arXiv:2304.08550v1 [math.AC] 17 Apr 2023

交换 Jordan 型：综述

莱拉·哈塔米

Abstract. 本文综述了关于寻找最大交换幂零轨道的研究进展，该轨道与给定幂零矩阵的中心化子相交。

1. 引言

设 k 为一个无限域，n 为一个正整数。我们用 $\mathcal{M}at_n$(k) 表示所有元素属于 k 的 $n \times n$ 矩阵构成的集合，用 $\mathcal{N}ilp_n$(k) 表示 $\mathcal{M}at_n$(k) 中幂零矩阵构成的集合。对于矩阵 $A \in \mathcal{N}ilp_n$(k)，令 $\mathcal{N}_A$为 A的幂零交换子，即 $\mathcal{N}_A = \{B \in \mathcal{N}ilp_n(\mathrm{k}) \mid [A, B] = 0\}$.

根据 Jordan 分解定理，n的分拆集合与 $\mathcal{N}ilp_n$(k) 的 GL_n(k)-轨道集合之间存在一个双射。对于幂零矩阵 $A \in \mathcal{N}ilp_n$(k)，我们将由 A 的 Jordan 标准形中 Jordan 块的大小所确定的 n 的分拆称为 A 的 Jordan 型，并记作 P_A。众所周知，幂零矩阵的幂零交换子是一个不可约代数簇（例如参见 [**2**, 命题 2.3]）。这特别意味着，幂零矩阵的幂零交换子 $\mathcal{N}_A$ 包含一个开稠密子集，在该子集上 Jordan 型是常值的。在过去二十年中，许多作者研究了幂零矩阵的幂零交换子中一般 Jordan 型的特征与性质。本文将对这些

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 15A27，次要分类号 05E40、06A11、13E10、15A21。

结果进行总体综述。我们在本文综述的结果中使用了种类繁多的代数与组合工具。为简洁起见，我们省略技术细节，将本文重点放在结果本身上。

需要指出的是，过去二十年来对交换幂零矩阵的研究并不局限于本文综述的成果。例如，参见 Baranovsky、Basili 和 Iarrobino 在 [**1, 2, 4**] 中的工作，其中将交换幂零矩阵对的研究与平面上的局部 Hilbert 概形联系起来。Premet、McNinch 和 Panyushev 也在李代数这一更广泛的背景下研究了交换幂零轨道对（见 [**15, 20, 21**]）。Guralnick、Sethuranam、Sivic、Haboush、Hyeon 等人也研究了交换幂零矩阵三元组（或更一般地说，d元组）（见 [**8, 9, 16, 17, 22, 23, 24, 25**]）。

2. 预备知识

本文中，我们将分拆写成一个弱递减的正整数序列。如果一个分拆包含 k 个大小为 ℓ 的部分，在记号 P 中，我们通常写作 k^ℓ（而不写成 ℓ 个 k）。例如，我们用 $(3^2, 1^3)$ 表示 (3, 3, 1, 1, 1)。

Definition 2.1. 设 n 为正整数，且 P 和 Q 是 n 的分拆。若存在 $\mathcal{N}ilp_n$(k) 中的两个可交换幂零矩阵 A 和 B，其 Jordan 型分别为 P 和 Q，则称分拆 P 和 Q 可交换。

幂零矩阵的 Jordan 型可由其各次幂的秩确定。

Lemma 2.2. ([**4**, 引理 1.1]) 假设 $A \in \mathcal{N}ilp_n$(k)。对于 $i \geq 1$，令 $d_i = \operatorname{rank} A^{i-1} - \operatorname{rank} A^i$。那么分拆 $d = (d_1, d_2, \dots)$ 与 A 的 Jordan 型P_A 是共轭分拆。

Example 2.3. 令 J_4为 4×4幂零约当块。显然，J_P的 Jordan 型为 (4)。现在考虑 $B = J_4^2$。容易看出，$B =$ 2的秩为，而

$B^2 = 0$. 因此， B 的 Jordan 型是 (2, 2) 的共轭分拆，巧合的是它本身就是 (2, 2)。这特别表明，分拆 (4) 和 (2, 2) 可交换。注意，尽管分拆 (2, 2) 和 (4) 可交换，但 Jordan 矩阵 $J_{(2,2)}$（对应于分拆 (2, 2) 的幂零约当矩阵）与 J_4 不可交换。

设矩阵 A 和 B 可交换。那么，对于 GL$_n$(k) 作用在 A上的轨道中的任意矩阵 A'，都存在 GL$_n$(k) 作用在 B 上的轨道中的一个矩阵 B'，使得A'和 B'可交换（若 $A' = P^{-1}AP$，只需令 $B' = P^{-1}BP$）。然而，正如上面的例子所示，这并不意味着 A轨道中的每个矩阵都必须与 B轨道中的所有矩阵可交换。

我们可以将例 2.3 中采用的方法加以推广，从而轻松求出单个约当块的幂的 Jordan 型。这将立即得到一族与分拆 (n)可交换的 n 的分拆。

设 J_n是一个 $n \times n$幂零约当块。将任意 $n \times n$矩阵A 左乘以 J_n，会使 A 每一列的各分量向上移动一位，并在最后一位补零（我们使用上三角约当块）。特别地，对于 $1 \leq k \leq n$，矩阵 J_n^k 在其 k对角线上全为 1，其余位置全为 0。因此，

$$\operatorname{rank} J_n^k = \begin{cases} n-k, & 1 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，若非负整数 x和 r满足 $0 \leq r < k$和 $n = kx + r$，则 (rank $\left(J_n^k\right)^i)_{i \geq 0}$ =(n, $n-k, n-2k, \ldots, n-kx$, 0)。因此，与 J_n^k 的 Jordan 型共轭的差分序列为 (k^x, r)。因此， J_n^k 的 Jordan 型是分拆 $\left((x+1)^r, x\right)$。注意，这是 n的唯一一个恰好由 k 个“几乎相等”的部分组成的分拆。

Definition 2.4. 如果一个分拆中最大部分与最小部分相差至多 1，则称其为几乎矩形。对于正整数 n 和 $1 \leq k \leq n$，大小为 n 且有 k 个部分的近矩形分拆记为 $[n]^k$。如果 r 表示余数

即 n 除以 k 所得的余数，那么近矩形分拆 $[n]^k$ 由 r 个（可能为 0）大小为 $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + 1$ 的部分和 $k-r$ 个大小为 $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ 的部分组成。

每个分拆 P 都可以分解为其近似矩形子分拆的并（串接）。我们用 r_P 表示将 P 分解为互不重叠的近似矩形子分拆所需的最少数量。

EXAMPLE 2.5. 分拆 $[6]^2 = (3,3)$ 和 $[6]^4 = (2^2, 1^2)$ 都是 $n = 6$ 的几乎矩形分拆。

现在考虑 $P = (5, 3, 2^2, 1^2)$。于是我们可以写成

$$P = (\underline{5}, \underline{3}, \underline{2^2}, \underline{1^2}) = ([5]^1, [7]^3, [2]^2) \text{ or } P = (\underline{5}, \underline{3}, \underline{2^2, 1^2}) = ([5]^1, [3]^1, [6]^4).$$

该分拆无法分解为更少的几乎矩形子分拆。因此，$r_P = 3$。

3. 一般交换分拆

DEFINITION 3.1. 设 n 是一个正整数，$\mathcal{P}(n)$ 是 n 的所有分拆构成的集合。我们定义映射 $\mathcal{Q} : \mathcal{P}(n) \to \mathcal{P}(n)$，将每个分拆 P 映射为不可约簇 $\mathcal{N}_{J_P}$ 中一般元的 Jordan 型，其中 J_P 是 Jordan 型为 P 的幂零约当矩阵。换言之，$\mathcal{Q}(P)$ 是与 P 可交换的一般 Jordan 型。

本节概述上述映射 $\mathcal{Q}$ 的性质。

回顾一下，支配序是在 n 的所有分拆构成的集合上定义的偏序，定义如下。对于 $\mathcal{P}(n)$ 中的分拆 $P = (p_1, p_2, \dots)$ 和 $Q = (q_1, q_2, \dots)$，当且仅当对所有 k，都有 $Q \geq P$。

$$\sum_{1 \leq i \leq k} q_i \geq \sum_{1 \leq i \leq k} p_i.$$

等价地，当且仅当对所有 k，都有秩 ${J_Q}^k \geq$ 秩 ${J_P}^k$。

利用矩阵幂的秩的半连续性，以及将$\mathcal{Q}(P)$定义为 J_P的幂零交换子中一般元的 Jordan 型，我们得到以下结论。

PROPOSITION 3.2. 设 n为正整数， P 为 n的一个分拆。若分拆 Q 与 P交换，则 $\mathcal{Q}(P) \geq Q$。

换言之， $Q(P)$ 是 Jordan 矩阵 J_P（或任何 Jordan 型为 P 的其他矩阵）的幂零交换子中各矩阵的 Jordan 型里，在支配序下最大的分拆。

在 [4], Basili 和 Iarrobino 刻画了在 $\mathcal{Q}$ 的作用下保持稳定的分拆。在 [20, 定理 2 中，1], Panyushev 独立地在更一般的背景下证明了同一结果。

THEOREM 3.3.（[4, 定理 1.12]）对于一个分拆 P， $\mathcal{Q}(P) = P$ 当且仅当 P 的各部分两两相差至少 2。

对于一对在 $\mathcal{N}il\mathcal{P}_n$(k) 中相互交换的幂零矩阵 A 和 B，考虑由 A 和 B 生成的 $\mathcal{M}at_n$(k) 的子代数 k$[A, B]$ 。那么 k$[A, B]$ 是一个交换阿廷 k 代数。令 H(k$[A, B]$) 表示该代数的 Hilbert 函数，并假设 char k 为 0，或大于 H(k$[A, B]$) 的底 socle 次数。在 [4, 定理 2 中，16], Basili 和 Iarrobino 证明，若 $\dim_{\mathrm{k}}$ k $[A, B] = n$，则 k$[A, B]$ 中一般线性形式的乘法所对应的 Jordan 型，以及其关联分次代数的 Jordan 型，均为由 H(k$[A, B]$) 得到的分拆的共轭分拆。另一方面，在 [14, 推论 5]，中， B 若为 $\mathcal{N}_A$ 中的一般元，则代数 k$[A, B]$ 是 Gorenstein 的，因此也是完全交。利用 Macaulay 对完全交阿廷代数的 Hilbert 函数的经典刻画，Koˇsir 和 Oblak 随后证明了以下结论。

THEOREM 3.4. ([14, 定理 6]) 假设 char k $= 0$ 或 char k $> n$。那么定义 3.1 中的映射 $\mathcal{Q}$ 是幂等的，即对每个分拆 P，$\mathcal{Q}(\mathcal{Q}(P)) = P$。

在 [**2**], 中，Basili 通过计算 J_P的幂零交换子中的一般矩阵的秩，确定了 $\mathcal{Q}(P)$ 的部分数。另请参见 [**5**, 定理 2.17]，其中给出了另一种证明。

THEOREM 3.5.（[**2**, 命题 2.4]）分拆 $\mathcal{Q}(P)$ 有 r_P 个部分。

请注意，这一结果的一个直接推论是：分拆 P 与极大分拆（n）可交换，当且仅当 P 是近似矩形的。

在 [**18**, 定理 12]，中，Oblak 给出了 $\mathcal{Q}(P)$ 最大部分的显式公式。尽管她的结果是在特征为 0 的域上证明的，后来 Iarrobino 和作者在 [**10**, 推论 3.10] 中将其推广到了任意无限域。在 [**13**]，中，作者给出了任意无限域上 $\mathcal{Q}(P)$ 最小部分的显式公式。

这些部分结果尤其确定了对于每个满足 $r_P \leq 3$ 的分拆 P，分拆 $\mathcal{Q}(P)$。它们还证实了 Oblak 的一个猜想，该猜想最终由 Basili 在 [**3**] 中完整证明，此前已在 [**10**] 和 [**12**] 中得到部分证明。这些结果与 Oblak 引入的递归过程密切相关。在下一节中，我们将讨论这一过程，以及一种从 P 显式确定 $\mathcal{Q}(P)$ 的算法。

4. Oblak 过程

本节回顾 Oblak 提出的一个递归过程。她猜想，该过程可以用 P 显式确定一般交换分拆$\mathcal{Q}(P)$。正如我们之前所指出的，这一猜想通过多位作者的工作得到了部分证实，最终由 Basili 在 [**3**] 中一般性地证明。本节所介绍的内容基于 Oblak 的原始思想，但其中的记号和框架主要基于 [**5**], [**10**], [**13**] 和 [**12**]。

偏序集 $\mathcal{D}_P$。令 n 为正整数，P 为 n 的一个分拆。我们记作 $P = (p_1^{n_1}, p_2^{n_2}, \ldots, p_t^{n_t})$，其中 $p_1 > \cdots > p_t$ 和 $n_i > 0$，对所有 i 均成立。我们如下定义有向图 $\mathcal{D}_P$。

$\mathcal{D}_P$ 中有 n 个顶点。这些顶点排列成若干行，每行对应于 P 的一个部分。$\mathcal{D}_P$ 中的各行按从上到下的顺序弱递减排列。换言之，有 n_1 行的长度为 p_1，其下方有 n_2 行的长度为 p_2，依此类推。我们用三元组 (u, p_i, k) 标记每个顶点，其中对每个 i，$1 \le u \le p_i$ 和 $1 \le k \le n_i$。顶点 (u, p_i, k) 对应于 $\mathcal{D}_P$ 中长度为 p_i 的第 k 行中的第 u 个顶点。对每个 i，长度为 p_i 的 n_i 行中的顶点按如下方式标记：三元组的第一个分量从左向右递增，而最后一个分量从上到下递增。

对于 $1 \le i < t$，$\mathcal{D}_P$ 中有四族边。

- 对于每个 $1 \le u \le p_{i+1}$，都有一条边从 $(u, p_i, 1)$ 连到 (u, p_{i+1}, n_i)；前者是对应于 p_i 的顶行中的第 u 个顶点，后者是对应于 p_{i+1} 的底行中的第 u 个顶点（图 1 中的虚线箭头）。

- 对于每个 $1 \le u \le p_{i+1}$，都有一条边从 $(u, p_{i+1}, 1)$ 连到 $(u+p_i-p_{i+1}, p_i, n_i)$；前者是对应于 p_{i+1} 的顶行中的第 u 个顶点，后者是对应于 p_i 的底行中的第 $u+(p_i-p_{i+1})$ 个顶点（图 1 中的点线箭头）。

- 对于每个 $1 \le u \le p_i$ 和每个 $1 \le k < n_i$，都有一条边从 (u, p_i, k) 连到 $(u, p_i, k-1)$；前者是对应于 p_i 的第 k 行中的第 u 个顶点，后者是对应于 p_i 的第 $(k-1)$ 行中的第 u 个顶点（图 1 中的实线箭头）。

- 如果 p_i 是一个孤立部分，即 $p_{i-1} - p_i > 1$ 且 $p_i - p_{i+1} > 1$，那么对于每个$1 \le u < p_i$，有向图 $\mathcal{D}_P$还包含一条边，从对应于 p_i 的顶行中的第u个顶点（$u, p_i, 1$）指向对应于 p_i 的底行中的第 $(u+1)$ 个顶点（$u+1, p_i, n_i$）（图 1 中的点划线箭头）。注意，如果 $n_i = 1$，那么这些边就在同一行中从左向右延伸（这是对应于 p_i 的 $\mathcal{D}_P$ 中唯一的一行）。

在图 1 中，我们展示了 $P = (6, 4^2, 3^2, 2^2, 1)$ 对应的偏序集 $\mathcal{D}_P$。我们只给偏序集中的少数几个顶点标注了相应的三元组，以说明标记规则，同时避免图示过于拥挤。

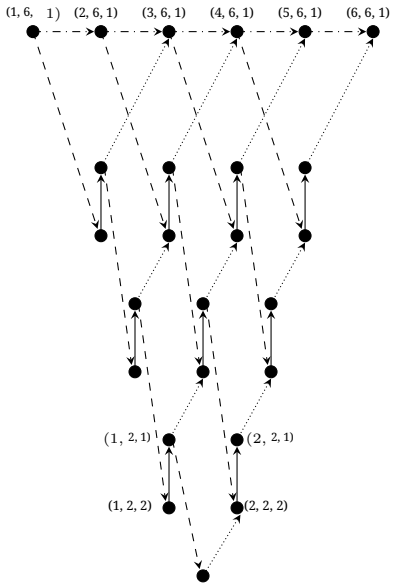


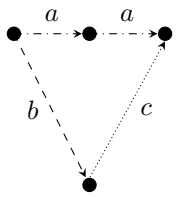
FIGURE 1. 与分拆$P = (6, 4^2, 3^2, 2^2, 1)$对应的有向图 $\mathcal{D}_P$。

有向图 $\mathcal{D}_P$ 实际上是偏序集（poset） $\mathcal{D}_P$ 的覆盖边图，我们也用 $\mathcal{D}_P$ 表示该偏序集。对于偏序集中的元素 v 和 v'，当且仅当有向图 $\mathcal{D}_P$ 中存在一条从顶点 v 到顶点 v' 的有向路径时，$v > v'$。该偏序定义在 $\mathbf{k}^n$ 的一个基上，并与 J_P 的中心化子的一个极大幂零子代数密切相关。这个代数中的一般 Jordan 型同样为 $\mathcal{Q}(P)$。详情请参阅 [**5**] 和 [**12**] 。粗略地说， $\mathcal{D}_P$ 中的边对应于 J_P 的幂零交换子中一般（上三角）矩阵的非零项。作为一个简单例子，考虑分拆 $P = (3, 1)$。直接计算可知， J_P 的幂零交换子中的一般元是一个矩阵 B，其形式如图 2 所示，其中 a、 b、 c 均足够一般。该图还展示了 $\mathcal{D}_P$，每条边都标有 B 中对应的矩阵项。

回忆一下，偏序集中的全序子集称为链。在 [**7**], Gansner 证明，对于有限偏序集 S，其关联代数中的一般元的 Jordan 型由序列 $\{c_k\}_k$ 的差分序列得到，其中

$$B = \left(\begin{array}{cccc} 0 & a & 0 & |b \\ 0 & 0 & a & |0 \\ 0 & 0 & 0 & |0 \\ \hline 0 & 0 & c & |0 \end{array}\right)$$

其中的一般矩阵 $J_{(3,1)}$的幂零交换子



$\mathcal{D}_{(3,1)}$

FIGURE 2. J_P的幂零交换子中的一般矩阵，以及偏序集 $\mathcal{D}_P$ 关于 $P = (3, 1)$ 的覆盖边图和偏序集

c_k 是偏序集中 k 条链的并集的最大亲和度。我们将这个分拆记作 $\lambda(S)$（见 [6]）。

如上面的例子所示， J_P 的幂零交换子中的每个元素都是 $\mathcal{D}_P$的关联代数中的一个矩阵。然而，为了满足可交换条件，必须对矩阵的各个条目施加额外条件。因此，分拆 $\mathcal{Q}(P)$ 被 $\lambda(\mathcal{D}_P)$ 控制（见 [10]）。Oblak 的递归过程通过研究偏序集中的特殊链，给出了一个算法，用于确定偏序集$\mathcal{D}_P$ 的 $\mathcal{Q}(P)$。这些链对应于 P 的近似矩形子分拆。

DEFINITION 4.1. 设 n 为正整数， P 为 n的一个分拆。对于正整数 p，令 $N_P(p)$ 表示 P 中大小为 p的部分的数量（可能为零）。设正整数 p 满足 $N_P(p) > 0$，即 P 至少有一个大小为 p的部分。令 $R_P(p) = \left(p^{N_P(p)}, (p-1)^{N_P(p-1)}\right)$ 为 P 的近矩形子分拆，且其最大部分的大小为 p。注意， P 可能不包含任何大小为 $p-1$的部分。若是如此，则 $N_P(p-1) = 0$ 和 $R_P(p)$ 将由 $N_P(p)$ 个大小为 p 的部分组成。

在 $\mathcal{D}_P$ 中，我们将 U-链定义为这样一条链：它由 $\mathcal{D}_P$ 中所有对应于 P 的近矩形子分拆的顶点，以及该近矩形子分拆上方任意一行中的第一个和

最后一个顶点组成（示例见图3）。对于正整数 p，我们将对应于近矩形子分拆 $R_P(p)$ 的 U-链记为 $U_P(p)$。换言之， $U_P(p)$ 定义为由 $\mathcal{D}_P$ 中所有对应于 $R_P(p)$ 的顶点，以及 $\mathcal{D}_P$ 中每个长于 p 的行的第一个和最后一个顶点组成的集合（见图3和例4.2）。

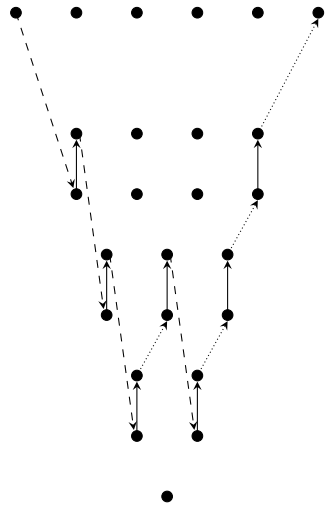


FIGURE 3. U-链 $U_P(3)$，对应于几乎矩形子分拆 $R_P(3) = (3^2, 2^2)$，它属于 $P = (6, 4^2, 3^2, 2^2, 1)$。

显然， $U_P(p)$ 的基数记作 $\mathfrak{u}_P(p)$，其值为 $\mathfrak{u}_P(p) = pN_P(p) + (p-1)N_P(p-1) + 2\sum_{j>p} N_P(j)$。这里，加项 $pN_P(p) + (p-1)N_P(p-1)$ 是近矩形子分拆 $R_P(p)$ 的大小，而 $\sum_{j>p} N_P(j)$ 是 P 中大于 p 的部分的数量。

EXAMPLE 4.2. 图3展示了 U-链 $U_P(3)$，对应于 $P = (6, 4^2, 3^2, 2^2, 1)$。这里，近矩形子分拆 $R_P(3)$ 为 $(3^2, 2^2)$，并且

$$\mathfrak{u}_P(3) = 3(2) + 2(2) + 2(2+1) = 16.$$

对于同一个分拆 $P = (6, 4^2, 3^2, 2^2, 1)$， $\mathcal{D}_P$ 中还有其他 U-链，分别对应于近似矩形子分拆 $R_P(6) = (6)$、 $R_P(4) = (4^2, 3^2)$，

$R_P(2) = (2^2, 1)$，甚至还有 $R_P(1) = (1)$。我们有

$$\begin{aligned}
\mathfrak{u}_P(6) &= 6(1) = 6,\\
\mathfrak{u}_P(4) &= 4(2) + 3(2) + 2(1) = 16,\\
\mathfrak{u}_P(3) &= 3(2) + 2(2) + 2(2+1) = 16,\\
\mathfrak{u}_P(2) &= 2(2) + 1(1) + 2(2+2+1) = 15, \ \textit{and}\\
\mathfrak{u}_P(1) &= 1(1) + 2(2+2+2+1) = 15.
\end{aligned}$$

Oblak 过程。对于分拆 P，Oblak 过程是一种递归过程，通过在 $\mathcal{D}_P$ 中寻找具有最大可能基数的 U-链，将其从 $\mathcal{D}_P$ 中移除以得到一个新的分拆，并重复这一过程，直到 $\mathcal{D}_P$ 的所有顶点都被计入，从而得到 $\mathcal{Q}(P)$。

设 $P = (p_1^{n_1}, \dots, p_t^{n_t})$，使得对于 $1 \le i \le t$，$p_1 > \cdots > p_t$ 和 $n_i > 0$。假设 $p \in \{p_1, \dots, p_t\}$。考虑由 $\mathcal{D}_P - U_P(p)$ 中剩余顶点的数量确定的分拆 P_1。换言之，P_1 是通过从 P 中移除近矩形子分拆 $R_P(p)$ 得到的，同时保持 P 中位于 $R_P(p)$ 下方的子分拆不变，并将 P 中位于 $R_P(p)$ 上方的每个部分缩短 2。若记 $P_1 = (q_1^{m_1}, \dots, q_t^{m_t})$，则对于 $1 \le i \le t$，有

$$m_i = \begin{cases} 0, & \text{if } p_i \in \{p, p-1\},\\ n_i, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \text{and} \quad q_i = \begin{cases} p_i - 2, & \text{if } p_i > p,\\ p_i, & \text{if } p_i < p-1. \end{cases}$$

假设 $\mathcal{D}_P = U_1 \cup \cdots \cup U_r$，其中 U_i 是在该过程第 i 步得到的分拆所对应的最大 U 链。Oblak 猜想，分拆 $(|U_1|, \dots, |U_r|)$ 实际上是 $\mathcal{Q}(P)$ 的一般交换分拆。正如我们在例4.2中看到的，在每个偏序集中，可能存在多个基数最大的 U 链。最初，Oblak 通过对过程中每一步所选取的特定最大 U 链施加额外条件来处理这一问题。然而，在 [**12**], 中，作者证明这一限制并非必要，而且上述分拆确实与最大 U 链的选择无关，并由 P 唯一确定。自 Oblak 提出她的猜想以来，多位作者的研究结果证实了这一猜想

（见 [**18**], [**14**], [**5**], [**10**], [**12**], 和 [**13**]）。最终，Basili 在 [**3**, 定理**1.2**] 中证明了该猜想的一般情形。

EXAMPLE 4.3. 回顾例子 $P = (6, 4^2, 3^3, 2^2, 1)$，如我们所见，在 $\mathcal{D}_P$ 中有两条最大的 U-链，分别是 $U_P(4)$，对应于近矩形子分拆 $(4^2, 3^2)$；以及 $U_P(3)$，对应于近矩形子分拆 $(3^2, 2^2)$。这两条链的基数都是 16。

假设我们从 $\mathcal{D}_P$ 中移除 $U_P(4)$，以此开始 Oblak 过程。这会从 P 中消去大小为 4 和 3 的部分，将 P 中大小为 6 的部分（唯一大于 4 的部分）缩短 2，并保持大小为 2 和 1 的部分（小于 3 的部分）不变。由此得到新的分拆 $P_1 = (4, 2^2, 1)$。接下来，我们对这个新分拆执行 Oblak 步骤。此时，唯一最大的 U-链对应于近矩形子分拆 $(2^2, 1)$。这条 U-链的基数为 $2(2) + 1(1) + 2(1) = 7$。从 $\mathcal{D}_{P_1}$ 中移除 U-链后，我们得到分拆 $P_2 =(2)$，其中最大的 U-链（即整个分拆）的基数为 2。因此，该过程产生分拆 (16, 7, 2)，这确实是与 P 对易的一般分拆。见图4。为求简便，我们没有标出有向边，而只是将每一步所选最大 U-链对应的顶点框出。值得注意的是，Oblak 过程每一步选取的 U-链不一定是原偏序集中的链。例如，在图4所示的例子中，P_1 的最大 U-链不是原偏序集 $\mathcal{D}_P$ 中的一条链。回想一下，在 P 的偏序集中，两个元素可比较，当且仅当它们对应的顶点在有向图 $\mathcal{D}_P$ 中之间存在一条有向路径。如图 1 所示，在 $P = (6, 4^2, 3^2, 2^2, 1)$ 的偏序集中，顶点 (2, 6, 1) 和 (1, 2, 1) 不可比较，但它们都属于该过程第二步中选取的最大 U-链 P_1 。

对于 P，还有另一种执行 Oblak 过程的方法。我们可以先从 $\mathcal{D}_P$ 中移除最大的 U-链 $U_P(3)$，然后按照图4所示继续这一过程。我们可以观察到，在这个例子中，我们最终到达了

在分拆 (16, 7, 2) 处，无论在 Oblak 过程中选择哪条最长的 U 链，结果都相同。

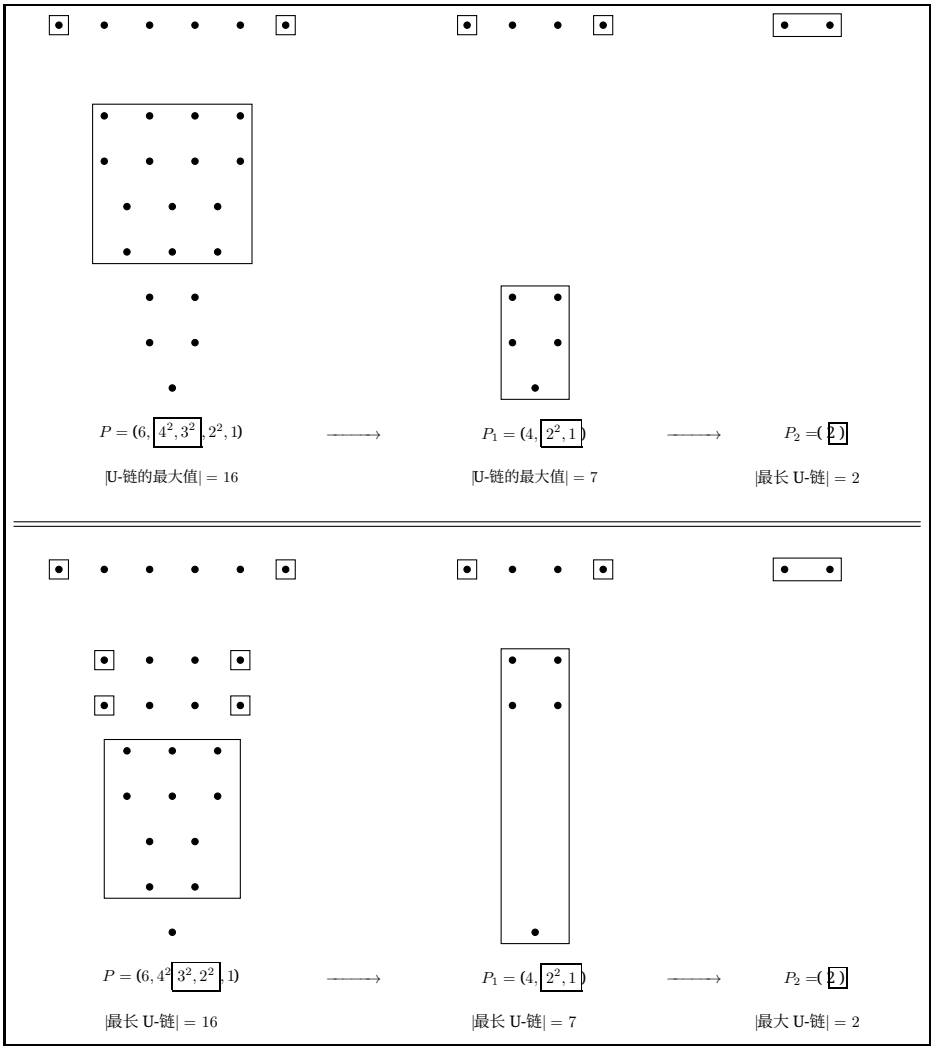


FIGURE 4. 以两种不同方式执行 Oblak递归过程，以求出分拆 $P = (6, 4^2, 3^2, 2^2, 1)$ 的一般交换约当型 $\mathcal{Q}(P) = (16, 7, 2)$

5. 具有相同一般交换分拆的分拆

在前几节中，我们概述了关于映射 $\mathcal{Q}$ 的研究结果。本节将回顾聚焦于逆映射 $\mathcal{Q}^{-1}$ 的研究。回想一下，根据

定理 3.3 和定理 3.4，分拆 Q 属于映射 $\mathcal{Q}$ 的像，当且仅当 Q 的各部分两两相差至少 2，也就是说，Q 是稳定的。固定一个稳定分拆 Q，$\mathcal{Q}^{-1}(Q)$ 是什么，也就是所有具有相同一般交换分拆 Q 的分拆所组成的集合?

在 [**19**], Oblak 猜想，若 $Q = (u, u-r)$，其中 $r \geq 2$ 且 $u - r \geq 1$，则 $\mathcal{Q}^{-1}(Q)$ 由 $(u-r)$ 个 $\times(r-1)$ 分拆组成。她证明了$2 \leq r \leq 5$情形下的猜想。在 [**11**], Iarrobino、Van Steirteghem、Zhao 和作者证明了这一猜想的一般情形。此外，我们证明了 $\mathcal{Q}^{-1}(Q)$ 中的分拆可以排列成一个 $(r-1)\times(u-r)$ 表格，使得表格中第 k 行、第 ℓ 列的分拆有 $k+\ell$ 个部分。在 [**11**], 我们还提出了以下一般猜想。

Conjecture 5.1.（盒子猜想）设 n 为正整数，$Q = (q_1, \ldots, q_k)$ 为 n 的一个分拆，满足对于 $q_i - q_{i+1} \geq 2$，对于 $1 \leq i < k$。令

$$s_i = \begin{cases} q_i - q_{i+1} - 1, & \text{if } 1 \leq i < k, \\ q_k, & \text{if } i = k. \end{cases}$$

那么，$\mathcal{Q}^{-1}(Q)$由$\prod_{1\leq i\leq k} s_i$ 个分拆组成。这些分拆可以排列在一个$s_1 \times \cdots \times s_k$“盒子” $\mathcal{B}(Q) = \{P_{i_1,\ldots,i_k} \mid 1 \leq i_j \leq s_j\}$中，使得$P_{i_1,\ldots,i_k}$ 有$\sum_{1\leq j\leq k} i_j$个部分。

在 [**11**], 中，对于每个满足 $s \leq 4$的稳定分拆 $Q = (u+s, u, u-r)$，该猜想都已得到证明，但一般情形仍是开放问题。

6. 开放问题

我们以提出几个相关的开放问题作为本综述的结尾，供未来研究探讨。

一个仍聚焦于一般交换分拆的研究方向，是着手解决盒子猜想（猜想 5.1），但该猜想目前在一般情形下仍未解决。鉴于命题的性质，采用归纳论证是合理的期待。事实上，[**11**] 针对情形 $k = 3$ 给出的部分结果，通过将相应的三维盒子“分解”为多个二维表格（薄片），解决了这个问题。

不过，映射 $\mathcal{Q}(P)$ 中的微妙之处——Oblak 的过程也体现了这些微妙之处——使得这种方法相当复杂，可能需要借助全新的工具。

另一个相关方向是，对于给定的 P，不再局限于一般交换分拆$\mathcal{Q}(P)$，而是研究所有与 P 交换的 Jordan 型。[**19**]，中给出了这方面的一些部分结果，Oblak 展示了如下结论。

- 分拆 $P \in \mathcal{P}(n)$ 与 $\mathcal{P}(n)$ 中的所有分拆交换，当且仅当$n \leq 3$，或者 $P = \left(2^k, 1^\ell\right)$，其中 $k, \ell \geq 0$。
- 假设 P 和 Q 都是恰有两部分的 n 的分拆。那么，P 与 Q 交换，当且仅当 $P = Q$ 或 n 为偶数，且 $P = \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$ 和 $Q = \left(\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} - 1\right)$。

鉴于一对交换的幂零矩阵构成一个阿廷代数，寻找交换分拆对的一种方法是研究高度为 2 的阿廷代数中乘法映射的 Jordan 型。需要注意的是，一般而言，由一对交换矩阵生成的代数并非分次的。

参考文献

[1] V. Baranovsky, *The variety of pairs of commuting nilpotent matrices is irreducible*, Trans- form. Groups 6 (2001)，第 1 期，3–8。[2] Roberta Basili, *On the irreducibility of commuting varieties of nilpotent matrices*, J. Algebra 268(2003)，第 1 期，58–80。[3] , *On the maximal nilpotent orbit that intersects the centralizer of a matrix*, Transform. Groups 27 (2022)，第 1 期，1–30。[4] Roberta Basili 和 Anthony Iarrobino, *Pairs of commuting nilpotent matrices, and Hilbertfunction*, J. Algebra 320 (2008)，第 3 期，1235–1254。[5] Roberta Basili、Anthony Iarrobino 和 莱拉·哈塔米, *Commuting nilpotent matrices andArtinian algebras*, J. Commut. Algebra 2 (2010)，第 3 期，295–325。[6] Thomas Britz 和 Sergey Fomin, *Finite posets and Ferrers shapes*, Adv. Math. 158 (2001)，第 1 期，86–127。[7] Emden R. Gansner, *Acyclic digraphs, Young tableaux and nilpotent matrices*, SIAM J. Al- gebraic Discrete Methods 2 (1981)，第 4 期，429–440。

[8] Robert M. Guralnick 和 B. A. Sethuraman,
Commuting pairs and triples of matrices andrelated varieties, Linear Algebra Appl. 310 (2000), 第 1–3 期, 139–148。[9] WilliamJ. Haboush 和 Donghoon Hyeon,
Conjugacy classes of commuting nilpotents, Trans. Amer. Math. Soc. 372 (2019), 第 6 期, 4293–4311。[10] Anthony Iarrobino 和 莱拉·哈塔米,
Bound on the Jordan type of a generic nilpotentmatrix commuting with a given matrix, J. Algebraic Combin. 38 (2013), 第 4 期, 947–972。[11] Anthony Iarrobino、莱拉·哈塔米、Bart Van Steirteghem 和 Rui Zhao, *Nilpotent matrices
having a given Jordan type as maximum commuting nilpotent orbit*, Linear Algebra Appl. 546 (2018), 210–260。[12] 莱拉·哈塔米,
The poset of the nilpotent commutator of a nilpotent matrix, Linear Algebra Appl. 439 (2013), 第 12 期, 3763–3776。[13] ,
The smallest part of the generic partition of the nilpotent commutator of a nilpotentmatrix, J. Pure Appl. Algebra 218 (2014), 第 8 期, 1496–1516。[14]Tomaˇz Koˇsir 和 Polona Oblak,
On pairs of commuting nilpotent matrices, Transform. Groups 14 (2009), 第 1 期, 175–182。[15] George McNinch, *On the centralizer of the sum of commuting nilpotent elements*, J. Pure Appl. Algebra 206 (2006), 第 1–2 期, 123–140。[16] Michael G. Neubauer 和 B. A. Sethuraman, *Commuting pairs in the centralizers of* 2*-regularmatrices*, J. Algebra 214 (1999), 第 1 期, 174–181。[17] Nham V. Ngo 和 Klemen ˇSivic,
On varieties of commuting nilpotent matrices, Linear Al- gebra Appl. 452 (2014), 237–262。[18] Polona Oblak, *The upper bound for the index of nilpotency for a matrix commuting with a given nilpotent matrix*, Linear Multilinear Algebra 56 (2008), 第 6 期, 701–711。[19] ,
On the nilpotent commutator of a nilpotent matrix, Linear Multilinear Algebra 60 (2012), 第 5 期, 599–612。[20] Dmitri I. Panyushev, *Two results on centralisers of nilpotent elements*, J. Pure Appl. Algebra 212 (2008), 第 4 期, 774–779。[21] Alexander Premet,
Nilpotent commuting varieties of reductive Lie algebras, Invent. Math. 154 (2003), 第 3 期, 653–683。[22] B. A. Sethuraman 和 Klemen ˇSivic,
Jet schemes of the commuting matrix pairs scheme, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), 第 12 期, 3953–3967。[23] Klemen ˇSivic, *On varieties of commuting triples*, Linear Algebra Appl. 428 (2008), 第 8–9 期, 2006–2029。

[24] , *On varieties of commuting triples III*, Linear Algebra Appl. 437 (2012), 第 2 期，393–460。
[25] Klemen ˇSivic, *On varieties of commuting triples II*, Linear Algebra Appl. 437(2012), 第 2 期，461–489。

Department of mathematics, Union College, Schenectady, NY 12308, USA
Email address: khatamil@union.edu