arXiv:2304.08547v2 [math.RA] 5 Sep 2023

矩阵环上的非常好分次是 ε-强的

¨Patrik Lundstrom

工程科学系 西部大学，SE-46186 Trollh ¨attan，瑞典

¨Johan Oinert

布莱金厄理工学院数学与自然科学系，SE-37179 卡尔斯克鲁纳，瑞典

Laura Orozco

桑坦德工业大学数学学院，Cra. 27 Calle 9 UIS Edificio 45，布卡拉曼加，哥伦比亚

´Hector Pinedo

桑坦德工业大学数学学院，Cra. 27 Calle 9 UIS Edificio 45，布卡拉曼加，哥伦比亚

Abstract. 我们研究矩阵环 $M_n(R)$ 上的群分次性质，其中 R是结合含幺环， n 是正整数。更确切地说，我们引入了非常好的分次，并证明 $M_n(R)$ 上的任意非常好的分次必然是 ε-强的。我们还确定了一个充分条件，以保证 $M_n(R)$ 是 ε-交叉积，即与一个含幺扭曲部分作用所对应的交叉积同构。当 R 具有不变基数性质时，我们能够刻画 $M_n(R)$ 何时是 ε-交叉积。我们的结果通过若干例子加以说明。

电子邮件地址：patrik.lundstrom@hv.se、johan.oinert@bth.se、lnorogar@correo.uis.edu.co、hpinedot@uis.edu.co。日期：2023年9月6日。2020年数学主题分类。16S50、16W50。关键词和短语：矩阵环、良好分次、非常良好分次、ε-强分次环、含幺偏交叉积。

1. Introduction

设 G 是一个群， n 是正整数， K 是域，并令 $M_n(K)$ 表示所有元素属于 K的 $n \times n$矩阵构成的环。代数中的一个经典问题，据称由 Zelmanov [13, 问题 1], 提出，要求描述 $M_n(K)$ 上所有的 G-分次，即描述分解为 K-向量子空间 $M_n(K) = \oplus_{g\in G} M_n(K)_g$，使得对所有 g、$h \in G$，包含关系 $M_n(K)_g M_n(K)_h \subseteq M_n(K)_{gh}$ 成立。这个问题引起了广泛关注（例如参见 [2]–[15] 和 [22]–[26]），并且对于特定类别的域 K 和群 G 已经得到解决；然而，据本文作者所知，一般情形仍未解决。不过，如果我们将目标限定为找出 $M_n(K)$ 上所有的良好 G-分次，那么 [7]给出了完整答案。具体而言，按照该文献中引入的记号， $M_n(K)$ 上的 G-分次称为良好分次，如果对于每个 $g \in G$，每个 $M_n(K)_g$作为 K上的左向量空间，都有一个由如下形式的矩阵组成的基：$e_{i,j}$ 在位置（i， j）处为 1，其他所有位置均为 0。在[7, 命题 2.1], 中证明了，所有映射 f: $\{1, \dots, n-1\} \to G$ 的集合与 $M_n(K)$ 上所有良好 G-分次的集合之间存在双射对应，其中每个这样的 f 都对应于 $M_n(K)$ 上由以下要求诱导的良好分次：$e_{i,i+1} \in M_n(K)_{f(i)}$，对于 $i \in \{1, \dots, n-1\}$。由此可以得到判定给定的 $M_n(K)$ 上的 G-分次何时为强分次或 G-交叉积的准则（见 [7, 命题 2.3 和命题 2.6]）。在 [8], 中，在分次由半群定义的更一般情形下，也获得了一个类似于上述双射的双射；该情形下的双射取决于该半群中所有简单主因子和零简单主因子的结构。环上的原群分次（以及滤过）的类似问题也已在 [15]中得到研究。良好分次还被定义于其他类型的代数，例如更一般代数结构上的矩阵代数的子代数、关联代数 [12, 20, 21], 以及具有乘法基的代数 [4]。

在本文中，我们希望将上述一些结果推广到任意结合含幺环上的矩阵环情形。为此，我们选择区分良分次与非常良好分次（见定义 2.1）。值得注意的是，我们采用了新颖的方法来获得这些结果，即利用所谓的 ε-强分次环理论中的结果（例如，见 [19]）。我们的第一个主要结果（见定理 2.4）断言，矩阵环上的任何非常良好分次必然是 ε-强的。此外，对于这类分次，我们的第二个主要结果给出了确保矩阵环为 ε-交叉积的充分条件（见定理 2.11）。我们的第三个主要结果则完整刻画了矩阵环在何种条件下是 ε-交叉积，前提是该矩阵环取自一个 IBN 环（见定理 2.13）。回顾一下，根据 [19, 定理 35], ，任何 ε-交叉积都同构于由某个含幺扭曲部分作用所定义的交叉积。与部分作用相关的代数，例如由含幺扭曲部分作用定义的交叉积，是一个新兴但十分活跃的研究领域。关于这一方向的众多结果，请参阅 [10, 11] 及其中的参考文献。

2. Good and very good group gradings

在本文中， R 和 S 是含幺结合环， n 是正整数， $\overline{n}$ 表示集合 $\{1,\dots,n\}$，而 G 是一个单位元为 e 的群。

2.1. 基的分次。本文中，除非另有说明， V 表示一个具有固定基 $\overline{v} := \{v_i\}_{i\in\overline{n}}$ 的自由左R-模。我们所说的 $\overline{v}$ 的分次，是指一个映射 $\deg : \overline{v} \to G$。注意，这样的映射会诱导出一个 V 上的 G-分次，含义是 $V = \oplus_{g\in G} V_g$ 作为左R-模，其中 $V_g := \sum_{v\in 分次^{-1}(g)} Rv$，其中 $g \in G$。另一方面，假设给定 V 上的一个 G-分次 $V = \oplus_{g\in G} V_g$。如果对于每个$i \in I$，都存在 $g_i \in G$ 使得 $v_i \in V_{g_i}$，我们就称该分次与 $\overline{v}$ 相容。在这种情况下，我们可以通过令 $\deg(v_i) := g_i$，定义 $\overline{v}$ 的一个分次。显然，上述构造给出了 $\overline{v}$ 上的分次集合与满足相容于 $\overline{v}$ 条件的 V 上的分次集合之间的双射对应。

2.2. 分次环。本文其余部分，假设 S 作为环是 G-分次的。回顾一下，这意味着对每个 $g \in G$，都存在 S 的一个加法子群 S_g，使得 $S = \oplus_{g\in G} S_g$作为加法群成立，并且对所有 g、$h \in G$，包含关系 $S_g S_h \subseteq S_{gh}$ 成立。如果 $s \in S_g \setminus \{0\}$，则记 $\deg(s) := g$。如果对所有 g、$h \in G$都有 $S_g S_h = S_{gh}$，则称 S 上的 G-分次是强分次。回顾一下，如果对每个 $g \in G$， S_g 都包含一个在 S 中可逆的元素，则称 S 是一个 G-交叉积。如果 S 是一个 G-交叉积，那么 S是强 G-分次的（见 [17, 注 1.1.2]）。根据 [19], ，回顾一下，如果对每个 $g \in G$，都存在某个 $\epsilon_g \in S_g S_{g^{-1}}$，使得对每个 $s \in S_g$都有 $\epsilon_g s = s\epsilon_{g^{-1}} = s$，则称 S 是 epsilon-强 G-分次的。注意，在这种情况下，对于 $g \in G$， ϵ_g由该分次唯一确定。

如果 S 是 ε-强 G-分次的，那么若对每个 $g \in G$，都存在 $s_g \in S_g$ 和 $t_{g^{-1}} \in S_{g^{-1}}$，使得 $s_g t_{g^{-1}} = \epsilon_g$ 且 $t_{g^{-1}} s_g = \epsilon_{g^{-1}}$.，则称 S 为 ε-交叉积。注意，任何 ε-交叉积都同构于含幺偏交叉积（参见 [19, 定理 35]）。

2.3. 矩阵环上的良好分次与非常良好分次。本文余下部分中，$M_n(R)$ 表示所有以 R 中元素为项的 $n \times n$ 矩阵构成的环。

定义 2.1. 假设 $S := M_n(R)$ 配备了一个 G-分次 .

(i) 若对所有 i、$j \in \overline{n}$， $e_{i,j}$ 都是齐次的，则称该分次为良好分次。(ii) 若对所有 i、$j \in \overline{n}$，都存在 $g \in G$，使得 $Re_{i,j} \subseteq S_g$，则称该分次为非常良好分次。

例 2.2. 假设 $S := M_n(R)$ 配备了一个 G-分次。如果这个分次非常良好，那么它当然是良好的。然而，反过来并不总是成立。事实上，设 A 和 B 是群，并在 R 上赋予任意非平凡的 A- 分次。对于每个元素 $e_{i,j}$，我们赋予一个 B- 度，使得对于每个 $k \in \overline{n}$，都有 $\deg(e_{i,j})\deg(e_{j,k}) = \deg(e_{i,k})$。于是，环 $M_n(R)$ 自然地按乘积群 $A \times B$ 分次。此外，对于所有 i, $j \in \overline{n}$， $e_{i,j}$ 都是齐次的（相对于 $A \times B$-分次）。然而，对于任何相对于 A-分次非齐次的 $r \in R$，$re_{i,i}$ 都将是非齐次的（相对于 $A \times B$-分次）。一个具体例子是考虑复数域 $R = \mathbb{C}$, 并赋予它自然的 $\mathbb{Z}_2$-分次。令 $\deg(e_{1,1}) = \deg(e_{2,2}) = 0$，且 $\deg(e_{1,2}) = \deg(e_{2,1}) = 1$.。那么 $M_2(\mathbb{C})$ 是 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-分次的。但例如，$(1+i)e_{1,1}$ 相对于 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-分次是非齐次的。

良分次与非常良好分次之间的确切关系如下所述:

命题 2.3. 假设 $S := M_n(R)$ 配备了一个良好的 G-分次。那么以下断言等价:

(i) S 上的 G-分次非常良好; (ii) 对每个 $i \in \overline{n}$, 包含关系 $Re_{i,\,i} \subseteq S_e$ 成立; (iii) $R1_S \subseteq S_e$。

证明. (i)⇒(ii): 假设 (i) 成立。取 $i \in \overline{n}$。由于 $e_{i,\,i}$ 是一个非零幂等元, 因此 $\deg(e_{i,\,i}) = e$。由 (i) 可得 $Re_{i,\,i} \subseteq S_e$。

(ii)⇒(iii): 假设 (ii) 成立。那么 $R1_S = R\sum_{i=1}^n e_{i,\,i} \subseteq \sum_{i=1}^n Re_{i,\,i} \subseteq S_e$。(iii)⇒(i): 假设 (iii) 成立。取 i、$j \in \overline{n}$, 并令 $g := \deg(e_{i,\,j})$。由 (iii) 可得 $Re_{i,\,j} = (R1_S)e_{i,\,j} \subseteq S_eS_g \subseteq S_g$。□

不难看出, $M_n(R)$上的非常良好 G分次由 n元组$\overline{g} = \{g_1, \ldots, g_n\}$ 确定, 其中 $g_i := \deg(e_{i,}1)$, 对 $i \in \overline{n}$成立。注意, $g_1^2 = \deg(e_1^2,1) = \deg(e_1,1) = g_1$, 因此必有 $g_1 = e$。若对 $i \in \overline{n}$令$\deg(v_i) := g_i$, 则此非常良好分次定义了$\overline{v}$ 上的一个分次。进而, 这又定义了自由左R-模 $V := R^n$上的一个分次。注意, $\deg(v_1) = g_1 = e$。因此, 特别地, $e \in \mathrm{Supp}(V)$, 其中$\mathrm{Supp}(V) := \{g \in G \mid V_g \neq 0\}$。对于所有 $i,j \in \overline{n}$, 我们以下述方式将$e_{i,j}$ 视为$\mathrm{End}_R(V)$ 的一个元素。取 $i, j, k \in \overline{n}$。定义$e_{i,j}(v_j) := v_i$, 并且若$k \neq j$, 则定义$e_{i,j}(v_k) := 0$。注意, 此时$e_{i,j}$ 也是一个次数为$\deg(e_{i,j}) = g_ig_j^{-1}$ 的分次线性映射, 因为对于所有 $i, j \in \overline{n}$, $\deg(e_{i,j}(v_j)) = \deg(v_i) = g_i = g_ig_j^{-1}g_j = \deg(e_{i,j})\deg(v_j)$。

定理 2.4. 每个 $M_n(R)$ 上的非常良好 G-分次都是 ε-强 G-分次。

证明。令 $S := M_n(R)$, 并假设其带有非常良好的 G-分次。对于每个 $g \in G$, 令 $\mathcal{L}_g := \{i \in \overline{n} \mid$ 存在某个 $j \in \overline{n}$ 使得 $e_{i,\,j} \in S_g\}$ 并且 $\mathcal{R}_g := \{j \in \overline{n} \mid$ 存在某个 $i \in \overline{n}$ 使得 $e_{i,\,j} \in S_g\}$. 设 $\epsilon_g := \sum_{i\in\mathcal{L}_g} e_{i,\,i}$ 且 $\epsilon'_g := \sum_{j\in\mathcal{R}_g} e_{j,\,j}$。不难看出 $\epsilon_g \in S_gS_{g^{-1}}$, $\epsilon'_g \in S_{g^{-1}}S_g$, 并且对每个 $s \in S_g$都有 $\epsilon_g s = s\epsilon'_g = s$。由于 $\mathcal{R}_g = \mathcal{L}_{g^{-1}}$, 可得 $\epsilon'_g = \epsilon_{g^{-1}}$, 因此 S 是 ε-强 G-分次。□

注 2.5. 将 $M_n(R)$ 视为由一个具有 n 个顶点的线图定义的、所谓的 R 上的 Leavitt路径代数（当 R 是域时, 此类表示见 [1, 例 1.4(i)]）, 再利用 [18, 定理 4.1] （另见 [16]）并仔细分析其证明, 便可得出定理 2.4 的结论以及上面的 ϵ_g 公式。

在下面的例子中, 我们说明定理 2.4 不能推广到良好分次。

例 2.6. 考虑多项式环 $\mathbb{C}[x]$, 并赋予其自然的 $\mathbb{Z}$-分次。令 $\deg(e_{1,1}) = \deg(e_{2,2}) = 0$, 且 $\deg(e_{1,2}) = \deg(e_{2,1}) = 1$. 那么, 沿用例 2.2 中的记号, 环 $S := M_2(\mathbb{C}[x])$ 是 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$-分次的, 且该分次是良好的, 但并非非常良好。此外, 该分次不是 ε-强的, 因为 $S_{(1,0)}S_{(-1,0)} = \{0\}$, 而 $xe_{1,1} \in S_{(1,0)}$ 非零。

现在我们给出一个结果, 用以确定矩阵环上的分次何时是非常良好的。

命题 2.7. 假设 R 是单的，且 $S := M_n(R)$ 是 G-分次的。那么，当且仅当对每个 $i \in \overline{n}$，包含关系 $Re_{i,\,i} \subseteq S_e$ 成立时，G 在 S 上的分次才是非常良好的。

证明。“当且仅当”中的“仅当”部分可直接由非常良好分次的定义以及 $e_{i,i}$ 是一个非零幂等元这一事实得出。现在证明“当”部分。取 $i, j \in \overline{n}$。我们断言 $e_{i,j}$ 是齐次的。若该断言成立，那么对每个 $r \in R$，元素 $re_{i,j}$ 都是齐次的，因为它属于 $(Re_{i,i})e_{i,j}$。现在证明该断言。写作 $e_{i,j} = \sum_{g\in G} s_g$，其中 $s_g \in S_g$ 满足对除有限多个 $g \in G$ 之外的所有情形都有 $s_g = 0$。由于 $e_{i,j} = e_{i,i}e_{i,j}e_{j,j}$，我们可以假设对每个 $g \in G$，都存在 $r^{(g)} \in R$ 使得 $s_g = r^{(g)}e_{i,j}$。由等式 $e_{i,j} = \sum_{g\in G} r^{(g)}e_{i,j}$ 可知 $1 = \sum_{g\in G} r^{(g)}$，并且对 $g \in G$ 有 $r^{(g)} \in Z(R)$。取 $h \in G$。于是 $S_h \ni r^{(h)}e_{i,j} = \sum_{g\in G} r^{(h)}e_{i,\,i}r^{(g)}e_{i,j}$。由于对 $g \in G$ 有 $r^{(h)}e_{i,i}r^{(g)}e_{i,j} \subseteq S_g$，可得：若 $g \neq h$，则 $r^{(h)}r^{(g)} = 0$，且 $(r^{(h)})^2 = r^{(h)}$。这意味着 $R = \oplus_{g\in G} Rr^{(g)}$ 是 R-理想。由 R 的简单性可知，存在 $p \in G$，使得若 $g \neq p$，则 $r^{(g)} = 0$，且 $r^{(p)} = 1$。因此，$e_{i,j} = 1e_{i,j} = r^{(p)}e_{i,j} \in S_p$。□

现在，我们将命题 2.3]推广到以含幺结合环为元素的矩阵上。

命题 2.8. 假设 $M_n(R)$ 配备了一个非常良好的 G-分次，并记$X_i := \{\deg(e_{i,\,j})\}_{j=1}^n$。取 $g \in G$。那么 $M_n(R)_g M_n(R)_{g^{-1}} = M_n(R)_e$ 当且仅当 $g \in \cap_{i=1}^n X_i$。

证明. 设 $S := M_n(R)$。根据定理 2.4， S 是 ε-强 G-分次的。不难看出， $S_g S_{g^{-1}} = S_e$ 当且仅当 $\epsilon_g = 1$。根据定理 2.4 的证明，这又等价于 $g \in \cap_{i=1}^n X_i$。□

推论 2.9. 假设 $M_n(R)$ 配备了一个非常良好的 G-分次，并令 g_i:=$\deg(e_{i,\,1})$，其中 $i \in \overline{n}$。那么 $M_n(R)$ 是强 G-分次的，当且仅当 $\overline{g} = G$。

证明。令 $S := M_n(R)$。根据命题 2.8，可知 S 是强 G-分次的，当且仅当 $G = \cap_{i=1}^n X_i$。这等价于对每个 $i \in \overline{n}$都有 $X_i = G$。由于对每个 $i \in \overline{n}$，都有 $X_i = \deg(e_{i,1})X_1$，因此这又等价于 $(\overline{g})^{-1} = X_1 = G$。□

如前所述，对每个 $g \in G$，令 $\mathcal{L}_g := \{i \in \overline{n} \mid \exists j \in \overline{n},\ e_{i,j} \in S_g\}$ 以及 $\mathcal{R}_g := \{j \in \overline{n} \mid \exists i \in \overline{n},\ e_{i,j} \in S_g\}$。我们在定理 2.4 的证明中看到，$\epsilon_g = \sum_{i\in\mathcal{L}_g} e_{i,i} = \sum_{j\in\mathcal{R}_{g^{-1}}} e_{j,j}$。

命题 2.10。设 $M_n(R)$ 配备了一个非常良好的 G-分次，并令$g \in G$。采用上述记号，有以下断言成立：

(a) $\ker(\epsilon_g) = V_{G\setminus g\,\mathrm{Supp}(V)}$
(b) $\mathrm{im}(\epsilon_g) = V_{g\,\mathrm{Supp}(V)}$
(c) *For every* $i \in \overline{n}$ *we have* $\epsilon_g(v_i) = v_i$, *if* $g_i \in g\,\mathrm{Supp}(V)$, *and* $\epsilon_g(v_i) = 0$, *otherwise.*
(d) $\epsilon_g|_{V_{g\,\mathrm{Supp}(V)}} = \mathrm{id}_{V_{g\,\mathrm{Supp}(V)}}$

证明。首先证明 (a)。由于 $\epsilon_g = \sum_{j\in\mathcal{R}_{g^{-1}}} e_{j,\,j}$ 因此

$$\begin{aligned}\ker(\epsilon_g) &= \mathrm{Span}_R\{v_j \mid j \in \overline{n},\ j \notin \mathcal{R}_{g^{-1}}\} = \mathrm{Span}_R\{v_j \mid j \in \overline{n},\ \forall i \in \overline{n}\ \deg(e_{i,j}) \neq g^{-1}\}\\ &= \mathrm{Span}_R\{v_j \mid j \in \overline{n},\ \forall i \in \overline{n}\ g_i g_j^{-1} \neq g^{-1}\} = \mathrm{Span}_R\{v_j \mid j \in \overline{n},\ \forall i \in \overline{n}\ g_j \neq g g_i\}.\end{aligned}$$

因此，$\ker(\epsilon_g) = V_{G\setminus g\,\mathrm{Supp}(V)}$。现在我们证明 (b)。由于 $\epsilon_g = \sum_{i\in\mathcal{L}_g} e_{i,\,i}$ 由此可得

$$\begin{aligned}\mathrm{im}(\epsilon_g) &= \mathrm{Span}_R\{v_i \mid i\in\overline{n},\ \exists j\in\overline{n}\ e_{i,j}\in S_g\} = \mathrm{Span}_R\{v_i \mid i\in\overline{n},\ \exists j\in\overline{n}\ \deg(e_{i,j}) = g\}\\ &= \mathrm{Span}_R\{v_i \mid i\in\overline{n},\ \exists j\in\overline{n}\ g_i g_j^{-1} = g\} = \mathrm{Span}_R\{v_i \mid i\in\overline{n},\ \exists j\in\overline{n}\ g_i = gg_j\}.\end{aligned}$$

因此，$\mathrm{im}(\epsilon_g) = V_{g\,\mathrm{Supp}(V)}$。由 ϵ_g 的定义和 (a) 可得结论 (c)。由 (b) 和 (c) 可得结论 (d)。□

定理 2.11. 假设 $M_n(R)$ 配备了一个非常良好 G-分次。对于每个 $g\in G$，令 $X_g := \{i\in\overline{n} \mid \deg(v_i) = g\}$。若 $|X_g| = |X_e|$，对于每个满足 $X_g\neq\emptyset$ 的 $g\in G$，则 S 是一个 ε-交叉积。

证明。由定理 2.4，$S := M_n(R)$ 是 ε-强 G-分次的。假设对于每个满足 $X_g\neq\emptyset$ 的 $g\in G$，都有 $|X_g| = |X_e|$。对于所有满足 X_g 且 X_h 非空的 $g,h\in G$，固定一个双射 $b_{h,g}: X_g\to X_h$，并令 $c_{g,h} := b_h^{-1},_g$。取 $g\in G$。现在我们按如下方式定义 $A_g\in S_g$ 和 $B_{g^{-1}}\in S_{g^{-1}}$。取 $i\in\overline{n}$。若 $g_i\notin g\mathrm{Supp}(V)$，则令 $B_{g^{-1}}(v_i) := 0$。若对于某个 $h\in$，有 $g_i = gh\,\mathrm{Supp}(V)$，则令 $B_{g^{-1}}(v_i) := v_{b_h,gh}(i)$。取 $j\in\overline{n}$。若 $g_j\notin g^{-1}\mathrm{Supp}(V)$，则令 $A_g(v_j) := 0$。若对于某个 $h\in$，有 $g_j = g^{-1}h\,\mathrm{Supp}(V)$，则令 $A_g(v_j) := v_{c_h,g^{-1}h}(j)$。容易验证 $A_gB_{g^{-1}} = \epsilon_g$ 和 $B_{g^{-1}}A_g = \epsilon_{g^{-1}}$。因此，$S$ 是一个 ε-交叉积。□

引理 2.12. 假设 $N\in\mathbb{N}$ 和 $x_1,\ldots,x_N\in\mathbb{R}$. 那么 $\left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2 \le N\sum_{i=1}^N x_i^2$，当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_N$ 时等号成立。

证明. 这由柯西–施瓦茨不等式得出。不过，在这个特殊情形下，该结论可直接由等式 $N\sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2 = \sum_{i<j}(x_i - x_j)^2$. □ 得出。

注意，[7] 中考察的良分次实际上都是非常良好的，因此下面的结果将 [7, Prop. 2.6] 推广到了系数环具有不变基数性质（简称 IBN）的矩阵环情形。

定理 2.13. 假设 R 具有不变基数性质，且 $S := M_n(R)$ 配备了一个非常良好的 G-分次。以下断言等价：

(i) S 是 ε-交叉积；(ii) 对于每个 $g\in\mathrm{Supp}(V)$，$\mathrm{rank}(V_g) = \mathrm{rank}(V_e)$；(iii) $n^2 = |\mathrm{Supp}(V)|\cdot\mathrm{rank}(S_e)$。

证明。(i)⇒(ii)：假设 S 是 ε-交叉积。取 $g\in\mathrm{Supp}(V)$。则存在 $A_g\in S_g$ 和 $B_{g^{-1}}\in S_{g^{-1}}$，使得 $A_gB_{g^{-1}} = \epsilon_g$ 和 $B_{g^{-1}}A_g = \epsilon_{g^{-1}}$。令 $C_g := A_g|_{V_e}$ 以及 $D_{g^{-1}} := B_{g^{-1}}|_{V_g}$。则 $C_g: V_e\to V_g$ 且 $D_{g^{-1}}: V_g\to V_e$。此外，由命题 2.10，$C_gD_{g^{-1}} = \mathrm{id}_{V_g}$ 以及 $D_{g^{-1}}C_g = \mathrm{id}_{V_e}$。利用 R 具有不变基数性质，可得 $\mathrm{rank}(V_g) = \mathrm{rank}(V_e)$。

(ii)⇒(iii)：假设对于每个 $g\in\mathrm{Supp}(V)$，都有 $\mathrm{rank}(V_g) = \mathrm{rank}(V_e)$。注意，

$$\mathrm{rank}(V) = \sum_{g\in\mathrm{Supp}(V)}\mathrm{rank}(V_g) = \sum_{g\in\mathrm{Supp}(V)}\mathrm{rank}(V_e) = |\,\mathrm{Supp}(V)|\cdot\mathrm{rank}(V_e) = |\,\mathrm{Supp}(V)|\cdot\mathrm{rank}(V_g) \tag{1}$$

对于每个 $g \in \mathrm{Supp}(V)$ 都成立。另请注意,

$$\mathrm{rank}(S_e) = \mathrm{rank}(\mathrm{End}_R(V)_e) = \sum_{g\in \mathrm{Supp}(V)} \mathrm{rank}(\mathrm{End}_R(V_g)) = \sum_{g\in \mathrm{Supp}(V)} (\mathrm{rank}(V_g))^2. \qquad (2)$$

因此，由 (1) 和 (2) 可得

$$\begin{aligned} n^2 = (\mathrm{rank}(V))^2 &= \sum_{g\in \mathrm{Supp}(V)} \mathrm{rank}(V)\cdot \mathrm{rank}(V_g) \\ &= \sum_{g\in \mathrm{Supp}(V)} |\,\mathrm{Supp}(V)|\cdot (\mathrm{rank}(V_g))^2 = |\,\mathrm{Supp}(V)|\cdot \mathrm{rank}(S_e). \end{aligned}$$

(iii)⇒(i i)：假设 $n^2 = |\mathrm{Supp}(V)|\cdot \mathrm{rank}(S_e)$。那么，由 (2) 可得 t

$$\left(\sum_{g\in \mathrm{Supp}(V)} \mathrm{rank}(V_g)\right)^2 = n^2 = |\,\mathrm{Supp}(V)|\cdot \sum_{g\in \mathrm{Supp}(V)} (\mathrm{rank}(V_g))^2.$$

由引理 2.12 可得，对于所有 $g \in \mathrm{Supp}(V)$，$\mathrm{rank}(V_g) = \mathrm{rank}(V_e)$。

(ii)⇒(i)：这由定理 2.11 得出。 □

例 2.14。现在我们将通过一些具体例子来说明定理 2.11 和定理 2.13，其中 $S := M_3(R)$。我们将使用定理 2.11 中的记号。

(a) 在 S 上定义一个非常良好的 $\mathbb{Z}_3$-分次:

$$S_0 := \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix}, \quad S_1 := \begin{bmatrix} 0 & R & 0 \\ R & 0 & R \\ 0 & R & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad S_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & R \\ 0 & 0 & 0 \\ R & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由于 $|X_0| = |X_1| = |X_2| = 1$，定理 2.11 蕴含 S 是一个 ε-交叉积。事实上， S 甚至是一个经典的 $\mathbb{Z}_3$-交叉积。（

b) 在 S 上定义一个非常良好的 $\mathbb{Z}$-分次，令 $S_n := \{0\}$，如果 $|n| > 2$，并且

$$S_0 := \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \quad S_1 := \begin{bmatrix} 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & R \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

并令 $S_{-n} := S_n^t$，对于 $n \in \{1, 2\}$. 。由于 $|X_0| = |X_{-1}| = |X_{-2}| = 1$ 且 $X_n = \emptyset$ 对于 $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0, -1, -2\}$，定理 2.11 蕴含 S 是一个 ε-交叉积。注意， S 不是一个经典的 $\mathbb{Z}$-交叉积，因为它不是强分次的（例如 $S_3S_{-3} = \{0\} \neq S_0$）。

(c) 在 S 上定义一个非常良好 $\mathbb{Z}_2$-分次，方法如下:

$$S_0 := \begin{bmatrix} R & R & 0 \\ R & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad S_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & R \\ 0 & 0 & R \\ R & R & 0 \end{bmatrix}.$$

采用此分次时， S 可能是 ε-交叉积，也可能不是，具体取决于 R 的选择。

情形 1：假设 R 具有不变基数性质。由于 $|X_0| = 2 \neq 1 = |X_1|$，定理 2.13 推出 S 不是 ε-交叉积。

情形 2：假设 K 是一个域，且 R 表示定义在 K 上的 Leavitt 代数 $L_K(1,2)$。回想一下，R 是由四个元素 x_1、x_2、y_1、y_2 生成的 K-代数，它们满足关系式 $y_1x_1 = y_2x_2 = 1$、$y_2x_1 = y_1x_2 = 0$ 和 $x_1y_1 + x_2y_2 = 1$。众所周知，S不具有不变基数性质。此外，由于

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & y_2 \\ x_1 & x_1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} y_1x_1 & y_1x_2 & 0 \\ y_2x_1 & y_2x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_1y_1 + x_2y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由此可知，S 是一个 $\mathbb{Z}_2$-交叉积。

2.4. 良分次与分次同构。设 S 和 S' 是 G-分次环。若环同态 $f\colon S \to S'$ 满足对于每个 $g \in G$都有 $f(S_g) \subseteq S'_g$，则称其为分次环同态。在这种情况下，若 f 是双射，则称 f 为分次同构，并称 S 和 S' 分次同构。下面的结论显然成立。

引理 2.15. 设 S 和 S' 是 G-分次同构的环。若 S 是 ε-强 G-分次的，则 S' 是 ε-强 G-分次的。

由 [7, 例 1.3] 可知，良分次在分次同构下不一定保持。然而，由定理 2.4 和引理 2.15 可知，与非常好分次同构的分次都是 ε-强的。因此，根据下面的结果，我们可以自动得到许多带有 ε-强分次的新环类。

命题 2.16. 设 K 是一个域，p 是一个素数，且 m, n 是正整数。那么，在我们考虑满足$K1_{M_m(K)} \subseteq M_m(K)_e$的分次这一假设下，以下所有分次都是 ε-强的：

(1) $M_m(K)$上的任意 C_p-分次，其中 $p \nmid m$；(2) $M_2(K)$上的任意 C_2-分次，其中 char$(K) \neq 2$ 或 K 是代数闭的；(3) $M_m(K)$上的任意 G-分次，其中 $e_{i,j}$ 对某些 $i, j \in \{1, \dots, n\}$是齐次的；(4) $M_m(K)$上的任意 C_n-分次，若 K 是代数闭的且 char$(K) \nmid n$。

证明. (1) 由 [5, 命题 3.2]，得出。(2) 是 [7, 推论 4.2 和推论 4.9]，的结果。(3) 由 [7, 推论 1.6] 得出，而 (4) 可由 [5, 命题 2.2] 推出。□

注记 2.17. 由命题 2.16 的 (3) 可知，[7, 例 1.7]给出了 $M_2(K)$ 上一个 ε-强 C_2-分次的例子，其中没有任何 $e_{i,j}$ 是齐次的。

References

[1] G. Abrams 和 G. Aranda Pino，图的 Leavitt 路径代数，《代数学杂志》293 (2005), 319–334.[2] Y. A. Bahturin、S. K. Sehgal 和 M. V. Zaicev，结合代数上的群分次，《代数学杂志》241 (2001), no. 2, 677–698.[3] Y. A. Bahturin 和 M. V. Zaicev，矩阵代数上的群分次，《加拿大数学通报》45 (2002), no. 4, 499–508.[4] L. Bemm、E. Z. Fornaroli 和 E. A. Santulo Jr.，从上同调角度看具有乘法基的代数上的分次，《纯粹与应用代数学杂志》223 (2019), no. 2, 769–782.[5] C. Boboc 和 S. Dˇascˇalescu，循环群对矩阵代数的分次，《代数通讯》29 (2001), no. 11, 5013–5021。

[6] S. Caenepeel、S. Dˇascˇalescu 和 C. Nˇastˇasescu，关于矩阵代数的分次与下降理论，《代数通讯》30 (2002), no. 12, 5901–5920.[7] S. Dˇascˇalescu、B. Ion、C. Nˇastˇasescu 和 J. Rios Montes，全矩阵环上的群分次，《代数学杂志》220 (1999), no. 2, 709–728.[8] S. Dˇascˇalescu、A. V. Kelarev 和 L. van Wyk，全矩阵环上的半群分次，《代数通讯》 29 (2001), no. 11, 5023–5031.[9] D. Diniz 和 D. Pellegrino，矩阵代数上的分次数目，《线性代数及其应用》624 (2021), 14–26.[10] M. Dokuchaev，部分作用的最新进展，S ˜ao Paulo J. Math. Sci. 13 (2019), no. 1, 195–247.[11] R. Exel，部分动力系统、Fell 丛及其应用，《数学调查与专著》224。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州 (2017).[12] M. R. Jones，偏序集上带截集的关联代数的初等良群分次，《代数通讯》34 (2006), no. 7, 2369–2387.[13] A. V. Kelarev，《超群在分次环理论中的应用》，《半群论坛》50 (1995), no. 3, 327–350.[14] A. V. Kelarev，《环的构造及其应用》，《代数丛书》9。世界科学出版公司，River Edge，新泽西州 (2002).[15] P. Lundstr¨om，环上的良 Magma 分次，《代数通讯》42 (2014), no. 12, 5357–5373..[16] P. Lundstr¨om 和 J. Oinert，勘误：Leavitt 路径代数上的群分次。即将发表于《代数学及其应用杂志》(2024), 2492001, 3 pages.[17] C. Nˇastˇasescu 和 F. Van Oystaeyen，《分次环方法》，《数学讲义》1836。施普林格出版社，柏林 (2004)..[18] P. Nystedt 和 J. Oinert，Leavitt 路径代数上的群分次，《代数学及其应用杂志》19(9) (2020), 2050165..[19] P. Nystedt、J. Oinert 和 H. Pinedo，ε-强分次环、可分性与半单性，《代数学杂志》514 (2018), 1–24.[20] K. L. Price，广义关联环的良分次，《代数通讯》41 (2013), no. 10, 3668–3678.[21] K. L. Price，勘误：广义关联环的良分次，《代数通讯》46 (2018), no. 3, 1047.[22] A. Valenti，二阶上三角矩阵的分次恒等式，《纯粹与应用代数学杂志》172 (2002), no. 2–3, 325–335.[23] A. Valenti 和 M. Zaicev，上三角矩阵上的阿贝尔分次，《巴塞尔数学文献》80 (2003), no. 1, 12–17.[24] A. Valenti 和 M. Zaicev，上分块三角矩阵上的阿贝尔分次。《加拿大数学通报》55 (2012), no. 1, 208–213.[25] F. Y. Yasumura，上分块三角矩阵上的群分次，《巴塞尔数学文献》110 (2018), no. 4, 327–332.[26] M. V. Zaˇitsev 和 S. K. Segal，单阿廷环的有限分次，《莫斯科大学数学通报》56 (2001), no. 3, 21–24。