arXiv:2304.08501v2 [math.HO] 2 Aug 2023

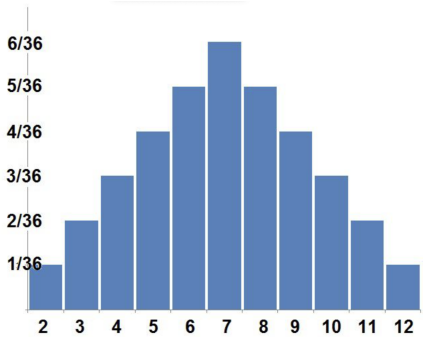
公平摇掷： n面骰子的点数和能有多接近均匀分布?

SHAMIL ASGARLI、MICHAEL HARTGLASS、DANIEL OSTROV 和 BYRON WALDEN

ABSTRACT. 掷出两枚可能不公平的 n面骰子，它们的面分别标有 1、2、.....、 n，并记录点数和。应该如何设定骰子各面的权重，才能使点数和的概率分布最接近 2、3、.....、 $2n$上的均匀分布？我们通过明确给出最优骰子对来回答这个问题。这以一种令人意外的方式解决了 Gasarch 和 Kruskal 于 1999 年提出的问题。我们还介绍了更多枚可能不公平的 n面骰子的情形，以及一种假设情形：每枚骰子各面的权重允许为负数，但总和仍须为一。

1. INTRODUCTION

如果你掷出 两枚六面骰子，它们点数和的概率分布呈三角形 ：



当然，这假设掷出六个面中任意一面的机会都相等。如果可以分别改变两颗骰子掷出六个面各自的概率，你能否使每种点数和都服从均匀分布？也就是说，能否将上述三角分布替换为矩形分布?

John Kelly 在 1950 [Kel50], 中提出了这个问题，随后人们通过多种方法证明，无论如何调整两颗骰子的权重，都无法得到均匀分布；例如，参见 [KMW+51]、 [Hon78], 或 [Hof95]。特别是，Bollob´as[的近期著作 06] Bol（见习题 11）给出了两种解法：一种运用算术-几何平均不等式的初等论证，另一种则使用生成函数。此外，Chen-Rao-Shreve 在 [CRS97] 中将这一结果推广，证明即使有m 颗骰子、每颗骰子有 n 个面，也无法通过调整骰子的权重使骰子点数和服从均匀分布。更近期，Morrison [Mor18], 沿着 Gasarch 和 Kruskal [GK99], 的主要结果，系统地构造了在何种情况下， m 颗加权骰子——每颗骰子的面数可能各不相同，不同于 [CRS97] 和本文的情形——会使骰子点数和服从均匀分布。

鉴于 Chen-Rao-Shreve [CRS97] 证明了无法实现均匀分布，Gasarch 和 Kruskal 在文章结尾提出了一个有趣的问题 [GK99] ，这也是本文的重点：两枚 n面骰子的权重分配如何才能使 D，即

各个骰子点数和对应的概率与均匀分布之间的平方差之和最小？我们注意到，这个最小值 D 必定为正，因为 $D = 0$ 对应的是无法实现的均匀分布。

Gasarch 和 Kruskal 表示，通过使用 Matlab 编程，他们发现“[f]or 对所有 n，Matlab 得到的都是彼此相同的对称骰子”。其中，“对称骰子”是指掷出 1 和掷出 n 的概率相同，掷出 2 和掷出 $n-1$ 的概率相同，依此类推；“彼此相同”是指两个骰子掷出任意特定点数的概率都相同。例如，对于两个六面骰子，他们发现当任一骰子掷出 1 或 6 的概率为 0.243883，掷出 2 或 5 的概率为 0.137480，掷出 3 或 4 的概率为 0.118637 时，Matlab 将 D 最小化。不过，他们也谨慎地指出：“Matlab *does not* 保证所得结果是真正的最优解，因此最优骰子是否必须彼此相同且对称，仍是一个有趣而尚无定论的问题，即使是在我们得到数值结果的情形下也是如此。”

在本文中，我们表明，Gasarch 和 Kruskal 谨慎指出，他们的 Matlab 证据并非故事的全部，是正确的。事实上，当 $n > 2$ 时，他们的 Matlab 结果并未准确反映 D 的真正最小值！具体而言，我们将证明以下定理。

定理 1. 两个 n 面骰子，其各面概率为 $\left(\frac{1}{2}, 0, 0, \cdots, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$ and $\left(\frac{2}{3n-2}, \frac{3}{3n-2}, \frac{3}{3n-2}, \cdots, \frac{3}{3n-2}, \frac{3}{3n-2}, \frac{2}{3n-2}\right)$，除交换顺序外，是使 D（即与均匀分布的平方和差）达到最小值的唯一一对。这个最小值 D 为 $2\ 2n-1\ (\ )(3n-2)$，对应于骰子点数和的下列概率：$\left(\frac{2}{2}, \frac{2}{(3n-2)}, \frac{3\ 2}{(3n-2)}, \frac{3\ 2}{(3n-2)}, \cdots, \frac{3\ 2}{(3n-2)}, 3\ 2(3n-2), 4\ 2(3n-2), 3\ 2(3n-2), 3\ 2(3n-2) \cdots, 3\ 2(3n-2), 3\ 2(3n-2), 2\ 2(3n-2)\right)$

根据定理 1，D 的实际最小值对应于对称骰子，但如果 $n > 2$，它们彼此并不相同。例如，当 $n = 3$ 时，最接近均匀分布的情况是：其中一颗骰子掷出 1 或 3 的概率各为一半，而另一颗骰子掷出 1 的概率为 $2\ 7$，掷出 2 的概率为 $3\ 7$，掷出 3 的概率为 $2\ 7$。

另一种可能获得均匀分布的方法，是允许给某些骰子面赋予负权重。也就是说，我们仍然要求每颗骰子各面的权重之和为 1，但允许这些面的权重取负值。这样做何时能使我们实现均匀分布？答案由以下定理给出，我们将在本文中证明该定理：

定理 2. 如果我们有 m 颗骰子，其中 $m \geq 2$，并且允许给骰子的各面赋予负权重，那么当且仅当 n 时，可以找到权重分配来实现均匀分布（即 $D = 0$）：这 m 颗骰子中每颗骰子的面数都是奇数。

在第 2 节中，我们将介绍证明所需的记号。我们将在第 1 节和第 2 节中分别证明定理 3 和第4 节。秉承 Gasarch 和 Kruskal 的做法，我们将在本文最后的第 5 节中提出两个开放猜想，这些猜想有看似强有力的数值证据支持。用于收集这些数值证据的 Python 程序很容易修改，可在在线附录中获取，网址为https://tinyurl.com/294ycnha。

2. Notation

在接下来的各节中，我们将使用以下记号：

- m 是掷出的骰子数量。

- n 是每个 m 骰子的面数。骰子的面标记为 1，2，……，n。一般来说，我们用字母 i 来表示骰子的面。也就是说，$i = 1, 2, \ldots\ldots, n$。
- p_i 是第一颗骰子掷出点数 i时对应的概率（或权重）。同理，q_i是第二颗骰子掷出点数 i时对应的概率。在第5节中，我们还会用 r_i 表示第三颗骰子的结果。在第4 节和下一条要点中，我们将讨论 m 骰子，因此将使用记号 $p_{i_1}, q_{i_2}, \ldots\ldots, z_{i_m}$ 分别表示第一颗、第二颗……第 m 颗骰子掷出各个点数的概率。
- c_j 表示 m 颗骰子的点数和等于 j的概率。例如，对于两颗标准骰子（即 $m = 2$，$n = 6$，以及 $p_i = q_i = \frac{1}{6}$分别对应 $i = 1, 2, \ldots\ldots, 6$），我们有 $c_3 = \frac{2}{36}$，因为掷出3有两种方式（先掷出1再掷出2，或先掷出2再掷出1）。一般来说，我们用字母 j表示可能的骰子点数和的索引。也就是说，若 $m = 2$，则有 $j = 2, 3, \ldots\ldots, 2n$；对于一般的 m，有 $j = m, m+1, \ldots\ldots, mn$。据此，对于 m 颗骰子，c_j定义为$c_j = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m=j} p_{i_1} \times q_{i_2} \cdots \times z_{i_m}$其中 $j = m, m+1, \ldots\ldots, mn$。
- 对于两个骰子，D，每种骰子点数和对应的概率与均匀分布之间的平方差之和为 $D = \sum_{j=2}^{2n} \left(c_j - \frac{1}{2n-1}\right)^2$。对于 m 个骰子，$D = \sum_{j=m}^{mn} \left(c_j - \frac{1}{m\,n-1()+1}\right)^2$。请注意，对于两个骰子，均匀~~分布对应~~于 $c_j = \frac{1}{2n-1}$，其中 $j = 2, 3, \ldots, 2n$；而对于 m 个骰子，它对应于 $c_j = \frac{1}{m\,n-1()+1}$，其中$j = m, m+1, \ldots, mn$。

3. Identifying the optimal dice

本节将证明定理1，该定理确定了使 n 面骰的每一面上的概率达到最小值所需的概率分配 D，从而使骰子点数和的分布最接近均匀分布。首先，我们用上一节中的符号重述定理 1：

定理 1。 D 当且仅当以下情况之一成立时取最小值

(1) $p_i = 0$，但不包括 $p_1 = p_n = \frac{1}{2}$，且 $q_i = \frac{3}{3n-2}$，但不包括 $q_1 = q_n = \frac{2}{3n-2}$；或者

(2) 互换上文所有 p_i 和 q_i 的角色。根据对称性，这会得到相同的 D值。

D 的最小可能值为 $2\,\frac{1}{2n-1}\,()(3n-2)$，~~对应于~~ $c_j = \frac{3}{2}\,(3n-2)$，但不包括$c_2 = c_{2n} = \frac{1}{}\,(3n-2)$ 和 $c_{n+1} = \frac{2}{}(3n-2)$。

接下来，我们说明所采用方法的动机。回顾一下，c_j 是骰子点数和为 j的概率；已知 p_i 是第一枚 n面骰子掷出 i 的概率，而 q_i 是第二枚 n面骰子掷出 i的概率，因此 $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ 且 $j = 2, 3, \ldots\ldots, 2n$。由于这些$c_j$是概率，我们知道 $\sum_{j=2}^{2n} c_j = 1$。因此，我们可以将 D重新表示为以下形式； D是我们试图最小化的量，用来衡量骰子点数和分布的非均匀性：

$$D = \sum_{j=2}^{2n} \left(c_j - \frac{1}{2n-1}\right)^2 = \sum_{j=2}^{2n} c_j^2 - 2\sum_{j=2}^{2n} \frac{c_j}{2n-1} + \sum_{j=2}^{2n} \left(\frac{1}{2n-1}\right)^2 = \sum_{j=2}^{2n} c_j^2 - \frac{1}{2n-1}.$$

因此，为了使 D 最小化，只需使 $\sum_{j=2}^{2n} c_j^2$ 最小化。

我们提出一个关键观察，以理解为什么无法达到均匀分布： $c_2 = c_3 = \cdots = c_{2n}$这一论证结合了 Bollob´as [Bol06]中的第一个解法所用的方法，以及 Moser 和 Wahab 在 [KMW+51]中采用的方法。这个观察的核心是考察

它们之间的关系，其中 c_2、 c_{n+1} 和 c_{2n}。注意，这三个概率都取决于 p_1、 q_1、 p_n和 q_n。联系 c_2、 c_{n+1} 和 c_{2n} 的关键不等式是算术-几何平均不等式（AM-GM）：

引理 3. $c_{n+1} \geq 2\sqrt{c_2 c_{2n}}$，且当且仅当 $p_i q_{n+1-i} = 0$ 对于 $2 \leq i \leq n-1$ 和$p_1 q_n = p_n q_1$时，等号成立。

证明。 根据 c_{n+1} 的定义以及算术-几何平均不等式，我们有：

$$c_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} p_i q_{n+1-i} \geq p_1 q_n + p_n q_1 \geq 2\sqrt{p_1 q_1 p_n q_n} = 2\sqrt{c_2 c_{2n}}.$$

要使$c_{n+1} = 2\sqrt{c_2 c_{2n}}$成立，每个不等号都必须取等号。回顾算术-几何平均不等式的等号成立条件，第一次取等号时必须有 $p_i q_{n+1-i} = 0$ 对于 $2 \leq i \leq n-1$，第二次取等号时必须有$p_1 q_n = p_n q_1$。□

现在可以看出，为什么所有 c_i都不可能取相同的值：若要求 $c_2 =c_{n+1} = c_{2n} > 0$，根据引理3，就会推出 $1 \geq 2$! 引理3 也为后续提供了一个合理的思路。我们不应试图立即求出使 $\sum_{j=2}^{2n} c_j^2$最小的 p_i 和 q_i，而应利用c_j 是概率这一事实，结合引理3，直接找出使 $\sum_{j=2}^{2n} c_j^2$ 最小的c_j，然后利用最优的c_j 值求出 p_i 和 q_i 的值。

为了更好地理解下一步，我们回顾一下 $\mathbb{R}^k$ 中的柯西-施瓦茨不等式：

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_k y_k| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_k^2},$$

其中 $x_1, \cdots, x_k, y_1, \cdots, y_k$ 均为任意实数。回想一下，当且仅当向量 $(x_1, \cdots, x_k)$ 和 $(y_1, \cdots, y_k)$ 互为数倍时，这个表达式中等号成立。柯西-施瓦茨不等式的一个直接推论是，对于任意实数 $x_1, \cdots, x_k$:

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 \geq \frac{(x_1 + \cdots + x_k)^2}{k},$$

这是通过令 $y_1 = y_2 = \cdots = y_k = 1$ 并将柯西-施瓦茨不等式两边平方得到的。

为此，我们将量 c_2、 c_{n+1} 和 c_{2n} 单独列出（因为我们知道它们之间的关系），并令 Ω 表示其余指标；也就是说，$\Omega = \{2, 3, \cdots, 2n\} \setminus \{2, n+1, 2n\}$。若令 $s = c_2 + c_{n+1} + c_{2n}$，那么根据柯西-施瓦茨不等式，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{2n} c_j^2 &= c_2^2 + c_{2n}^2 + c_{n+1}^2 + \sum_{j \in \Omega} c_j^2 \\
&\geq c_2^2 + c_{2n}^2 + c_{n+1}^2 + \frac{1}{2n-4}\left(\sum_{j \in \Omega} c_j\right)^2 = c_2^2 + c_{2n}^2 + c_{n+1}^2 + \frac{1}{2n-4}(1-s)^2.
\end{aligned}$$

因此，为了使 $\sum_{j=2}^{2n} c_j^2$ 最小，合理的做法是尝试寻找 c_2， c_3， $\cdots$， c_{2n}，使得当 i， $j \in \Omega$ 时，$c_i = c_j$。如果我们还能用关于 $s = c_2 + c_{n+1} + c_{2n}$ 的一个表达式给出 $c_2^2 + c_{2n}^2 + c_{n+1}^2$ 的下界，那么就能用关于 s 的一个表达式给出 $\sum_{j=2}^{2n} c_j^2$ 的下界。为此，我们注意到，对于任意 x， y， $z \geq 0$，柯西-施瓦茨不等式给出 $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}(x + y + z)^2$。为了寻找最优骰子，我们再加上条件 $z \geq 2\sqrt{xy}$，从而得到以下引理中的一个更强不等式：

引理 4。设 x、y、$z \geq 0$，其中 $x+y+z=k$ 且 $z \geq 2\sqrt{xy}$。则 $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{3}{8}(x+y+z)^2$，等号成立当且仅当 $x=y=\frac{k}{4}$ 且 $z=\frac{k}{2}$。

证明。我们有 $z^2 - 4xy \geq 0$ 根据假设。通过一些代数运算可得，以下恒等式成立：

$$8(x^2+y^2+z^2)-3(x+y+z)^2 = 2(z^2-4xy)+(z-x-y)^2+(z-2x)^2+(z-2y)^2 \geq 0.$$

所需不等式 $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{3}{8}(x+y+z)^2$ 立即可得。此外，等号成立要求 $z=2x$ 和 $z=2y$，这进而迫使 $z^2=4xy$ 和 $z=x+y$。由于 $x+y+z=k$，我们得出等号成立当且仅当 $x=y=\frac{k}{4}$ 和 $z=\frac{k}{2}$。□

在我们的情形中，由于我们知道 $c_{n+1} \geq 2\sqrt{c_2 c_{2n}}$，因此令 $x=c_2$，$y=c_{2n}$ 以及 $z=c_{n+1}$ 可得不等式 $c_2^2+c_{n+1}^2+c_{2n}^2 \geq \frac{3}{8}s^2$，且等号成立当且仅当 $c_2=c_{2n}$ 和 $c_{n+1}=2c_2$。根据引理 3，这意味着为了使等号 $c_2^2+c_{n+1}^2+c_{2n}^2=\frac{3}{8}s^2$ 成立，我们必须在 $2 \leq i \leq n-1$ 时有 $p_i q_{n+1-i}=0$，并且 $p_1 q_n = p_n q_1$。

综合以上结果，我们现在得到

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{2n} c_j^2 &\geq c_2^2+c_{2n}^2+c_{n+1}^2+\frac{1}{2n-4}(1-s)^2 \\ &\geq \frac{3}{8}s^2+\frac{1}{2n-4}(1-s)^2,\end{aligned}$$

当且仅当 $c_i=c_j$ 每当 $i,j \in \Omega$、$p_i q_{n+1-i}=0$ 每当 $2 \leq i \leq n-1$，且 $p_1 q_n = p_n q_1$ 时，等号成立。

接下来的思路已经很清楚：我们要找到使 $f(s)=\frac{3}{8}s^2+\frac{1}{2n-4}(1-s)^2$ 最小的 $s \in [0,1]$。如果我们能保证 $\sum_{j=2}^{2n} c_j^2 = \frac{3}{8}s^2+\frac{1}{2n-4}(1-s)^2$，那么根据上一段关于等号成立的条件，就可以明确求出每个 c_j。如果能找到产生这些 c_j 的 p_i 和 q_i，就得到了我们想要的最小值。

注意，$f(s)=\frac{3}{8}s^2+\frac{1}{2n-4}(1-s)^2$ 的图像是一条开口向上的抛物线，其顶点对应于满足 $f'(s)=\frac{3}{4}s-\frac{1}{n-2}(1-s)=0$ 时 s 的取值。这个值是 $s=\frac{4}{3n-2}$，因此我们得到

$$\sum_{j=2}^{2n} c_j^2 \geq \frac{3}{8}\frac{16}{(3n-2)^2}+\frac{1}{2n-4}\frac{(3n-6)^2}{(3n-2)^2}=\frac{3}{2(3n-2)}.$$

要使等号成立，$c_2=c_{2n}=\frac{s}{4}=\frac{1}{3n-2}$，$c_{n+1}=\frac{s}{2}=\frac{2}{3n-2}$ 并且若 $j \in \Omega$，则 $(2n-4)c_j=1-s$。这意味着 $c_j=\frac{1}{2n-4}(1-s)=\frac{1}{2n-4}(1-\frac{4}{3n-2})=\frac{2}{(3n-2)}$。注意到，取这些值时 $\sum_{j=2}^{2n} c_j=1$，因此我们对 $j=2$，3，……，$2n$ 所取的 c_j 值，是使 D 最小的唯一取值。

综上，我们有

$$D=\sum_{j=2}^{2n}\left(c_j-\frac{1}{2n-1}\right)^2=\sum_{j=2}^{2n}c_j^2-\frac{1}{2n-1} \geq \frac{3}{2(3n-2)}-\frac{1}{2n-1}=\frac{1}{2(2n-1)(3n-2)},$$

其中，通过为 $j \in \Omega$ 选取最优值 $c_2=c_{2n}=\frac{1}{(3n-2)}$、$c_{n+1}=\frac{2}{(3n-2)}$ 和 $c_j=\frac{3}{(3n-2)}$，即可使等号成立，从而使 D 最小。

为了完成定理1的证明，我们需要找出 p_i 和 q_i 的取值，使其实现刚刚得到的 c_j 的取值。

断言：要达到上述 c_j 的最优值，我们要么有 $p_1=p_n=1/2$，$q_1=q_n=2/(3n-2)$，并且对每个 $i=2,\ldots,n-1$，$p_i=0$ 和 $q_i=3/(3n-2)$；要么交换5

the p_i 和 q_i 的角色，因此 $q_1 = q_n = 1/2, p_1 = p_n = 2/(3n-2)$，并且对每个 $i = 2, \ldots, n-1$, $q_i = 0$ 和$p_i = 3/(3n-2)$。

断言的证明。回想一下，由于 $c_{n+1} = 2\sqrt{c_2 c_{2n}}$，我们必须有 $p_i q_{n+1-i} = 0$，对于 $2 \le i \le n-1$。特别地，可得 $p_2 q_{n-1} = 0$。我们将假设 $p_2 = 0$，而非 $q_{n-1} = 0$，并利用这一假设证明，对于所有 $k \in \{2, \cdots, n-1\}$，p_k 必须为 0。这个观察结果随后将确定每个 q_i 的值。如果我们假设 $q_{n-1} = 0$，而非假设 $p_2 = 0$，对称的论证会得出相同的结果，但 p_i 和 q_i 的值会互换。

由于 $c_2 = p_1 q_1$ 和 $c_{2n} = p_n q_n$，我们得到:

$$p_1 q_1 + p_n q_n = c_2 + c_{2n} = c_{n+1} = p_1 q_n + p_n q_1,$$

可将其重新整理为

$$p_1 q_1 + p_n q_n - p_1 q_n - p_n q_1 = (p_1 - p_n)(q_1 - q_n) = 0,$$

这意味着 $p_1 = p_n$ 或 $q_1 = q_n$。然而，$p_1 q_1 = p_n q_n$（因为 $c_2 = c_{2n}$），所以这两个等式中的每一个都会迫使另一个成立，也就是说

$$p_1 = p_n \text{ and } q_1 = q_n.$$

接下来，利用 $p_2 = 0$，我们考察 $c_3 = p_1 q_2 + p_2 q_1 = p_1 q_2$。由于 $c_3 = \frac{3}{2} c_2 = \frac{3}{2} p_1 q_1$，我们得到: $\frac{3}{2} p_1 q_1 = p_1 q_2$.，这意味着 $q_2 = \frac{3}{2} q_1$。

回想一下，对于 $2 \le i \le n-1$，我们必须有 $p_i q_{n+1-i} = 0$。特别地，令 $i = n-1$，则有 $p_{n-1} q_2 = 0$；因此，由于 $q_2 > 0$，我们有 $p_{n-1} = 0$。

总结一下，我们有 $p_1 = p_n$ 和 $q_1 = q_n$，将在证明的最后用到；此外，我们还有 $p_2 = p_{n-1} = 0$ 和 $q_2 = \frac{3}{2} q_1 > 0$，它们将作为下面归纳论证的起始步骤:

> **归纳步骤:** 对于 $i \in \{1, 2, ..., n-3\}$，若有 $p_{n-1} = p_{n-2} = ... = p_{n-i} = 0$，则 $q_{n-i} = \frac{3}{2} q_1$ 且 $p_{n-i-1} = 0$。
>
> 归纳步骤的证明: 结合 $c_{2n-i} = \frac{3}{2} c_2 = \frac{3}{2} p_1 q_1$和$c_{2n-i}$的定义，可得:
>
> $$\frac{3}{2} p_1 q_1 = c_{2n-i} = p_n q_{n-i} + p_{n-1} q_{n-i+1} + ... + p_{n-i} q_n.$$
>
> 已知 $p_{n-1} = p_{n-2} = ... = p_{n-i} = 0$，上述等号成立意味着 $\frac{3}{2} p_1 q_1 = p_n q_{n-i} = p_1 q_{n-i}$，也就是说 $q_{n-i} = \frac{3}{2} q_1$。
>
> 另一方面，结合 $c_{n-i+1} = \frac{3}{2} c_2 = \frac{3}{2} p_1 q_1$ 和 c_{n-i+1}的定义，可得:
>
> $$\frac{3}{2} p_1 q_1 = c_{n-i+1} = p_1 q_{n-i} + p_2 q_{n-i-1} + ... + p_{n-i-1} q_2 + p_{n-i} q_1.$$
>
> 由于 $q_{n-i} = \frac{3}{2} q_1$，我们看到上面的 $p_1 q_{n-i}$ 项已经是 $\frac{3}{2} p_1 q_1$，这意味着其余各项都是非负数，因此必定各自为零。特别是，$p_{n-i-1} q_2 = 0$，这就迫使 $p_{n-i-1} = 0$，因为 $q_2 > 0$。□

归纳步骤已经完成，我们可以从 $i = 1$ 开始运用它，然后是 $i = 2$、$i = 3$，依此类推，直到 $i = n-3$ 为止。这就证明了，对于 $i = 2$，3，.....，$n-1$，$p_i = 0$ 且 $q_i = \frac{3}{2} q_1$

既然我们现在知道了 $p_1 = p_n$ 以及所有其他 $p_i = 0$，由 $\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$ 可得 $p_1 = p_n = \frac{1}{2}$。同理，

既然我们现在知道了 $q_1 = q_n$ 以及所有其他 $q_i = \frac{3}{2} q_1$，由 $\sum_{i=0}^{n} q_i = 1$ 可得$q_1 = q_n = \frac{2}{3n-2}$ 以及所有其他 $q_i = \frac{3}{3n-2}$，这就证明了我们的断言。□

而断言已得到证实，这就完成了定理 1 的证明。 □

注 5。 我们的论证表明， D的最小值——它衡量的是集合 $\{2,\ldots,2n\}$上的均匀分布与目标分布之间的距离——会随着 $n\to\infty$趋于 0。换言之，尽管无法通过两个骰子的点数和实现均匀分布，但使用最优骰子得到的最佳近似会以 $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ 的速度（因为$D = {}_2\,{}_{2n-1}{}^{1}\,{}_{()(3n-2)}$）趋近于所需的均匀分布，其中 n（即面数）趋于无穷大。

注 6。 关于收敛性，也请注意，若 X 和 Y 是独立随机变量，其中 X 以相同的概率（各为 1/2）取值 0 和 1，而 Y 在区间 $[0,1]$，上均匀分布，那么 $X+Y$ 的分布在 $[0,2]$ 上是均匀的。这意味着，从离散骰子的角度来看，若令 X_n 和 Y_n 分别为掷出定理 1 中给出的两枚最优骰子时对应的随机变量，但将骰面归一化为 $1/n$，$2/n$，……，1，那么随着 $n\to\infty$、 X_n 和 Y_n 收敛，其分布将分别收敛到 X 和 Y。这与我们的结果特点相符，也进一步说明了为什么最优骰子不太可能是对称的（也就是说，不太可能对所有 $i=1$，2，……， n 都有 $p_i=q_i$）。

4. An odd result: generating the proof of Theorem 2

本节将证明定理 2，该定理表明，对于 $m\geq 2$ 个骰子，允许 p_i、 q_i、……、 z_i取负值，当且仅当 n为奇数时，骰子点数和才能实现均匀分布。更准确地说，利用第 2 节引入的记号，我们可以将定理 2改写为：

定理 2。 对于 m 个骰子，允许 p_i、 q_i、……、 z_i（其中 $i=1$、2、……、 n）取任意实数（可以为负数），但仍须满足限制条件 $\sum_{i=1}^n p_i=\sum_{i=1}^n q_i=\ldots=\sum_{i=1}^n z_i=1$。每个$c_j$ 仍按 $c_j=\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m=j} p_{i_1}\times q_{i_2}\times\cdots\times z_{i_m}$ 定义，其中 $j=m$、 $m+1$、……、mn。当且仅当 ${}_2n$ 为奇数时，才能选取 p_i、 q_i、……、 z_i，使得对于所有 j，$c_j = {}_m\,{}_{n-1}{}^{1}\,{}_{()+1}$，因此 ~~$D=\sum_{j=m}^{mn}\left(c_j-{}_m\,{}_{n-1}{}^{1}\,{}_{()+1}\right)=0$~~。换言之，若 n 为奇数，则骰子点数和可以呈均匀分布。若 n 为偶数，则骰子点数和不可能呈均匀分布。

证明。如果一组有 m 个骰子，每个骰子有 n 面，且点数总和服从均匀分布，那么总和的生成函数为${}_m\,{}_{n-1}{}^{1}\,{}_{()+1}(x^m+\ldots+x^{mn}) = {}_m\,{}_{n-1}{}^{x^m}\,{}_{()+1}T(x)$，其中 $T(x)=1+x+\cdots+x^{m(n-1)}$。注意， $T(x)$ 在非平凡的（$m(n-1)+1$）次单位根处有根；特别是，它有一个根 -1，或者没有根，这取决于 $m(n-1)+1$ 是偶数还是奇数。现在，每个骰子的生成函数都具有 $p_1x+p_2x^2+\cdots+p_nx^n=x(p_1+p_2x+\cdots+p_nx^{n-1})$ 的形式，其中某个 p_i；如果 n 是偶数，那么第二个因子必有一个实根。因此，如果 n 是偶数，且 $m>1$，骰子的生成函数之积就不可能等于 $T(x)$。如果 n 是奇数，那么将 $m(n-1)/2$ 个实二次因子划分为m 个大小为 ${}_2^{n-1}$ 的集合，任意一种划分都能得到 m 个次数为 $n-1$ 的生成函数，它们的乘积为 $T(x)$。将这些多项式分别乘以 x，并对多项式的系数作适当归一化，就得到 m 个生成函数，其系数给出所需的概率。□

5. Numerical results create two new open questions for multiple dice

Gasarch 和 Kruskal 所做的数值实验 [GK99] 针对 $m=2$ 骰子的研究启发我们解决了他们提出的开放问题。同样，我们的数值实验也为多颗骰子提出了两个新的开放问题，希望其他人能对此进行探索。我们针对m 骰子的数值实验是在 Python 中进行的。包含以下情形 Python 代码的 Jupyter 笔记本

三颗 n面骰的笔记本可在在线附录中获取，网址为 https://tinyurl.com/294ycnha。[1]

第一个开放问题：对于两颗骰子，Gasarch 和 Kruskal 提出，使 D 最小的 n 面骰子必须是对称的，也就是说，对于第一颗骰子，$p_1 = p_n$、$p_2 = p_{n-1}$、$p_3 = p_{n-2}$ 等等；同样，对于第二颗骰子，$q_1 = q_n$、$q_2 = q_{n-1}$、$q_3 = q_{n-2}$ 等等。本文证明，当有 $m = 2$ 颗骰子时，这个猜想成立；但对于 $m > 2$ 颗骰子，这一结论是否成立仍是一个开放问题。我们的数值实验在使 D 最小化时，总是得到对称骰子的结果，但这当然算不上证明！

第二个开放问题：事实上，我们的实验结果更进一步，揭示了一种特定的对称模式：当一颗骰子（比如第一颗骰子，也就是我们指定了 p_i）上的概率为下列数值时，量 D 取得最小值：

$$p_i = \begin{cases} \frac{m}{(n-2)(2m-1)+2m} & \text{if } i = 1 \text{ or } n \\ \frac{2m-1}{(n-2)(2m-1)+2m} & \text{if } i = 2, 3, ..., n-1, \end{cases}$$

而对于其余的 $m-1$ 颗骰子，则有：

$$q_i = r_i = ... = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } i = 1 \text{ or } n \\ 0 & \text{if } i = 2, 3, ..., n-1. \end{cases}$$

例如，在我们的在线附录中可以看到，$m = 3$ 和 $n = 5$（三个五面骰子）的结果符合这一模式。也就是说，

$$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = \left(\frac{3}{21}, \frac{5}{21}, \frac{5}{21}, \frac{5}{21}, \frac{3}{21}\right)$$
$$(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$$
$$(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5) = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}\right).$$

上述对称模式也与我们使用 n 和 m的各种取值所进行的其他所有示例结果一致，但当 $m > 2$ 时，这一模式的证明（或反证）仍是一个开放问题。

致谢。 感谢 Frank Farris 和 Chi Hoi Yip 对手稿提出的宝贵意见。我们也感谢两位匿名审稿人，他们帮助我们提升了本文的清晰度。

References

[Kel50] John B. Kelly, *Elementary Problem E925*, 《美国数学月刊》**57** (1950)，第 6 期，第 416 页。[KMW+51] J. B. Kelly、Leo Moser、J. H. Wahab、J. V. Finch 和 P. R. Halmos, *Solution to Elementary Problem E925* **58** 1951 3, 191 192 , 《美国数学月刊》（），第 – 期。[Bol06] B´ela Bollob´as, *The art of mathematics*, 剑桥大学出版社，纽约，2006 年。《孟菲斯的咖啡时光》。[Hof95] Micha Hofri, *Analysis of Algorithms*, 牛津大学出版社，英国牛津，1995 年。[Hon78] Ross Honsberger, *Mathematical Morsels*, 美国数学协会，华盛顿特区，1978 年。[CRS97] Guantao Chen, M. Bhaskara Rao 和 Warren E. Shreve, *Is Uniformly Distributed?* **70** 1997 3, 204 206 , 《数学杂志》（），第 – 期。

[1]这段代码适用于三个骰子的概率 p_i，q_i，以及 r_i（代码中分别标记为 p i、q i 和 r i），其中 $i = 1, 2, ... n$。这段代码很容易扩展到三个以上的骰子，也可以缩减为两个骰子的情形。若要去掉每个 p_i，q_i，以及 r_i 必须介于 0 和 1 之间的限制，只需从代码块 [6]的最小化命令中删除短语“bounds=bounds”即可。不过，本节的开放问题讨论的是实际概率，因此我们保留其介于 0 和 1 之间的限制。

[GK99] William I. Gasarch 和 Clyde P. Kruskal. *When Can One Load a Set of Dice so That the Sum Is Uniformly Distributed?* **72** 1999 2, 133 138 , 《数学杂志》 () , 第 – 期。[Mor18] Ian Morrison, *Sacks of dice with fair totals*, 《美国数学月刊》**125** (2018), 第 7 期, 第 579–592 页。

Email address: sasgarli@scu.edu

Email address: mhartglass@scu.edu

Email address: dostrov@scu.edu

Email address: bwalden@scu.edu

Department of Mathematics and Computer Science, Santa Clara University, 500 El Camino Real, USA 95053