时，累积量为零（定理 A.2.2 中的性质（ii）），

$$\kappa(G(T_1 - t_{i_1}), ..., G(T_n - t_{i_n}) \mid N) \neq 0 \tag{A.29}$$

当且仅当$i_1 = i_2 = ...i_n$，并且

$$\kappa(Y_1, ..., Y_n \mid N) = \sum_{i=1}^{N} \kappa(G(T_1 - t_i), ..., G(T_n - t_i) \mid N) \tag{A.30}$$

对于每个 i，$G(T_1 - t_i)$，...，$G(T_n - t_i)$ 的值都来自同一分布。因此，对于所有 i、j = 1..N，$\kappa(G(T_1 - t_i), ..., G(T_n - t_i) \mid N) = \kappa(G(T_1 - t_j), G(T_n - t_j) \mid N)$，并且

$$\kappa(Y_1, ..., Y_n \mid N) = N\kappa(G(T_1 - t_i), ..., G(T_n - t_i) \tag{A.31}$$

根据全累积量定律（定理 A.2.2 中的性质（iv）），

$$\kappa(Y_1, ..., Y_n) = \sum_{\pi \in \mathbb{P}(n)} \kappa(\kappa(Y_i : i \in B \mid N) : B \in \pi) \tag{A.32}$$

代入公式 (A.31)，得到

$$\kappa(Y_1, ..., Y_n) = \sum_{\pi \in \mathbb{P}(n)} \kappa(N\kappa(G_i : i \in B) : B \in \pi) \tag{A.33}$$

根据累积量的多重线性，得到

$$\kappa(N\kappa(G_i : i \in B) : B \in \pi) = \prod_{i \in B} \kappa(G_i : i \in B)\kappa_{|B|}(N) \tag{A.34}$$

其中 $\kappa_{|B|}N = \kappa(N,..., N)$，其中 N 重复出现 $|B|$ 次，即块的数量。对于参数为 Λ 的泊松分布，$\kappa(N,..., N) = \Lambda$（定理 A.2.2 中的性质（$iii$））现在得到

$$\kappa(Y_1, ..., Y_n) = \Lambda \sum_{\pi \in \mathbb{P}(n)} \prod_{B \in \pi} \kappa(Y_i : i \in B \mid N) \tag{A.35}$$

并且，得益于矩与累积量之间的联系（定理 A.2.2 中的性质（v）），我们可以写出

$$\kappa(Y_1, ..., Y_n) = \Lambda \mathbb{E}\{G(T_1 - t)...G(T_n - t)\} \tag{A.36}$$

最后，根据 $\mathbb{E}\{G(T_1 - t)...G(T_n - t)\}$ 的定义，

$$\mathbb{E}\{G(T_1 - t)...G(T_n - t)\} = \tag{A.37}$$

$$\frac{1}{\Lambda} \int_{t_1 - T/2}^{t_n + T/2} g(T_1 - t, \gamma(t))...g(T_n - t, \gamma(t))\lambda(t)p(\gamma \mid t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\gamma \tag{A.38}$$

用 Λ 化简，并注意到由于g的紧支集，积分 (A.38) 的上下限取为 $-\infty$ 和 $+\infty$ 时，积分值不变；该结论对任意T均成立。因此，我们可以将结果推广到具有无限支集的函数，从而得到所需结果，

$$\kappa(Y_1, ..., Y_n) = \int_{-\infty}^{\infty} g(T_1 - t, \gamma(t))...g(T_n - t, \gamma(t))\lambda(t)p(\gamma \mid t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\gamma. \tag{A.39}$$

附录 B：黑子/光斑 RV 效应的解析近似

附录 *B.1*：加权 *RV*

在本附录中，我们对 RV 和光度效应作如下近似。我们假设宁静恒星表面数据上的 RV 效应为

$$RV_{quiet}(t) = \frac{1}{F_0} \iint F(\boldsymbol{x})\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot \tag{B.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 是可见圆面上的位置，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})$ 是局部速度，$F(\boldsymbol{x})$ 是局部通量，F_0 是对整个恒星表面积分得到的通量，而 $\boldsymbol{e}_{obs}$ 是从观测者指向恒星的单位向量。其中

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = V_{cb}\boldsymbol{e}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r} \tag{B.2}$$

其中V_{cb} 是对流蓝移效应的速度模，$\boldsymbol{e}_r$ 径向向外指向，$\boldsymbol{\omega}$ 是自转轴乘以自转速度，而$\boldsymbol{r}$ 是连接恒星中心与恒星表面上位置$\boldsymbol{x}$ 处的点的向量。

用 $RV^{mag}(t)$ 表示存在磁区时的 RV，用$V'(\boldsymbol{x})$ 和$F'(\boldsymbol{x})$ 表示速度场和通量场，

$$RV_{mag}(t) = \frac{1}{F_0'} \iint F'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{V}'(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_{obs} \tag{B.3}$$

其中

$$\boldsymbol{V}'(\boldsymbol{x}) = (V_{cb} + \Delta V_{cb})\boldsymbol{e}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r} \tag{B.4}$$

$$F'(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}) + \Delta F(\boldsymbol{x}). \tag{B.5}$$

我们关注$RV^{mag}(t)$与$RV_{quiet}(t)$之间的差值。将F_0' 按 ΔF展开至一阶，可得

$$\left(\frac{f'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{V}'(\boldsymbol{x})}{F_0'} - \frac{f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})}{F_0}\right) \cdot \boldsymbol{e}_{obs} = y_{cb} + y_{ph} \tag{B.6}$$

$$y_{cb} = \left(\Delta F V_{cb}\left(1 - \frac{F}{F_0}\right) + \Delta V_{cb}(F + \Delta F)\right)\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_{obs} \tag{B.7}$$

$$y_{ph} = \Delta F \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}_{obs} \tag{B.8}$$

,项y_{cb} 和y^{ph} 分别称为对流蓝移抑制项和径向速度光度项。

假设磁区很小，则通量可写成单位表面积通量$f(\boldsymbol{x})$与.....的乘积

磁区的投影面积，$A(\boldsymbol{x})P(\boldsymbol{x})$，其中 $A(\boldsymbol{x})$ 为本征面积，$P(\boldsymbol{x})$ 为投影效应，乘以恒星边缘暗化效应$l(\boldsymbol{x})$。我们写作

$$F(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})A(\boldsymbol{x})P(\boldsymbol{x})l(\boldsymbol{x}) \tag{B.9}$$
$$\Delta F(\boldsymbol{x}) = \Delta f(\boldsymbol{x})A(\boldsymbol{x})P(\boldsymbol{x})l(\boldsymbol{x}). \tag{B.10}$$

下面，我们推导倾斜恒星上磁区的位置（经度ϕ 和纬度 δ）与通量和径向速度之间的表达式。对于小星斑，我们可以忽略式 (B.7) 中的F/F_0 项。

我们将恒星表面建模为一个球体，并假设星斑或光斑是该单位半径球体上的无穷小面积。为简便起见，以下我们仅称其为星斑，但对光斑的推导完全相同。我们考虑一个直接坐标系x、y、z，其中x 指向观测者，而y、z 定义天球平面。

首先假设恒星的自转轴与z 对齐。用 ϕ、δ 表示星斑中心的球坐标，使其在笛卡尔坐标系中的位置为

$$x = \cos\delta\cos\phi \tag{B.11}$$
$$y = \cos\delta\sin\phi \tag{B.12}$$
$$z = \sin\delta \tag{B.13}$$

在（x，y，z）处的局部坐标系（u，v，w）满足

$$u = \cos\delta\cos\phi x + \cos\delta\sin\phi y + \sin\delta z \tag{B.14}$$
$$v = -\sin\phi x + \cos\phi y \tag{B.15}$$
$$w = -\sin\delta\cos\phi x - \sin\delta\sin\phi y + \cos\delta z \tag{B.16}$$

星斑对径向速度的影响取决于恒星相对于天空平面的倾角i。为计算星斑的位置，以及以星斑为中心的局部坐标系在参考系中的投影，我们绕y 轴旋转角度$i \in [0, \pi/2]$。现在我们得到

$$x = \cos i\cos\delta\cos\phi + \sin i\sin\delta \tag{B.17}$$
$$y = \cos\delta\sin\phi \tag{B.18}$$
$$z = -\sin i\cos\delta\cos\phi + \cos i\sin\delta \tag{B.19}$$

and

$$u = (\cos i\cos\delta\cos\phi + \sin i\sin\delta)x \tag{B.20}$$
$$+ \cos\delta\sin\phi y + (-\sin i\cos\delta\cos\phi + \cos i\sin\delta)z \tag{B.21}$$
$$v = -\cos i\sin\phi x + \cos\phi y + \sin i\sin\phi y \tag{B.22}$$
$$w = -\cos i\sin\delta\cos\phi x - \sin\delta\sin\phi y \tag{B.23}$$
$$+ (\sin i\sin\delta\cos\phi + \cos i\cos\delta)z \tag{B.24}$$

我们假设，对于恒星表面上的一个无穷小部分，星斑的效应与其在天球平面上的投影面积、沿x轴投影的速度（更准确地说，是沿-x 轴的速度，因为假设速度在观测者指向恒星的方向上为正）以及一个临边昏暗效应的乘积成正比。对于光度效应，所涉及的速度是静止系中恒星表面因恒星自转而产生的速度，因此是速度的v 分量。对流蓝移抑制效应源于气体从恒星中心向恒星表面的运动。因此，我们关注的是投影到x轴上的速度u 分量。星斑在恒星表面上的位置会改变其在天球平面上的投影面积。修正因子等于从由v、w平面投影到y、z平面的雅可比行列式。根据公式（B.22）和公式（B.24），星斑的投影面积正比于

$$J(i,\delta,\phi) := \cos\phi(\sin i\sin\delta\cos\phi + \cos i\cos\delta) \tag{B.25}$$
$$-(-\sin\delta\sin\phi)\sin i\sin\phi \tag{B.26}$$
$$J(i,\delta,\phi) = \sin i\sin\delta + \cos i\cos\delta\cos\phi \tag{B.27}$$

当星斑的位置满足$x \geqslant 0$时，它是可见的。由式(B.17)可知，这对应于条件

$$\cos\phi \geqslant -\tan i\tan\delta \tag{B.28}$$

总体而言，光度效应和对流蓝移抑制效应对径向速度的速度贡献（y^{ph} 和y_{cb}），以及它们对测光的影响z^{ph}，在不满足 B.28 时为 0；满足时则为：

$$y^{ph}(i,\delta,\phi) = Al(J(i,\delta,\phi))\Delta f\omega R^{\star}J(i,\delta,\phi)\cos i\sin\phi\cos\delta \tag{B.29}$$
$$y_{cb}(i,\delta,\phi) = Al(J(i,\delta,\phi))(\Delta f V_{cb} + \Delta V_{cb}(f+\Delta f))J(i,\delta,\phi)^2 \tag{B.30}$$
$$z_{ph}(i,\delta,\phi) = A\Delta f l(J(i,\delta,\phi))J(i,\delta,\phi) \tag{B.31}$$

Δf 是恒星表面与星斑之间的通量差，$f^{\star}$ 是恒星通量的均值，ω 是恒星的局部旋转速度，$R^{\star}$ 是恒星半径，ΔV_{CB} 表示在有和没有对流蓝移抑制时，气体沿u 方向的速度差。+ 符号源于将u 和v 投影到 $-x$上这一事实；对流蓝移抑制在$-u$ 方向上具有正速度。光度效应可以为正，也可以为负，这取决于所考虑区域的亮度高于还是低于恒星连续谱。符号l 表示边缘昏暗，它是恒星边缘亮度随距恒星中心距离变化的函数，并以恒星半径 μ 归一化。在我们的参数化中，$\mu = (\phi,\delta,\phi)$。实际上，球面三角余弦定理给出 $\mu = \cos\delta_0\cos\phi_0$，其中 ϕ_0和 δ_0 是球面坐标，定义在x 轴指向观测者的坐标系中；绕y 轴旋转i 后得到 $\mu = \cos\delta_0\cos\phi_0 = J$。对于赤道星斑且$i = 0$，我们只需有

$$y_{ph} = \cos\phi\sin\phi = \frac{1}{2}\sin 2\phi \tag{B.32}$$
$$y_{cb} = \cos^2\phi = \frac{1}{2}(1+\cos 2\phi) \tag{B.33}$$

对于非恒定的边缘昏暗定律 $l(J)$，公式 B.29 和 B.30 的表达式尤其简单。如果 l 具有以下形式

$$l(J) = \sum_{k=0}^{d} a_k J^k \tag{B.34}$$

在一般情况下，光度效应和对流蓝移抑制效应会相加。为简便起见，我们将它们的贡献写成一个乘法因子，并将光度效应相对于对流蓝移抑制的相对贡献记为 B。因此，径向速度上的综合效应为

$$g(t) = \sum_{k=0}^{d} a_k J^{k+1}(J(i,\delta,\phi) + \beta\cos i\sin\phi) \tag{B.35}$$

当 ϕ 满足式 (B.28) 时；否则为 0。

当临边昏暗定律取为常数时，星斑径向速度效应的一般公式为

$$g(\phi) \propto \sin^2 i \sin^2 \delta + \frac{\cos^2 i \cos^2 \delta}{2} \tag{B.36}$$

$$+ \frac{\sin 2i \sin 2\delta}{2} \cos\phi + \frac{\cos^2 i \cos^2 \delta}{2} \cos 2\phi \tag{B.37}$$

$$- B\frac{\sin 2i \sin 2\delta}{4} \sin\phi - B\frac{\cos^2 i \cos^2 \delta}{2} \sin 2\phi \tag{B.38}$$

对于恒定的自转速率和恒定的 δ，我们有 $\phi = \omega t$。我们可以将 g 改写为

$$g(t, i, \delta, B) = c_0 + c_1 \cos\omega t + c_2 \cos 2\omega t + s_1 \sin\omega t + s_2 \sin 2\omega t \tag{B.39}$$

其中 c_0,c_1,c_2, s_1, s_2 是取决于 i、 δ 和 β 的系数。最后需要指出的是，由于边缘昏暗是 J 的幂，而 J 本身是 $\cos\omega t$ 的仿射函数，因此无论选择何种阶数的边缘昏暗定律，我们始终可以将 g 写成以下形式

$$g(t, i, \delta, B) = c_0 + \sum_{k=1}^{d} c_k \cos(k\omega t) + s_k \sin(k\omega t) \tag{B.40}$$

附录 *B.2*：与交叉相关函数相关的通道

在上一节中，我们假设测得的径向速度是局部恒星径向速度按照其相对通量加权后的总和。然而，这是一种过于简单的假设。在本节中，我们考虑测得的互相关函数（互相关函数）是局部恒星互相关函数的加权总和，并推导径向速度以及辅助指标的表达式。

通过交叉相关函数法提取径向速度测量值时，通常使用高斯函数对互相关函数进行建模

$$m_{\rm CCF}(v; \eta) = a\left(1 - c\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{v - v_0}{\sigma}\right)^2\right)\right) \tag{B.41}$$

其中 a 为连续谱通量，c 为对比度，v_0 为径向速度， $2\sqrt{2\ln(2)}\sigma$ 为半高全宽。参数 η =（a、c、v_0、σ）通常使用最小二乘估计量进行调整。我们将通过拟合不受活动贡献影响的 CCF 所得到的参数记为 η_0。现在考虑 CCF 中一个小特征（星斑/光斑）的贡献 δCCF。通过在 η_0附近对高斯模型进行线性化，可以估计该特征对参数 η 的影响

$$m_{\rm CCF}(v; \eta_0 + \delta\eta) = m_{\rm CCF}(v; \eta_0) + \nabla_\eta m_{\rm CCF}(v; \eta_0)\delta\eta, \tag{B.42}$$

with

$$\nabla_\eta m_{\rm CCF}(v; \eta_0) = \left(1 - cG(v) \quad -aG(v) \quad -\frac{ac(v-v_0)}{\sigma^2}G(v) \quad -\frac{ac(v-v_0)^2}{\sigma^3}G(v)\right) \tag{B.43}$$

以及 G（v） $= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{v-v_0}{\sigma}\right)^2\right)$。随后，通过求使 $\delta\eta$最小的值来获得这些参数

$$\int_{v_{\rm min}}^{v_{\rm max}} (\delta{\rm CCF}(v) - \nabla m.\delta\eta)^2 \, {\rm d}v, \tag{B.44}$$

其中，互相关函数是在速度区间 $[v_{\rm min}, v_{\rm max}]$ 上计算的。这给出了参数估计值

$$\delta\eta = \alpha^{-1}\beta, \tag{B.45}$$

其中 α 是 4×4 矩阵，而 β 是一个大小为 4 的向量，其定义如下：

$$\alpha = \int_{v_{\rm min}}^{v_{\rm max}} \nabla m(v)^T \nabla m(v) {\rm d}v,$$

$$\beta = \int_{v_{\rm min}}^{v_{\rm max}} \nabla m(v)^T \delta{\rm CCF}(v) {\rm d}v. \tag{B.46}$$

对于地基地面光谱学，连续谱通量a 实际上会受到地球大气和其他观测条件的强烈影响，这使得该参数对于恒星表征毫无用处。此外，可以证明连续谱通量a与其他参数之间的相关性可以忽略不计，因此实际上可以忽略该参数，并将另外三个参数$\eta_{1:}$ =（c、v_0、 σ）的变化近似为

$$\delta\eta_{1:} = \alpha^{-1}_{1:,1:}\beta_{1:}. \tag{B.47}$$

确实，对于足够大的区间 $[v_{\rm min}, v_{\rm max}]$，连续谱通量 a 主要由位于互相关函数尾部的信息决定，而其他所有参数则利用互相关函数中心所包含的信息（见式 (B.43)）。我们可以通过逐渐增大区间 $[v_{\rm min}, v_{\rm max}]$，使其趋近于$]-\infty, +\infty[$，来验证这一点。随着区间增大，矩阵 α 的所有分量都会收敛，唯独$\alpha_{0,0}$（对应于连续谱通量a）例外；其渐近地与区间长度成正比（$\Delta v = v_{\rm max} - v_{\rm min}$）。由此可推导参数 α^{-1}的协方差矩阵以及相关矩阵的渐近行为。我们发现，a 与其他参数之间的相关性渐近地与 $1/\sqrt{\Delta v}$成正比，因此当区间足够大时趋于零。 —

在 $[v_{\rm min}, v_{\rm max}] \longrightarrow]-\infty, \infty[$, 的极限下，我们得到

$$\alpha_{1:,1:} = a^2\sqrt{2\pi}\sigma\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{c}{2\sigma} \\ 0 & \frac{c^2}{2\sigma^2} & 0 \\ \frac{c}{2\sigma} & 0 & \frac{3c^2}{4\sigma^2} \end{pmatrix}, \tag{B.48}$$

因此，我们有

$$\alpha^{-1}_{1:,1:} = \frac{2\sigma}{a^2c^2\sqrt{2\pi}}\begin{pmatrix} \frac{3c^2}{4\sigma^2} & 0 & -\frac{c}{2\sigma} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{c}{2\sigma} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{B.49}$$

最后

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta c}{c} \\ \frac{\delta v}{\sigma} \\ \frac{\delta\sigma}{\sigma} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2ac}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} b, \tag{B.50}$$

其中 b 由（k = 0, 1, 2）给出

$$b_k = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{v - v_0}{\sigma}\right)^k G(v)\delta{\rm CCF}(v) {\rm d}v. \tag{B.51}$$

现在，我们需要明确星斑对互相关函数的影响 δCCF，以便能够计算 b。我们假设，如果没有星斑，星斑位置处恒星表面对互相关函数的贡献应为

$${\rm CCF}_l(v) = a_l\left(1 - c_l\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{v - v_l}{\sigma_l}\right)^2\right)\right). \tag{B.52}$$

由于星斑的存在，局部互相关函数发生了变化。作为第一近似，我们假设它仍近似为高斯分布，但参数有所变化：a_s,c_s,v_s, σ_s:

$${\rm CCF}_s(v) = a_s\left(1 - c_s\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{v - v_s}{\sigma_s}\right)^2\right)\right), \tag{B.53}$$

其中，星斑的通量$a_s < a_l$，光斑的通量$a_s > a_l$。由于对流蓝移受到抑制，导致净红移，因此我们预期星斑和光斑的$v_s > v_l$均如此。此外，两类活动区中的塞曼展宽效应往往会降低对比度$c_s < c_l$，并增大半高全宽（$\sigma_s > \sigma_l$）。最后，星斑对互相关函数的影响可以建模为

$$\delta\mathrm{CCF}(v) = \mathrm{CCF}_s(v) - \mathrm{CCF}_l(v). \tag{B.54}$$

将该表达式代入式 (B.51)，得到

$$\begin{aligned} b = (a_s - a_l)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \\ + a_l \frac{c_l\sigma_l}{\sqrt{\sigma^2+\sigma_l^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\delta v_l^2}{\sigma^2+\sigma_l^2}\right)\begin{pmatrix}1\\ \frac{\sigma}{\sigma^2+\sigma_l^2}\delta v_l \\ \frac{\sigma_l^2}{\sigma^2+\sigma_l^2} + \frac{\sigma^2}{\left(\sigma^2+\sigma_l^2\right)^2}\delta v_l^2\end{pmatrix} \\ - a_s \frac{c_s\sigma_s}{\sqrt{\sigma^2+\sigma_s^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\delta v_s^2}{\sigma^2+\sigma_s^2}\right)\begin{pmatrix}1\\ \frac{\sigma}{\sigma^2+\sigma_s^2}\delta v_s \\ \frac{\sigma_s^2}{\sigma^2+\sigma_s^2} + \frac{\sigma^2}{\left(\sigma^2+\sigma_s^2\right)^2}\delta v_s^2\end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{B.55}$$

其中 $\delta v_l = v_l - v_0, \delta v_s = v_s - v_0$。在 δv 的最低阶下，我们得到

$$\begin{aligned} b_0 &\approx a_s\left(1 - \frac{c_s\sigma_s}{\sqrt{\sigma^2+\sigma_s^2}}\right) - a_l\left(1 - \frac{c_l\sigma_l}{\sqrt{\sigma^2+\sigma_l^2}}\right), \\ b_1 &\approx \frac{a_l c_l \sigma_l \sigma}{\left(\sigma^2+\sigma_l^2\right)^{3/2}}\delta v_l - \frac{a_s c_s \sigma_s \sigma}{\left(\sigma^2+\sigma_s^2\right)^{3/2}}\delta v_s, \\ b_2 &\approx a_s\left(1 - \frac{c_s\sigma_s^3}{\left(\sigma^2+\sigma_s^2\right)^{3/2}}\right) - a_l\left(1 - \frac{c_l\sigma_l^3}{\left(\sigma^2+\sigma_l^2\right)^{3/2}}\right), \end{aligned} \tag{B.56}$$

因此（见式 (B.50)）

$$\begin{aligned} 2a \times \delta c &\approx a_l\left(1 - c_l\frac{\sigma_l\left(3\sigma^2+\sigma_l^2\right)}{\left(\sigma^2+\sigma_l^2\right)^{3/2}}\right) - a_s\left(1 - c_s\frac{\sigma_s\left(3\sigma^2+\sigma_s^2\right)}{\left(\sigma^2+\sigma_s^2\right)^{3/2}}\right), \\ \frac{ac}{2\sigma^2} \times \delta v &\approx \frac{a_s c_s \sigma_s}{\left(\sigma^2+\sigma_s^2\right)^{3/2}}\delta v_s - \frac{a_l c_l \sigma_l}{\left(\sigma^2+\sigma_l^2\right)^{3/2}}\delta v_l, \\ \frac{ac}{\sigma} \times \delta\sigma &\approx a_l\left(1 - c_l\frac{\sigma_l\left(\sigma_l^2-\sigma^2\right)}{\left(\sigma^2+\sigma_l^2\right)^{3/2}}\right) - a_s\left(1 - c_s\frac{\sigma_s\left(\sigma_s^2-\sigma^2\right)}{\left(\sigma^2+\sigma_s^2\right)^{3/2}}\right). \end{aligned} \tag{B.57}$$

因此我们发现，除了光度效应引起的速度变化（与$a_s - a_l$成正比）以及对流蓝移抑制效应（$v_s - v_l$）之外，等效宽度$c_s\sigma_s - c_l\sigma_l$的变化也可能影响速度。此外，我们观察到，在领先阶近似下，对比度变化 δc 和半高全宽变化 $\delta\sigma$ 主要分别与星斑引起的通量变化（$a_s - a_l$）成负比和正比，形状变化（$c_s - c_l, \sigma_s - \sigma_l$）则会带来一些修正。因此，若忽略形状变化的修正项，这些指标在一阶近似下可用模型中的光度分量来描述。

附录 C：计算高效的高斯过程框架

附录 C.1：概要

在本附录中，我们概述如何从对不同通道中的脉冲响应、统计分布和发生率的假设——即式（10）中的$g(t, \gamma)$、$h(t, \gamma)$、$p(\gamma \mid t, \eta)$和 $\lambda(t)$——推导出对似然（式（9）的高效计算方法。

为了计算协方差矩阵，我们需要求解积分（10）。根据假设 1，我们可以将脉冲响应写成窗函数与一个按傅里叶级数展开的周期部分的乘积。具体做法是，将公式（12）中的g_0 乘以公式（17）中表示的临边昏暗定律，并用傅里叶展开近似可见性函数 $\mathbf{1}_{\mathrm{vis}}(t)$。根据上述假设 2，我们可以将协方差写成窗函数$W(t)$的协方差与周期部分的协方差的乘积。公式（10）包含关于时间t 和脉冲响应参数 γ 的积分。无论对窗函数还是周期部分，关于时间的积分都很容易计算。对t积分后，周期部分的自相关是一个截断傅里叶级数，其中只有系数取决于 γ。我们对这些系数的积分进行数值计算，并对这些系数进行插值，然后对 γ 积分

附录 C.2：窗口分量与周期分量的分离

这里考虑平稳情形，即星斑出现率 λ 为常数，且星斑属性 γ 不随时间变化 $p(\gamma|\eta,t) = p(\gamma|\eta)$。两个时间序列 $y(t) = \sum_k I(t - t_k, \gamma_k)$ 和 $z(t) = \sum_k J(t - t_k, \gamma_k)$ 之间的协方差为

$$k^{y,z}(\tau;\eta) = \lambda \iint I(t,\gamma)J(t+\tau,\gamma)\mathrm{d}t\,p(\gamma|\eta)\mathrm{d}\gamma, \tag{C.1}$$

其中，η 是描述斑点群体属性的超参数集合，$\mathrm{I}(\mathrm{t},\gamma) = \mathrm{W}(\mathrm{t},\gamma)\,\mathrm{i}(\mathrm{t},\gamma)$，$\mathrm{J}(\mathrm{t},\gamma) = \mathrm{W}(\mathrm{t},\gamma)\,\mathrm{j}(\mathrm{t},\gamma)$。到目前为止，我们尚未说明如何定义星斑出现时间 t_k。下文将其定义为星斑“活动”达到最大值的时刻。这意味着 W 在 $\mathrm{t} - \mathrm{t}_k = 0$时达到最大值。我们假设星斑在 $\mathrm{t} = \mathrm{t}_k$ 时的经度 ϕ_0（这是参数 γ之一）在 $[0, 2\pi]$ 上均匀分布，且独立于 t_k 和其他星斑属性。因此，我们将该参数从 γ中移出，并将 I、J 重写为 $\mathrm{I}(\mathrm{t},\phi_0,\gamma) = \mathrm{W}(\mathrm{t},\gamma)\mathrm{i}(\phi(\mathrm{t}),\gamma)$ 和 $\mathrm{J}(\mathrm{t},\phi_0,\gamma) = \mathrm{W}(\mathrm{t},\gamma)\,\mathrm{j}(\phi(\mathrm{t}),\gamma)$，其中 $\phi(\mathrm{t}) = \phi_0 + \omega\mathrm{t}$，使得

$$k^{y,z}(\tau;\eta) = \lambda \iint I(t,\phi_0,\gamma)J(t+\tau,\phi_0,\gamma)\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}\phi_0}{2\pi}p(\gamma|\eta)\mathrm{d}\gamma. \tag{C.2}$$

我们首先旨在计算

$$k^{I,J}(\tau,\phi_0,\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(t,\phi_0,\gamma)J(t+\tau,\phi_0,\gamma)\mathrm{d}t. \tag{C.3}$$

在$I = J$的情况下，$k^{I,I}$ 的傅里叶变换是I 的功率谱密度（维纳–辛钦定理）

$$\hat{k}^{I,I} = |\hat{I}|^2. \tag{C.4}$$

在更一般的情况下，

$$\hat{k}^{I,J} = \bar{\hat{I}}\hat{J} \tag{C.5}$$

此外，由于I是W和i的乘积，其傅里叶变换可写成卷积的乘积

$$\hat{I}(\nu,\phi_0,\gamma)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{W}(\nu-k\omega,\gamma)i_k(\gamma)\exp(\mathrm{i}k\phi_0), \tag{C.6}$$

其中i_k是傅里叶系数

$$i_k(\gamma)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} i(\phi,\gamma)\exp(-\mathrm{i}k\phi)\mathrm{d}\phi. \tag{C.7}$$

J和k^I的傅里叶变换也同样如此，^{J}因此可写为

$$\begin{aligned}\hat{k}^{I,J}(\nu,\phi_0,\gamma)=&\sum_{k,l\in\mathbb{Z}}\overline{\hat{W}}(\nu-k\omega,\gamma)\hat{W}(\nu-l\omega,\gamma)\\&\times\bar{i}_k(\gamma)j_l(\gamma)\exp(\mathrm{i}(l-k)\phi_0).\end{aligned} \tag{C.8}$$

现在，我们对最大活动处的经度ϕ_0进行积分。该经度只出现在项$\exp(\mathrm{i}(l-k)\phi_0)$中，并且有

$$\int_0^{2\pi}\exp(\mathrm{i}(l-k)\phi_0)\frac{\mathrm{d}\phi_0}{2\pi}=\delta_{k,l}, \tag{C.9}$$

因此，$\hat{}k^{I,\,J}$的积分可简化为

$$\int_0^{2\pi}\hat{k}^{I,J}(\nu,\phi_0,\gamma)\frac{\mathrm{d}\phi_0}{2\pi}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\hat{W}\right|^2(\nu-k\omega,\gamma)\bar{i}_k(\gamma)j_k(\gamma). \tag{C.10}$$

最后$k^{y,\,z}$可简化为

$$k^{y,z}(\tau;\eta)=\lambda\int k^W(\tau,\gamma)k^{i,j}(\tau,\gamma)p(\gamma|\eta)\mathrm{d}\gamma, \tag{C.11}$$

with

$$\begin{aligned}k^W(\tau,\gamma)&=\int_{-\infty}^{+\infty}W(t,\gamma)W(t+\tau,\gamma)\mathrm{d}t\\k^{i,j}(\tau,\gamma)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}i(\phi,\gamma)j(\phi+\omega\tau,\gamma)\mathrm{d}\phi\\&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\bar{i}_k(\gamma)j_k(\gamma)\exp\left(\mathrm{i}k\omega\tau\right).\end{aligned} \tag{C.12}$$

附录 *C.3*：周期部分的傅里叶分解

我们首先考虑周期部分的分量$i(\phi,\gamma)$和$j(\phi,\gamma)$，它们可以写成如下形式：

$$\begin{aligned}i(\phi,\gamma)&=\mathbf{1}_{\mathrm{vis.}}(\phi,\gamma)i_0(\phi,\gamma),\\j(\phi,\gamma)&=\mathbf{1}_{\mathrm{vis.}}(\phi,\gamma)j_0(\phi,\gamma),\end{aligned} \tag{C.13}$$

其中$\mathbf{1}_{\mathrm{vis.}}$是斑点可见性的指示函数（当星斑位于恒星的观测者一侧时取值为1，否则取值为0），而i_0, j_0描述特征的影响，不考虑可见性。包含边缘昏暗效应在内的特征影响的傅里叶展开见附录B。总体而言，使用自转周期的少数几个谐波（通常少于5个）即可很好地近似表示。我们将这些展开记为$i_{0,k}$,$i_{0,k}$，其谐波数截至给定的k_m：

$$\begin{aligned}i_0(\phi,\gamma)&=\sum_{k=-k_m}^{k_m}i_{0,k}(\gamma)\exp\left(\mathrm{i}k\phi\right),\\j_0(\phi,\gamma)&=\sum_{k=-k_m}^{k_m}i_{0,k}(\gamma)\exp\left(\mathrm{i}k\phi\right).\end{aligned} \tag{C.14}$$

如附录B所示，当特征的经度ϕ满足以下条件时，该特征可见：

$$\cos\phi\geq-\tan i\tan\delta. \tag{C.15}$$

我们用ϕ_{m}表示ϕ在$[0,\pi]$范围内允许的最大值，即：

$$\phi_{\mathrm{m}}=\begin{cases}0, & \text{if the spot is never visible, i.e., } -\tan i\tan\delta\geq 1,\\ \pi, & \text{if the spot is always visible, i.e., } -\tan i\tan\delta\leq -1,\\ \arccos(-\tan i\tan\delta), & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{C.16}$$

i的傅里叶系数为

$$\begin{aligned}i_l(\gamma)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{1}_{\mathrm{vis.}}(\phi,\gamma)i_0(\phi,\gamma)\exp(-\mathrm{i}l\phi)\mathrm{d}\phi\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\phi_{\mathrm{m}}}^{\phi_{\mathrm{m}}}i_0(\phi,\gamma)\exp(-\mathrm{i}l\phi)\mathrm{d}\phi\\&=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-k_m}^{k_m}i_{0,k}(\gamma)\int_{-\phi_{\mathrm{m}}}^{\phi_{\mathrm{m}}}\exp(\mathrm{i}(k-l)\phi)\mathrm{d}\phi\\&=\frac{\phi_{\mathrm{m}}}{\pi}\sum_{k=-k_m}^{k_m}\mathrm{sinc}((k-l)\phi_{\mathrm{m}})i_{0,k}(\gamma).\end{aligned} \tag{C.17}$$

类似地，我们有

$$j_l(\gamma)=\frac{\phi_{\mathrm{m}}}{\pi}\sum_{k=-k_m}^{k_m}\mathrm{sinc}((k-l)\phi_{\mathrm{m}})j_{0,k}(\gamma). \tag{C.18}$$

由于正弦基数函数衰减很快，i和j的傅里叶展开仍可仅保留少数几个谐波。我们注意到，星斑仅在周期的极短时间内可见（$\phi_{\mathrm{m}}\ll\pi$）的构型需要纳入更多谐波，因为正弦基数函数随$k-l$衰减得更慢。然而，这类构型也对应于始终靠近恒星边缘的星斑；由于投影和边缘昏暗效应，这通常会导致径向速度和指标的振幅较低。因此，核函数$k^{i,\,j}$可用少数几个谐波近似：

$$k^{i,j}(\tau,\gamma)=\sum_{k=-k_m}^{k_m}\bar{i}_k(\gamma)j_k(\gamma)\exp(\mathrm{i}k\omega\tau). \tag{C.19}$$

附录 *C.4*：使用 s+leaf 高效建模

式(C.19)的核函数可以使用s+leaf（Delisle等，2020、2022）或*celerite*（Foreman-Mackey等，2017）非常高效地建模。事实上，在一般情况下，高斯过程的似然评估成本与测量值的数量的立方成正比。对于一类受限的核函数，s+leaf和*celerite*高斯过程框架可以显著降低这一成本，使其随数据点数量线性增长。为了能够使用这些框架，测量值$Y=(Y_1,\ldots,Y_n)$之间的协方差必须是半可分的：

$$\mathrm{cov}(Y_a,Y_b)=\sum_{s=1}^{r}U_{a,s}V_{b,s},\quad\text{for } a>b, \tag{C.20}$$

其中r是半可分表示的秩。特别是，指数核、正弦核和Matérn核的和与乘积都是半可分的。正如Delisle中所示

等（2022），当考虑多个受同一高斯过程影响、但系数不同的时间序列时，这一推理仍然成立。在这种情况下，应将不同的时间序列合并为一个异质时间序列 Y，按时间递增排序，且其协方差应为半可分。

考虑 m 个时间序列 $y^{(1)}(t)$，.. .，$y^{(m)}(t)$，将它们合并，并按时间递增排序，得到一个异质时间序列 Y。对于一组固定的斑点参数 γ，仅考虑周期部分 $k^{i,j}$，暂时忽略窗函数部分 k^W，合并后时间序列的协方差矩阵为

$$\mathrm{cov}(Y_a, Y_b) = \sum_{k=-k_m}^{k_m} \left(i_{\mathcal{I}_a,k} \exp(\mathrm{i}k\omega t_a)\right)\left(\bar{i}_{\mathcal{I}_b,k} \exp(-\mathrm{i}k\omega t_b)\right), \quad \text{(C.21)}$$

对于 $a > b$，其中 $\mathcal{I}_k$ 是一个索引，它将合并时间序列 Y 中的每个点与其所属的原始时间序列标识符关联起来；$i_{s,k}$ 是时间序列 s 的第k个傅里叶系数。因此，式 (C.21) 的协方差是秩为 $r = 2k_m + 1$的半可分矩阵。不过，为了得到式 (C.21)，我们忽略了窗函数部分 k^W，更重要的是，我们假设斑点参数 γ 固定。

附录 C.5：窗函数

到目前为止，我们尚未指定星斑出现和消失过程的形状 W，该过程将特征的面积和温度共同作用的演变建模为时间的函数。在第3.4节中，我们提到，在太阳上，星斑和光斑往往出现得比衰减得快。为了用 S+LEAF 表示噪声，在本研究中，窗函数的强度增大和减小均采用指数形式，但时间尺度可以不同。

我们在表 C.1 中给出了在假设不同窗口形状k^W时得到的核函数 W：星斑突然出现并指数衰减、以对称或非对称指数函数出现和消失。在这三种情况下，得到的核函数均为低秩半可分核（见 Foreman-Mackey 等，2017；Delisle 等人（2022））。更一般地，Matérn核函数族可用于通过 s+leaf 或 *celerite* 高效地对k^W 进行建模。

最后，对于固定的斑点属性 γ，合并后时间序列Y的协方差矩阵（包括窗口贡献）是半可分的，其秩为 $r = r_W r_{\mathrm{per.}} = r_W(2k_m + 1)$，因为该核函数是两个半可分核函数的乘积（见公式 (C.11)）。

附录 C.6：斑点属性的分布

现在，我们的目标是对斑点参数 γ 的分布进行核函数积分。我们假设斑点参数 γ 可以分为两组独立参数，γ_W（仅影响W）和 $\gamma_{\mathrm{per.}}$（仅影响周期部分）。这里所说的独立是指

$$p(\gamma_W, \gamma_{\mathrm{per.}}|\eta) = p(\gamma_W|\eta)p(\gamma_{\mathrm{per.}}|\eta), \quad \text{(C.22)}$$

使得式 (C.11) 的积分可以写成 as

$$k^{y,z}(\tau;\eta) = \lambda k^W(\tau;\eta)k^{i,j}(\tau;\eta), \quad \text{(C.23)}$$

with

$$k^W(\tau;\eta) = \int k^W(\tau,\gamma_W)p(\gamma_W|\eta)\mathrm{d}\gamma_W,$$
$$k^{i,j}(\tau;\eta) = \int k^{i,j}(\tau,\gamma_{\mathrm{per.}})p(\gamma_{\mathrm{per.}}|\eta)\mathrm{d}\gamma_{\mathrm{per.}}. \quad \text{(C.24)}$$

在下文中，我们假设窗口核函数$k^W(\tau;\eta)$的积分仍可用Matérn核近似，使其保持半可分。对于周期部分，$k^{i,j}(\tau;\eta)$的傅里叶系数为

$$k_k^{i,j}(\eta) = \int \bar{i}_k(\gamma) j_k(\gamma) p(\gamma|\eta)\mathrm{d}\gamma. \quad \text{(C.25)}$$

对于某些特定的分布$p(\gamma|\eta)$，这些积分可能可以解析地求得。不过，这超出了本文的讨论范围，因此我们在此改用数值积分。因此，对于原始时间序列（径向速度和指标）的每一组谐波k和每一对i、j，都需要进行一次积分。对于每个谐波k，我们得到一个厄米正定矩阵C_k，其大小为$m \times m$，由这些积分后的系数组成，其中m是原始时间序列的数量。然后，我们计算矩阵C_k的平方根（例如，通过 Cholesky分解或特征值分解）。

$$C_k = R_k R_k^*, \quad \text{(C.26)}$$

使得系数 $k^{i,j}{}_k$ 由下式给出

$$k_k^{i,j}(\eta) = \sum_{s=1}^{m} R_{k,i,s}\bar{R}_{k,j,s}. \quad \text{(C.27)}$$

通过这样的分解，我们得到 $k^{i,j}$ 的半可分表示，其秩为 $m(2k_m + 1)$，其中 m 是所考虑的时间序列（径向速度和指标）的数量，k_m 是傅里叶级数截断时所取的谐波数。最后，完整的协方差矩阵——包括窗口部分k^W，并对星斑参数的分布进行积分——是半可分的，其秩为 $r = mr_W(2k_m + 1)$。

我们注意到，计算矩阵C_k和 R_k 所需的星斑参数分布积分可能会带来显著的计算成本。为提高性能，我们预先计算R_k在一组网格值上的矩阵，然后在该网格上进行插值，从而估算给定 η时的R_k。

附录 C.7：可变速率 λ

现在我们考虑可变斑点出现率 λ 的情形。我们假设 λ 是一个平稳随机过程，其期望为 $\mu_\lambda(\eta)$，协方差函数为 $k^\lambda(\tau;\eta)$。按照前面各节的做法，可得到以下条件期望（给定λ）：

$$\mathbb{E}\{y(t_i)|\lambda,\eta\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(t)\mathbb{E}_\gamma\{I(t_i - t,\gamma)\}\mathrm{d}t,$$
$$\mathbb{E}\{y(t_i)z(t_j)|\lambda,\eta\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(t)\mathbb{E}_\gamma\{I(t_i - t,\gamma)J(t_j - t,\gamma)\}\mathrm{d}t + \mathbb{E}\{y(t_i)|\lambda,\eta\}\,\mathbb{E}\{z(t_j)|\lambda,\eta\}. \quad \text{(C.28)}$$

此外，C.2节中的推理仍然成立，因此我们有

$$\mathbb{E}_\gamma\{I(t_i - t,\gamma)\} = \mathbb{E}_\gamma\{W(t_i - t,\gamma)\}\mathbb{E}_\gamma\{i_0(\gamma)\}, \quad \text{(C.29)}$$

$\mathbb{E}_\gamma\{I(t_i - t,\ \gamma)J(t_j - t,\ \gamma)\} = \mathbb{E}_\gamma\{W(t_i - t,\ \gamma)W(t_j - t,\ \gamma)\}k^{i,\ j}(t_i - t_j;\ \eta)$。

根据全期望定律，我们得到

$$\mathbb{E}\{y(t_i)z(t_j)|\lambda,\eta\} = \mu_\lambda(\eta)k^W(t_i - t_j;\eta)k^{i,j}(t_i - t_j;\eta) \quad \text{(C.30)}$$
$$+ \mathbb{E}\{y(t_i)|\eta\}\,\mathbb{E}\{z(t_j)|\eta\}$$
$$+ \mathbb{E}_\gamma\{第_0(\gamma)\}\mathbb{E}_\gamma\{个_0(\gamma)\}$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} k^\lambda(t - s)\mathbb{E}_\gamma\{W(t_i - t,\gamma)\}\mathbb{E}_\gamma\{W(t_j - s,\gamma)\}\mathrm{d}t\mathrm{d}s.$$

	$W(t)$	$k^W(\tau)$	核类型	rank
突然出现与指数衰减	$\mathbf{1}_{t>0}\exp(-t/\rho)$	$\exp(-\lvert\tau\rvert/\rho)$	Matérn 1/2	1
非对称指数出现（或消失）	$\mathbf{1}_{t<0}\exp(t/\rho_-) + \mathbf{1}_{t>0}\exp(-t/\rho_+)$	$\frac{\rho_+\exp(-\lvert\tau\rvert/\rho_+)-\rho_-\exp(-\lvert\tau\rvert/\rho_-)}{\rho_+-\rho_-}$	Matérn 1/2之和	2
对称指数（出现与消失）	$\exp(-\lvert t\rvert/\rho)$	$\left(1+\frac{\lvert\tau\rvert}{\rho}\right)\exp(-\lvert\tau\rvert/\rho)$	Matérn 3/2	3

表 C.1：针对不同窗口形状（W）得到的核函数（k^W），归一化后满足 $k^W(0) = 1$.

最后一行是k^λ与平均窗函数k^{μ_W}的自相关的卷积积。由于在计算自相关之前先对斑点属性取均值，因此该自相关k^{μ_W}不同于平均自相关k^W。

最后，在星斑出现发生率可变的情况下，核函数为

$$k^{y,z}(\tau;\eta) = \mu_\lambda k^W(\tau;\eta)k^{i,j}(\tau;\eta) + \mu_i(\eta)\mu_j(\eta)\left(k^\lambda * k^{\mu_W}\right)(\tau;\eta), \tag{C.31}$$

其中 $\mu_i(\eta) = \mathbb{E}_\gamma(i_0(\gamma))$，$\mu_j(\eta) = \mathbb{E}_\gamma(j_0(\gamma))$。公式 (C.31) 中的第一项与发生率恒定为$\lambda = \mu_\lambda$时完全相同，但我们还增加了一项，用于刻画 λ的变化。

附录 *C.8*：颗粒化协方差

本节将推导第 5.1 节所述颗粒化模型的协方差表达式。回顾一下，在我们的模型中，米粒组织包在遵循泊松过程 λ_0 的时刻出现。如果一个米粒组织包在时刻t_0, 出现，那么随后会有若干颗粒在t_i、$i = 1.....N$个时刻出现，这些时刻服从发生率为 λ 的泊松过程，时间区间为$[t_0, t_0 + T]$。因此，N服从参数为 λT的泊松分布。于是，脉冲响应为

$$g_{gran}(t,\gamma) = \sum_{i=0}^{N} P(t,\gamma)W(t - t_i) \tag{C.32}$$

其中，$P(t,\gamma)$ 表示颗粒随恒星自转移动所产生的影响，而$W(t - t_i)$表示颗粒生长和消亡的窗函数。为简单起见，假设所有颗粒的窗函数都相同。若不作此假设，推导过程也非常相似。

我们已经得到了式 (6) 中的协方差表达式，并将脉冲响应替换为式 (C.32) 的表达式。由于颗粒出现的时间t_i 服从泊松过程，我们可以将其写作$t_i = t_0 + u_i$，其中u_i 在 $[0, T]$上服从均匀分布。为简化记号，我们记$P(t,\gamma) = P(t)$，并记$W(t,\gamma) = W(t)$。颗粒化过程在t 和$t + \tau$ 处的取值之间的协方差为

$$k_{gran}(\tau) = \frac{1}{T^2}\sum_{i,j=0}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t P(t)P(t+\tau)\int_0^T\int_0^T W(t-u_i)W(t+\tau-u_j)\mathrm{d}u_i\mathrm{d}u_j \tag{C.33}$$

$k^{gran}(\tau)$ 可以分解为两项

$$D = \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t P(t)P(t+\tau)\int_0^T W(t-u_i)W(t+\tau-u_i)\mathrm{d}u_i \tag{C.34}$$

$$= \frac{N}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t P(t)P(t+\tau)\int_0^T W(t-u)W(t+\tau-u)\mathrm{d}u \tag{C.35}$$

$$= N\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t P(t)P(t+\tau)w_2(t,\tau)\mathrm{d}t \tag{C.36}$$

where

$$w_2(t,\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T W(t-u)W(t+\tau-u)\mathrm{d}u \tag{C.37}$$

and

$$C = \frac{1}{T^2}\sum_{i,j=0,i\neq j}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t P(t)P(t+\tau)\int_0^T\int_0^T W(t-u_i)W(t+\tau-u_j)\mathrm{d}u_i\mathrm{d}u_j \tag{C.38}$$

$$= N(N-1)\int_{-\infty}^{\infty}P(t)P(t+\tau)w(t)w(t+\tau)\mathrm{d}\tau \tag{C.39}$$

其中

$$w(t) = \frac{1}{T}\int_0^T W(t-u)\mathrm{d}u \tag{C.40}$$

现在对 N 进行边缘化，我们得到

$$k_{gran}(\tau) = \lambda T\int_{-\infty}^{\infty}P(t)P(t+\tau)w_2(t,\tau)\mathrm{d}t + (\lambda T)^2\int_{-\infty}^{\infty}P(t)P(t+\tau)w(t)w(t+ \tag{C.41}$$

由于米粒组织包的寿命通常远短于自转周期（太阳上约为一小时，而自转周期为 25 天），因此可以假设 $P(t)$ 近似为常数。回想一下，我们省略了 P 对参数 γ 的依赖。这里我们重新引入其依赖，将其设为 $P(t_0,\gamma)$，于是 C.44 简化为

$$k_{gran}(\tau,\gamma) = P(t_0,\gamma)\lambda T\int_{-\infty}^{\infty}W(t)W(t+\tau)\mathrm{d}t + P(t_0,\gamma) \tag{C.42}$$

$$+ (\lambda T)^2\int_{-\infty}^{\infty}w(t)w(t+\tau)\mathrm{d}t. \tag{C.43}$$

现在对 γ 进行边缘化，我们得到

$$k_{gran}(\tau,\gamma) \propto \lambda T\int_{-\infty}^{\infty}W(t)W(t+\tau)\mathrm{d}t + (\lambda T)^2\int_{-\infty}^{\infty}w(t)w(t+\tau)\mathrm{d}t. \tag{C.44}$$